§ 6. ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ

6.1. Монотонність функції

Теорема 1 *(достатні умови строгої монотонності). Якщо функція* $f(x)$ *диференційовна на інтервалі* $(a;\ b)$ і $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) *всюди, крім, можливо, скінченного числа точок, в яких* $f'(x) = 0$ *на* $(a;\ b)$, *то функція* $f(x)$ *зростає* (спадає) на $(a;\ b)$.

○ Нехай для визначеності $f'(x) > 0$ і x_1 та x_2 — дві довільні точки з $(a;\ b)$, причому $x_1 < x_2$. Тоді на відрізку $[x_1;\ x_2]$ виконуються всі умови теореми Лагранжа, тому

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1), \quad c \in (x_1;\ x_2).$$

За умовою $f'(c) > 0$, $x_2 - x_1 > 0$, тому $f(x_2) - f(x_1) > 0$ або $f(x_2) > f(x_1)$, тобто функція $f(x)$ на інтервалі $(a;\ b)$ зростає.

Аналогічно доводиться теорема, якщо $f'(x) < 0$. ●

Зауваження. Таким самим способом можна довести, що коли $f'(x) \geqslant 0$ ($f'(x) \leqslant 0$) на інтервалі $(a;\ b)$, то функція на цьому інтервалі не спадає (не зростає).

Теорема 2 *(необхідна умова зростання). Якщо диференційовна на інтервалі* $(a;\ b)$ *функція зростає, то* $f'(x) \geqslant 0$ *на* $(a;\ b)$.

○ Дійсно, нерівність $f'(x) < 0$ неможлива — це суперечило б теоремі 1. Отже, $\forall x \in (a;\ b) : f'(x) \geqslant 0$. ●

Наприклад, функція $y = x^3$ зростає на $(-\infty;\ +\infty)$ і має похідну $y' = 3x^2 > 0$, якщо $x \neq 0$, і рівну нулю при $x = 0$.

З цього випливає, що інтервали монотонності можуть відділятися один від одного або точками, де похідна дорівнює нулю (їх називають *стаціонарними точками*), або точками, де похідна не існує. Точки, в яких похідна дорівнює нулю або не існує, називаються *критичними точками*, або *критичними точками першого роду*.

Не кожна критична точка відділяє інтервали монотонності. Теорема 2 має такий геометричний зміст. Якщо на інтервалі $(a;\ b)$ функція $f(x)$ зростає, то дотична до кривої $y = f(x)$ у кожній точці $x \in (a;\ b)$ утворює з додатним напрямом осі Ox гострий кут φ або (в окремих точках) горизонтальна; тангенс цього кута невід'ємний: $f'(x) = \operatorname{tg}\varphi \geqslant 0$ (рис. 5.26). Якщо на інтервалі $(a;\ b)$ функція $f(x)$ спадає, то кут нахилу дотичної тупий, або (в окремих точках) дотична горизонтальна; тангенс цього кута недодатний: $\operatorname{tg}\varphi = f'(x) \leqslant 0$ (рис. 5.27).

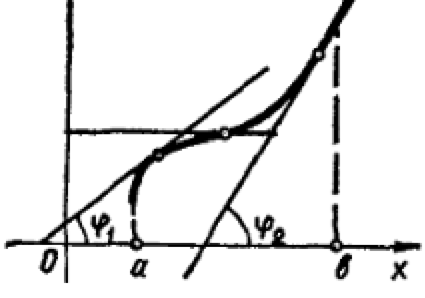


Рис. 5.26

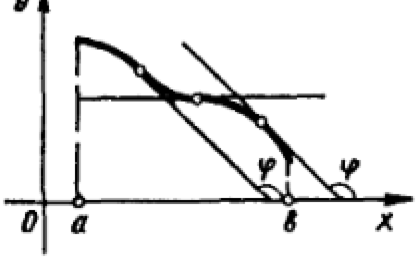


Рис. 5.27

Отже, щоб знайти інтервали монотонності функції $f(x)$, треба:

1) знайти область визначення функції; 2) знайти похідну даної функції; 3) знайти критичні точки з рівняння $f'(x) = 0$ та з умови, що $f'(x)$ не існує; 4) розділити критичними точками область визначення на інтервали і у кожному з них визначити знак похідної. На інтервалах, де похідна додатна, функція зростає, а де від'ємна — спадає.

Приклади

1. Знайти інтервали монотонності функцій:

а) $y = \operatorname{arctg} x$

○ а) Областю визначення заданої функції є нескінченний інтервал $(-\infty; +\infty)$. Похідна $y' = \frac{1}{1+x^2} \neq 0$ також існує на всій числовій осі, тому критичних точок дана функція не має. Оскільки $\forall x \in (-\infty; +\infty) : y'(x) > 0$, то функція зростає на всій області визначення.

б) $y = x \ln x + 3x$

б) Ця функція визначена на інтервалі $(0; +\infty)$. Знаходимо похідну: $y' = \ln x + 4$; знаходимо критичні точки: $\ln x + 4 = 0 \Rightarrow x = e^{-4}$. Інших критичних точок функція не має, бо похідна існує на всій області визначення.

Розбиваємо область визначення точкою $x = e^{-4}$ на інтервали і встановлюємо знак похідної на кожному з них.

Для цього досить визначити знак похідної в одній довільній внутрішній точці кожного інтервалу. Маємо

$$\forall x \in (0;\ e^{-4}) : y'(x) < 0,$$

отже, при $x \in (0; e^{-4})$ функція спадає;

$$\forall x \in (e^{-4};\ +\infty) : y'(x) > 0,$$

отже, при $x \in (e^{-4}; +\infty)$ функція зростає.

в) $y = (2x+1)\sqrt[3]{(x-2)^2}$

6.2. Локальний екстремум функції

Точка x_0 називається *точкою локального максимуму (або мінімуму)* функції $f(x)$, якщо існує такий окіл $0 < |x - x_0| < \delta$ точки x_0, який належить області визначення функції, і для всіх x з цього околу виконується нерівність $f(x) < f(x_0)$ (або $f(x) > f(x_0)$). Геометричний зміст означення зрозумілий з рис. 5.28.

Точки локального (від латинського lokalis — місцевий) максимуму і локального мінімуму називаються *точками локального екстремуму*, а значення функції в цих точках називаються відповідно *локальним максимумом* і *локальним мінімумом* або *локальним екстремумом*.

З означення випливає, що поняття екстремуму носить локальний характер в тому розумінні, що нерівність $f(x) < f(x_0)$ (або $f(x) > f(x_0)$) може і не виконуватись для всіх значень x з області визначення функції, але повинна виконуватись лише в деякому околі точки x_0. Отже, не слід плутати локальний максимум з найбільшим значенням функції (гл. 4, п. 5.3) якого вона може набувати в області визначення (його називають також *абсолютним максимумом*). Локальних максимумів функція може мати кілька, абсолютний максимум може бути тільки один. Це саме стосується локального і абсолютного мінімумів. Може статись, що окремий локальний мінімум більший від деякого локального максимуму, тоді як абсолютний мінімум не перевищує абсолютного максимуму M (рис. 5.29). Нарешті, локальних екстремумів функція може досягати тільки у внутрішніх точках відрізка, тоді як абсолютні екстремуми можуть знаходитись і в крайніх його точках.

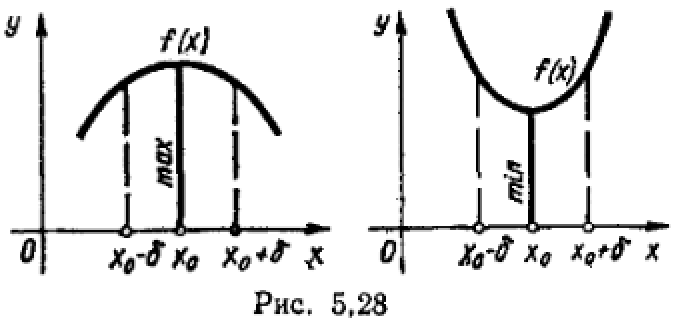


Рис. 5.28

Теорема 1 *(необхідна умова локального екстремуму). Якщо функція $f(x)$ має в точці x_0 локальний екстремум і диференційовна в цій точці, то $f'(x_0) = 0$.*

○ Оскільки за умовою x_0 — точка локального екстремуму, то існує інтервал $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$, в якому значення $f(x_0)$ найбільше або найменше. Тоді за теоремою Ферма $f'(x_0) = 0$. ●

Теорема 1 має такий геометричний зміст (рис. 5.29). Якщо точки x_1, x_2, x_3, x_4 — точки локального екстремуму і у відповідних точках графіка існують невертикальні дотичні, то ці дотичні паралельні осі Ox.

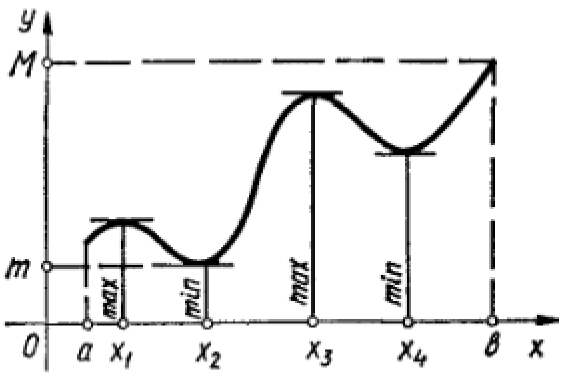


Рис. 5.29

Умова $f'(x_0) = 0$ є необхідною але не достатньою для того, щоб диференційовна в точці x_0 функція мала локальний екстремум.

Це означає, що не всяка точка x_0, в якій $f'(x_0) = 0$, є екстремальною точкою. Наприклад, функція $y = x^3$ має похідну $y = 3x^2$, що дорівнює нулю в точці $x = 0$, але не має в цій точці екстремуму.

Досі розглядались функції, які в точках екстремуму мають похідну. Проте існують функції, які в точках екстремуму не мають похідної. Наприклад, функція $y = |x|$ має в точці $x = 0$ мінімум, але не має в цій точці похідної. Це зовсім не означає, що кожна точка, в якій функція не має похідної, обов'язково є точкою екстремуму. Наприклад, функція $y = \sqrt[3]{x}$ недиференційовна в точці $x = 0$ і не має в цій точці екстремуму.

Таким чином, повну необхідну умову локального екстремуму можна сформулювати так: *якщо функція має в точці локальний екстремум, то ця точка є критичною.* Обернене твердження невірне: не всяка критична точка функції є її екстремальною точкою.

Іншими словами, точки локального екстремуму можуть бути поперше, серед точок, в яких $f'(x) = 0$, і, по-друге, серед точок, в яких $f'(x)$ не існує.

У зв'язку з цим критичні точки іноді називають точками *можливого екстремуму*.

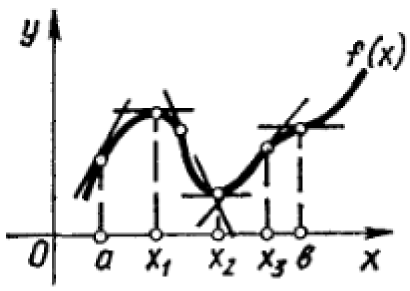
Теорема 2 (*перша достатня умова локального екстремуму*). *Нехай x_0 — критична точка функції $f(x)$, яка в цій точці неперервна, і нехай існує окіл $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$ точки x_0, в якому функція має похідну $f'(x)$ крім, можливо, точки x_0, тоді:*

1) якщо в інтервалі $(x_0 - \delta;\ x_0)$ похідна $f'(x) > 0$, а в інтервалі $(x_0;\ x_0 + \delta)$ похідна $f'(x) < 0$, то x_0 є точкою локального максимуму функції $f(x)$;

2) якщо в інтервалі $(x_0 - \delta;\ x_0)$ похідна $f'(x) < 0$, а в інтервалі $(x_0;\ x_0 + \delta)$ похідна $f'(x) > 0$, то x_0 є точкою локального мінімуму функції $f(x)$;

3) якщо в обох інтервалах $(x_0 - \delta;\ x_0)$ і $(x_0;\ x_0 + \delta)$ похідна $f'(x)$ має той самий знак, то x_0 не є екстремальною точкою функції $f(x)$.

Можна ще сказати так: якщо при переході зліва направо через критичну точку x_0 знак похідної $f'(x)$ змінюється з плюса на мінус, то x_0 — точка локального максимуму; якщо знак похідної $f'(x)$ змінюється з мінуса на плюс, то x_0 — точка локального мінімуму; якщо похідна не змінює знак, то в точці x_0 екстремум відсутній.



○ Нехай для деякого $\delta > 0$ виконуються умови: $\forall x \in (x_0 - \delta;\ x_0) : f'(x) > 0$; $\forall x \in (x_0;\ x_0 + \delta) : f'(x) < 0$.
Тоді на інтервалі $(x_0 - \delta;\ x_0)$ функція $f(x)$ зростає і $f(x) < f(x_0)$ для всіх x з цього інтервалу, а на інтервалі $(x_0;\ x_0 - \delta)$ функція $f(x)$ спадає і $f(x) < f(x_0)$ для всіх x з цього інтервалу.

Отже, існує окіл $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$ точки x_0 такий, що $\forall x \in (x_0 - \delta;\ x_0 - \delta) \setminus \{x_0\} : f(x) < f(x_0)$, а це й означає, що x_0 — точка локального максимуму функції.

Випадки 1) і 3) доводяться аналогічно. ●

З теорем 1 і 2 випливає таке правило дослідження функції на екстремум: щоб знайти локальні екстремуми функції $f(x)$, треба:

1) знайти критичні точки функції $f(x)$. Для цього слід розв'язати рівняння $f'(x) = 0$ і серед його розв'язків вибрати тільки ті дійсні корені, які є внутрішніми точками області існування функції; знайти точки, в яких похідна $f'(x)$ не існує;

2) якщо критичних точок функція не має, то вона не має і екстремумів. Якщо критичні точки є, то треба дослідити знак похідної в кожному з інтервалів, на які розбивається область існування цими критичними точками. Для цього достатньо визначити знак похідної в якій-небудь одній точці інтервалу, оскільки похідна може змінити знак лише при переході через критичну точку;

3) за зміною знака $f'(x)$ при переході через критичні точки зліва направо визначити точки максимумів та мінімумів і обчислити значення функції $f(x)$ в цих точках. Результати дослідження доцільно звести в таблицю.

Приклад

Знайти локальні екстремуми функції $f(x) = \sqrt[3]{x^2}\, e^x$.

○ Область визначення $(-\infty;\ +\infty)$. Знаходимо похідну $f'(x) = \dfrac{2 + 3x}{3\sqrt[3]{x}}\, e^x$.

Похідна $f'(x)$ дорівнює нулю при $x = -\dfrac{2}{3}$ і не існує при $x = 0$. Отже $x_1 = -\dfrac{2}{3}$, $x_2 = 0$ — критичні точки даної функції. Складаємо таблицю (символами $\nearrow$ та $\searrow$ умовно позначається відповідно зростання і спадання функції на інтервалі).

При цьому скористаємось тим, що

$$f'(-1) > 0,\ f'\left(-\frac{1}{3}\right) < 0,\ f'(1) > 0,\ f\left(-\frac{2}{3}\right) = \sqrt[3]{\frac{4}{9e}} \approx 0{,}4,\ f(0) = 0.$$

Таблиця

x	$\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)$	$-\frac{2}{3}$	$\left(-\frac{2}{3}; 0\right)$	0	$(0; +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	∞	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\approx 0{,}4$ max	$\searrow$	0 min	$\nearrow$

Отже, $x_1 = -\dfrac{2}{3}$ — точка локального максимуму, $y_{\max} \approx 0{,}4$; $x_2 = 0$ — точка локального мінімуму, $y_{\min} = 0$. ●

Теорема 3 *(друга достатня умова локального екстремуму). Нехай x_0 — стаціонарна точка функції $f(x)$, тобто $f'(x_0) = 0$, і в околі точки x_0 існує друга неперервна похідна, причому $f''(x_0) \neq 0$. Якщо $f''(x_0) > 0$, то x_0 — точка локального мінімуму; якщо $f''(x_0) < 0$, то x_0 — точка локального максимуму.*

Приклад
Знайти локальні екстремуми функції

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x - 3.$$

○ Область визначення $(-\infty; +\infty)$. Похідна $f'(x) = x^2 - 3x + 2$. Розв'язуємо рівняння $f'(x) = 0$:

$$x^2 - 3x + 2 = 0, \ x_1 = 1, \ x_2 = 2.$$

Звідси дістаємо стаціонарні точки: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. Точок, в яких похідна $f'(x)$ не існує, немає. Отже, стаціонарні точки є єдиними критичними точками даної функції, тому можна знайти екстремуми за другою достатньою умовою: оскільки $f''(x) = 2x - 3$ і $f''(1) < 0$, то $x_1 = 1$ — точка локального максимуму, $y_{\max} = f(1) = -\frac{13}{6}$; $f''(2) > 0$, тому x_2 — точка локального мінімуму, $y_{\min} = f(2) = -\frac{7}{3}$. ●

Як бачимо, дослідження функції на екстремум за другою достатньою умовою простіше, ніж за першою. Однак ця умова застосовна до вужчого класу функцій. Її не можна використати для дослідження тих критичних точок, в яких перша похідна не існує, а також до тих стаціонарних точок, в яких друга похідна дорівнює нулю.

6.3. Найбільше і найменше значення функції

Розглянемо спочатку випадок, коли функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$. Як відомо (гл. 4, п. 5.3), така функція досягає своїх найбільшого і найменшого значень, які називають також абсолютними екстремумами функції на цьому відрізку і позначають відповідно $M = \max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} f(x)$, $m = \min\limits_{a \leqslant x \leqslant b} f(x)$.

Зрозуміло, що для точки x_0, де функція досягає найбільшого значення, може бути лише три можливості:
а) $x_0 = a$, б) $x_0 \in (a; в)$, в) $x_0 = b$. Якщо $x_0 \in (a; b)$, то точку x_0 потрібно шукати серед критичних точок даної функції. Те саме можна сказати і про точку, в якій функція набуває найменшого значення.

Отже, щоб знайти найбільше (найменше) значення функції $f(x)$, яка неперервна на відрізку $[a; b]$, треба:

1) знайти критичні точки функції $f(x)$, які належать інтервалу $(a; b)$;

2) обчислити значення функції $f(x)$ у знайдених критичних точках і точках a та b і серед цих значень вибрати найбільше (найменше).

Нехай тепер функція $f(x)$ неперервна в інтервалі $(a; b)$. Така функція може й не мати абсолютних екстремумів. Про наявність їх судять з поводження даної функції на кінцях інтервалу (обчислюючи $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to b-0} f(x)$) та значення $f(x)$ в критичних точках, які належать інтервалу $(a; b)$.

При розв'язуванні практичних задач буває наперед відомо, що функція має лише абсолютний максимум або лише абсолютний мінімум, який досягається у внутрішній точці відрізка $[a;\ b]$. Тоді задача зводиться до знаходження критичних точок, які належать $(a;\ b)$. Якщо виявиться, що така точка єдина, то вона й буде точкою абсолютного екстремуму.

Приклади

1. Знайти найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^4 - 8x^2$ на відрізку $[-1;\ 3]$.

○ Знаходимо критичні точки заданої функції. Маємо $f'(x) = 4x^3 - 16x$, $4x^3 - 16x = 0 \Rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 0,\ x_3 = 2.$

Відрізку $[-1, 3]$ належать точки $x_2 = 0$ та $x_3 = 2$. Обчислюємо значення функцій в цих точках і на кінцях відрізка:

$$f(-1) = -7,\ f(0) = 0;\quad f(2) = -16,\ f(3) = 9.$$

Отже,

$$M = \max_{-1\leqslant x\leqslant 3} f(x) = 9,\quad m = \min_{-1\leqslant x\leqslant 3} f(x) = -16. \ ●$$

3. З круглої колоди діаметра d треба вирізати стояк, який має прямокутний переріз і може сприймати найбільше навантаження. Якими повинні бути розміри стояка?

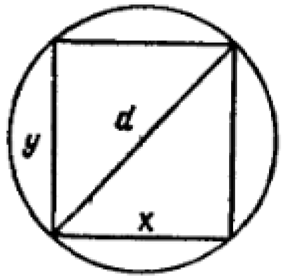


Рис. 5.32

○ Оскільки стояк є елементом конструкції, що працює на стиск, то він сприйматиме найбільшу нагрузку тоді, коли площа його поперечного перерізу буде найбільшою. Таким чином, задача зводиться до визначення прямокутника найбільшої площі, який можна вписати в круг діаметра d (рис. 5.32). Нехай x і y — сторони шуканого прямокутника, тоді $y = \sqrt{d^2 - x^2}$, тому площа прямокутника $S = S(x) = x\sqrt{d^2 - x^2}$, $0 < x < d$. Далі маємо

$$S'(x) = \frac{d^2 - 2x^2}{(d^2 - x^2)^{1/2}};\quad S''(x) = \frac{x(2x^2 - 3d^2)}{(d^2 - x^2)^{3/2}};$$

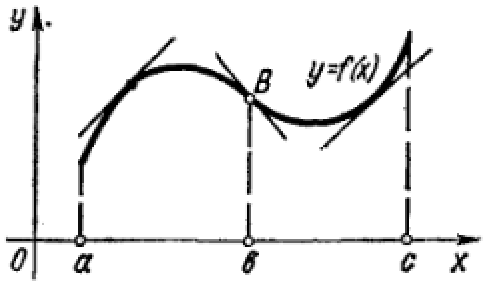
$S'(x) = 0$ при $x = \pm\dfrac{d}{\sqrt{2}}$ і не існує при $x = \pm d$.

Оскільки функція $S(x)$ визначена на інтервалі $(0; d)$, то вона має єдину критичну точку $x = \dfrac{d}{\sqrt{2}}$. У цій точці $S(x)$ досягає максимуму, тому що $S''\left(\dfrac{d}{\sqrt{2}}\right) < 0$. При цьому $y = \dfrac{d}{\sqrt{2}}$, $S_{\max} = \dfrac{d^2}{2}$. Отже, найбільше навантаження сприймає квадратний стояк із стороною перерізу, рівною $d/\sqrt{2}$. ●

6.4. Опуклість і вгнутість кривих. Точки перегину

Крива $y = f(x)$ називається *опуклою* на інтервалі, якщо всі її точки, крім точки дотику, лежать нижче довільної її дотичної на цьому інтервалі.

Крива $y = f(x)$ називається *вгнутою* на інтервалі, якщо всі її точки, крім точки дотику, лежать вище довільної її дотичної на цьому інтервалі.



Точкою перегину називається така точка кривої, яка відділяє її опуклу частину від вгнутої.

На рис. 5.39 крива $y = f(x)$ опукла на інтервалі $(a;\ b)$, вгнута на інтервалі $(b;\ c)$ і точка $B\ (b;\ f(b))$ — точка перегину.

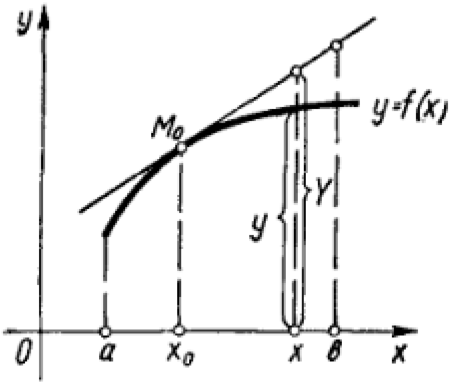


Рис. 5.40

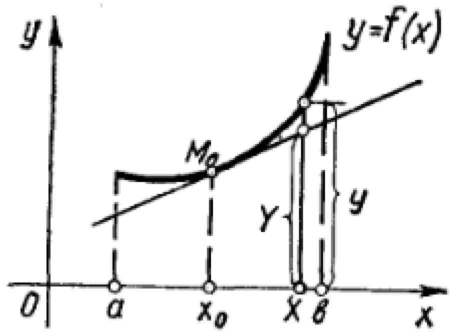


Рис. 5.41

Позначимо довільну ординату кривої через y, а дотичної — через Y. Нехай $M\ (x_0;\ y_0)$ — точка дотику, $x_0 \in (a;\ b)$. Тоді означення опуклості і вгнутості можна записати так: крива $y = f(x)$ опукла (рис. 5.40) на $(a;\ b)$, якщо

$$\forall\, x \in (a;\ b), \quad x \neq x_0 : y - Y < 0;$$

крива $y = f(x)$ вгнута (рис. 5.41) на $(a;\ b)$, якщо

$$\forall\, x \in (a;\ b), \quad x \neq x_0 : y - Y > 0.$$

Інтервали опуклості і вгнутості знаходять за допомогою такої теореми.

Теорема 1. *Нехай функція $y = f(x)$ є двічі диференційовною на $(a;\ b)$, тоді:*

1) *якщо $f''(x) < 0$, $x \in (a;\ b)$, то крива $y = f(x)$ опукла на $(a;\ b)$;*
2) *якщо $f''(x) > 0$, $x \in (a;\ b)$, то крива $y = f(x)$ вгнута на $(a;\ b)$;*

○ З формули Тейлора і рівняння дотичної маємо

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(c)(x - x_0)^2}{2},$$

$$Y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

де точка c лежить між x і x_0. Віднімаючи почленно ці рівності, дістанемо $y - Y = \frac{f''(c)\ (x - x_0)^2}{2}$.

Нехай $\forall x \in (a;\ b) : f''(x) < 0$. Тоді $\forall x \in (a;\ b)$, $x \neq x_0$: $y - Y < 0$, а це й означає, що крива $y = f(x)$ на $(a;\ b)$ опукла.

Аналогічно доводиться теорема для випадку $f''(x) > 0$. ●

З теореми 1 випливає, що в точці перегину друга похідна дорівнює нулю (якщо вона існує). Однак точками перегину кривої $y = f(x)$ можуть бути також і точки, в яких друга похідна $f''(x)$ не існує (наприклад, точка $x = 0$ кривої $f(x) = \sqrt[3]{x}$).

Точки, в яких друга похідна $f''(x)$ дорівнює нулю або не існує, називаються *критичними точками другого роду* функції $f(x)$. Отже, якщо x_0 — абсциса точки перегину функції $f(x)$, то x_0 є критичною точкою другого роду цієї функції. Обернене твердження неправильне.

Встановимо достатні умови існування точки перегину.

Теорема 2. *Нехай x_0 — критична точка другого роду функції $f(x)$. Якщо при переході через точку x_0 похідна $f''(x)$ змінює знак, то точка $(x_0;\ f(x_0))$ є точкою перегину кривої $f(x)$.*

○ Нехай, наприклад, існує δ-окіл точки x_0 такий, що

$$\forall x \in (x_0 - \delta;\ x_0) : f''(x) < 0;$$

$$\forall x \in (x_0;\ x_0 + \delta) : f''(x) > 0.$$

Тоді за теоремою 1 крива $y = f(x)$ опукла на інтервалі $(x_0 - \delta;\ x_0)$ і вгнута на інтервалі $(x_0;\ x_0 + \delta)$, тобто точка $(x_0;\ f(x_0))$ — точка перегину.

Якщо похідна $f''(x)$ не змінює знак в δ-околі точки x_0, то крива буде в цьому околі або опуклою (при $f''(x) < 0$), або вгнутою (при $f''(x) > 0$). ●

Приклади

1. Знайти інтервали опуклості і вгнутості та точки перегину кривих:

а) $f(x) = x^5 - x + 2$; б) $f(x) = 2 + (x - 5)^{5/3}$.

○ а) Область визначення $(-\infty; +\infty)$. Оскільки $f''(x) = 20x^3 = 0$ при $x = 0$, то точка $x = 0$ є критичною точкою другого роду. Інших критичних точок ця функція не має, бо $f''(x)$ існує на всій числовій осі.

Розбиваємо область визначення критичною точкою на інтервали і досліджуємо зміну знака другої похідної: якщо $x \in (-\infty; 0)$, то $f''(x) < 0$ — крива опукла: якщо $x \in (0; +\infty)$, то $f''(x) > 0$ — крива вгнута. Точка $(0; 2)$ — точка перегину кривої.

б) Область визначення $(-\infty; +\infty)$. Оскільки

$$f''(x) = \frac{10}{9\sqrt[3]{x-5}} \neq 0$$

і не існує при $x = 5$, то єдиною критичною точкою другого роду є точка $x = 5$. Маємо

$$\forall x \in (-\infty; 5): f''(x) < 0; \quad \forall x \in (5; +\infty): f''(x) > 0.$$

Тому крива опукла на інтервалі $(-\infty; 5)$ і вгнута на інтервалі $(5; +\infty)$; точка $(5; 2)$ — точка перегину. ●