Лабораторна робота 7

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ МЕТОДОМ МНОЖНИКІВ ЛАГРАНЖА

Мета: ознайомитись із задачами нелінійного програмування з обмеженнями-рівностями та засвоїти метод їх розв'язання – метод множників Лагранжа.

7.1 Порядок виконання роботи

Метод множників Лагранжа призначений для розв'язання задач нелінійного програмування, в яких усі умови-обмеження є рівностями.

Розглянемо метод на прикладі такої задачі:

$$F(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \rightarrow extr$$

$$x_1 + x_2 = 1.$$

Оскільки в нашому завданні одна умова-обмеження, то вводимо тільки один множник Лагранжа – λ.

Складаємо функцію Лагранжа, яка являє собою суму вихідної цільової функції та добуток множника Лагранжа на умову-обмеження:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda(x_1 + x_2 - 1).$$

Складаємо систему рівнянь, взявши похідні від функції Лагранжа $L(x_1, x_2, \lambda)$ по змінним x_1, x_2 та множнику λ та прирівнявши їх до 0:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 + \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 + \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x_1 + x_2 - 1 = 0 \end{cases}.$$

Розв'язуємо систему рівнянь (наприклад, шляхом віднімання 1-го та 2-го рівнянь та виділенням x_1 із 3-го рівняння):

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_1 = 1 - x_2 \end{cases}$$

$$2(1 - x_2) - 2x_2 = 0$$

$$2 - 2x_2 - 2x_2 = 0$$

$$-4x_2 = -2$$

$x_2 = \frac{1}{2}$

$x_1 = 1 - \frac{1}{2}$

$x_1 = \frac{1}{2}$.

При цьому $\lambda = -1$.

Досліджуємо функцію на екстремум в околі знайденої точки ($\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$).

Складаємо визначник із других похідних для визначення наявності екстремуму:

$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 0 \cdot 0 = 4 > 0$ – екстремум існує.

Оскільки у визначнику $2 > 0$, то цей екстремум – min.

Таким чином, наша функція $F(x_1, x_2)$ опукла і в точці ($x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{2}$) є мінімум. $F_{min} = \frac{1}{2}$.

Завдання

Розв'язати задачу нелінійного програмування методом множників Лагранжа. Визначити умовні екстремуми функцій.

Таблиця 7.1

№ варіанту	Умови задачі
1	**2**
1	$F(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 3x_1x_2 + 2x_2^2 + 5x_1 + 6x_2$ при $x_1 - x_2 = 6$ та $2x_1 + x_2 = 15$
2	$F(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_1 + 1$ при $x_1^2 + x_2^2 = 4$
3	$F(x_1, x_2) = 2(x_1 - 1)^2 + 3(x_2 - 3)^2$ при $x_1 + x_2 = 6$
4	$F(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$ при $x_1^2 - x_2^2 = 4$
5	$F(x_1, x_2) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 5)^2$ при $x_2 - 2x_1 = 5$
6	$F(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + 3x_2^2 + x_3^2$ при $x_1 + x_2 + x_3 = 8$
7	$F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - 8x_1 - 10x_2$ при $3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$
8	$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1 - 3x_2 - x_1^2 - 3x_2^2$ при $3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 16$ та $-x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 4$
9	$F(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_2^2 + 2x_1x_2$ при $x_1 + x_2 = 8$ та $x_2 + x_3 = 4$
10	$F(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_1^2 + 2x_2 - x_3^2$ при $x_1 + 2x_2 - x_3 = 6$
11	$F(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$ при $x_1 - x_2 = 4$
12	$F(x_1, x_2) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 5)^2$ при $x_2 - 2x_1 = 5$
13	$F(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 3x_1x_2 + 2x_2^2 + 5x_1 + 6x_2$ при $x_1 - x_2 = 6$ та $2x_1 + x_2 = 15$
14	$F(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 2x_2^2 - 3x + 1$ при $x_1^2 + x_2^2 = 4$
15	$F(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + 3x_2^2 + x_3^2$ при $x_1 + x_2 + x_3 = 8$