Лабораторна робота 8

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Мета: ознайомитись із задачами квадратичного програмування (КП), засвоїти метод розв'язання задач КП.

8.1 Порядок виконання роботи

У задачах квадратичного програмування цільова функція є квадратичною, а функції-обмеження – лінійними.

Розглянемо таку задачу квадратичного програмування:

$$F(x_1, x_2) = -x_1 - 2x_2 + x_2^2 \to min$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 16 \\ x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Вводимо 2 (два) множники Лагранжа – λ_1 і λ_2, за кількістю умов-обмежень у задачі.

Складаємо функцію Лагранжа, яка являє собою суму вихідної цільової функції та суми добутків множників Лагранжа та відповідних умов-обмежень:

$$L(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) = -x_1 - 2x_2 + x_2^2 + \lambda_1(3x_1 + 2x_2 - 16) + \lambda_2(x_1 + 2x_2 - 4).$$

Складаємо систему нерівностей і рівнянь – умов оптимальності розв'язку задачі з похідними по змінним x_j $(j = 1,2)$ і множникам λ_i $(i = 1,2)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = -1 + 3\lambda_1 - \lambda_2 \geq 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = -2 + 2x_2 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 \geq 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 3x_1 + 2x_2 - 16 \leq 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = x_1 + 2x_2 - 4 \leq 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_1} \cdot x_1 = 0; \frac{\partial L}{\partial x_2} \cdot x_2 = 0; \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} \cdot \lambda_1 = 0; \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} \cdot \lambda_2 = 0. \end{cases}$$

Обертаємо нерівності в рівності шляхом введення вільних змінних – v_1, v_2, w_1, w_2:

$$\begin{cases} -1 + 3\lambda_1 - \lambda_2 - \upsilon_1 = 0 \\ -2 + 2x_2 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 - \upsilon_2 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 16 + w_1 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 4 + w_2 = 0 \\ \upsilon_1 \cdot x_1 = 0;\ \upsilon_2 \cdot x_2 = 0;\ w_1 \cdot \lambda_1 = 0;\ w_2 \cdot \lambda_2 = 0. \end{cases}$$

Для знаходження початкового допустимого базисного розв'язку задачі вводимо штучні змінні – y_1 та y_2:

$$\begin{cases} 3\lambda_1 + \lambda_2 - \upsilon_1 + y_1 = 1 \\ 2x_2 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 - \upsilon_2 + y_2 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + w_1 = 16 \\ x_1 + 2x_2 + w_2 = 4 \\ \upsilon_1 \cdot x_1 = 0;\ \upsilon_2 \cdot x_2 = 0;\ w_1 \cdot \lambda_1 = 0;\ w_2 \cdot \lambda_2 = 0. \end{cases}$$

Тоді маємо такий початковий допустимий базисний розв'язок задачі:

$x_1 = 0, x_2 = 0, \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \upsilon_1 = 0, \upsilon_2 = 0, y_1 = 1, y_2 = 2, w_1 = 16, w_2 = 4.$

Формуємо псевдо-цільову функцію: $-My_1 - My_2 \rightarrow max.$

Заповнюємо вихідну симплекс-таблицю (табл. 8.1).

Таблиця 8.1

	C	-	0	0	0	0	0	0	0	0	$-M$	$-M$
	B	A_0	A_{x_1}	A_{x_2}	A_{λ_1}	A_{λ_2}	A_{υ_1}	A_{υ_2}	A_{w_1}	A_{w_2}	A_{y_1}	A_{y_2}
← $-M$	y_1	1	0	0	**3**	1	-1	0	0	0	1	0
$-M$	y_2	2	0	2	2	2	0	-1	0	0	0	1
0	w_1	16	3	2	0	0	0	0	1	0	0	0
0	w_2	4	1	2	0	0	0	0	0	1	0	0
	Δ	$-3M$	0	$-2M$	$-5M$	$-3M$	M	M	0	0	0	0

Визначивши напрямний стовпець (A_{λ_1}), напрямний рядок (y_1) та напрямний елемент (3), розраховуємо елементи та заповнюємо другу симплекс-таблицю (табл. 8.2΄– 8.2).

Таблиця 8.2′

Розрахунок елементів другої симплекс-таблиці

	C	-	0	0	0	0	0	0	0	0	$-M$
	B	A_0	A_{x_1}	A_{x_2}	A_{λ_1}	A_{λ_2}	A_{v_1}	A_{v_2}	A_{w_1}	A_{w_2}	A_{y_2}
0	λ_1	$1:3$	$0:3$	$0:3$	$3:3$	$1:3$	$-1:3$	$0:3$	$0:3$	$0:3$	$0:3$
$-M$	y_2	$2-(1\cdot 2):3$	0	2	0	$2-(1\cdot 2):3$	$0-(-1\cdot 2):3$	-1	0	0	1
0	w_1	1	3	2	0	0	0	0	1	0	0
0	w_2	4	1	2	0	0	0	0	0	1	0
	Δ										

Таблиця 8.2

Друга симплекс-таблиця

	C	-	0	0	0	0	0	0	0	0	$-M$
	B	A_0	A_{x_1}	A_{x_2}	A_{λ_1}	A_{λ_2}	A_{v_1}	A_{v_2}	A_{w_1}	A_{w_2}	A_{y_2}
0	λ_1	$\frac{1}{3}$	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	0
$\leftarrow -M$	y_2	$\frac{4}{3}$	0	**2**	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	-1	0	0	1
0	w_1	1	3	2	0	0	0	0	1	0	0
0	w_2	4	1	2	0	0	0	0	0	1	0
	Δ	$-\frac{4}{3}M$	0	$-2M$	0	$-\frac{4}{3}M$	$-\frac{2}{3}M$	M	0	0	0

Визначивши напрямний стовпець (A_{x_2}), напрямний рядок (y_2) та напрямний елемент (2), розраховуємо елементи та заповнюємо третю симплекс-таблицю (табл. 8.3′– 8.3)

Таблиця 8.3´

Розрахунок елементів третьої симплекс-таблиці

	C	-	0	0	0	0	0	0	0	0
	B	A_0	A_{x_1}	A_{x_2}	A_{λ_1}	A_{λ_2}	A_{v_1}	A_{v_2}	A_{w_1}	A_{w_2}
0	λ_1	$\frac{1}{3}$	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	0
0	x_2	$\frac{4}{3}:2$	$0:2$	$2:2$	$0:2$	$\frac{4}{3}:2$	$\frac{2}{3}:2$	$-1:2$	$0:2$	$0:2$
0	w_1	$16-\frac{\frac{4}{3}\cdot 2}{2}$	3	0	0	$0-\frac{\frac{4}{3}\cdot 2}{2}$	$0-\frac{\frac{2}{3}\cdot 2}{2}$	$0-\frac{-1\cdot 2}{2}$	1	0
0	w_2	$4-\frac{\frac{4}{3}\cdot 2}{2}$	1	0	0	$0-\frac{\frac{4}{3}\cdot 2}{2}$	$0-\frac{\frac{4}{3}\cdot 2}{2}$	$0-\frac{-1\cdot 2}{2}$	0	1
	Δ									

Таблиця 8.3

Третя симплекс-таблиця

	C	-	0	0	0	0	0	0	0	0
	B	A_0	A_{x_1}	A_{x_2}	A_{λ_1}	A_{λ_2}	A_{v_1}	A_{v_2}	A_{w_1}	A_{w_2}
← 0	λ_1	$\frac{1}{3}$	0	0	1	$\mathbf{\frac{1}{3}}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	0
0	x_2	$\frac{2}{3}$	0	1	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	0	0
0	w_1	$\frac{44}{3}$	3	0	0	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	1	0
0	w_2	$\frac{8}{3}$	1	0	0	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	0	1
	Δ	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Перевіряємо виконання умов доповняльної нежорсткості.

Оскільки не виконується одна з умов доповняльної нежорсткості, а саме $w_1 \cdot \lambda_1 \neq 0$, то здійснимо ще одну ітерацію симплекс-методу – штучну. В якості напрямного рядка оберемо λ_1, напрямного стовпця A_{λ_2}, напрямний елемент при цьому дорівнює $\frac{1}{3}$.

Розрахуємо елементи та заповнимо четверту симплекс-таблицю (табл. 8.4).

Таблиця 8.4

Четверта симплекс-таблиця

	C	-	0	0	0	0	0	0	0	0
	B	A_0	A_{x_1}	A_{x_2}	A_{λ_1}	A_{λ_2}	A_{v_1}	A_{v_2}	A_{w_1}	A_{w_2}
0	λ_2	1	0	0	3	1	-1	0	0	0
0	x_2	0	0	1	-2	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	0
0	w_1	16	3	0	4	0	-2	1	1	0
0	w_2	4	**1**	0	4	0	-2	1	0	1
	Δ	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Тепер не виконується інша умова доповняльної нежорсткості – $w_2 \cdot \lambda_2 \neq \neq 0$. Тому здійснимо ще одну штучну ітерацію симплекс-методу, обравши як напрямний рядок w_2, напрямний стовпець A_{x_1}, напрямний елемент при цьому дорівнює 1.

Розрахуємо елементи та заповнимо п'яту симплекс-таблицю (табл. 8.5).

Таблиця 8.5

П'ята симплекс-таблиця

	C	-	0	0	0	0	0	0	0	0
	B	A_0	A_{x_1}	A_{x_2}	A_{λ_1}	A_{λ_2}	A_{v_1}	A_{v_2}	A_{w_1}	A_{w_2}
0	λ_2	1	0	0	3	1	-1	0	0	0
0	x_2	0	0	1	-2	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	0
0	w_1	4	0	0	-8	0	4	-2	1	-3
0	w_2	4	1	0	4	0	-2	1	0	1
	Δ	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Тепер усі умови доповняльної нежорсткості виконуються: $v_1 \cdot x_1 = 0$ (оскільки $v_1 = 0$), $v_2 \cdot x_2 = 0$ ($v_2 = 0$, $x_2 = 0$), $w_1 \cdot \lambda_1 = 0$ ($\lambda_1 = 0$), $w_2 \cdot \lambda_2 = 0$ ($w_2 = 0$). Таким чином, отриманий розв'язок системи нерівностей і рівнянь. Далі в околі знайденої точки ($x_1 = 4$, $x_2 = 0$) дослідимо вихідну функцію $F(x_1, x_2) = -x_1 - 2x_2 + x_2^2$ на екстремум.

Візьмемо другі похідні:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} = 0, \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} = 2, \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} = 0$$

і складемо визначник:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Маємо в точці ($x_1 = 4$, $x_2 = 0$) min функції $F(x_1, x_2)$, який дорівнює:

$$F(x_1, x_2) = -x_1 - 2x_2 + x_2^2 = -4 - 2 \cdot 0 + 0^2 = -4.$$

Завдання

Розв'язати задачу квадратичного програмування.

Таблиця 8.6

№ варіанту	**Умови задачі**
1	**2**
1	$F(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 - x_1^2 - x_2^2 \to max$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 16 \\ x_1 + x_2 = 8 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$
2	$F(x_1, x_2) = 32x_1 + 120x_2 - 4x_1^2 - 3x_2^2 \to max$ $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 20 \\ 2x_1 - x_2 = 8 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$

Продовження табл. 8.6

1	**2**
3	$F(x_1, x_2) = 5x_1 + 2x_2 - x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2 \to max$ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 15 \\ x_1 + 2x_2 = 8 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$
4	$F(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1 + 4x_2 \to min$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 20 \\ x_1 + x_2 \ge 8 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$
5	$F(x_1, x_2) = x_1 + 3x_2 - 2x_1^2 - 3x_2^2 \to max$ $\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 12 \\ x_1 + x_2 \ge 6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$
6	$F(x_1, x_2) = -x_1 - 2x_2 + x_2^2 \to min$ $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 6 \\ x_1 + 2x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$
7	$F(x_1, x_2) = 3x_1 + 8x_2 - x_1^2 - 2x_2^2 \to max$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 8 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 20 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$
8	$F(x_1, x_2, x_3) = 8x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_1^2 - 2x_3^2 \to max$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 \le 16 \\ 3x_2 + 4x_3 \le 20 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$
9	$F(x_1, x_2) = 8x_1 + x_2 - x_1^2 \to max$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 16 \\ x_1 + 5x_2 = 20 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$

Продовження табл. 8.6

1	**2**
10	$F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1 + x_2 \to min$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 12 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$
11	$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3)^2 \to min$ $\begin{cases} x_1 \leq 2, x_2 \leq 4, x_3 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$
12	$F(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 + 5x_1 - 6x_2 \to min$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$
13	$F(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 + 5x_1 - 6x_2 \to min$ $\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$
14	$F(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 3x_1x_2 + 2x_2^2 + 5x_1 - 6x_2 \to min$ $\begin{cases} x_1 - x_2 \geq 6 \\ 2x_1 + x_2 \geq 15 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$
15	$F(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 + 5x_1 \to min$ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$