## § 3. Застосування визначених інтегралів

1. *Площа криволінійної трапеції*, обмеженої кривою $y = f(x)$ $(f(x) \geq 0)$, двома ординатами $x = a$ і $x = b$ та відрізком $[a; b]$ на осі $OX$, обчислюється за формулою:

$$S = \int_a^b y dx = \int_a^b f(x) dx.$$

2. *Площа фігури*, обмеженої двома кривими $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$ $(f_1(x) \leq f_2(x))$ та двома прямими $x = a$ і $x = b$, обчислюється за формулою:

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx.$$

3. Якщо криволінійна трапеція, обмежена кривою $y = f(x)$, відрізком $[a; b]$ на осі $OX$ і прямими $x = a$ і $x = b$, обертається навколо осі $OX$, то *об'єм тіла обертання* обчислюється за формулою:

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Аналогічно, *об'єм тіла обертання* навколо осі $OY$ знаходиться за формулою:

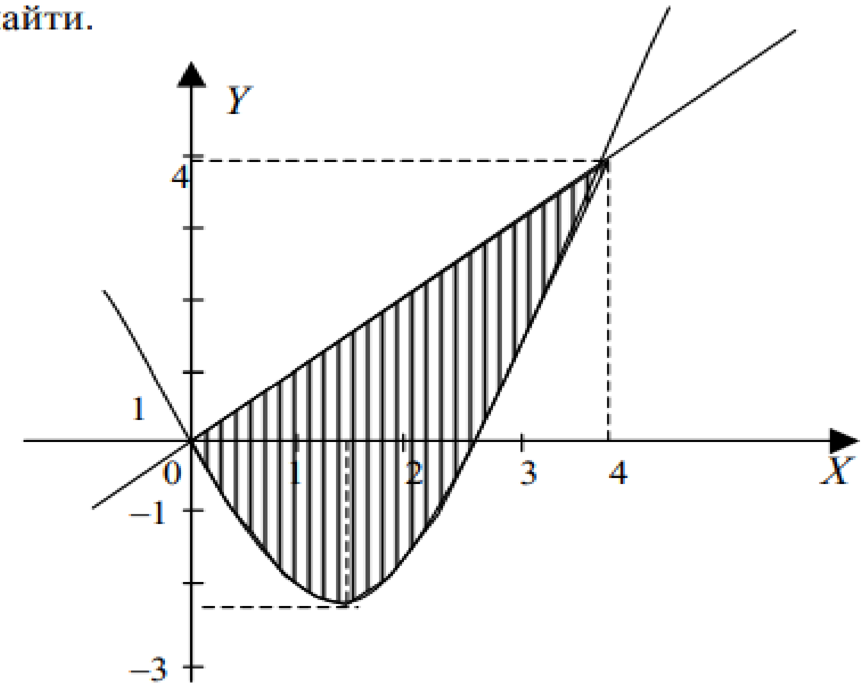
$$V = \pi \int_c^d x^2 dy = \pi \int_c^d f^2(y) dy.$$

4. Якщо фігура, обмежена кривими $y_1 = f_1(x)$ і $y_2 = f_2(x)$ $(0 \leq f_1(x) \leq f_2(x))$ та прямими $x = a$, $x = b$, обертається навколо осі $OX$, то *об'єм тіла обертання* обчислюється за формулою:

$$V = \pi \int_a^b [y_2{}^2 - y_1{}^2] dx = \pi \int_a^b [f_2{}^2(x) - f_1{}^2(x)] dx.$$

∢ **Задача 1**. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2 - 3x$ і $y = x$.

*Розв'язування*. Спочатку зобразимо фігуру, площу якої треба знайти.




Знайдемо абсциси точок перетину параболи і прямої. Для цього розв'яжемо систему рівнянь: $\begin{cases} y = x^2 - 3x \\ y = x \end{cases}$,

$x^2 - 3x = x, \;\; x^2 - 4x = 0, \;\; x_1 = 0, \;\; x_2 = 4.$

Оскільки $x > x^2 - 3x$ на відрізку [0; 4], то за формулою

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx$$

знайдемо шукану площу:

$$S = \int_0^4 [x - (x^2 - 3x)]dx = \int_0^4 (4x - x^2)dx = \int_0^4 4xdx - \int_0^4 x^2dx =$$

$$= 4\frac{x^2}{2}\Big|_0^2 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = 2(2^2 - 0) - \frac{1}{3}(2^3 - 0) = 32 - \frac{64}{3} = \frac{32}{3} \text{(кв. од.)}.$$

∢ **Задача 2**. Обчислити об'єм кулі радіусу 3.

*Розв'язування.* Кулю можна розглядати як результат обертання півкруга, обмеженого частиною кола $x^2 + y^2 = 3^2$, $y \geq 0$, навколо осі $OX$.

Використовуючи рівність $y = \sqrt{9 - x^2}$, симетричність кола відносно осі $OY$, одержимо

$$V = \pi \int_{-3}^{3} \left(\sqrt{9 - x^2}\right)^2 dx = 2\pi \int_{0}^{3} (9 - x^2) dx = 2\pi \int_{0}^{3} 9dx - 2\pi \int_{0}^{3} x^2 dx =$$

$$= 18\pi x \Big|_0^3 - 2\pi \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^3 = 18 \cdot \pi \cdot 3 - 2\pi \cdot \frac{3^3}{3} = 54\pi - 18\pi = 36\pi (\text{куб. од.}).$$