якщо функція $y = f(x)$ у точці x_0 диференційовна, то її приріст Δy у цій точці можна записати так:

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x. \tag{64}$$

Зазначимо, що доданки в рівності (64) відіграють неоднакову роль. Так, другий доданок $\alpha(\Delta x)\Delta x$ при $\Delta x \to 0$ є величиною вищого порядку мализни, ніж Δx:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0.$$

Перший доданок $f'(x_0)\Delta x$ при $\Delta x \to 0$ і $f'(x_0) \neq 0$ є величиною однакового порядку мализни з Δx.

Крім того, другий доданок у рівності (64) при $\Delta x \to 0$ і $f'(x_0) \neq 0$ є величиною вищого порядку мализни, ніж перший:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x)\Delta x}{f'(x_0)\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x)}{f'(x_0)} = 0.$$

Отже, перший доданок $f'(x_0)\Delta x$ у рівності (64) є головною частиною приросту функції.

Означення. Добуток $f'(x_0)\Delta x$ називають *диференціалом функції в точці* x_0 і позначають символом dy або $df(x_0)$:

$$dy = f'(x_0)\Delta x, \; df(x_0) = f'(x_0)\Delta x. \tag{65}$$

Зазначимо, що диференціал має дві властивості.

1°. Диференціал є головною частиною приросту функції (різниця між приростом функції і диференціалом при $\Delta x \to 0$ є величиною вищого порядку мализни, ніж Δx).

2°. Диференціал у розглядуваній точці x_0 є лінійною функцією від Δx.

Операцію знаходження диференціала функції називають *диференціюванням функції.* Оскільки диференціал відрізняється від похідної тільки множником Δx, операцію знаходження похідної функції також називають *диференціюванням функції.*

Диференціалом аргументу називають його приріст

$$\Delta x = dx.$$

Тоді формула для диференціала функції набирає вигляду

$$dy = f'(x_0)dx,$$

або

$$dy = y'dx. \tag{66}$$

Звідси маємо

$$y' = \frac{dy}{dx}. \tag{67}$$

Ця рівність читається так: «ігрек штрих дорівнює dy по dx».

Таким чином, дістали ще одне позначення похідної, яке є відношенням двох диференціалів: диференціала функції до диференціала аргументу.

Користуючись співвідношенням (66), складемо *таблицю диференціалів елементарних функцій:*

1. $y = C = \text{const}, \ dy = 0.$
2. $y = x^{\mu}, \ dy = \mu x^{\mu-1}dx.$
3. $y = x, \ dy = dx.$
4. $y = \dfrac{1}{x}, \ dy = -\dfrac{1}{x^2}dx.$
5. $y = \sqrt{x}, \ dy = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx.$
6. $y = \sqrt[n]{x}, \ dy = \dfrac{dx}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}.$
7. $y = a^x, \ dy = a^x \ln a dx.$
8. $y = \mathrm{e}^x, \ dy = \mathrm{e}^x dx.$
9. $y = \lg_a x, \ dy = \dfrac{\lg_a \mathrm{e} dx}{x}.$
10. $y = \ln x, \ dy = \dfrac{dx}{x}.$
11. $y = \sin x, \ dy = \cos x dx.$
12. $y = \cos x, \ dy = -\sin x dx.$
13. $y = \operatorname{tg} x, \ dy = \sec^2 x dx.$
14. $y = \operatorname{ctg} x, \ dy = \operatorname{cosec}^2 x dx.$
15. $y = \arcsin x, \ dy = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$
16. $y = \arccos x, \ dy = -\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$
17. $y = \operatorname{arctg} x, \ dy = \dfrac{dx}{1+x^2}.$
18. $y = \operatorname{arcctg} x, \ dy = -\dfrac{dx}{1+x^2}.$

Якщо u і v — диференційовні функції в точці, то для диференціалів, як і для похідних, можна вивести такі формули:

1. $d(Cu) = Cdu \ (C = \text{const})$.
2. $d(u \pm v) = du \pm dv$.
3. $d(uv) = vdu + udv$.
4. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$.

Доведемо, наприклад, формулу 3. Для цього застосуємо означення диференціала

$$d(uv) = (uv)' dx = (vu' + uv')dx = vu'dx + uv'dx = vdu + udv.$$

Формули 1—4 називають *правилами диференціювання функції.*

Виведемо формулу для диференціала складеної функції $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, де $f(u)$ і $\varphi(x)$ за припущенням є диференційовними функціями відповідно в точках u і x.

Згідно з припущенням, складена функція $f(\varphi(x))$ у точці x має похідну $f'_x(\varphi(x))$, а отже, вона має й диференціал dy:

$$dy = f'_x(\varphi(x))dx.$$

Оскільки

$$f'_x(\varphi(x)) = f'_u(u)u'_x,$$

то

$$dy = f'_u(u)u'_x dx,$$

$$u'_x dx = du.$$

Тому

$$dy = f'_u(u)du.$$

Опустивши в похідній $f'_u(u)$ індекс u, дістанемо

$$dy = f'(u)du. \qquad (68)$$

Отже, навіть у випадку, коли функція складена, зовнішній вигляд диференціала не змінюється.

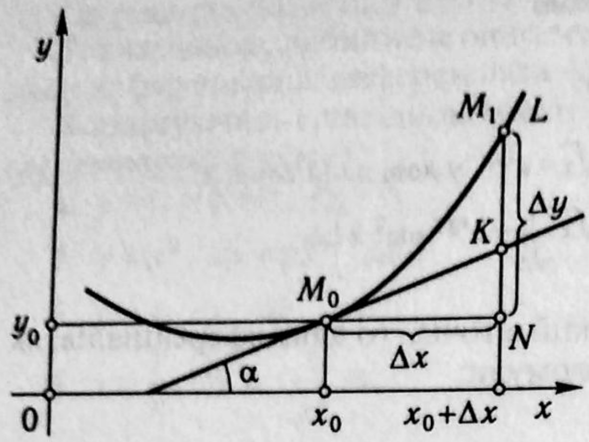

Рис. 38

Цю властивість диференціала називають *властивістю інваріантності (незмінності)*. Проте слід мати на увазі, що існує внутрішня відмінність формули (68) від формули (66). Якщо у формулі (66) dx є приростом незалежної змінної, $dx = \Delta x$, отже, він є сталою величиною, то у формулі (68) $du = \varphi'(x)dx$.

Диференціалу функції, так само як і похідній, можна дати геометричне й механічне тлумачення.

Розглянемо спочатку геометричний зміст диференціала.

Нехай графік диференційовної функції $f(x)$ має вигляд, зображений на рис. 38 (крива L).

Візьмемо на кривій L точки $M_0(x_0, y_0)$ і $M_1(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$.

У точці M_0 проведемо дотичну до кривої L. Тоді з $\triangle M_0KN$ знайдемо відрізок KN:

$$KN = \operatorname{tg}\alpha dx = f'(x_0)\Delta x$$

або

$$KN = dy. \tag{69}$$

Рівність (69) характеризує геометричний зміст диференціала: диференціал функції в точці x_0 дорівнює приросту ординати, дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці $(x_0, f(x_0))$, коли незалежна змінна дістає приріст Δx.

З'ясуємо механічний зміст диференціала функції. Припустимо, що матеріальна точка рухається за відомим законом

$$s = f(t),$$

де $f(t)$ — диференційовна функція за деякого значення часу $t = t_0$. Тоді функція $f(t)$ має диференціал $ds = f'(t_0)\Delta t$. Проте $f'(t_0)$ дорівнює швидкості

$$v = f'(t_0).$$

Тому

$$ds = v\Delta t.$$

Добуток $v\Delta t$ виражає шлях, який точка проходить за час Δt, рухаючись зі сталою швидкістю v.

Отже, механічне тлумачення диференціала функції таке: диференціал функції виражає той шлях, який точка пройшла б за час Δt, якби вона рухалася прямолінійно й рівномірно зі сталою швидкістю $v = f'(t_0)$.

Диференціал функції часто застосовують за наближених обчислень. При цьому користуються тим, що dy є головною частиною приросту функції у точці, тому

$$\Delta y \approx dy.$$

Підставляючи значення Δy і dy, дістанемо наближену рівність

$$f\left(x_0+\Delta x\right)\approx f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\Delta x. \qquad (70)$$

Це і є та формула, якою користуються при наближених обчисленнях.

❑ **Приклади**

3. Знайти наближене значення $\sqrt{1{,}001}$.

Розв'язання. Розглянемо функцію $f(x)=\sqrt{x}$. Нехай $x_0=1, \Delta x=0{,}001$. Тоді $\sqrt{1{,}001}$ можна зобразити так:

$$\sqrt{1{,}001}=\sqrt{x_0+\Delta x}.$$

Отже, можна використати формулу (70). Для цього потрібно знайти $f\left(x_0\right)=f(1)$ і $f'(x_0)=f'(1)$. Маємо

$$f(1)=\sqrt{1}=1;\quad f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}};\quad f'(1)=\frac{1}{2}.$$

Тоді

$$\sqrt{1{,}001}\approx 1+\frac{1}{2}0{,}001=1{,}0005.$$

§ 4. ПОХІДНІ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛИ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

4.1. Похідні вищих порядків явно заданої функції

Нехай на інтервалі $(a;\ b)$ задана диференційовна функція $y = f(x)$, тоді її похідна $f'(x)$, яку називатимемо ще *першою похідною* (або *похідною першого порядку*), також є функцією від x. Може трапитись, що функція $f'(x)$ також має похідну на інтервалі $(a;\ b)$ або в деякій точці $x \in (a;\ b)$. Цю останню похідну називають *другою похідною* (або *похідною другого порядку*) і позначають одним із таких символів:

$$y'',\quad f''(x),\quad \frac{d^2y}{dx^2},\quad \frac{\partial^2 f}{dx^2},\quad \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Друга похідна має такий механічний зміст. Якщо рух матеріальної точки відбувається за законом $S = f(t)$, то похідна S', як було з'ясовано в п. 1.1, дорівнює швидкості точки в даний момент часу: $v = S' = f'(t)$. Оскільки прискорення — це похідна від швидкості, то $a = v' = S'' = f''(t)$.

Отже, другу похідну можна тлумачити як величину, що дорівнює прискоренню рухомої точки в даний момент часу.

Похідну від другої похідної, якщо вона існує, називають *третьою похідною,* або *похідною третього порядку,* і позначають так:

$$y''', \quad f'''(x), \quad \frac{d^3y}{dx^3}, \quad \frac{d^3f}{dx^3}, \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right).$$

Похідною n-го порядку функції $y = f(x)$ називають першу похідну, якщо вона існує, від похідної $(n-1)$-го порядку:

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})' \quad \text{або} \quad f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))',$$

або

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right).$$

Похідні порядку вище першого називають *похідними вищого порядку.*

Починаючи з похідної четвертого порядку, похідні позначають не штрихами, а цифрами. Порядок похідної береться в дужки для того, щоб не сплутати його з показником степеня.

Приклади

1. Знайти четверту похідну функції $y = x^5 - 7x^2 + x - 1$.

○ Маємо $y' = 5x^4 - 14x + 1$, $y'' = 20x^3 - 14$, $y''' = 60x^2$, $y^{(4)} = 120x$. ●

4.2. Похідні вищих порядків неявно заданої функції

Нехай функція $y = f(x)$ задана неявно рівністю $F(x, y) = 0$. Диференціюючи цю рівність по x і розв'язуючи одержане рівняння відносно y', знайдемо першу похідну.

Щоб знайти другу похідну, потрібно продиференціювати по x першу похідну і в одержане співвідношення підставити її значення. Продовжуючи диференціювання, можна знайти одну за одною послідовно похідні будь-якого порядку. Всі вони будуть виражені через незалежну змінну x і саму функцію y.

Приклад

Знайти y'', якщо $x^2 + y^3 = 1$.

○ Продиференціюємо задану рівність по x і знайдемо y':

$$2x + 3y^2y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{2x}{3y^2}.$$

Далі маємо

$$y'' = -\frac{2}{3}\frac{y^2 - x2yy'}{y^4} = -\frac{2}{3}\frac{y - 2xy'}{y^3} =$$

$$= -\frac{2}{3}\frac{y - 2x\left(-\frac{2x}{3y^2}\right)}{y^3} = -\frac{2}{9}\frac{3y^3 + 4x^2}{y^5} =$$

$$= -\frac{2}{9}\frac{3y^3 + 3x^2 + x^2}{y^5} = -\frac{2}{9}\frac{3(x^2 + y^3) + x^2}{y^5} = -\frac{2(3 + x^2)}{9y^5}. \bullet$$

4.4. Диференціали вищих порядків

Нехай маємо диференційовну на деякому проміжку функцію $y = f(x)$, де x — незалежна змінна. Тоді її перший диференціал або диференціал першого порядку

$$dy = f'(x)\,dx \tag{52}$$

— це деяка функція від x і можна говорити про диференціал цієї функції.

Другим диференціалом d^2y, або *диференціалом другого порядку*, називається диференціал від першого диференціала:

$$d^2y = d(dy).$$

Оскільки dx не залежить від x, то при диференціюванні першого диференціала dx можна винести за знак похідної, тому

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x)\,dx) = (f'(x)\,dx)'_x\,dx = f''(x)\,dxdx = f''(x)\,dx^2.$$

Тут dx розглядається як єдиний символ (а не як добуток d на x), тому дужки в степені диференціала dx опускають, $(dx)^n = dx^n$:

$$d^2y = f''(x)\,dx^2. \tag{53}$$

Третім диференціалом d^3y, або *диференціалом третього порядку*, називається диференціал від другого диференціала:

$$d^3y = d(d^2y) = d(f''(x)\,dx^2) = f'''(x)\,dx^3. \tag{54}$$

Взагалі, *n-м диференціалом* d^ny, або *диференціалом n-го порядку*, називається диференціал від диференціала $(n-1)$-го порядку:

$$d^ny = d(d^{n-1}y) = f^{(n)}(x)\,dx^n. \tag{55}$$

Зауважимо, що формули (53) — (55) справедливі лише для випадку, коли x — незалежна змінна. Дійсно, нехай задано складену функцію $y = f(x)$, $x = x(t)$. Відомо (п. 3.2), що перший диференціал має інваріантну форму, тобто рівність (52) виконується як для випадку, коли x є функцією від t, так і за умови, що x є незалежною змінною.

Виявляється, що диференціали вищих порядків інваріантної властивості не мають. Покажемо це на прикладі диференціала другого порядку. Користуючись правилом диференціювання добутку, маємо:

$$d^2y = d(f'(x)\,dx) = d(f'(x))\,dx + f'(x)\,d(dx) =$$
$$= f''(x)\,dx^2 + f'(x)\,d^2x = f''(x)\,dx^2 + f'(x)\,x''(t)\,dt^2;$$
$$d^2y = f''(x)\,dx^2 + f'(x)\,x''(t)\,dt^2. \tag{56}$$

Порівнявши формули (53) і (56), переконаємось, що у випадку складеної функції формула другого диференціала змінюється. Отже, диференціал другого порядку інваріантної властивості не має. Якщо виявиться, що x — незалежна змінна, то

$$d^2x = d(dx) = d(1 \cdot dx) = dx\,d(1) = dx \cdot 0 = 0$$

і формула (56) переходить у формулу (53).