Диференціальне числення функції однієї змінної

4.1 Поняття похідної, основні формули та правила диференціювання

Приростом аргументу x в точці x_0 називається різниця $x - x_0$, яка позначається через $\Delta x = x - x_0$. ***Приростом функції*** $f(x)$ в точці x_0 називається різниця $f(x) - f(x_0)$, яка позначається $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$.

<u>Означення.</u> Похідною функції y = f(x) в точці x називається границя відношення приросту функції в цій точці до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Похідну позначають так: $y', y'_x, f', \dfrac{dy}{dx}, \dfrac{df}{dx}$

Приклад. Дано функцію $f(x) = x^2$. Для будь-якої точки x_0:

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \frac{2x_0 \Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x .$$

Похідна функції $f(x) = x^2$ для будь-якого $x_0 \in R$ дорівнює $2x_0$, тому що $\lim\limits_{\Delta x \to 0}(2x_0 + \Delta x) = 2x_0$.

Таблиця похідних

y	y'	y	y'
u^{α}	$\alpha u^{\alpha-1}u'$	$\arcsin u$	$\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$
α^{u}	$\alpha^{u}\ln\alpha\cdot u'$	$\arccos u$	$-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$
e^{u}	$e^{u}\cdot u'$	$\mathrm{arctg}\,u$	$\frac{1}{1+u^2}u'$
$\log_{\alpha} u$	$\frac{1}{u\ln\alpha}u'$	$\mathrm{arcctg}\,u$	$-\frac{1}{1+u^2}u'$
$\ln u$	$\frac{1}{u}u'$	$\sqrt[n]{u}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}u'$
$\sin u$	$\cos u\cdot u'$	$u\pm v$	$u'\pm v'$
$\cos u$	$-\sin u\cdot u'$	$u\cdot v$	$u'\cdot v+u\cdot v'$
$\mathrm{tg}\,u$	$\frac{1}{\cos^2 u}u'$	$\frac{u}{v}$	$\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$
$\mathrm{ctg}\,u$	$-\frac{1}{\sin^2 u}u'$		

3. Основні правила диференціювання функцій

1°. Похідна сталої функції $y = c$ дорівнює нулю, тобто $(c)' = 0$.

2°. $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$, де c – стала.

3°. $(u \pm v)' = u' \pm v'$, де $u = u(x)$; $v = v(x)$.

Це правило узагальнюється на довільне скінченне число доданків:

$$(u \pm v \pm w \pm \ldots \pm z)' = u' \pm v' \pm w' \pm \ldots \pm z'.$$

4°. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

5°. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$.

6°. Нехай $y = f[u(x)]$ – складна функція, тобто $y = f(u)$, де $u = u(x)$. Тут u – проміжний аргумент, x – незалежна змінна. Тоді

$$y' = f'(u) \cdot u'(x).$$

Приклади.

1.Знайти похідні функцій:

а) $y = 5x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x + 10$

а) $y' = (5x^4)' - (2x^3)' + (x^2)' - (4x)' + (10)' =$

$= 5 \cdot 4x^3 - 2 \cdot 3x^2 + 2x - 4 + 0 = 20x^3 - 6x^2 + 2x - 4$.

б) $y = (2x^3 + 1)\cos x$

$y' = (2x^3 + 1)'\cos x + (2x^3 + 1)(\cos x)' = 6x^2 \cdot \cos x +$

$+ (2x^3 + 1)(-\sin x) = 6x^2 \cos x - (2x^3 + 1)\sin x$.

в) $y = \dfrac{tgx}{x^2 - 1}$

$$y' = \frac{(tgx)'(x^2-1) - tgx(x^2-1)'}{(x^2-1)^2} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}(x^2-1) - 2xtgx}{(x^2-1)^2} =$$

$$= \frac{x^2 - 1 - 2xtgx \cdot \cos^2 x}{(x^2-1)^2 \cos^2 x} = \frac{x^2 - 1 - \frac{2x \sin x \cos^2 x}{\cos x}}{(x^2-1)^2 \cos^2 x} =$$

$$= \frac{x^2 - 1 - 2x \sin x \cos x}{(x^2-1)^2 \cos^2 x} = \frac{x^2 - x \sin 2x - 1}{(x^2-1)^2 \cos^2 x}.$$

Теорема (про похідну від складеної функції). Нехай функція $f(x)$, визначена на множині A, має похідну $f'(x_0)$ в точці $x_0 \in A$. Функція $g(y)$ визначена на множині B, причому $f(x) \in B$ для будь-якого $x \in A$. Якщо $g(y)$ має похідну $g'(y_0)$ у точці $y_0 = f(x_0)$, то і складена функція $g(f(x))$ має похідну в точці x_0: $\left(g(f(x_0))\right)' = g'(f(x_0)) f'(x_0)$.

Приклад. Дано функцію $\sqrt{\sin x}$. Тут $g(y) = \sqrt{y}$, $f(x) = \sin x$.
Використовуючи правило диференціювання складної функції, отримуємо:

$$\left(\sqrt{\sin x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\sin x}}(\sin x)' = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}.$$

Функцію $y(x)$ називають ***параметрично заданою***, якщо вона подана у вигляді

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}, \quad t \in E,$$

де хоча б одна із цих функцій взаємно однозначно відображає множину E.

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)dt}{f'(t)dt} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

Приклад. Знайти похідну функції y заданої параметрично

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}.$$

Розв'язування. Знаходимо x'_t і y'_t: $x'_t = -a\sin t$, $y'_t = b\cos t$.

Тоді $y'_x = -\frac{b\cos t}{a\sin t} = -\frac{b}{a} ctgt$.

Кажуть, що функція $y(x)$ ***задана неявно***, якщо вона подана у вигляді рівняння, що не розв'язано відносно y.

Приклад. Дано функцію $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

Диференціюємо цю рівність:

$$3x^2 + 3y^2 y' - 3y - 3xy' = 0.$$

Тепер, розв'язуючи це рівняння, дістанемо: $y' = \dfrac{3y - 3x^2}{3y^2 - 3x}$:

У деяких випадках буває зручним застосувати так зване ***логарифмічне диференціювання***. Нехай необхідно продиференціювати функцію: $y = x^{x^2}$. Спочатку знаходимо логарифм цієї функції:

$$\ln y(x) = x^2 \ln x.$$

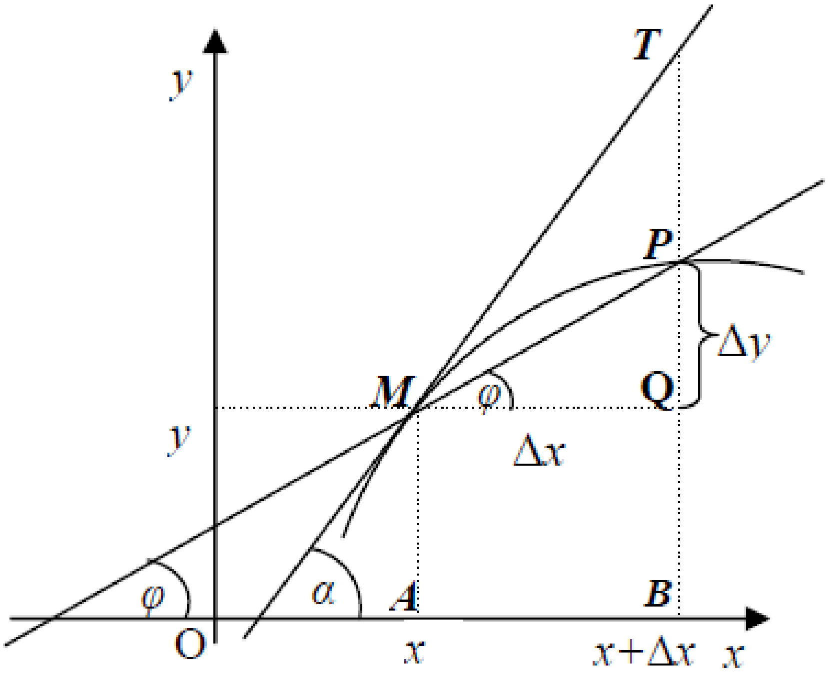
Тепер диференціюємо обидві частини рівності:

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = 2x \ln x + x,$$

$$y'(x) = x^{x^2}(2x \ln x + x).$$

2.1.Геометричний зміст похідної

Однією з задач геометрії, яка тісно пов'язана з історією виникнення диференціального числення є задача про проведення дотичних до кривих.



Мал.1

Означення. ***Дотичною до кривої, заданої рівнянням*** $y = f(x)$ ***в точці дотику*** $M(x,y)$ ***називають граничне положення*** MT ***січної*** MP***, коли точка*** P***, рухаючись по кривій прямує до точки*** M.

Розглянемо графік $y=f(x)$. Візьмемо на графіку точку $M(x,y)$ і другу точку $P(x+\Delta x, y+\Delta y)$. Проведемо січну MP і позначимо кут нахилу її до додатнього напрямку осі Ox через φ. Позначимо кут, який утворює дотична MT з додатнім напрямом осі $0x$ через α.

Якщо пересувати точку P по кривій до точки M, то граничним положенням січної MP буде дотична MT до графіка в точці M. Як видно з малюнка $AM = f(x)$, $BP = f(x+\Delta x)$,

$$QP = BP - BQ = f(x+\Delta x) - f(x) = \Delta y; \quad MQ = AB = \Delta x.$$

Отже, $tg\varphi = \dfrac{QP}{MQ} = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$,

а $\lim\limits_{\Delta x \to 0} tg\varphi = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) = tg\alpha$.

Отже, похідна в даній точці x дорівнює тангенсові кута, утвореного дотичною до графіка функції в точці $M(x,y)$ з додатнім напрямом осі Ox. Інакше, похідна в точці x дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіка функції в точці $(x, f(x))$.

2.2. Дотична і нормаль до графіка функції

Задача. Знайти рівняння дотичної і нормалі до кривої, заданої рівнянням $y = f(x)$ в точці з абсцисою x_0.

Розв'язування. Точка M на кривій має координати $x = x_0$ $y = y_0 = f(x_0)$. Кутовий коефіцієнт дотичної $k = f'(x_0)$. Використавши рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом на площині, що проходить через задану точку M, одержимо рівняння дотичної:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Нормаль до кривої в заданій точці перпендикулярна до дотичної, проведеної в цій точці. А тому кутовий коефіцієнт нормалі на основі умови перпендикулярності двох прямих

$k_н = -\frac{1}{k_д} = -\frac{1}{f'(x_0)}$. Отже, рівняння нормалі

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Приклад. Знайти рівняння дотичної і нормалі до параболи $y = x^2$ в точці з абсцисою $x = 2$.

Розв'язування. Похідна $y' = 2x$, $y'(2) = 2 \cdot 2 = 4.$ Знайдемо ординату цієї точки $y(2) = 2^2 = 4.$

Рівняння дотичної $y - 4 = 4(x - 2)$ або $y = 4x - 4$.

Рівняння нормалі $y - 4 = -\frac{1}{4}(x - 2)$ або $y = -\frac{x}{4} + \frac{9}{2}$.

4.2 Диференціал

Функція $f(x)$ називається ***диференційованою*** в точці x_0, якщо її приріст у цій точці може бути представлений у вигляді:

$$\Delta f = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x,$$

де A – константа,

$\alpha(x)$ – нескінченно мала функція щодо Δx.

Тобто приріст диференційованої функції можна подати у вигляді двох доданків, перший доданок $A\Delta x$ називають ***головною частиною приросту***.

Диференціалом функції $f(x)$ в точці x_0 називається головна частина приросту функції, лінійна відносно приросту аргументу. Диференціал функції позначається символом df. $df(x_0) = A\Delta x$

$$dy = f'(x)\,dx$$

11.5. Застосування диференціалів при наближених обчисленнях

Диференціали використовують при наближених обчисленнях значень функцій, застосовуючи приблизну рівність $\Delta y \approx dy$. В розгорнутому вигляді маємо

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x.$$

Звідки значення функції $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$.

Приклад 1. Обчислити наближено $ln\,1{,}02$ з допомогою диференціалу.

Розв'язування. Число $ln1{,}02$ є значення функції $y=ln\,x$ при $x=1{,}02$. Взявши $x_0=1$, $\Delta x=0{,}02$, маємо $f(x_0)=ln1=0$;

$f'(x)=\dfrac{1}{x}$; $f'(x_0)=\dfrac{1}{1}=1$.

Отже, $ln\,1{,}02= ln1+1\cdot 0{,}02=0{,}02$.

§10. Похідні вищих порядків

Похідна функції $y=f(x)$ є також функцією: $y'=f'(x)$.

Ця функція також може мати похідну. Ця нова похідна називається другою похідною функції $y=f(x)$ або похідною функції $f(x)$ другого порядку і позначаться $y''=f''(x)$ або $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

Похідна другої похідної, тобто функції $y''=f''(x)$ називається третьою похідною або похідною третього порядку і позначається символом $y'''=f'''(x)$ або $\dfrac{d^3y}{dx^3}$. Так можна ввести похідні четвертого, п'ятого і взагалі n – го порядку, які позначають $y^{IV}, y^{V}, ..., y^{(n)}$.

Приклад 1. Знайти похідну четвертого порядку функції

$y=x^4-5x^3+2x-1$.

Розв'язування. Маємо $y'=4x^3-15x^2+2;$

$y''=12x^2-30x;$

$y'''=24x-30;$

$y^{IV}=24.$