

Розділ 6. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Невизначеним інтегралом $\int f(x)dx$ функції $f(x)$ (на проміжку X) називають вираз $F(x)+C$, де $F(x)$ – одна з *первісних* функцій $f(x)$, тобто $F'(x)=f(x)$ ($x \in X$); C – довільна стала.

1. Таблиця основних невизначених інтегралів

I.
$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1).$$

II.
$$\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

III.
$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1).$$

Зокрема, при $a = e$

III°.
$$\int e^x dx = e^x + C.$$

IV.
$$\int \cos x dx = \sin x + C.$$

V.
$$\int \sin x dx = -\cos x + C.$$

VI.
$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$$

VII.
$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

VIII.
$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \quad (a > 0).$$

Зокрема, при $a = 1$

VIII°.
$$\int \frac{dx}{x^2 + 1} = \operatorname{arctg} x + C.$$

IX.
$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C \quad (a > 0).$$

Зокрема, при $a = 1$

IX°.
$$\int \frac{dx}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C.$$

$$\text{X.} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a > 0).$$

Зокрема, при $a = 1$

$$\text{X}^\circ. \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C.$$

$$\text{XI.} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + C \quad (a \neq 0).$$

Зокрема, при $a = 1$

$$\text{XI}^\circ. \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + 1} \right| + C = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right) + C.$$

У справедливості формул **I**–**XI** легко переконатися, використовуючи диференціювання. Розглянемо, наприклад, інтеграл

$$\text{II} \quad - \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C. \quad \text{Потрібно показати, що } (\ln|x|)' = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0).$$

Дійсно, якщо $x > 0$, то $(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$; якщо ж $x < 0$, то

$$(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-x)' = -\frac{1}{x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}.$$

Зауважимо, що кожна з формул **I** – **XI** вірна на будь-якому проміжку з області визначення відповідної підінтегральної функції.

Таблицю основних інтегралів слід вивчити **напам'ять!**

Скориставшись табличним інтегралом **I**, довести формули:

$$1. \quad \int dx = x + C.$$

$$\lceil \int dx = \int 1 dx = \int x^0 dx = \frac{x^{0+1}}{0+1} + C = x + C. \quad \rceil$$

$$2. \quad \int x dx = \frac{x^2}{2} + C.$$

$$\lceil \int x dx = \int x^1 dx = \frac{x^{1+1}}{1+1} + C = \frac{x^2}{2} + C. \quad \rceil$$

$$3. \quad \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C.$$

$$\lceil \int x^2 dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} + C = \frac{x^3}{3} + C. \rceil$$

$$4. \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C.$$

$$\lceil \int \frac{dx}{x^2} = \int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C. \rceil$$

$$5. \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C.$$

$$\lceil \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C. \rceil$$

Обчислити інтеграли, скориставшись табличним інтегралом **I** :

$$6. \int \sqrt{x} dx.$$

$$\lceil \int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C. \rceil$$

$$7. \int \frac{dx}{x^3}.$$

$$\lceil \int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3} dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C. \rceil$$

$$8. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}.$$

$$\lceil \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} dx = \int x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + C = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C = \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} + C. \rceil$$

Обчислити інтеграли, скориставшись табличним інтегралом **III** :

$$9. \int 2^x dx.$$

$$\lceil \int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C \quad (\text{в інтегралі III поклали } a = 2). \rceil$$

$$10. \int \frac{dx}{2^x}.$$

$$\lceil \int \frac{dx}{2^x} = \int \frac{1}{2^x} dx = \int \left(\frac{1}{2}\right)^x dx = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln \frac{1}{2}} + C = \frac{1}{2^x} + C = -\frac{1}{2^x \ln 2} + C$$

(в інтегралі **III** поклали $a = \frac{1}{2}$). \lrcorner

Обчислити невизначені інтеграли:

$$11. \int \frac{dx}{x^2 + 9}.$$

\lceil Зведемо до інтеграла **VIII** при $a = 3$:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 9} = \int \frac{dx}{x^2 + 3^2} = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + C. \lrcorner$$

$$12. \int \frac{dx}{x^2 - 5}.$$

\lceil Зведемо до інтеграла **IX** ($a = \sqrt{5}$):

$$\int \frac{dx}{x^2 - 5} = \int \frac{dx}{x^2 - (\sqrt{5})^2} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \ln \left| \frac{x - \sqrt{5}}{x + \sqrt{5}} \right| + C. \lrcorner$$

$$13. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 5}}.$$

\lceil Використаємо інтеграл **XI** ($a = -5$):

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + (-5)}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + (-5)} \right| + C = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - 5} \right| + C. \lrcorner$$

Зауваження. Додатково до таблиці основних невизначених інтегралів доцільно **запам'ятати** також інтеграли **1 – 5**.

Вправи для самостійного розв'язання

Обчислити невизначені інтеграли:

$$14. \int x^4 dx.$$

$$15. \int \frac{dx}{x^5}.$$

16. $\int \sqrt[3]{x} dx.$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}}.$

18. $\int 5^x dx.$

19. $\int \frac{dx}{4^x}.$

20. $\int \frac{dx}{x^2 + 4}.$

21. $\int \frac{dx}{2 + x^2}.$

22. $\int \frac{dx}{x^2 - 9}.$

23. $\int \frac{dx}{\sqrt{3 - x^2}}.$

24. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}.$

25. $\int \frac{dx}{\sqrt{4 + x^2}}.$

26. Довести формулу $\int k dx = kx + C$ (k – стала).

Відповіді:

14. $\frac{x^5}{5} + C.$

15. $-\frac{1}{4x^4} + C.$

16. $\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C.$

17. $\frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} + C.$

18. $\frac{5^x}{\ln 5} + C.$

19. $-\frac{1}{4^x \ln 4} + C.$

20. $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C.$

21. $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + C.$

22. $\frac{1}{6} \ln \left| \frac{x-3}{x+3} \right| + C.$

23. $\arcsin \frac{x}{\sqrt{3}} + C.$

24. $\ln \left| x + \sqrt{x^2 - 1} \right| + C.$

25. $\ln \left(x + \sqrt{x^2 + 4} \right) + C.$

2. Безпосереднє інтегрування

Безпосереднє обчислення невизначених інтегралів ґрунтується на тотожних перетвореннях підінтегральної функції та властивостях невизначеного інтеграла.

Властивості невизначеного інтеграла

1°. $\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$ (k – стала, $k \neq 0$).

$$2^{\circ}. \int (f_1(x) \pm f_2(x)) dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx.$$

Ця властивість узагальнюється на довільне скінченне число доданків:

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x) \pm \dots \pm f_m(x)) dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx \pm \dots \pm \int f_m(x) dx.$$

3° . Якщо $\int f(x) dx = F(x) + C$, то для будь-яких сталих k та b ($k \neq 0$)

$$\int f(kx+b) dx = \frac{1}{k} F(kx+b) + C.$$

Частинні випадки властивості 3° (відповідно при $b = 0$ та $k = 1$):

$$3.1^{\circ}. \int f(kx) dx = \frac{1}{k} F(kx) + C;$$

$$3.2^{\circ}. \int f(x+b) dx = F(x+b) + C.$$

Обчислити невизначені інтеграли, застосувавши властивість 1° :

$$27. \int \frac{3 dx}{\cos^2 x}.$$

$$\Gamma \int \frac{3 dx}{\cos^2 x} = 3 \int \frac{dx}{\cos^2 x} = 3(\operatorname{tg} x + C) = 3 \operatorname{tg} x + 3C \quad (\text{після застосування}$$

властивості 1° використали табличний інтеграл **VI**). Позначивши довільну сталу $3C$ знову через C , дістанемо

$$\int \frac{3 dx}{\cos^2 x} = 3 \operatorname{tg} x + C. \quad \rfloor$$

Зауваження. Надалі після обчислення невизначених інтегралів записуватимемо відразу сталу C , опускаючи подібні до наведених пояснення.

$$28. \int \frac{x}{2} dx.$$

$$\Gamma \int \frac{x}{2} dx = \int \frac{1}{2} x dx = \frac{1}{2} \int x dx = \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} + C = \frac{x^2}{4} + C$$

(після застосування властивості 1° скористалися табличним інтегралом **I** (приклад **2**)). \rfloor

$$29. \int \frac{dx}{4-x^2}.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{4-x^2} &= \int \frac{dx}{-(x^2-4)} = -\int \frac{dx}{x^2-2^2} = -\frac{1}{2 \cdot 2} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C = \\ &= -\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C \end{aligned}$$

(скористалися табличним інтегралом **IX** при $a=2$). \perp

Обчислити інтеграли, застосувавши властивості **1°** та **2°** :

30. $\int (6x^2 + \pi \sin x) dx \quad (\pi \approx 3,14).$

\perp Застосуємо послідовно властивості **2°** та **1°** :

$$\int (6x^2 + \pi \sin x) dx = \int 6x^2 dx + \int \pi \sin x dx = 6 \int x^2 dx + \pi \int \sin x dx .$$

Для обчислення інтегралів у правій частині рівності використовуємо табличні інтеграли відповідно **I** ($n=2$, приклад **3**) та **V** і остаточно дістаємо

$$\int (6x^2 + \pi \sin x) dx = 6 \frac{x^3}{3} + \pi(-\cos x) + C = 2x^3 - \pi \cos x + C . \quad \perp$$

31. $\int \left(4 - \frac{3}{x} + \frac{e^x}{2} \right) dx .$

\perp Застосуємо послідовно властивості **2°**, **1°** і табличні інтеграли **I** (приклад **1**), **II**, **III°** :

$$\begin{aligned} \int \left(4 - \frac{3}{x} + \frac{e^x}{2} \right) dx &= \int 4 dx - \int \frac{3}{x} dx + \int \frac{1}{2} e^x dx = \\ &= 4 \int dx - 3 \int \frac{1}{x} dx + \frac{1}{2} \int e^x dx = 4x - 3 \ln |x| + 0,5 e^x + C . \quad \perp \end{aligned}$$

32. $\int x \left(8x^2 + \frac{1}{x^3} \right) dx .$

\perp Спочатку розкриємо дужки:

$$\int x \left(8x^2 + \frac{1}{x^3} \right) dx = \int \left(8x^2 \cdot x + \frac{x}{x^3} \right) dx = \int \left(8x^3 + \frac{1}{x^2} \right) dx .$$

Далі застосуємо властивості **2°**, **1°** і табличний інтеграл **I** відповідно при $n=3$ та $n=-2$ (приклад **4**):

$$\int \left(8x^3 + \frac{1}{x^2} \right) dx = 8 \int x^3 dx + \int \frac{dx}{x^2} = 8 \frac{x^4}{4} + \left(-\frac{1}{x} \right) + C = 2x^4 - \frac{1}{x} + C .$$

Отже, $\int x \left(8x^2 + \frac{1}{x^3} \right) dx = 2x^4 - \frac{1}{x} + C$. \square

33. $\int \frac{3x^4 - 2}{x^3} dx$.

Γ Спочатку поділимо почленно чисельник на знаменник:

$$\int \frac{3x^4 - 2}{x^3} dx = \int \left(\frac{3x^4}{x^3} - \frac{2}{x^3} \right) dx = \int \left(3x - \frac{2}{x^3} \right) dx.$$

Далі застосуємо властивості 2° , 1° і табличний інтеграл **I** (приклади 2 та 7):

$$\int \left(3x - \frac{2}{x^3} \right) dx = 3 \int x dx - 2 \int \frac{dx}{x^3} = 3 \frac{x^2}{2} - 2 \left(-\frac{1}{2x^2} \right) + C = \frac{3}{2} x^2 + \frac{1}{x^2} + C.$$

Отже, $\int \frac{3x^4 - 2}{x^3} dx = \frac{3}{2} x^2 + \frac{1}{x^2} + C$. \square

34. $\int \frac{x^2 + 5}{x^2 - 1} dx$.

Γ Підінтегральна функція $\frac{x^2 + 5}{x^2 - 1}$ – неправильний раціональний

дріб (ступінь чисельника дорівнює степеню знаменника). Тому для інтегрування слід виділити цілу частину:

$$\frac{x^2 + 5}{x^2 - 1} = \frac{(x^2 - 1) + 6}{x^2 - 1} = 1 + \frac{6}{x^2 - 1}.$$

Тоді, застосувавши властивості 2° та

1° , матимемо

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 5}{x^2 - 1} dx &= \int \left(1 + \frac{6}{x^2 - 1} \right) dx = \int 1 dx + 6 \int \frac{1}{x^2 - 1} dx = \\ &= x + 6 \cdot \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C = x + 3 \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C \end{aligned}$$

(скористалися табличними інтегралами **I** (приклад 1) та **IX** $^\circ$). \square

35. $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$.

Γ Скориставшись відомою з тригонометрії формулою, дістанемо

$$\int \cos^2 \frac{x}{2} dx = \int \frac{1 + \cos x}{2} dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos x) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\int dx + \int \cos x \, dx \right) = \frac{1}{2} (x + \sin x) + C. \quad \square$$

Застосувавши властивість **3.1°**, довести формули:

$$36. \int e^{kx} dx = \frac{1}{k} e^{kx} + C \quad (k - \text{стала}, k \neq 0).$$

□ Ця формула є наслідком формули $\int e^x dx = e^x + C$ (табличний інтеграл **III°**) та властивості **3.1°**, в якій $f(x) = e^x$, $F(x) = e^x$. □

$$37. \int \cos kx \, dx = \frac{1}{k} \sin kx + C \quad (k - \text{стала}, k \neq 0).$$

□ Ця формула є наслідком формули $\int \cos x \, dx = \sin x + C$ (табличний інтеграл **IV**) та властивості **3.1°**, в якій $f(x) = \cos x$, $F(x) = \sin x$. □

Застосувавши властивість **3.2°**, довести формули:

$$38. \int \frac{dx}{x+b} = \ln|x+b| + C \quad (b - \text{стала}).$$

□ Ця формула є наслідком формули $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$ (табличний інтеграл **II**) та властивості **3.2°**, в якій $f(x) = \frac{1}{x}$, $F(x) = \ln|x|$. □

$$39. \int \frac{dx}{\sqrt{x+b}} = 2\sqrt{x+b} + C \quad (b - \text{стала}).$$

□ Ця формула є наслідком формули $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$ (приклад **5**) та властивості **3.2°**, в якій $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $F(x) = 2\sqrt{x}$. □

Обчислити невизначені інтеграли:

$$40. \int 3^{\frac{x}{2}} dx.$$

┌ Оскільки $\int 3^x dx = \frac{3^x}{\ln 3} + C$ (табличний інтеграл **III** при $a = 3$),

то за властивістю **3.1**^o ($k = \frac{1}{2}$) дістанемо

$$\int 3^{\frac{x}{2}} dx = \int 3^{\frac{1}{2}x} dx = \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot \frac{3^{\frac{1}{2}x}}{\ln 3} + C = \frac{2}{\ln 3} 3^{\frac{x}{2}} + C. \quad \lrcorner$$

41. $\int \sin 4x dx$.

┌ Оскільки $\int \sin x dx = -\cos x + C$ (табличний інтеграл **V**), то за властивістю **3.1**^o ($k = 4$) дістанемо

$$\int \sin 4x dx = \frac{1}{4}(-\cos 4x) + C = -\frac{1}{4} \cos 4x + C. \quad \lrcorner$$

42. $\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{5}}$.

┌ Оскільки $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$ (табличний інтеграл **VII**), то за властивістю **3.1**^o ($k = \frac{1}{5}$) дістанемо

$$\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{5}} = \int \frac{dx}{\sin^2 \frac{1}{5}x} = \frac{1}{\frac{1}{5}} \left(-\operatorname{ctg} \frac{1}{5}x \right) + C = -5 \operatorname{ctg} \frac{x}{5} + C. \quad \lrcorner$$

43. $\int \frac{dx}{9x^2 + 1}$.

┌ Оскільки $\int \frac{dx}{x^2 + 1} = \operatorname{arctg} x + C$ (табличний інтеграл **VIII**^o), то виконавши тотожне перетворення підінтегральної функції, маємо

$$\int \frac{dx}{9x^2 + 1} = \int \frac{dx}{(3x)^2 + 1} = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} 3x + C$$

(скористалися властивістю **3.1**^o ($k = 3$)). \lrcorner

44. $\int (x-1)^4 dx$.

Г Оскільки $\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + C$, то за властивістю **3.2°** ($b = -1$)

$$\int (x-1)^4 dx = \int (x+(-1))^4 dx = \frac{(x+(-1))^5}{5} + C = \frac{(x-1)^5}{5} + C. \quad \text{Г}$$

45. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}}.$

Г Розглянемо табличний інтеграл **X**, $a = 2$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{2} + C. \quad \text{Тоді за властивістю **3.1°**,$$

виконавши тотожне перетворення, дістанемо

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4-(\sqrt{3}x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{\sqrt{3}x}{2} + C. \quad \text{Г}$$

46. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}}.$

Г Оскільки $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$ (приклад **5**), то виконавши тотожні

перетворення, дістанемо

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-1 \cdot x + 1}} = \frac{1}{-1} \cdot 2\sqrt{-1 \cdot x + 1} + C = -2\sqrt{1-x} + C$$

(скористалися властивістю **3°** ($k = -1, b = 1$)). Г

47. $\int \frac{dx}{(4x+5)^2}.$

Г Оскільки $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$ (приклад **4**), то за властивістю **3°**

($k = 4, b = 5$) маємо

$$\int \frac{dx}{(4x+5)^2} = \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{4x+5} \right) + C = -\frac{1}{4(4x+5)} + C. \quad \text{Г}$$

48. $\int \frac{dx}{x^2+4x+13}.$

Г Спочатку виділимо в знаменнику повний квадрат відносно x :

$$x^2+4x+13 = (x^2+2 \cdot x \cdot 2+2^2)+9 = (x+2)^2+9$$

(скористалися формулою $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$).

Обчислюємо інтеграл:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 13} = \int \frac{dx}{(x+2)^2 + 9} = \int \frac{dx}{(x+2)^2 + 3^2} = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{3} + C$$

(скористалися табличним інтегралом VIII при $a = 3$ та властивістю 3.2° ($b = 2$)).]

49. $\int \frac{dx}{\sqrt{6x - x^2 - 8}}$.

┌ Спочатку виділимо повний квадрат відносно x :

$$\begin{aligned} 6x - x^2 - 8 &= -(x^2 - 6x + 8) = -[(x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2) - 1] = \\ &= -[(x-3)^2 - 1] = 1 - (x-3)^2 \end{aligned}$$

(скористалися формулою $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$).

Обчислюємо інтеграл:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{6x - x^2 - 8}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - (x-3)^2}} = \arcsin(x-3) + C$$

(скористалися табличним інтегралом X° та властивістю 3.2° ($b = -3$)).]

50. $\int \frac{x-3}{5x-4} dx$.

┌ Підінтегральна функція $\frac{x-3}{5x-4}$ – неправильний раціональний

дріб (ступінь чисельника дорівнює степеню знаменника). Тому для інтегрування слід виділити цілу частину:

$$\frac{x-3}{5x-4} = \frac{\frac{1}{5}(5x-4) - \frac{11}{5}}{5x-4} = \frac{1}{5} \left(1 - \frac{11}{5x-4} \right). \text{Тоді, застосувавши властивості}$$

1° та 2°, матимемо

$$\int \frac{x-3}{5x-4} dx = \frac{1}{5} \int \left(1 - \frac{11}{5x-4} \right) dx = 0,2 \left(\int dx - 11 \int \frac{dx}{5x + (-4)} \right) =$$

$$= 0,2 \left(x - 11 \cdot \frac{1}{5} \ln |5x + (-4)| \right) + C = 0,2x - 0,44 \ln |5x - 4| + C$$

(для обчислення другого інтеграла скористалися табличним інтегралом II та властивістю $\mathbf{3}^{\circ}$ ($k = 5$, $b = -4$)). \square

$$51. \int \frac{x^2 + 3x + 7}{x + 1} dx.$$

\square Підінтегральна функція – неправильний раціональний дріб (ступінь чисельника більший за ступінь знаменника). Виділимо цілу частину:

$$\frac{x^2 + 3x + 7}{x^2 + x} \Big| \frac{x+1}{x+2}; \quad \frac{x^2 + 3x + 7}{x + 1} = x + 2 + \frac{5}{x + 1}.$$

$$\frac{2x + 7}{2x + 2}$$

$$5$$

$$\text{Отже, } \int \frac{x^2 + 3x + 7}{x + 1} dx = \int \left(x + 2 + \frac{5}{x + 1} \right) dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + 2x + 5 \ln |x + 1| + C. \quad \square$$

$$52. \int \frac{dx}{x^4 + x^2}.$$

\square Розкладемо підінтегральну функцію на доданки:

$$\frac{1}{x^4 + x^2} = \frac{1}{(x^2 + 1)x^2} = \frac{(x^2 + 1) - x^2}{(x^2 + 1)x^2} =$$

$$= \frac{x^2 + 1}{(x^2 + 1)x^2} - \frac{x^2}{(x^2 + 1)x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 + 1}.$$

Тоді матимемо

$$\int \frac{dx}{x^4 + x^2} = \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{x^2 + 1} = -\frac{1}{x} - \arctg x + C. \quad \square$$

$$53. \int (x + 1)^{10} x dx.$$

$$\square \int (x + 1)^{10} x dx = \int (x + 1)^{10} ((x + 1) - 1) dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \int \left((x+1)^{11} - (x+1)^{10} \right) dx = \int (x+1)^{11} dx - \int (x+1)^{10} dx = \\
&= \frac{(x+1)^{12}}{12} - \frac{(x+1)^{11}}{11} + C
\end{aligned}$$

(скористалися табличним інтегралом **I** та властивістю **3.2°** ($b=1$)). \square

54. $\int \frac{4-x}{\sqrt{x-1}} dx.$

$$\begin{aligned}
\Gamma \int \frac{4-x}{\sqrt{x-1}} dx &= \int \frac{3-(x-1)}{\sqrt{x-1}} dx = \int \left(\frac{3}{\sqrt{x-1}} - \frac{x-1}{\sqrt{x-1}} \right) dx = \\
&= 3 \int \frac{dx}{\sqrt{x-1}} - \int \sqrt{x-1} dx = 3 \cdot 2\sqrt{x-1} - \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + C = \\
&= 6\sqrt{x-1} - \frac{2}{3}(\sqrt{x-1})^3 + C.
\end{aligned}$$

Тут скористалися прикладами **5**, **6** та властивістю **3.2°** ($b=-1$).
Зауважимо також, що перший інтеграл можна просто обчислити за формулою з прикладу **39**. \square

55. $\int \sin 5x \cos 2x dx.$

Γ Скориставшись формулою

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$$

та властивостями невизначеного інтеграла, дістанемо

$$\begin{aligned}
\int \sin 5x \cos 2x dx &= \int \frac{1}{2} [\sin(5x - 2x) + \sin(5x + 2x)] dx = \\
&= \frac{1}{2} \int (\sin 3x + \sin 7x) dx = \frac{1}{3} \left(\int \sin 3x dx + \int \sin 7x dx \right) = \\
&= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3} \cos 3x - \frac{1}{7} \cos 7x \right) + C = -\frac{1}{6} \cos 3x - \frac{1}{14} \cos 7x + C. \quad \square
\end{aligned}$$

56. $\int (4 - \sin 3x)^2 dx.$

$$\begin{aligned}
\Gamma \int (4 - \sin 3x)^2 dx &= \int (16 - 8 \sin 3x + \sin^2 3x) dx = \\
&= \int 16 dx - \int 8 \sin 3x dx + \int \frac{1}{2} (1 - \cos 6x) dx = \\
&= 16x - 8 \int \sin 3x dx + \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 6x dx =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 16x - 8 \cdot \frac{1}{3}(-\cos 3x) + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \sin 6x + C = \\
&= 16 \frac{1}{2} x + \frac{8}{3} \cos 3x - \frac{1}{12} \sin 6x + C. \quad \square
\end{aligned}$$

Вправи для самостійного розв'язання

Обчислити невизначені інтеграли:

57. $\int \sqrt{2} \, dx$.

58. $\int \frac{9dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

59. $\int (9x^5 - \sqrt[5]{x}) \, dx$.

60. $\int 3^x (4 + 3^{1-x}) \, dx$.

61. $\int \operatorname{ctg}^2 x \, dx$.

62. $\int \left(\frac{1-x}{x} \right)^2 \, dx$.

63. $\int \frac{x^4 \, dx}{x^2 + 1}$.

64. $\int e^{3x} \, dx$.

65. $\int e^{-x} \, dx$.

66. $\int \cos \frac{x}{6} \, dx$.

67. $\int \frac{dx}{x+4}$.

68. $\int \frac{3dx}{x-9}$.

69. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$.

70. $\int \frac{dx}{2\sqrt{x-16}}$.

71. $\int \frac{dx}{(6+5x)^3}$.

72. $\int \sqrt{9-4x} \, dx$.

73. $\int \frac{dx}{\cos^2(3x-7)}$.

74. $\int \frac{dx}{\sin^2(6-x)}$.

75. $\int \frac{dx}{9-5x^2}$.

76. $\int \sin^2 x \, dx$.

77. $\int \frac{10dx}{x^2-8x-9}$.

78. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-6x-9x^2}}$.

79. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 3x + 0,25}}.$

80. $\int \frac{x dx}{3x + 2}.$

81. $\int \frac{3x^2 - x + 1}{x - 2} dx.$

82. $\int \frac{8 dx}{x^4 - 4x^2}.$

83. $\int \frac{x - 5}{(x - 4)^3} dx.$

84. $\int \sqrt[3]{x + 1} x dx.$

85. $\int 2 \cos(5x + 2) \cos(4x - 3) dx.$

86. $\int (\cos x - \sin x)^2 dx.$

Відповіді:

57. $\sqrt{2}x + C.$

58. $9 \arcsin \frac{x}{3} + C.$

59. $\frac{3}{2}x^6 - \frac{5}{6}x^{\frac{6}{5}} + C.$

60. $\frac{4}{\ln 3}3^x + 3x + C.$

61. $-\operatorname{ctg} x - x + C.$

62. $x - \frac{1}{x} - 2 \ln|x| + C.$

63. $\frac{1}{3}x^3 - x + \operatorname{arctg} x + C.$

64. $\frac{1}{3}e^{3x} + C.$

65. $-e^{-x} + C.$

66. $6 \sin \frac{x}{6} + C.$

67. $\ln|x + 4| + C.$

68. $3 \ln|x - 9| + C.$

69. $2\sqrt{x + 1} + C.$

70. $\sqrt{x - 16} + C.$

71. $-\frac{1}{10(5x + 6)^2} + C.$

72. $-\frac{1}{6}(9 - 4x)^{\frac{3}{2}} + C.$

73. $\frac{1}{3} \operatorname{tg}(3x - 7) + C.$

74. $\operatorname{ctg}(6 - x) + C.$

75. $-\frac{1}{6\sqrt{5}} \ln \left| \frac{\sqrt{5x-3}}{\sqrt{5x+3}} \right| + C.$ 76. $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin 2x + C.$
77. $\ln \left| \frac{x-9}{x+1} \right| + C.$ 78. $\frac{1}{3} \arcsin \frac{3x+1}{\sqrt{3}} + C.$
79. $\ln \left| x+1,5 + \sqrt{x^2+3x+0,25} \right| + C.$ 80. $\frac{x}{3} - \frac{2}{9} \ln |3x+2| + C.$
81. $1,5x^2 + 5x + 11 \ln |x-2| + C.$ 82. $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + \frac{2}{x} + C.$
83. $\frac{1}{2(x-4)^2} - \frac{1}{x-4} + C.$ 84. $\frac{3}{7}(x+1)^{7/3} - \frac{3}{4}(x+1)^{4/3} + C.$
85. $\sin(x+5) + \frac{1}{9} \sin(9x-1) + C.$ 86. $x + \frac{1}{2} \cos 2x + C.$

3. Заміна змінної

Обчислення невизначених інтегралів методом заміни змінної ґрунтується на формулі

$$\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = F(\varphi(x)) + C, \quad (1)$$

де $F(x)$ – первісна функції $f(x)$; $\varphi'(x)$ – похідна функції $\varphi(x)$.

При застосуванні формули (1) на практиці зручно перейти до нової змінної t , поклавши $t = \varphi(x)$. Розглядаючи t як функцію змінної x , запишемо диференціал $dt = \varphi'(x) dx$. В результаті приходимо до інтеграла відносно змінної t : $\int f(t) dt = F(t) + C$. Поклавши у правій частині цієї рівності $t = \varphi(x)$, дістаємо остаточно $F(\varphi(x)) + C$.

Якщо маємо інтеграл $\int p(x) dx$, то його обчислення методом заміни змінної зручно оформляти в загальному випадку наступним чином:

$$\int p(x) dx = \int f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = \left| \begin{array}{l} t = \varphi(x) \\ dt = \varphi'(x) dx \end{array} \right| = \\ = \int f(t) dt = F(t) + C = F(\varphi(x)) + C. \quad (1')$$

Обчислити невизначені інтеграли:

87. $\int \sin^2 x \cos x dx$.

┌ Оскільки $(\sin x)' = \cos x$, то за формулою (1), яку застосовуємо у спосіб (1'), дістанемо

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \int t^2 dt = \frac{1}{3}t^3 + C = \frac{1}{3}\sin^3 x + C$$

(обчислення інтеграла $\int t^2 dt$ можна виконати як за аналогією з прикладом 3, так і у вже відомій формулі $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$ покласти $x = t$). ┘

88. $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

┌ Оскільки $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, то за формулою (1) дістанемо

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \left| \begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x} dx = \frac{dx}{x} \end{array} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{\ln x} + C$$

(для обчислення інтеграла $\int \frac{dt}{\sqrt{t}}$ скористалися прикладом 5, в якому поклали $x = t$). ┘

89. $\int e^x \cos(e^x) dx$.

┌ Оскільки $(e^x)' = e^x$, то за формулою (1) дістанемо

$$\int e^x \cos(e^x) dx = \int \cos(e^x) \cdot e^x dx = \left| \begin{array}{l} t = e^x \\ dt = e^x dx \end{array} \right| =$$

$$= \int \cos t \, dt = \sin t + C = \sin(e^x) + C . \quad \square$$

90. $\int \frac{\cos x \, dx}{\sin^2 x} .$

$$\square \int \frac{\cos x \, dx}{\sin^2 x} = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x \, dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{\sin x} + C$$

(скористалися прикладом 4). \square

91. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} \, dx .$

\square Оскільки $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, то дістанемо

$$\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} \, dx = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} x \\ dt = \frac{1}{\cos^2 x} \, dx \end{array} \right| = \int \sqrt{t} \, dt = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} (\operatorname{tg} x)^{\frac{3}{2}} + C$$

(скористалися прикладом 6). \square

92. $\int \frac{6^{\operatorname{arctg} x}}{x^2 + 1} \, dx .$

\square Оскільки $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{x^2 + 1}$, то дістанемо

$$\int \frac{6^{\operatorname{arctg} x}}{x^2 + 1} \, dx = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{arctg} x \\ dt = \frac{1}{x^2 + 1} \, dx \end{array} \right| = \int 6^t \, dt = \frac{6^t}{\ln 6} + C = \frac{1}{\ln 6} 6^{\operatorname{arctg} x} + C$$

(скористалися табличним інтегралом III при $a = 6$). \square

93. $\int \frac{(\arcsin x)^5}{\sqrt{1-x^2}} \, dx .$

\square Оскільки $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, то дістанемо

$$\int \frac{(\arcsin x)^5}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left| \begin{array}{l} t = \arcsin x \\ dt = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \end{array} \right| = \int t^5 dt = \frac{t^6}{6} + C = \frac{1}{6}(\arcsin x)^6 + C$$

(скористалися табличним інтегралом I при $n = 5$).]

$$94. \int \frac{\sin x dx}{(1 - \cos x)^2 + 1}.$$

Помічаємо, що $(1 - \cos x)' = 0 - (-\sin x) = \sin x$. Тому за формулою (1)

$$\int \frac{\sin x dx}{(1 - \cos x)^2 + 1} = \left| \begin{array}{l} t = 1 - \cos x \\ dt = \sin x dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \operatorname{arctg} t + C = \\ = \operatorname{arctg}(1 - \cos x) + C.]$$

$$95. \int \frac{2x + \cos x}{\sqrt{x^2 + \sin x + 1}} dx.$$

Помічаємо, що $(x^2 + \sin x + 1)' = 2x + \cos x$. Тому можемо застосувати формулу (1):

$$\int \frac{2x + \cos x}{\sqrt{x^2 + \sin x + 1}} dx = \left| \begin{array}{l} t = x^2 + \sin x + 1 \\ dt = (2x + \cos x) dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \\ = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{x^2 + \sin x + 1} + C.]$$

$$96. \int e^{x \ln x} (\ln x + 1) dx.$$

Помічаємо, що $(x \cdot \ln x)' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$. Тому

$$\int e^{x \ln x} (\ln x + 1) dx = \left| \begin{array}{l} t = x \ln x \\ dt = (\ln x + 1) dx \end{array} \right| = \int e^t dt = e^t + C = e^{x \ln x} + C.]$$

$$97. \int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{\sin^4 x + 1}}.$$

┌ Зауважимо, що $(\sin^2 x)' = 2 \sin x \cdot \cos x = \sin 2x$. Тому

$$\int \frac{\sin 2x \, dx}{\sqrt{\sin^4 x + 1}} = \int \frac{\sin 2x \, dx}{\sqrt{(\sin^2 x)^2 + 1}} = \left| \begin{array}{l} t = \sin^2 x \\ dt = \sin 2x \, dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 1}} = \\ = \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}) + C = \ln(\sin^2 x + \sqrt{\sin^4 x + 1}) + C. \quad \lrcorner$$

Розглянемо ряд інтегралів, в яких підінтегральну функцію потрібно помножити (і поділити) на деяке число, щоб звести їх обчислення до формули (1).

Обчислити невизначені інтеграли:

98. $\int \frac{x \, dx}{x^2 - 1}$.

┌ Оскільки $(x^2 - 1)' = 2x$, то виконавши тотожне перетворення

підінтегральної функції, дістанемо

$$\int \frac{x \, dx}{x^2 - 1} = \int \frac{2x \, dx}{2(x^2 - 1)} = \left| \begin{array}{l} t = x^2 - 1 \\ dt = 2x \, dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{2t} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \\ = \frac{1}{2} \ln|t| + C = \frac{1}{2} \ln|x^2 - 1| + C. \quad \lrcorner$$

99. $\int x^2 \sin(x^3) \, dx$.

┌ Зауваживши, що $(x^3)' = 3x^2$, дістанемо

$$\int x^2 \sin(x^3) \, dx = \int \frac{1}{3} \sin(x^3) \cdot 3x^2 \, dx = \left| \begin{array}{l} t = x^3 \\ dt = 3x^2 \, dx \end{array} \right| = \int \frac{1}{3} \sin t \, dt = \\ = \frac{1}{3} \int \sin t \, dt = \frac{1}{3} (-\cos t) + C = -\frac{1}{3} \cos(x^3) + C. \quad \lrcorner$$

100. $\int \operatorname{tg} x \, dx$.

┌ Нагадаємо, що $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Так як $(\cos x)' = -\sin x$, то маємо

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = \int (-1) \frac{-\sin x}{\cos x} \, dx = \left| \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x \, dx \end{array} \right| = -\int \frac{dt}{t} =$$

$$= -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C. \quad \square$$

101. $\int \frac{\operatorname{ctg}^3 x}{\sin^2 x} \, dx.$

□ Зауваживши, що $(\operatorname{ctg} x)' = \frac{1}{-\sin^2 x}$, дістанемо

$$\int \frac{\operatorname{ctg}^3 x}{\sin^2 x} \, dx = \int (-1) \frac{(\operatorname{ctg} x)^3}{-\sin^2 x} \, dx = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{ctg} x \\ dt = \frac{dx}{-\sin^2 x} \end{array} \right| =$$

$$= -\int t^3 \, dt = -\frac{t^4}{4} + C = -\frac{\operatorname{ctg}^4 x}{4} + C. \quad \square$$

102. $\int \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^2} \, dx.$

□ Зауваживши, що $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, дістанемо

$$\int \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^2} \, dx = -\int \sin \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \, dx = \left| \begin{array}{l} t = \frac{1}{x} \\ dt = -\frac{1}{x^2} \, dx \end{array} \right| =$$

$$= -\int \sin t \, dt = -(-\cos t) + C = \cos \frac{1}{x} + C. \quad \square$$

103. $\int \frac{4^x \, dx}{\cos^2 4^x}.$

□ Оскільки $(4^x)' = 4^x \ln 4$, то маємо

$$\int \frac{4^x \, dx}{\cos^2 4^x} = \frac{1}{\ln 4} \int \frac{4^x \ln 4 \, dx}{\cos^2 4^x} = \left| \begin{array}{l} t = 4^x \\ dt = 4^x \ln 4 \, dx \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{\ln 4} \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{1}{\ln 4} \operatorname{tg} t + C = \frac{\operatorname{tg} 4^x}{\ln 4} + C. \quad \lrcorner$$

104. $\int \frac{\cos \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}} dx.$

┌ Знайдемо похідну: $(\sqrt[3]{x^2})' = \left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$ Тому

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}} dx &= \frac{3}{2} \int \cos \sqrt[3]{x^2} \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} dx = \left| \begin{array}{l} t = \sqrt[3]{x^2} \\ dt = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} dx \end{array} \right| = \\ &= \frac{3}{2} \int \cos t dt = \frac{3}{2} \sin t + C = \frac{3}{2} \sin \sqrt[3]{x^2} + C. \quad \lrcorner \end{aligned}$$

105. $\int \frac{(2x+1) dx}{2x^2+2x-5}.$

┌ Зауваживши, що $(2x^2+2x-5)' = 4x+2 = 2(2x+1),$ знаходимо

$$\begin{aligned} \int \frac{(2x+1) dx}{2x^2+2x-5} &= \frac{1}{2} \int \frac{(4x+2) dx}{2x^2+2x-5} = \left| \begin{array}{l} t = 2x^2+2x-5 \\ dt = (4x+2) dx \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln |t| + C = \frac{1}{2} \ln |2x^2+2x-5| + C. \quad \lrcorner \end{aligned}$$

106. $\int \frac{3^x dx}{9^x - 1}.$

┌ Виконавши тотожні перетворення підінтегральної функції, дістанемо

$$\begin{aligned} \int \frac{3^x dx}{9^x - 1} &= \int \frac{3^x dx}{(3^x)^2 - 1} = \frac{1}{\ln 3} \int \frac{3^x \ln 3 dx}{(3^x)^2 - 1} = \left| \begin{array}{l} t = 3^x \\ dt = 3^x \ln 3 dx \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{\ln 3} \int \frac{dt}{t^2 - 1} = \frac{1}{\ln 3} \cdot \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = \frac{1}{2 \ln 3} \ln \left| \frac{3^x - 1}{3^x + 1} \right| + C. \quad \lrcorner \end{aligned}$$

$$107. \int \frac{\sin x \, dx}{3 + \sin^2 x}.$$

┌ Скористаємося формулою $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x \, dx}{3 + \sin^2 x} &= \int \frac{\sin x \, dx}{4 - \cos^2 x} = \int \frac{1}{4 - t^2} \left| \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x \, dx \end{array} \right| = \\ &= \int \frac{-dt}{4 - t^2} = \int \frac{dt}{t^2 - 2^2} = \frac{1}{2 \cdot 2} \ln \left| \frac{t-2}{t+2} \right| + C = \\ &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\cos x - 2}{\cos x + 2} \right| + C = \frac{1}{4} \ln \frac{2 - \cos x}{2 + \cos x} + C. \quad \lrcorner \end{aligned}$$

$$108. \int \frac{dx}{4 \sin^2 x + 7 \cos^2 x}.$$

┌ Виконуючи тотожні перетворення та заміну змінної, дістанемо

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{4 \sin^2 x + 7 \cos^2 x} &= \int \frac{dx}{\left(4 \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 7 \right) \cos^2 x} = \\ &= \int \frac{dx}{(4 \operatorname{tg}^2 x + 7) \cos^2 x} = \int \frac{1}{4 \operatorname{tg}^2 x + 7} \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} x \\ dt = \frac{dx}{\cos^2 x} \end{array} \right| = \int \frac{dt}{4t^2 + 7} = \\ &= \int \frac{dt}{(2t)^2 + (\sqrt{7})^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2t}{\sqrt{7}} + C = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{tg} x}{\sqrt{7}} + C. \quad \lrcorner \end{aligned}$$

Вправи для самостійного розв'язання

Обчислити невизначені інтеграли:

$$109. \int 2^{\sin x} \cos x \, dx.$$

$$110. \int \frac{(2x+5) \, dx}{\sqrt{x^2 + 5x + 9}}.$$

$$111. \int \frac{dx}{x \sqrt{\ln^2 x - 4}}.$$

$$112. \int \frac{dx}{(\arcsin x)^3 \sqrt{1-x^2}}.$$

$$113. \int \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{1+x^2} dx.$$

$$115. \int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 9}.$$

$$117. \int \frac{\sin x}{e^{\cos x}} dx.$$

$$119. \int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}} dx.$$

$$121. \int \frac{\cos x \sin x dx}{\cos^2 x - 16}.$$

$$123. \int \frac{x^3 dx}{x^4 + 1}.$$

$$125. \int \frac{5^x dx}{\sqrt{1-25^x}}.$$

$$127. \int \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x^2}} dx.$$

$$129. \int \frac{dx}{\sqrt{\cos^2 x (9 \cos^2 x - \sin^2 x)}}.$$

$$114. \int \cos^3 x dx.$$

$$116. \int \operatorname{ctg} x dx.$$

$$118. \int x\sqrt{1-x^2} dx.$$

$$120. \int \frac{e^{2x} dx}{e^{2x} + 9}.$$

$$122. \int \frac{x^4 dx}{\sin^2(x^5)}.$$

$$124. \int \frac{x dx}{x^4 + 1}.$$

$$126. \int \frac{dx}{\sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x}}.$$

$$128. \int \frac{\cos x dx}{\sqrt{6 - \cos^2 x}}.$$

$$130. \int \frac{(x+1) dx}{\sqrt{3-4x-6x^2-4x^3-x^4}}.$$

Відповіді:

$$109. \frac{1}{\ln 2} 2^{\sin x} + C.$$

$$111. \ln \left| \ln x + \sqrt{\ln^2 x - 4} \right| + C.$$

$$113. 0,25 (\operatorname{arctg} x)^4 + C.$$

$$115. \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{e^x}{3} + C.$$

$$117. e^{-\cos x} + C.$$

$$110. 2\sqrt{x^2 + 5x + 9} + C.$$

$$112. -\frac{1}{2(\arcsin x)^2} + C.$$

$$114. \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + C.$$

$$116. \ln |\sin x| + C.$$

$$118. -\frac{1}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C.$$

$$119. -1,5 (\cos x)^{\frac{2}{3}} + C.$$

$$120. \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + 9) + C.$$

$$121. -\frac{1}{2} \ln(16 - \cos^2 x) + C.$$

$$122. -0,2 \operatorname{ctg}(x^5) + C.$$

$$123. \frac{1}{4} \ln(x^4 + 1) + C.$$

$$124. \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(x^2) + C.$$

$$125. \frac{1}{\ln 5} \arcsin(5^x) + C.$$

$$126. 2 \operatorname{tg} \sqrt{x} + C.$$

$$127. -0,5 e^{\frac{1}{x^2}} + C.$$

$$128. \ln(\sin x + \sqrt{\sin^2 x + 5}) + C.$$

$$129. \arcsin \frac{\operatorname{tg} x}{3} + C.$$

$$130. \frac{1}{2} \arcsin \frac{(x+1)^2}{2} + C.$$

4. Інтегрування частинами

Обчислення невизначених інтегралів методом інтегрування частинами полягає у використанні формули

$$\int u dv = uv - \int v du, \quad (2)$$

де u та v – функції змінної x ; $du = u'(x) dx$, $dv = v'(x) dx$.

Якщо потрібно обчислити інтеграл $\int f(x) dx$, то підінтегральний вираз $f(x) dx$ слід представити у вигляді $u dv$ так, щоб інтеграл у правій частині формули (2) був простішим за заданий $\int f(x) dx = \int u dv$. Зауважимо, що функція v , яка фігурує у правій частині (2), знаходиться за очевидною формулою $v = \int v'(x) dx = \int dv$, яка означає, що функція $v(x)$ є первісною своєї похідної $v'(x)$. Звідси випливає, що функція v визначається неоднозначно.

Обчислити невизначені інтеграли:

$$131. \int x \cos x dx.$$

□ Покладемо $u = x$, $dv = \cos x dx$. Тоді $du = (x)' dx = 1 \cdot dx = dx$, $v = \int dv = \int \cos x dx = \sin x$ (беремо заради простоти $C = 0$). Застосовуючи формулу (2), дістанемо

$$\int x \cos x \, dx = x \cdot \sin x - \int \sin x \, dx = \\ = x \sin x - (-\cos x) + C = x \sin x + \cos x + C. \quad \square$$

Зауваження. Якщо для обчислення інтеграла $\int x \cos x \, dx$ покласти, наприклад, $u = \cos x$ і $dv = x \, dx$, то після застосування формули (2) дістанемо праворуч інтеграл $\int \left(-\frac{x^2}{2}\right) \sin x \, dx$, який складніший за заданий.

132. $\int (3x-1)e^x \, dx.$

\square Покладемо $u = 3x-1$, $dv = e^x \, dx$. Тоді $du = (3x-1)' \, dx = 3 \, dx$, $v = \int dv = \int e^x \, dx = e^x$. Застосовуючи формулу (2), дістанемо

$$\int (3x-1)e^x \, dx = (3x-1)e^x - \int e^x 3 \, dx = (3x-1)e^x - 3 \int e^x \, dx = \\ = (3x-1)e^x - 3e^x + C = e^x(3x-4) + C. \quad \square$$

133. $\int xe^{2x} \, dx.$

\square Покладемо $u = x$, $dv = e^{2x} \, dx$. Тоді $du = dx$,

$$v = \int e^{2x} \, dx = \frac{1}{2}e^{2x}.$$

За формулою (2) знаходимо

$$\int xe^{2x} \, dx = x \frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x} \, dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} \, dx = \\ = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}e^{2x} + C = \frac{1}{2}e^{2x} \left(x - \frac{1}{2}\right) + C = \frac{1}{4}e^{2x}(2x-1) + C. \quad \square$$

134. $\int x^2 \cos 3x \, dx.$

\square Для обчислення даного інтеграла формулу (2) доведеться застосовувати двічі. Покладемо $u = x^2$, $dv = \cos 3x \, dx$. Тоді $du = (x^2)' \, dx = 2x \, dx$, $v = \int \cos 3x \, dx = \frac{1}{3} \sin 3x$. Застосуємо формулу (2):

$$\int x^2 \cos 3x \, dx = x^2 \frac{1}{3} \sin 3x - \int \frac{1}{3} \sin 3x \cdot 2x \, dx = \\ = \frac{1}{3} x^2 \sin 3x - \frac{2}{3} \int x \sin 3x \, dx. \quad (3)$$

Обчислимо інтеграл $\int x \sin 3x \, dx$. Покладемо $u = x$,
 $dv = \sin 3x \, dx$. Тоді $du = dx$, $v = \int \sin 3x \, dx = -\frac{1}{3} \cos 3x$. Отже,

$$\int x \sin 3x \, dx = x \left(-\frac{1}{3} \cos 3x \right) - \int \left(-\frac{1}{3} \cos 3x \right) dx = -\frac{1}{3} x \cos 3x + \frac{1}{3} \int \cos 3x \, dx =$$

$$= -\frac{1}{3} x \cos 3x + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \sin 3x + C = -\frac{1}{3} x \cos 3x + \frac{1}{9} \sin 3x + C.$$

Підставляючи знайдений вираз у формулу (3) замість $\int x \sin 3x \, dx$,
остаточно знаходимо

$$\int x^2 \cos 3x \, dx = \frac{1}{3} x^2 \sin 3x - \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{3} x \cos 3x + \frac{1}{9} \sin 3x \right) + C =$$

$$= \frac{1}{3} x^2 \sin 3x + \frac{2}{9} x \cos 3x - \frac{2}{27} \sin 3x + C =$$

$$= \left(\frac{x^2}{3} - \frac{2}{27} \right) \sin 3x + \frac{2}{9} x \cos 3x + C. \quad \square$$

135. $\int \frac{x \, dx}{\cos^2 x}$.

Покладемо $u = x$, $dv = \frac{dx}{\cos^2 x}$. Тоді $du = dx$,

$v = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$. За формулою (2) знаходимо

$$\int \frac{x \, dx}{\cos^2 x} = x \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x \, dx = x \operatorname{tg} x - (-\ln |\cos x|) + C =$$

$$= x \operatorname{tg} x + \ln |\cos x| + C$$

(скористалися прикладом **100**). \square

136. $\int x \operatorname{arctg} x \, dx$.

Покладемо $u = \operatorname{arctg} x$, $dv = x \, dx$. Тоді

$$du = (\operatorname{arctg} x)' \, dx = \frac{1}{x^2 + 1} \, dx, \quad v = \int x \, dx = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{x^2 + 1}{2} \quad (\text{тут зручно}$$

взяти $C = \frac{1}{2}$). За формулою (2)

$$\int x \operatorname{arctg} x \, dx = \operatorname{arctg} x \cdot \frac{x^2+1}{2} - \int \frac{x^2+1}{2} \cdot \frac{1}{x^2+1} \, dx =$$

$$= \frac{x^2+1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int dx = \frac{1}{2}(x^2+1) \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x + C. \quad \lrcorner$$

137. $\int \ln x \, dx.$

┌ Покладемо $u = \ln x$, $dv = dx$. Тоді $du = \frac{1}{x} dx$, $v = \int dx = x$.

Застосовуючи формулу (2), дістанемо

$$\int \ln x \, dx = \ln x \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x \ln x - \int dx =$$

$$= x \ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C. \quad \lrcorner$$

138. $\int \frac{\ln(x-1)}{x^2} \, dx.$

┌ Покладемо $u = \ln(x-1)$, $dv = \frac{dx}{x^2}$. Тоді

$$du = (\ln(x-1))' \, dx = \frac{1}{x-1} \, dx, \quad v = \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}.$$

За формулою (2)

$$\int \frac{\ln(x-1)}{x^2} \, dx = \ln(x-1) \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) - \int \left(-\frac{1}{x}\right) \frac{1}{x-1} \, dx =$$

$$= -\frac{\ln(x-1)}{x} + \int \frac{dx}{x(x-1)}. \quad (4)$$

Обчислимо інтеграл у правій частині формули (4). Для цього використаємо прийом розкладу підінтегральної функції на доданки (див. приклад 52):

$$\int \frac{dx}{x(x-1)} = \int \frac{x - (x-1)}{x(x-1)} \, dx = \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} \right) dx =$$

$$= \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x} = \ln|x-1| - \ln|x| + C = \ln \left| \frac{x-1}{x} \right| + C.$$

Підставляючи знайдений вираз у формулу (4), остаточно знаходимо

$$\int \frac{\ln(x-1)}{x^2} \, dx = -\frac{\ln(x-1)}{x} + \ln \left| \frac{x-1}{x} \right| + C. \quad \lrcorner$$

$$139. \int \arcsin x \, dx .$$

┌ Покладемо $u = \arcsin x$, $dv = dx$. Тоді

$$du = (\arcsin x)' dx = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad v = \int dx = x . \text{ За формулою (2)}$$

$$\int \arcsin x \, dx = \arcsin x \cdot x - \int x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx . \quad (5)$$

Обчислимо інтеграл у правій частині (5) методом заміни змінної:

$$\begin{aligned} \int \frac{x \, dx}{\sqrt{1-x^2}} &= -\frac{1}{2} \int \frac{-2x \, dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{array}{l} t = 1-x^2 \\ dt = -2x \, dx \end{array} \right| = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{t} + C = -\sqrt{1-x^2} + C . \end{aligned}$$

Підставляючи знайдений вираз у формулу (5), остаточно знаходимо

$$\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x - \left(-\sqrt{1-x^2}\right) + C = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C . \quad \rfloor$$

$$140. \int \operatorname{arctg} x \, dx .$$

┌ Покладемо $u = \operatorname{arctg} x$, $dv = dx$. Тоді $du = \frac{1}{x^2+1} dx$, $v = x$.

Застосовуючи формулу (2) і виконуючи заміну змінної, дістанемо

$$\begin{aligned} \int \operatorname{arctg} x \, dx &= \operatorname{arctg} x \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x^2+1} dx = \left| \begin{array}{l} t = x^2+1 \\ dt = 2x \, dx \end{array} \right| = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \\ &= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln|t| + C = x \operatorname{arctg} x - 0,5 \ln(x^2+1) + C . \quad \rfloor \end{aligned}$$

Вправи для самостійного розв'язання

Обчислити невизначені інтеграли:

$$141. \int x \sin 5x \, dx .$$

$$142. \int (3-4x) \cos 2x \, dx .$$

$$143. \int x e^{-x} \, dx .$$

$$144. \int x^2 e^x \, dx .$$

$$145. \int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} \, dx .$$

$$146. \int x \ln x \, dx .$$

$$147. \int \ln(x^2+4) \, dx .$$

$$148. \int \arccos x \, dx .$$

149. $\int \operatorname{arctg} x \, dx$.

150. $\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{x^2+1}} \, dx$.

Відповіді:

141. $\frac{\sin 5x}{25} - \frac{x}{5} \cos 5x + C$.

142. $\frac{3-4x}{2} \sin 2x - \cos 2x + C$.

143. $-e^{-x}(x+1) + C$.

144. $(x^2 - 2x + 2)e^x + C$.

145. $-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{\sin^2 x} + \operatorname{ctg} x \right) + C$.

146. $\frac{x^2}{4}(2 \ln x - 1) + C$.

147. $x \ln(x^2 + 4) - 2x + 4 \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C$.

148. $x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$.

149. $x \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C$.

150. $\sqrt{x^2+1} \cdot \operatorname{arctg} x - \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C$.

5. Додаткові вправи на інтегрування функцій

1°. Розглянемо ряд інтегралів, для обчислення яких використовується як метод безпосереднього інтегрування, так і метод заміни змінної.

151. $I = \int \frac{(2x+3)dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

┌ Перший доданок у чисельнику – це з точністю до знака похідна квадратичної функції: $(4-x^2)' = -2x$. Тому поділимо почленно чисельник на знаменник і скористаємося властивостями невизначеного інтеграла:

$$I = \int \left(\frac{2x}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{3}{\sqrt{4-x^2}} \right) dx = \int \frac{2x dx}{\sqrt{4-x^2}} + 3 \int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = I_1 + 3I_2.$$

Перший інтеграл обчислимо методом заміни змінної, а другий зведемо до табличного:

$$I_1 = \int \frac{2x dx}{\sqrt{4-x^2}} = \left| \begin{array}{l} t = 4 - x^2 \\ dt = -2x dx \end{array} \right| = - \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -2\sqrt{t} + C = -2\sqrt{4-x^2} + C;$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{2} + C.$$

Остаточо маємо

$$I = -2\sqrt{4-x^2} + 3 \arcsin \frac{x}{2} + C. \quad \lrcorner$$

$$152. \quad I = \int \frac{(4x-5) dx}{\sqrt{x^2-6x+13}}.$$

┌ Знайдемо похідну квадратичної функції: $(x^2-6x+13)' = 2x-6$.

Виділимо у чисельнику доданок, який містить цю похідну: $4x-5 = 2(2x-6) + 7$. Далі діємо так само, як у попередньому прикладі – ділимо почленно чисельник на знаменник і отримуємо

$$\begin{aligned} I &= \int \left(\frac{2(2x-6)}{\sqrt{x^2-6x+13}} + \frac{7}{\sqrt{x^2-6x+13}} \right) dx = \\ &= 2 \int \frac{(2x-6) dx}{\sqrt{x^2-6x+13}} + 7 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+13}} = 2I_1 + 7I_2. \end{aligned}$$

Перший інтеграл обчислимо методом заміни змінної, а для другого інтеграла використаємо прийом виділення повного квадрата:

$$I_1 = \left| \begin{array}{l} t = x^2 - 6x + 13 \\ dt = (2x-6) dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{x^2-6x+13} + C;$$

$$x^2 - 6x + 13 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 + 4 = (x-3)^2 + 4,$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2 + 4}} = \ln \left| x-3 + \sqrt{(x-3)^2 + 4} \right| + C =$$

$$= \ln \left(x-3 + \sqrt{x^2-6x+13} \right) + C$$

(скористалися табличним інтегралом **XI** ($a = 4$) та властивістю **3.2°** ($b = -3$) невизначеного інтеграла).

Остаточо маємо

$$I = 4\sqrt{x^2 - 6x + 13} + 7\ln\left(x - 3 + \sqrt{x^2 - 6x + 13}\right) + C. \quad \lrcorner$$

$$153. \quad I = \int \frac{6x^2 + 22x - 1}{x^2 + 4x + 5} dx.$$

┌ Підінтегральна функція – неправильний раціональний дріб. Виділимо цілу частину:

$$\frac{-6x^2 + 22x - 1}{6x^2 + 24x + 30} \Big| \frac{x^2 + 4x + 5}{-2x - 31} \quad ; \quad \frac{6x^2 + 22x - 1}{x^2 + 4x + 5} = 6 - \frac{2x + 31}{x^2 + 4x + 5}.$$

Тоді маємо

$$I = \int \left(6 - \frac{2x + 31}{x^2 + 4x + 5} \right) dx = 6x - \int \frac{2x + 31}{x^2 + 4x + 5} dx.$$

Оскільки $(x^2 + 4x + 5)' = 2x + 4$, то аналогічно до попереднього прикладу дістанемо

$$I = 6x - \int \frac{(2x + 4) + 27}{x^2 + 4x + 5} dx = 6x - \int \frac{(2x + 4) dx}{x^2 + 4x + 5} - 27 \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5} = 6x - I_1 - 27I_2.$$

Перший інтеграл обчислимо методом заміни змінної, а для другого інтеграла використаємо прийом виділення повного квадрата:

$$I_1 = \left| \frac{t = x^2 + 4x + 5}{dt = (2x + 4) dx} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x^2 + 4x + 5| + C ;$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{(x + 2)^2 + 1} = \arctg(x + 2) + C.$$

Остаточо маємо

$$I = 6x - \ln(x^2 + 4x + 5) - 27 \arctg(x + 2) + C. \quad \lrcorner$$

$$154. \quad \int \frac{dx}{x^3 + x}.$$

┌ Розкладемо підінтегральну функцію на доданки:

$$\frac{1}{x^3 + x} = \frac{1}{(x^2 + 1)x} = \frac{(x^2 + 1) - x^2}{(x^2 + 1)x} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 1}.$$

Тоді матимемо

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^3 + x} &= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 1} \right) dx = \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{x}{x^2 + 1} dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} t = x^2 + 1 \\ dt = 2x dx \end{array} \right| = \ln|x| - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \ln|x| - \frac{1}{2} \ln|t| + C = \\ &= \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C. \quad _] \end{aligned}$$

2°. Обчислення невизначених інтегралів методом заміни змінної інколи зручно виконувати, використовуючи відповідну *підстановку* $x = \varphi(t)$, де функція φ має обернену функцію φ^{-1} на певному проміжку:

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt, \quad (6)$$

де після інтегрування слід покласти $t = \varphi^{-1}(x)$.

155. $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx \quad (a > 0)$.

┌ Застосуємо підстановку $x = a \sin t$, $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. Обернена

функція $t = \arcsin \frac{x}{a}$. Матимемо

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \left| \begin{array}{l} x = a \sin t \\ dx = a \cos t dt \end{array} \right| = \int \sqrt{a^2 - (a \sin t)^2} a \cos t dt = \\ &= a^2 \int \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt = a^2 \int \sqrt{\cos^2 t} \cos t dt = \\ &= a^2 \int \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2} \int (1 + \cos 2t) dt = \frac{a^2}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) + C = \\ &= \frac{a^2}{2} \left(t + \sin t \sqrt{1 - \sin^2 t} \right) + C = \frac{a^2}{2} \left(\arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2} \right) + C = \\ &= \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C. \quad _] \end{aligned}$$

До застосування формули (6) зводиться також інтегрування функцій, що містять ірраціональності, зокрема виду $\sqrt[m]{kx+b}$ ($k \neq 0$).

У цьому випадку слід покласти $\sqrt[m]{kx+b} = t$, звідки $x = \frac{1}{k}(t^m - b)$,

$$dx = \frac{m}{k} t^{m-1} dt.$$

156. $\int \frac{\sqrt{x} dx}{x-3}.$

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x} dx}{x-3} &= \left. \begin{array}{l} \sqrt{x} = t \\ x = t^2 \\ dx = 2t dt \end{array} \right| = \int \frac{t \cdot 2t dt}{t^2-3} = 2 \int \frac{t^2 dt}{t^2-3} = 2 \int \frac{(t^2-3)+3}{t^2-3} dt = \\ &= 2 \int \left(1 + \frac{3}{t^2-3} \right) dt = 2 \left(\int dt + 3 \int \frac{dt}{t^2 - (\sqrt{3})^2} \right) = \\ &= 2 \left(t + 3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}} \right| \right) + C = 2t + \sqrt{3} \ln \left| \frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}} \right| + C = \\ &= 2\sqrt{x} + \sqrt{3} \ln \left| \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{\sqrt{x}+\sqrt{3}} \right| + C. \quad \square \end{aligned}$$

157. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}-2}.$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}-2} &= \left. \begin{array}{l} \sqrt[3]{x+1} = t \\ x = t^3 - 1 \\ dx = 3t^2 dt \end{array} \right| = \int \frac{3t^2 dt}{t-2} = 3 \int \frac{(t^2-4)+4}{t-2} dt = \\ &= 3 \int \frac{(t+2)(t-2)+4}{t-2} dt = 3 \int \left(t+2 + \frac{4}{t-2} \right) dt = 3 \left(\frac{t^2}{2} + 2t + 4 \ln |t-2| \right) + C = \\ &= \frac{3}{2} (\sqrt[3]{x+1})^2 + 6\sqrt[3]{x+1} + 12 \ln |\sqrt[3]{x+1}-2| + C. \quad \square \end{aligned}$$

Формулу (6) можна застосовувати до інтегрування функцій, що є раціональними функціями від $\sin x$ та $\cos x$. У загальному випадку

використовується підстановка $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, звідки $x = 2 \operatorname{arctg} t$,

$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$. При цьому $\sin x$ та $\cos x$ виражаються через t так:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

$$158. \int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x + 5}.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x + 5} &= \left. \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2 \frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} = \\ &= 2 \int \frac{dt}{4t - (1-t^2) + 5(1+t^2)} = 2 \int \frac{dt}{6t^2 + 4t + 4} = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t^2 + \frac{2}{3}t + \frac{2}{3}} = \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{5}{9}} = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{t + \frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} + C = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{3t+1}{\sqrt{5}} + C = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}} + C. \quad \square \end{aligned}$$

3°. Обчислення невизначених інтегралів методом інтегрування частинами інколи можна звести до лінійного рівняння відносно заданого інтеграла. Продемонструємо це на двох прикладах.

$$159. I = \int e^x \cos \frac{x}{2} dx.$$

$$\int e^x \cos \frac{x}{2} dx = \left. \begin{array}{l} u = e^x, \quad dv = \cos \frac{x}{2} dx \\ du = e^x dx, \quad v = 2 \sin \frac{x}{2} \end{array} \right| =$$

$$\begin{aligned}
&= e^x \cdot 2 \sin \frac{x}{2} - 2 \int \sin \frac{x}{2} e^x dx = \left. \begin{array}{l} u = e^x, dv = \sin \frac{x}{2} dx \\ du = e^x dx, v = -2 \cos \frac{x}{2} \end{array} \right| = \\
&= 2e^x \sin \frac{x}{2} - 2 \left[e^x \left(-2 \cos \frac{x}{2} \right) + 2 \int \cos \frac{x}{2} e^x dx \right] = \\
&= 2e^x \sin \frac{x}{2} + 4e^x \cos \frac{x}{2} - 4 \int e^x \cos \frac{x}{2} dx = \\
&= 2e^x \left(\sin \frac{x}{2} + 2 \cos \frac{x}{2} \right) - 4I.
\end{aligned}$$

Звідси

$$\begin{aligned}
5I &= 2e^x \left(\sin \frac{x}{2} + 2 \cos \frac{x}{2} \right) + C, \\
I &= \frac{2}{5} e^x \left(\sin \frac{x}{2} + 2 \cos \frac{x}{2} \right) + C. \quad \square
\end{aligned}$$

160. $I = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx \quad (a > 0).$

□ Цей інтеграл було обчислено раніше методом заміни змінної (приклад **155**). Обчислимо його методом інтегрування частинами.

$$\begin{aligned}
I &= \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \left. \begin{array}{l} u = \sqrt{a^2 - x^2}, dv = dx \\ du = \frac{-x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}, v = x \end{array} \right| = \\
&= \sqrt{a^2 - x^2} x - \int x \frac{-x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{-x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \\
&= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{(a^2 - x^2) - a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \\
&= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2} dx + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \\
&= x\sqrt{a^2 - x^2} - I + a^2 \arcsin \frac{x}{a}.
\end{aligned}$$

Звідси

$$2I = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} + C ,$$

$$I = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C . \quad \square$$

Вправи для самостійного розв'язання

Обчислити невизначені інтеграли:

161. $\int \frac{6-5x}{x^2+16} dx .$

162. $\int \frac{4x+3\sqrt{\ln(2x-1)}}{2x-1} dx .$

163. $\int \frac{2x^3-x+4}{x^2-2x+10} dx .$

164. $\int \frac{dx}{(\sqrt{x^2+1})^3}$ (підстановка $x = \operatorname{tg} t$).

165. $\int \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx .$

166. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x}-1)} .$

167. $\int \frac{dx}{\sin x} .$

168. $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x} .$

169. $\int e^{2x} \sin x dx .$

170. $\int \sqrt{x^2+a} dx \quad (a \neq 0) .$

Відповіді:

161. $\frac{3}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{4} - \frac{5}{2} \ln(x^2+16) + C .$

162. $2x + \ln(2x-1) + (\ln(2x-1))^{3/2} + C .$

163. $x^2 + 4x - \frac{13}{2} \ln(x^2 - 2x + 10) - \frac{49}{3} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{3} + C .$

164. $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + C .$

165. $2(\sqrt{x-1} - \operatorname{arctg} \sqrt{x-1}) + C .$

166. $3(\sqrt[3]{x} + \ln|\sqrt[3]{x}-1|) + C .$

$$167. \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

$$168. \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 5}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 3} \right| + C.$$

$$169. \frac{1}{5} e^{2x} (2 \sin x - \cos x) + C.$$

$$170. \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a} + \frac{a}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 + a}| + C.$$