Лекція 7. *Моделювання як метод наукового дослідження*

- 1. Методологія моделювання процесів і систем
- 2. Задачі та методи апроксимації даних. Наукове прогнозування
- 3. Дослідження стійкості динамічних систем

"… вчений … повинен прямувати вузькою стежкою між западнею надспрощення і болотом надускладнення"

Річард Беллман

Кафедра комп'ютерної інженерії та кібербезпеки
Ю.Б. Бродський

1. Методологія моделювання процесів і систем

Одним із головних методів наукових досліджень є метод моделювання.

Моделювання – це науковий метод дослідження реальних об’єктів (процесів) шляхом побудови та аналізу їх моделей.

Математичне моделювання – це метод дослідження процесів, об’єктів, систем, який базується на побудові та дослідженні математичних моделей.

модель – це спрощена подібність системи, яка відображає її суттєві властивості та співвідношення

Математична модель – система математичних та логіко – математичних співвідношень, які описують реальну систему (об’єкт, процес, явище) і призначені для визначення їх кількісних та якісних характеристик

моделювання – це процес дослідження реальної системи, який складається з певних етапів

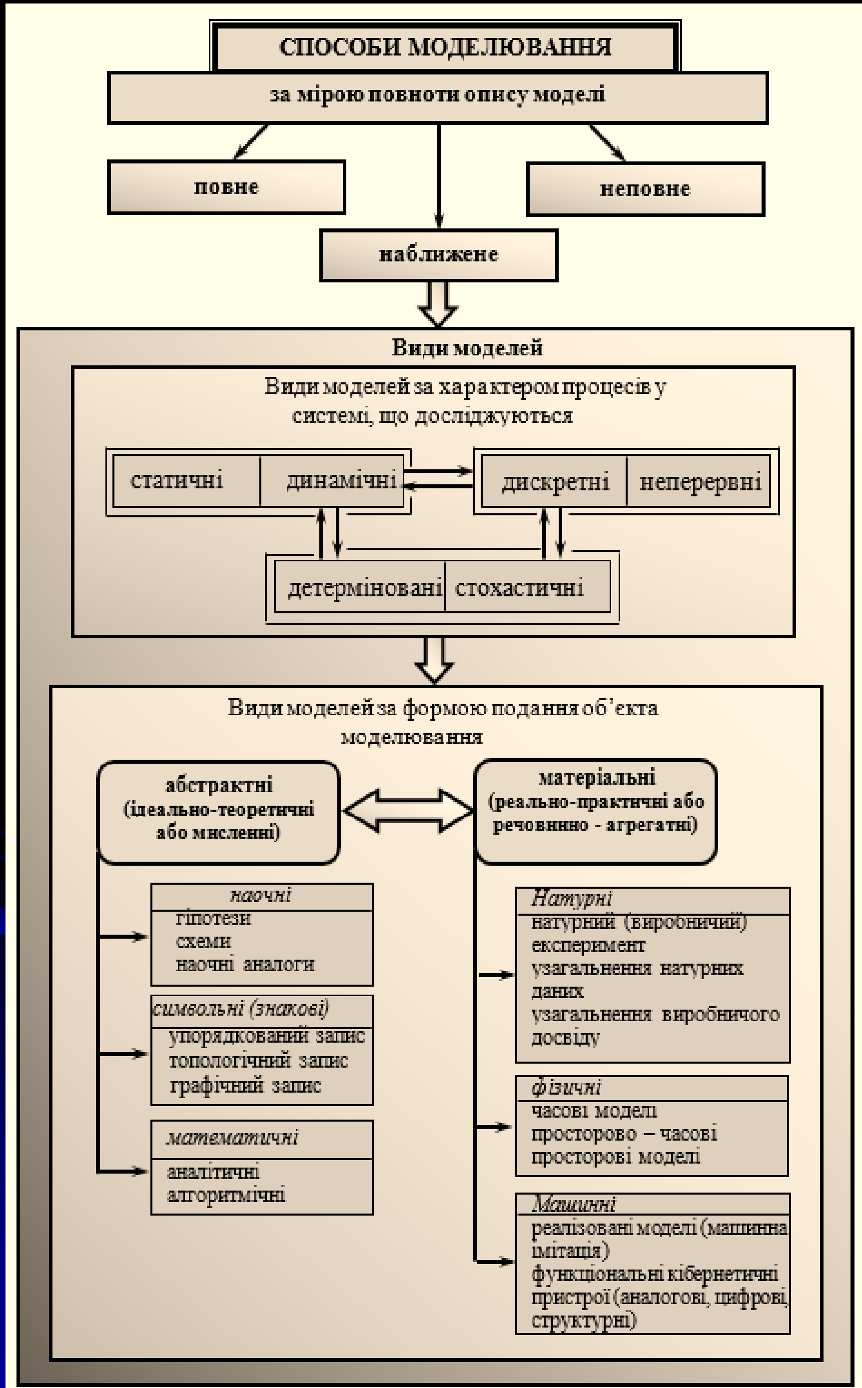
Побудова моделі реальної системи

↓

Дослідження властивостей та характеристик моделі

↓

Перенесення отриманих відомостей (оцінок) на реальну систему



Слово "модель" походить від латинського modulus, що позначає міру, такт, ритм, величину, а також зв'язане зі словом modus – копія, зразок.

Джерела цього терміну відносяться до праць з будівництва відомого римського інженера, архітектора і письменника Марка Вітрувія Полліона (I ст. до н. е.). Моделі являють собою певний умовний образ об'єкта дослідження. Модель повинна відображати ті характеристики об'єкта досліджень (склад, зв'язки, властивості), які суттєві для мети дослідження. Для різних цілей дослідження будуються різні моделі досліджуваного об'єкта.

Технологія моделювання

Кафедра комп'ютерної інженерії та кібербезпеки
Ю.Б. Бродський

- Перевагами дослідження моделі перед безпосереднім дослідженням реальної системи є:
  - модель обмежує сторонні впливи та надлишкову деталізацію, тобто представляє об’єкт, явище, процес в чистому вигляді, абстраговано, що надзвичайно важливо для отримання об’єктивних наукових висновків;
  - модель дозволяє проводити дослід чи реальний експеримент там, де він не можливий з реальною системою;
  - з моделлю можна багаторазово проводити експерименти або досліди до отримання задовільного результату, пізнання істинної суті явища.

Головною перевагою математичних моделей є висока ступінь їх універсальності, можливість дослідження будь-яких процесів та пошуку рішень дослідних задач.

Принципи моделювання:

а) *принцип адекватності моделі і оригіналу*. Він передбачає відповідність моделі поставленій меті дослідження;

б) *принцип абстрагування від другорядних деталей та факторів*. Модель має описувати лише найсуттєвіші властивості оригіналу відносно поставленої мети та має бути простішою за нього. Тому при побудові моделі намагаються досягти її спрощення, зберігаючи при цьому суттєві властивості досліджуваної системи;

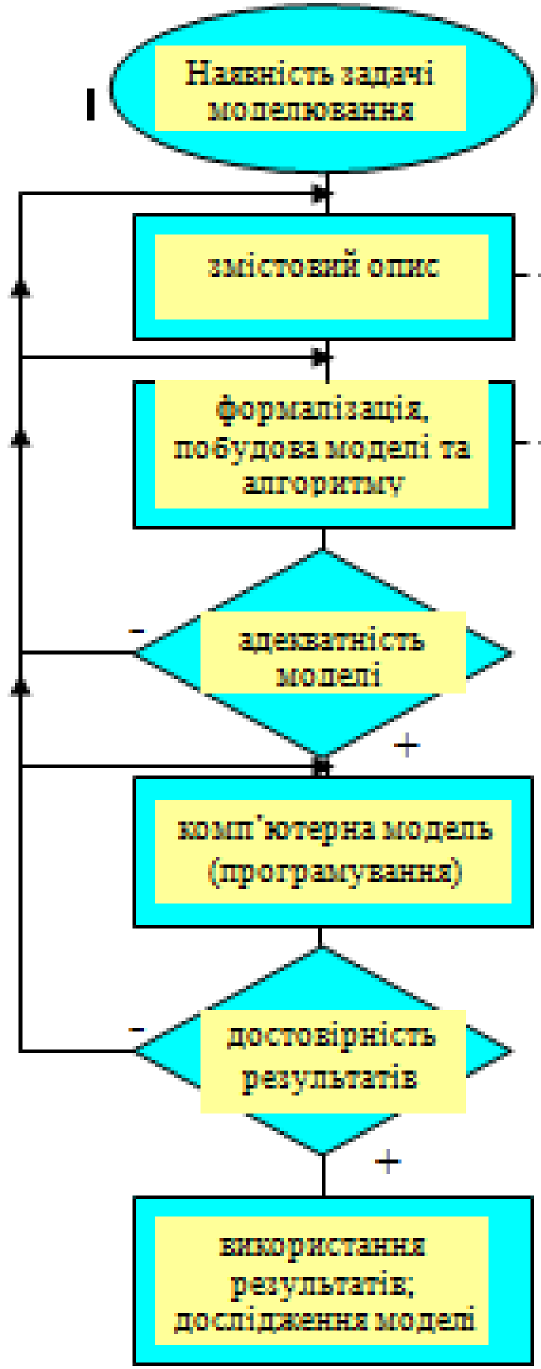
в) *принцип досягнення компромісу* між бажаною точністю результатів моделювання та складністю моделі.

Побудову математичної моделі можна здійснювати двома шляхами:

- *абстрактний шлях* – спочатку будується гіпотетична модель, яка потім наповнюється конкретним змістом, тобто будується оригінальна модель;
- *шлях аналогії* – використовуються типові моделі для опису системи або на базі типових моделей розробляють нову модель.

Схема моделювання

Методи перевірки адекватності моделі



1. вивчення систем (об'єкту, процесу)
2. визначення об'єкту моделювання, цілей процесу, цілей моделювання
3. вибір показників якості, критеріїв, вимог до деталізації, достовірності, оперативності.
4. опис системи (об'єкту, процесу)
5. прийняття гіпотез та припущень
6. визначення параметрів моделі
7. визначення вимог до вихідної інформації

8. декомпозиція на процеси (компоненти)
9. мінімізація числа параметрів моделі
10. вибір математичного апарату
11. опис та перетворення рівнянь та нерівності моделі
12. вибір метода оптимізації
13. побудова алгоритма
14. перевірка адекватності моделі та алгоритма

Методи перевірки адекватності моделі

1. Порівняння результатів моделювання з реальними результатами (тестування на реальних даних), або з результатами, отриманими на апробованих моделях.
2. Перевірка моделі на наборах параметрів, для яких результат моделювання відомий раніше.
3. Верифікація моделі – аналіз степені відображення в моделі основних елементів та процесів, коректності зроблених припущень, прийнятих гіпотез, використаних апроксимацій.
4. Перевірка достовірності початкових даних, розмірності та масштабування параметрів в рівняннях моделі.
5. Перевірка коректності моделі при виродженні умов моделювання.
6. Аналіз наявності в моделі кількісного відображення діалектичних категорій і законів реального процесу, що моделюється.
7. Метод зворотного переходу – повернення від кінцевих функціональних співвідношень моделі до прийнятих гіпотез, особливостей процесу та розгляданню реального процесу. Якщо такий підхід можливий, то він зводить адекватність аналітичної моделі реальному процесу з точністю прийнятих гіпотез (знань про процес, об’єкт, систему).

Лінійні рівняння. Процеси природного зростання

В різноманітних системах, природних, соціальних, економічних зустрічаються процеси природного зростання (ядерна реакція, бактерії, рослини, тварини, населення Землі, грошові вклади та ін.) - коли величини за однакові проміжки часу Δt змінюють своє значення в одне і теж число разів.

Якщо припустити, що проміжок часу Δt наближається до нуля $\Delta t \to 0$ і значення величини, що розглядається (позначимо $y(t)$) змінюється миттєво, то отримаємо процес, при якому швидкість $\dot{y}(t)$ змінювання величини $y(t)$ в момент часу t пропорційна значенню цієї величини в той же момент часу:

$$\dot{y}(t) = ky(t), \text{ або } \frac{dy(t)}{dt} = ky(t). \qquad (1)$$

Отже, диференційне рівняння (1), яке вперше отримав Якоб Бернуллі (1654-1705), описує процеси природного зростання.

Нелінійні рівняння. Механізм насичення

При використанні моделей природного зростання необхідно враховувати механізми насиченості та відповідно скорегувати лінійні моделі, в основі яких лежить рівняння Якоба Бернуллі (1):

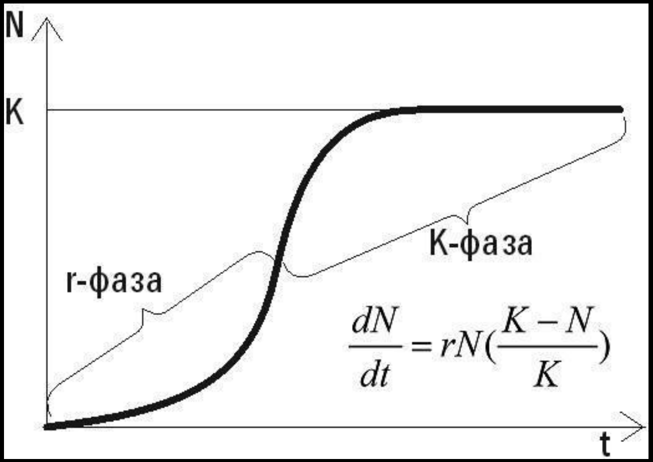
$$\dot{y}(t) = ky(t)$$

Припущення Дж. К’ютелета, що коефіцієнт k рівняння (1) повинен бути не сталою, а спадаючою функцією, яка залежить від y(t), перетворює рівняння (1) на нелінійне:

$$\frac{dy(t)}{dt} = k(y(t)) \cdot y(t) \qquad (9)$$

Рівняння (9) дозволяє описувати механізм насичення в різних прикладних задачах. Ця ідея була покладена в основу багатьох моделей логістичного типу: модель динаміки популяції (зростання населення) за рівнянням Ферхюльста (учень Дж. К’ютелета), випуск продукції в умовах конкуренції та насиченості ринку, моделі «соціальної дифузії» (поведінки, моди, ринку інформації, рекламної кампанії, новацій тощо), модель росту виробництва з урахуванням інвестицій та ін.

П’єр Ферхюльст



Отже, у 1836 році Ферхюльст пропонував використати для опису процесу зростання населення рівняння, яке враховує реальний ефект саморегуляції чисельності N в умовах обмеженості ресурсів, внутрішньої боротьби (конкуренції) в популяції:

$$\frac{dN}{dt} = rN - \frac{r}{k}N^2, \tag{10}$$

де від’ємний нелінійний елемент $-\frac{r}{k}N^2$ описує ефект саморегуляції;

$k = N_{max}$ – максимально можлива чисельність популяції (угрупування).

Рівняння (10) часто записують у вигляді:

$$\frac{dN}{dt} = rN(1 - \frac{N}{k}) \tag{11}$$

Таким чином, динаміку процесів в системах можна описати експоненціальним або логістичним рівняннями:

$$\frac{dN(t)}{dt} = rw\,,$$

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) - \frac{r}{k}N^2(t)\,.$$

Врахування взаємовідношень між об’єктами на прикладі класичних задач динаміки популяцій потребує додавання до моделі Ферхюльста додаткового члена, який визначається типом взаємовідношень. Розглянемо дві популяції чисельністю N_1 та N_2, які взаємодіють між собою. Розмноження кожної з цих популяцій формалізуємо у вигляді логістичного рівняння, а їх взаємодію опишемо членом, пропорційним добутку $N_1 N_2$.

«хижацтво»

$$\begin{cases} \dfrac{dN_1(t)}{dt} = r_1 N_1(t) - \dfrac{r_1}{k_1} N_1^2(t) + \chi_1 N_1(t) N_2(t), \\ \dfrac{dN_2(t)}{dt} = r_2 N_2(t) - \dfrac{r_2}{k_2} N_2^2(t) - \chi_2 N_2(t) N_1(t). \end{cases}$$

«конкуренція»

$$\begin{cases} \dfrac{dN_1(t)}{dt} = r_1 N_1(t) - \dfrac{r_1}{k_1} N_1^2(t) - \chi_1 N_1(t) N_2(t), \\ \dfrac{dN_2(t)}{dt} = r_2 N_2(t) - \dfrac{r_2}{k_2} N_2^2(t) - \chi_2 N_2(t) N_1(t). \end{cases}$$

«симбіоз»

$$\begin{cases} \dfrac{dN_1(t)}{dt} = r_1 N_1(t) - \dfrac{r_1}{k_1} N_1^2(t) + \chi_1 N_1(t) N_2(t), \\ \dfrac{dN_2(t)}{dt} = r_2 N_2(t) - \dfrac{r_2}{k_2} N_2^2(t) + \chi_2 N_2(t) N_1(t). \end{cases}$$

Підхід до моделювання процесів в дискретних системах

При моделюванні процесів часто виникає потреба визначати стан системи в деякі дискретні моменти часу, в таких випадках систему розглядають як дискретну. Для дискретних за часом систем змінну неперервного часу $x(t)$ заміняють послідовностями $x(t) \equiv x[n]$, де квадратні дужки показують, що змінна n є дискретним часом і може приймати тільки цілочислові значення $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Вивчення динаміки процесів передбачає визначення стану системи в заданий момент часу через відомий її стан у попередній момент за допомогою відповідного еволюційного оператора. Математичну модель такої динамічної дискретної системи запишемо у вигляді еволюційного операторного рівняння з початковою умовою:

$$\begin{cases} x[n+1] = F\left(x[n]\right), \\ x[0] = x_0. \end{cases} \qquad (5.6)$$

У спрощеній формі запису використовують заміну

$$x[n+1]=x_{n+1}\,,\; x[0]=x(0)=x_0\,,\; F(x[n])=F(x_n).$$

Рівняння (5.6) можна отримати з диференціального рівняння $\dfrac{dx(t)}{dt}=f[x(t)]$ способом переходу до різницевого рівняння шляхом заміни безперервних компонентів дискретними $dx(t)\equiv x_{n+1}-x_n\,,\; dt\equiv\Delta t\,,\; f[x(t)]\equiv F(x_n)$, а саме

$$x_{n+1}=x_n+F(x_n)\Delta t, \qquad (5.7)$$

де x_n – значення параметрів системи в дискретні моменти часу t_n, $n=1,2,3,\ldots$; $\Delta t=t_{n+1}-t_n$ – інтервал часу (дискрета), що є сталою величиною $\Delta t=const$.

Математичні вирази різниці першого і другого порядку мають вигляд

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n,$$

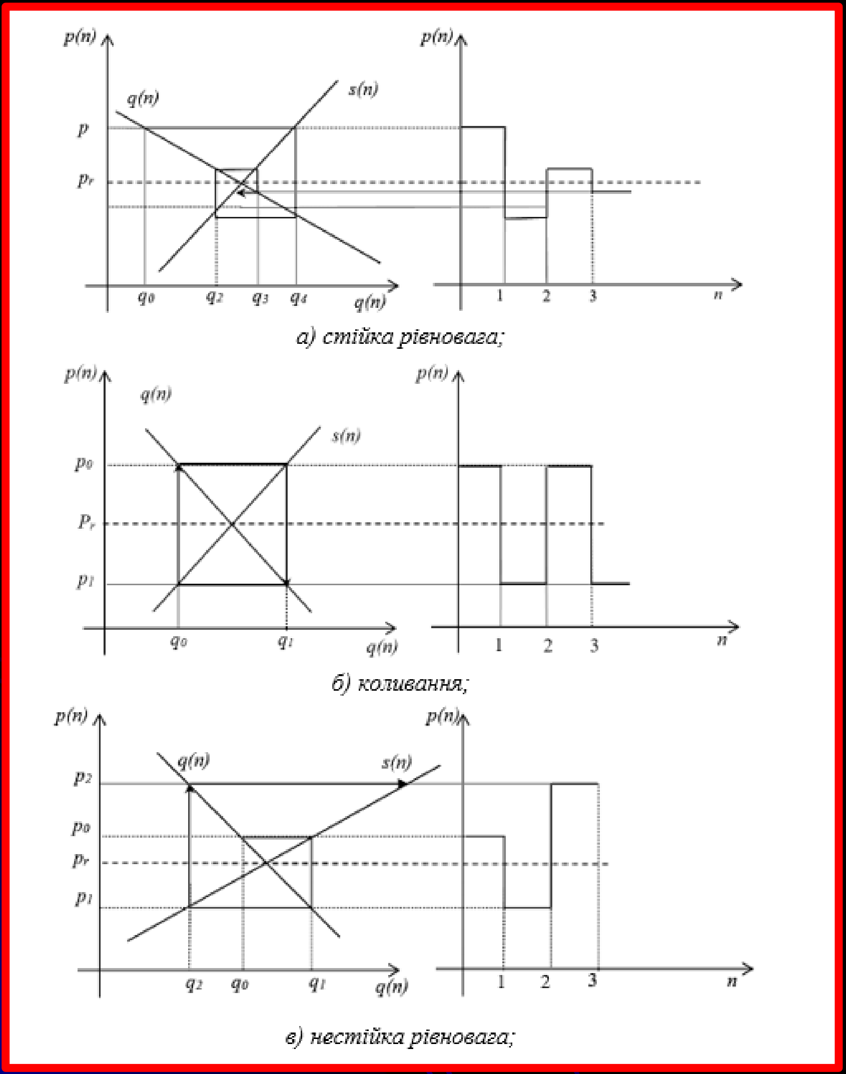
$$\Delta^2 x_n = \Delta x_{n+1} + \Delta x_n = \left(x_{n+2} - x_{n+1}\right) - \left(x_{n+1} - x_n\right) =$$

$$= x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n.$$

Для зворотного перетворення дискретної системи в неперервну виконують граничний перехід при $\Delta t \to 0$. Різницеве рівняння k-го порядку запишемо у такій формі

$$F\left(n, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+k}\right) = 0. \tag{5.8}$$

Розв'язати різницеве рівняння означає знайти всі послідовності $x_n = x(n)$, які задовольняють рівняння (5.8). Різницеві рівняння часто використовуються не тільки в моделях динаміки процесів в системах з дискретним часом, але і для наближеного розв'язку диференціальних рівнянь.

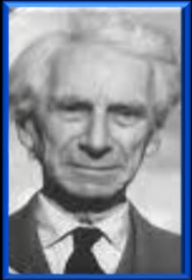


Результати моделювання рівноваги (стійкості) дискретної динамічної системи на прикладі павутиноподібної моделі рівноваги (назву модель отримала завдяки графічному поданню відповідного ітераційного процесу у вигляді «павутини», що обертається навколо кривих, наприклад, попиту і пропозиції).

2. Задачі та методи апроксимації даних. Наукове прогнозування

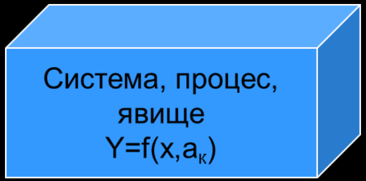
Апроксимація (лат. *approximatio* — наближення, proxima - найближча) науковий метод, суть якого полягає в заміні одних об'єктів іншими, у якомусь сенсі близькими до вихідних.

«Хоча це може здатися парадоксом, вся наука підпорядкована ідеї апроксимації »
Б. Рассел



При дослідженні процесів в системах, явищ різного походження, часто виникає задача вивчення та оцінювання взаємозалежностей (їх характеристик, показників, інформаційних потоків) з метою отримання нових достовірних даних для потреб моделювання, прогнозування, прийняття правильних рішень, нових планів, стратегій, знань.

- Для розглядання такої задачі можна застосувати метод «Чорного ящика» (У.Р.Ешбі)



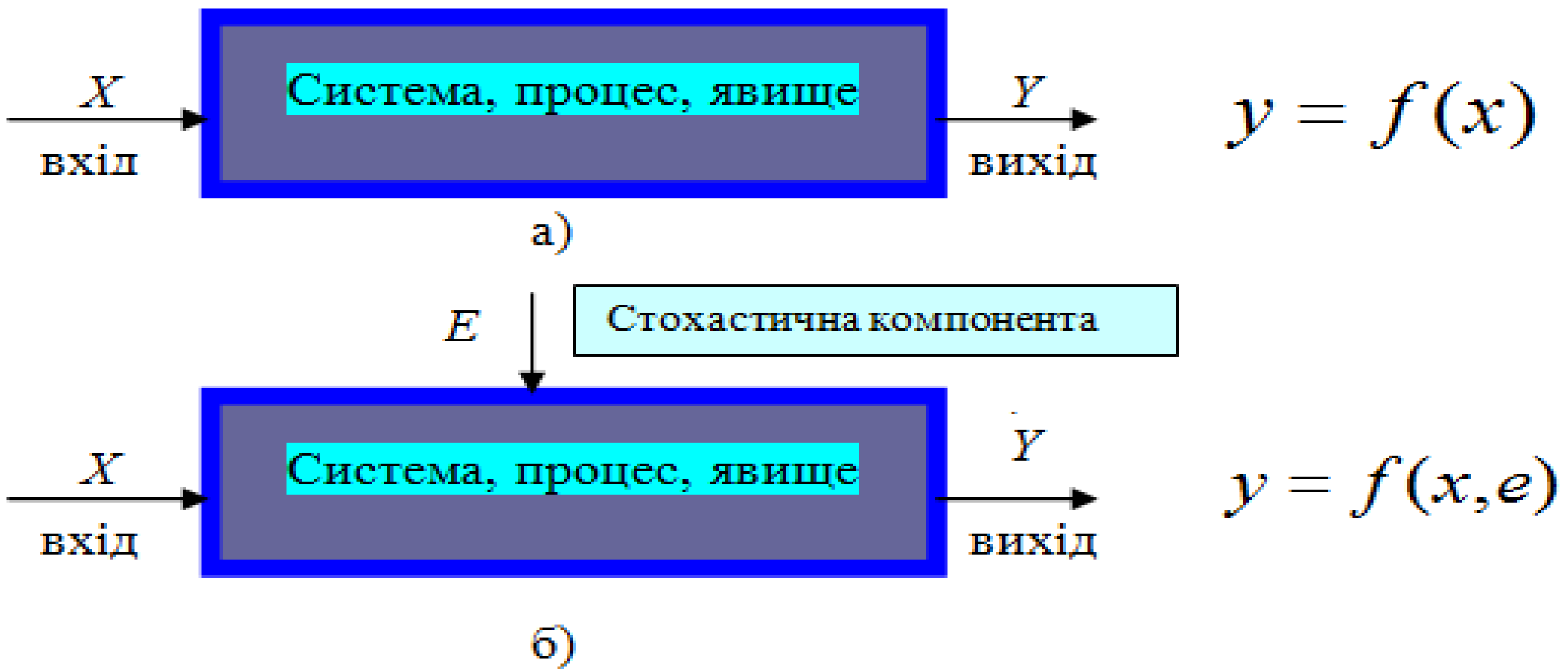


Рис. 1

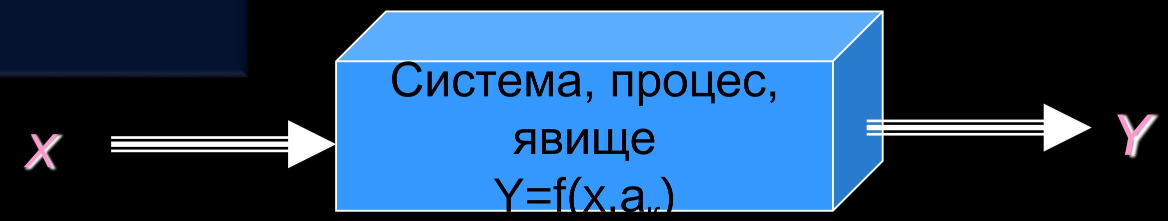
Змінні X, Y, E визначають відповідно вхідний вплив (X), результат впливу (Y) та випадковий вплив (E) і подаються у вигляді векторних змінних різних розмірностей: $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$, $Y = (y_1, y_2, ..., y_m)^T$, $E = (e_1, e_2, ..., e_k)^T$. Крім того, компоненти векторів X, Y, E можуть бути функціями від часу, тобто представляти собою часові процеси.

Ю. Бродський

Висновок:

Отже, в процесі проведення статистичного аналізу та математико-статистичного моделювання слід враховувати різні типи (компоненти векторів X, Y) та види (перехресні, часові) даних, типи взаємозв'язку (рівноправний, нерівноправний), види залежностей, зв'язків між явищами та процесами (функціональний, стохастичний, кореляційний), а також тип задачі дослідження: однофакторна $y = f(x)$ та багатофакторна $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$

Прикладні цілі та задачі апроксимації



● **<u>Загальну задачу можна сформулювати так:</u>**

на основі спостережень (вимірювань) змінних *X* та *Y* побудувати функцію, що найкраще буде відновлювати значення відгуку *Y*, відповідно заданим значенням предиктора *X*.

● Розв’язок даної задачі передбачає вибір математичного виразу для опису залежності та критерію якості апроксимації, відповідно до якого буде визначатись найкращий спосіб відновлення значень *Y*.

● Однак, перш ніж розв’язувати задачу потрібно визначити прикладну мету (ціль) проведення аналізу.

● Ясність прикладної цілі і відповідної задачі визначить послідовність виконання різних етапів проведення аналізу, вибір загальної структури функції, моделі, інтерпретацію отриманих результатів.

Мета 1:

- *встановлення факту наявності (відсутності) статистично значимого зв’язку між змінними Y та X.*

Для даної задачі вибір виду функції f має другорядне значення і часто, навіть, не виникає питання побудови функції f. Задачі такого типу розв’язуються методами кореляційного аналізу, рангових кореляцій та за допомогою аналізу таблиць сполучення.

Мета 2:

- *відновлення (прогноз) значень результуючої змінної (відгуку) Y відповідно заданим значенням вхідної змінної (предиктора) X .*

Вибір функції апроксимації f також є підпорядкована мета, оскільки важливим є лише значення функції $f(X)$, а не її структура , тобто функція f повинна показати числову залежність змінних Y та X , а не їх змістовний зв'язок (фізичний, економічний тощо).

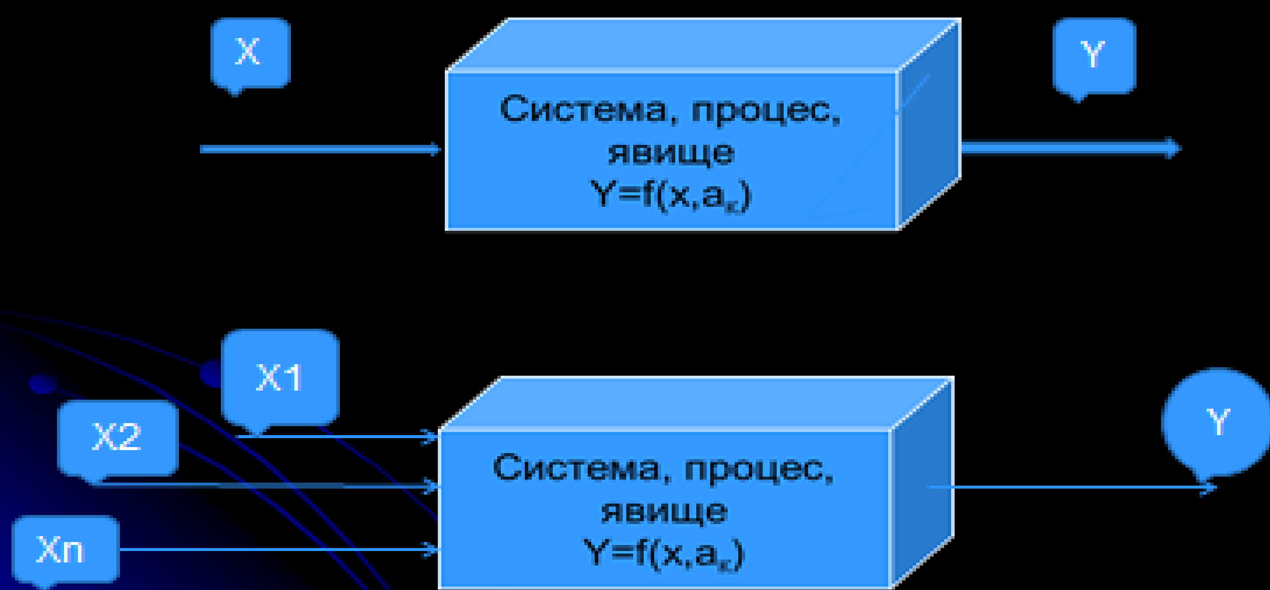
Мета 3:

- *виявлення причинних зв'язків між змінними X та Y.*

Така задача передбачає проникнення у «фізичний механізм» вивчаємих статистичних зв'язків, тобто у механізм перетворення вхідних впливів *X* та *E* в результуючі показники *Y*. Тому, головною метою – є структура функції $f(x)$, яка часто залежить від параметрів, що мають визначену «фізичну» інтерпретацію.

Задачі апроксимації.

- Функції виду $\overline{y} = f\left(\overline{x}, \overline{a}\right)$ виражають співвідношення “вхід–вихід” будь-якої системи ($\overline{x}$ – вектор вхідних факторів; $\overline{a}$ – вектор параметрів моделі, що належить визначенню за експериментальними даними; $\overline{y}$ – вектор відгуків – вихідні фактори).



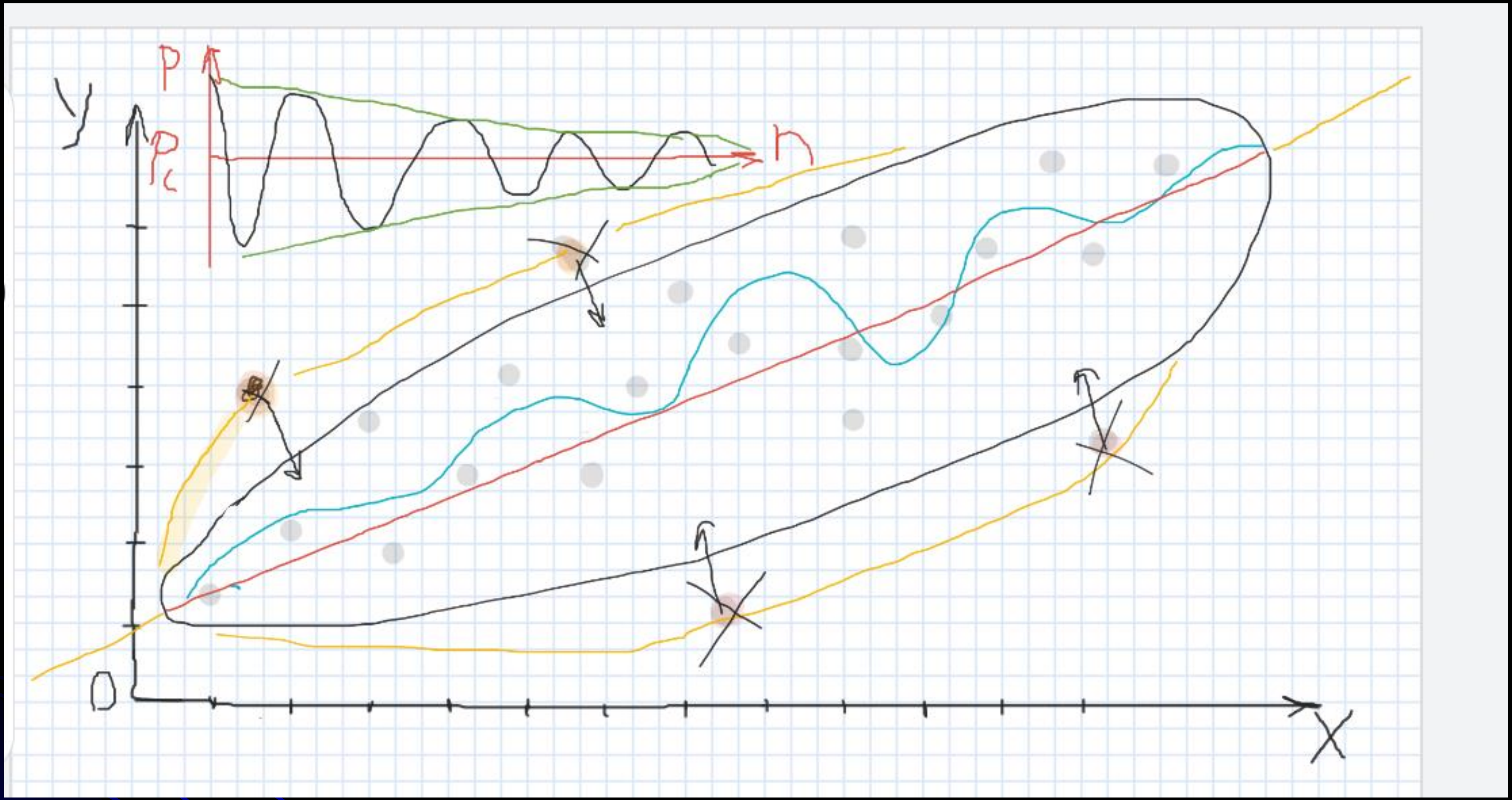
Задачі апроксимації

Задачі апроксимації

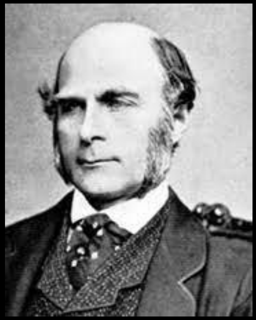
- Обробка експериментальних даних (апроксимація даних) в залежності від мети передбачає вирішування наступних задач:
- задача інтерполяції – побудова безперервної функції , що з’єднує всі експериментальні точки ;
- задача екстраполяції – побудова функції за границями відомого інтервалу значень – прогноз;
- задача регресії – побудова найближеної (усередненої) функції
- задача фільтрації (згладжування) – побудова апроксимуючої функції для зниження систематичної похибки експериментальних даних.

- При інтерполяції доцільно з’єднувати експериментальні точки не ламаною лінією, а згладженою кривою. Тому частіше використовують сплайн – інтерполяцію (лінійну, квадратичну, кубічну)

- Всі функції згладжування містять аргументом масиви даних і видають в результаті вектор згладжених даних. Тому, доцільно виконувати згладжування разом з інтерполяцією або регресією.



Фре́нсіс Га́льтон (англ. *Francis Galton*;\; 16 лютого 1822 — 17 січня 1911) — англійський антрополог, географ, статистик, соціолог і психолог



Ю. Бродський

Методи та алгоритми: метод найменших квадратів, «ковзне середнє», експоненціальне згладжування

- У дослідженні процесів і систем набули широкого використання математичні моделі, які містять різні функціональні залежності

- Щоб математичні моделі адекватно описували процеси і системи, необхідно використовувати досить адекватні функціональні залежності (математичні формули).
- Таким чином, важливого значення набувають методи апроксимації – методи наближеного зображення реальних функцій такими стандартними аналітичними виразами, як, наприклад, алгебраїчні багаточлени.

$$P(x) = \sum_{K=0}^{m-1} a_K x^K, (m = 1, 2, \ldots).$$

В розгорнутому вигляді можна записати:

$$P(x) = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \ldots + a_{m-1} x^{m-1}$$

Важливе достоїнство апроксимуючих багаточленів *P(x)* – їх лінійність відносно невідомих коефіцієнтів $a_к$ (які треба знайти для апроксимації), що дозволяє будувати ефективні алгоритми наближення за допомогою таких функцій.

Один із методів математичної обробки даних досліду (спостережень) - є метод найменших квадратів (МНК), результатом застосування якого є отримання числових коефіцієнтів емпіричної формули (вибраного багаточлена *P(x)*).

Отже, побудова оптимального апроксимуючого багаточлена *P(x)* зводиться до знаходження коефіцієнтів, які мінімізують функцію

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} \left(P(x_i) - y_i \right)^2 \Rightarrow \min .$$

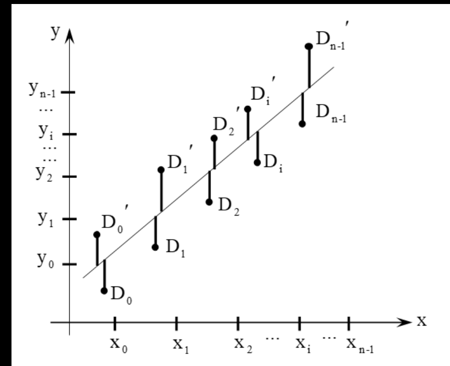
Алгоритм

1. Обирають апроксимуючу функцію

2. Знаходять систему частинних похідних і прирівнюють їх до нуля

3. Розв’язують систему рівнянь відносно коефіцієнтів $a_к$

Ю. Бродський



Тому якщо знаходити суму відхилень у деяких експериментах, то можна отримати малу величину відхилення помилково, за рахунок взаємовилучення складових більшої величини, але різних знаків (рис. 2.15).

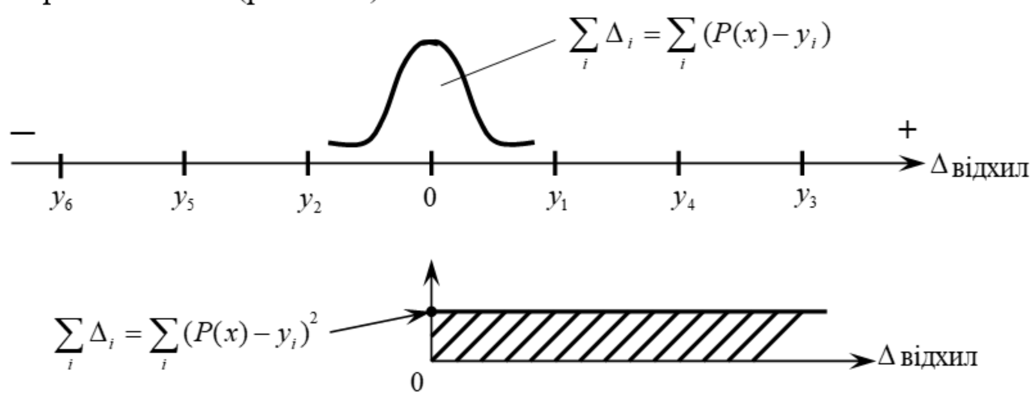


Рис. 2.15

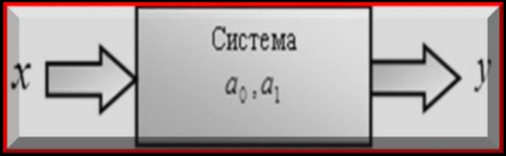
Уникнути цього недоліку дозволяє міра відхилення (критерій), яка була запропонована французьким математиком Лежандром (і паралельно Гауссом) у 1806 році, – брати суму квадратів відхилень.

Таким чином, метод апроксимації, суть якого є мінімізація суми квадратів неув’язок $P(x) - y_i)$, веде свій початок від праць таких класиків математичної науки, як Лежандр і Гаусс, і називається **методом найменших квадратів**

Розглянемо задачу обчислення коефіцієнтів для лінійної функції $P(x_i) = a_0 + a_1 x_i$

Підставляємо у формулу:

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} \left(a_0 + a_1 x_i - y_i\right)^2$$



Розкриваємо дужки

$$\left[\left(a_0 + a_1 x_i\right) - y_i\right]^2 = \left(a_0 + a_1 x_i\right)^2 - 2\left(a_0 + a_1 x_i\right) y_i + y_i^2 =$$
$$= a_0^2 + 2a_0 a_1 x_i + a_1^2 x_i^2 - 2a_0 y_i - 2a_i x_i y_i + y_i^2 .$$

Запишемо систему частинних похідних і прирівняємо їх до нуля:

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = \frac{\partial \sum\limits_{i=0}^{n-1}}{\partial a_0} \left(a_0^2 + 2a_0 a_i x_i + a_1^2 x_i^2 - 2a_0 y_i - 2a_1 x_i y_i + y_i^2\right) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = \frac{\partial}{\partial a_1} \sum_{i=0}^{n-1} \left(a_0^2 + 2a_0 a_1 x_i + a_1^2 x_i^2 - 2a_0 y_i - 2a_1 x_i y_i + y_i^2\right) = 0$$

$$\begin{cases} n a_0 + a_1 \sum\limits_{i=0}^{n-1} x_i = \sum\limits_{i=0}^{n-1} y_i \\ a_0 \sum\limits_{i=0}^{n-1} x_i + a_1 \sum\limits_{i=0}^{n-1} x_i^2 = \sum\limits_{i=0}^{n-1} x_i y_i \end{cases}$$

Розв’язуючи систему відносно a_0 та a_1, маємо:

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{\sum\limits_{i=0}^{n-1} y_i \sum\limits_{i=0}^{n-1} x_i^2 - \sum\limits_{i=0}^{n-1} x_i y_i \sum\limits_{i=0}^{n-1} x_i}{n \sum\limits_{i=0}^{n-1} x_i^2 - \left(\sum\limits_{i=0}^{n-1} x_i\right)^2} \\ a_1 = \dfrac{n \sum\limits_{i=0}^{n-1} x_i y_i - \sum\limits_{i=0}^{n-1} y_i \sum\limits_{i=0}^{n-1} x_i}{n \sum\limits_{i=0}^{n-1} x_i^2 - \left(\sum\limits_{i=0}^{n-1} x_i\right)^2} \end{cases}$$

3. Дослідження стійкості динамічних систем

Будь-яка динамічна система, залежно від кількості змінних стану, описується звичайним диференціальним рівнянням або системою диференціальних рівнянь. Ці моделі відрізняються між собою фазовим простором, в якому задано диференціальне рівняння

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(y_t), \qquad (5.1)$$

і конкретним видом функції $f(y_t)$, $y_t \equiv y(t)$.

Зауважимо, що стійкість стаціонарної точки y_0 в диференціальному рівнянні (5.1) можна розглядати з точки зору відношення до одноразового збурення положення в початковий момент часу

$$y_0 \to y_0 + \delta y,$$

або постійно діючого збурення маленької амплітуди, коли права частина рівняння (5.1) змінюється на

$$f(y_t) \to f(y_t) + \delta f(y_t),$$

де $\delta f(y_t)$ – функція збурення, $\delta f(y_t) \ll f(y_t)$.

Крім того, часто виникає задача оцінювання стійкості не тільки стаціонарної точки, а й дослідження стійкості траєкторії рівняння (5.1) до малих збурень початкової умови y_0 і правої частини $f(y_t)$

Відомо, що всі стаціонарні розв'язки рівняння (5.1) представляють собою нулі функції $f(y_t)$, тобто розв'язки виду

$$y_t = y_p = const, \quad f(y_p) = 0.$$

Зупинимось на дослідженні стійкості розв'язку $y_t = y_p$. Припустимо, що функція $f(y_t)$ спадна в деякому околі значення $y_t = y_p$, відповідно, якщо y_t переходить через значення y_p, функція $f(y_t)$ переходить від додатних значень до від'ємних. На рис. 5.1 показані інтегральні криві, що зображають стаціонарний розв'язок:

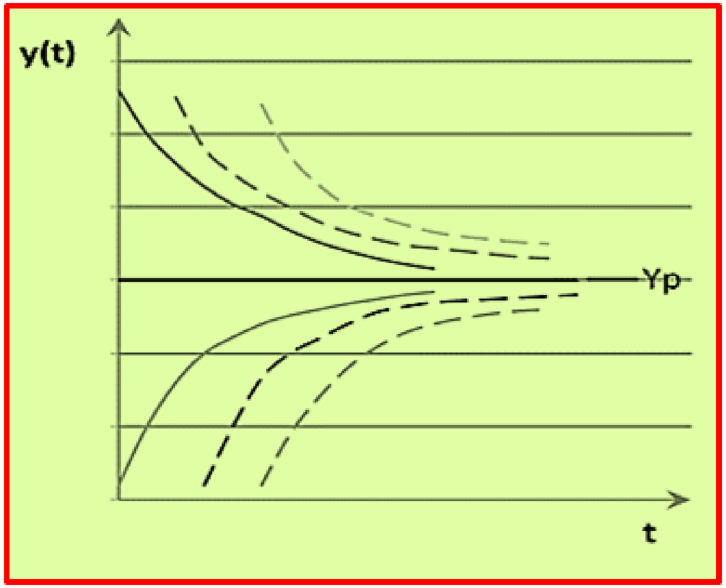


Рис. 5.1.

1) горизонтальна пряма $y_t = y_p$;

2) інтегральні криві для різних початкових умов при збуренні, які з часом $t \to \infty$ асимптотично наближаються до рівноважної (стаціонарної) інтегральної лінії.

В цьому випадку розв'язок диференціального рівняння (5.1) асимптотично стійкий.

Протилежна ситуація, коли функція $f(y_t)$ зростає і змінює свій знак при переході y_t через значення y_p з від'ємного на додатній (рис. 5.2).

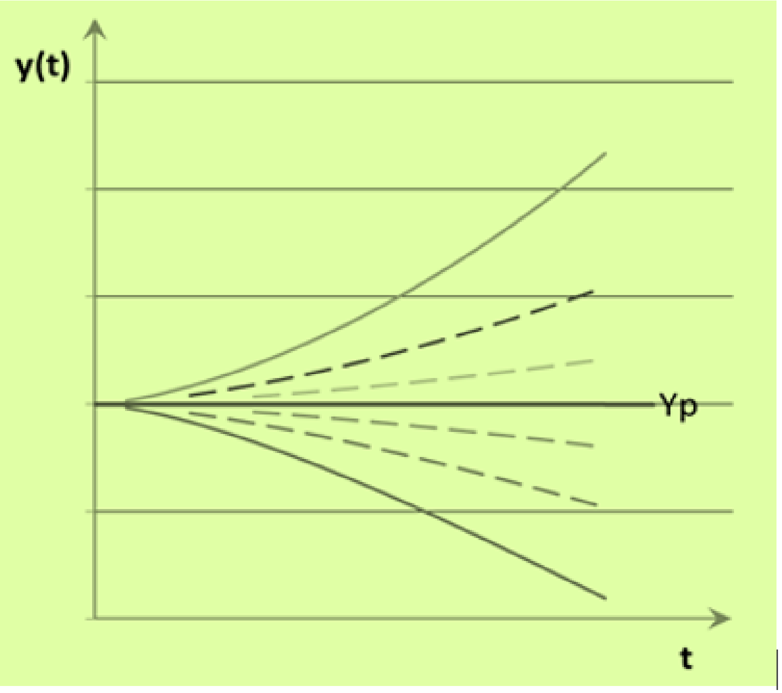
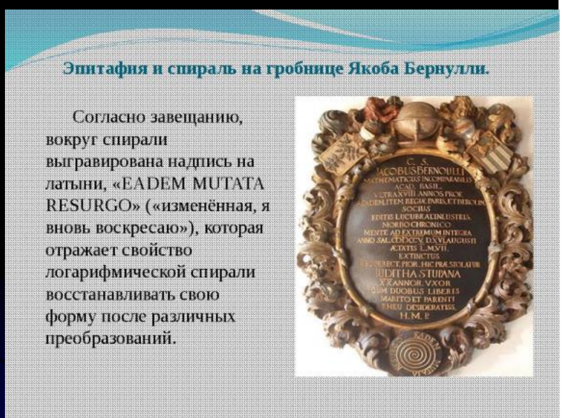


Рис. 5.2.

Стаціонарний розв'язок при даних умовах буде нестійким.

Стійкість рівняння Якоба Бернуллі



Розглянемо рівняння Я. Бернуллі, яке описує процес природного зростання і покладене в основу багатьох моделей динаміки

$$\frac{dy(t)}{dt} = ky(t), \quad k = const. \tag{5.2}$$

Загальний розв'язок рівняння (5.2) отримаємо у вигляді

$$y(t) = Ce^{kt}, \tag{5.3}$$

де C – довільна стала, що визначається підстановкою початкової умови $y(t_0) = y_0$ в рівняння (5.3)

$$y(t_0) = y_0 = Ce^{kt_0},$$

звідки

$$C = y_0 e^{-kt_0}.$$

Перепишемо (5.3) у вигляді

$$y(t) = y_0 e^{k(t-t_0)}. \tag{5.4}$$

Якщо початкове значення $y_0 = 0$ і збурення $\delta y = 0$, тоді отримаємо нульовий розв'язок $y(t) = 0$. Припустимо, що $y_0 \neq 0$ за рахунок наявності невеликого збурення δy

$$y_0 = \delta y.$$

Тоді висновок про стійкість розв'язку для $t \to \infty$ буде суттєво залежати від знаку коефіцієнта k.

Якщо $k < 0$, то з (5.4) видно, що при збільшенні t розв'язки необмежено наближаються до 0 і в границі при $t \to \infty$ практично дорівнюють нулю

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = 0.$$

В цьому випадку розв'язок називається *асимптотично стійким* відносно збурення початкової умови або асимптотично стійким за Ляпуновим [22].

Якщо $k > 0$, то зі збільшенням t значення величини $y(t)$ необмежено зростає, не зважаючи на те, що величина $y_0 = \delta y$ може бути як завгодно малою. Отже, розв'язок нестійкий.

Стійкість системи рівнянь

Якщо кількість змінних стану дорівнює двом або більше, відповідна модель представляє собою систему двох чи більше диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = f(x,y), \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = g(x,y). \end{cases} \qquad (5.5)$$

Розглянемо динамічну систему, яка описується системою лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = ax(t) + by(t), \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = kx(t) + ly(t). \end{cases} \qquad (5.6)$$

Система (5.6) має єдиний розв'язок за умови нерівності нулю детермінанта матриці коефіцієнтів

$$\det M = \begin{vmatrix} a & b \\ k & l \end{vmatrix} = al - bk \neq 0.$$

Стійкість рівноважного стану залежить від власних чисел $\lambda_{1,2}$ матриці системи, які визначаються відповідним характеристичним рівнянням. Для цього будемо шукати частинні розв'язки системи (5.6) у вигляді

$$x(t) = \alpha e^{\lambda t}, \quad y(t) = \beta e^{\lambda t}, \tag{5.7}$$

де α, β, λ – деякі сталі.

Виконаємо підстановку (5.7) в систему (5.6) і після скорочення на $e^{\lambda t}$ отримаємо лінійну систему алгебраїчних однорідних рівнянь з двома змінними α і β

$$\begin{cases} (a-\lambda)\alpha + b\beta = 0, \\ k\alpha + (l-\lambda)\beta = 0. \end{cases} \tag{5.8}$$

Отримаємо характеристичне рівняння з умови, що визначник системи (5.8) дорівнює нулю

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ k & l-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

а звідси запишемо рівняння у вигляді

$$(a-\lambda)(l-\lambda) - bk = 0,$$

або

$$\lambda^2 - (a+l)\lambda + al - bk = 0.$$

Із характеристичного рівняння розрахуємо слід і детермінант матриці

$$a + l = tr(M), \quad al - bk = \det(M).$$

Стійкість точок рівноваги визначається коренями характеристичного рівняння λ_1 та λ_2, які можуть бути від'ємними, додатними, дійсними або комплексними. Отже, точка рівноваги буде [22]

– асимптотично стійка, якщо дійсні частини коренів λ_1 та λ_2 від'ємні

$$\lambda_{1,2} = p \pm iq, \quad p < 0;$$

$$\lambda_{1,2} = p_{1,2} < 0;$$

– стійка, якщо обидві дійсні частини нульові, тобто корені λ_1 та λ_2 уявні

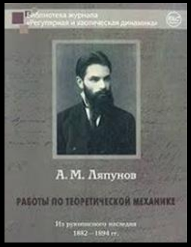
$$\lambda_{1,2} = \pm iq;$$

– нестійка, якщо дійсна частина коренів λ_1 та λ_2 додатна

$$\lambda_{1,2} = p \pm iq, \quad p > 0;$$

$$\lambda_{1,2} = p_{1,2} > 0.$$

Таким чином, ознакою стійкості за Ляпуновим є від'ємність дійсних частин коренів характеристичного рівняння.



Оцінка стійкості нелінійного рівняння

Розглянемо нелінійне диференціальне рівняння першого порядку (див. модель лекція 3) на основі рівняння Ферхюльста

$$\frac{dy(t)}{dt} = ky(t)\left(y_{\max} - y(t)\right), \qquad (5.9)$$

де $k > 0$, $y_{\max} > 0$.

Для визначення точок рівноваги порівняємо рівняння (5.1) і (5.9) й врахуємо умову стаціонарності розв'язків $\frac{dy(t)}{dt} = 0$.

Запишемо

$$f(y_t) = ky(t)\left(y_{\max} - y(t)\right) = 0. \qquad (5.10)$$

Отримане рівняння має два рівноважні розв'язки

$$y(t) = 0, \; y(t) = y_{\max}.$$

Оцінимо стійкість даних розв'язків з аналізу логістичної функції як загального розв'язку рівняння (5.9)

$$y(t)=\frac{y_{\max}y_0}{y_0+(y_{\max}-y_0)e^{-ky_{\max}t}}, \tag{5.11}$$

де $y_0=y(0)$ – початкова умова.

1) Якщо $y_0>0$, то при $t\to\infty$ отримаємо

$$\lim_{t\to\infty}y(t)=y_{\max}.$$

2) Якщо $y_0<0$ (позначимо $y_0=-y_0^{-}<0$), тоді перепишемо (5.11) у вигляді

$$y(t)=\frac{-y_{\max}y_0^{-}}{-y_0^{-}+\left(y_{\max}+y_0^{-}\right)e^{-ky_{\max}t}}=\frac{y_{\max}y_0^{-}}{y_0^{-}-\left(y_{\max}+y_0^{-}\right)e^{-ky_{\max}t}}=$$

$$\frac{y_{\max}}{1-\left(\dfrac{y_{\max}+y_0^{-}}{y_0^{-}}\right)e^{-ky_{\max}t}}.$$

Визначимо, при якому значенні $t = t^0$ знаменник обертається в нуль

$$1 - \frac{y_{\max} + y_0^-}{y_0^-} e^{-ky_{\max} t^0} = 0,$$

$$\frac{y_{\max} + y_0^-}{y_0^-} = e^{ky_{\max} t^0},$$

$$\ln \frac{y_{\max} + y_0^-}{y_0^-} = ky_{\max} t^0,$$

$$t^0 = \frac{1}{ky_{\max}} \ln \frac{y_{\max} + y_0^-}{y_0^-},$$

$$t^0 = \frac{1}{ky_{\max}} \ln \frac{y_0 - y_{\max}}{y_0}.$$

Отже, для $y_0 < 0$ і $t \to t^0$ отримаємо $\lim\limits_{t \to t^0} y(t) = -\infty$. Таким чином, стаціонарні розв'язки відповідно

1) $y(t) = 0$ – нестійкий;

2) $y(t) = y_{\max}$ – стійкий.

Висновки:

1) Стійкість є однією з найважливіших характеристик будь-якої системи. Ця категорія використовується науковцями в різних областях науки, пов'язаних з дослідженням складних систем. Розвиток складних систем супроводжується змінами у структурі, поведінці, режимах функціонування. Такі зміни можуть накопичуватись повільно, швидко, лавиноподібно, або стрибком, миттєво.

2) Динаміка складних систем завжди супроводжується втратою стійкості і виникненням *біфуркації*, яка визначає перехід системи до відмінної від попередньої лінії поведінки (режиму функціонування чи нового стану).

3) Формалізація розглянутих процесів знайшла своє відображення в математичній теорії стійкості. Тому аналіз стійкості функціонування складної динамічної системи є важливим з практичної точки зору.

4) Формалізація системи як математичної моделі з достатньою повнотою опису об'єкта в термінах диференціальних або різницевих рівнянь дозволяє виконати оцінку її стійкості.

Отже, теорія стійкості гласить: *система є стійкою, якщо її траєкторія у фазовому просторі залишається в заданих границях при деяких кінцевих збуреннях достатньо широкого спектру*. Іншими словами, система вважається стійкою, якщо деякі невеликі варіації умов її функціонування (вплив збурюючих факторів або зміна початкового стану) суттєво не впливають на її поведінку.