

Лабораторна робота 6

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ЦІЛОЧИСЕЛЬНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Мета: засвоїти метод правильних відсічень (метод Гоморі) розв'язання задач ЦП.

6.1 Порядок виконання роботи

Розглянемо метод на прикладі такої задачі:

$$F(x_1, x_2) = x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 7 \\ 10x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 - \text{цілі.} \end{cases}$$

У відповідності до методу правильних відсічень спочатку відкидаємо умову цілочисельності й розв'язуємо отриману задачу лінійного програмування:

$$F(x_1, x_2) = x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 7 \\ 10x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Використовуємо метод симплекс-таблиць:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_4) = x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 1x_3 + 0x_4 = 7 \\ 10x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 1x_4 = 15 \\ x_1, \dots, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 7, x_4 = 15.$$

Заповнимо вихідну симплекс-таблицю:

Таблиця 6.1

	С	–	1	4	0	0
	В	A ₀	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄
← 0	x ₃	7	2	4	1	0
0	x ₄	15	10	3	0	1
	Δ	0	-1	-4	0	0

Визначимо:

напрямний стовпець – A₂;

напрямний рядок – x₃;

напрямний елемент – x₃₂ = 4.

Розрахуємо елементи наступної симплекс-таблиці:

Таблиця 6.2

	С	–	1	4	0	0
	В	A ₀	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄
4	x ₂	$\frac{7}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{4}$	0
0	x ₄	$\frac{39}{4}$	$\frac{34}{4}$	0	$-\frac{3}{4}$	1
	Δ	7	1	0	1	0

Отримано оптимальний розв'язок відповідної задачі ЛП:

$$x_1 = 0, x_2 = 1\frac{3}{4}, F_{max} = 7 - \text{не є цілочисельним.}$$

Сформуємо правильне відсічення, для змінної x₂, значення якої не є цілим числом.

Визначимо дробові частини елементів рядка x₂. При цьому дробові частини повинні знаходитися в межах]0; 1[:

$$\gamma_{20} = x_{20} - [x_{20}] = \frac{7}{4} - 1 = \frac{3}{4},$$

$$\gamma_{21} = x_{21} - [x_{21}] = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2},$$

$$\gamma_{23} = x_{23} - [x_{23}] = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}.$$

Запишемо правильне відсічення:

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{4}x_3 \geq \frac{3}{4}.$$

Виконаємо необхідні перетворення:

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{4}x_3 - x_5 = \frac{3}{4},$$

$$-\frac{3}{4} = x_5 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{4}x_3.$$

Додамо сформоване додаткове обмеження в останню симплекс-таблицю у вигляді рядка; також у неї додається додатковий стовпець (через введення вільної змінної x_5):

Таблиця 6.3

	С	-	1	4	0	0	0
	В	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
4	x_2	$\frac{7}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{4}$	0	0
0	x_4	$\frac{39}{4}$	$\frac{34}{4}$	0	$-\frac{3}{4}$	1	0
← 0	x_5	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	1
	Δ	7	1	0	1	0	0
	θ		2	-	4	-	-

Далі розв'язуємо задачу за допомогою двоїстого симплекс-методу.

Визначимо напрямний рядок – x_5 (за від'ємним елементом у стовпці A_0).

Визначимо напрямний стовпець – A_1 (за найменшим за абсолютним значенням з відношень оцінок індексного рядка Δ до від'ємних елементів напрямного рядка x_5 – $\min \left\{ \left| 1 : \left(-\frac{1}{2} \right) \right| ; \left| 1 : \left(-\frac{1}{4} \right) \right| \right\} = \min \{ 2; 4 \} = 2$).

Визначимо напрямний елемент – $x_{51} = -\frac{1}{2}$.

Розрахуємо елементи наступної симплекс-таблиці:

Таблиця 6.4

	C	-	1	4	0	0	0
	B	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
4	x_2	1	0	1	0	0	1
← 0	x_4	-3	0	0	-5	1	17
1	x_1	$\frac{3}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	0	-2
	Δ	$\frac{11}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	2
	θ		-	-	$\frac{1}{10}$	-	-

Оскільки в стовпці A_0 ще є від'ємний елемент, продовжуємо розв'язувати задачу двоїтим симплекс-методом.

Визначимо:

напрямний рядок – x_4 ;

напрямний стовпець – A_3 ;

напрямний елемент – $x_{43} = -5$.

Таблиця 6.5

	C	-	1	4	0	0	0
	B	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
4	x_2	1	0	1	0	0	1
0	x_3	$\frac{3}{5}$	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{17}{5}$
1	x_1	$\frac{12}{10}$	1	0	0	$\frac{1}{10}$	$-\frac{3}{10}$
	Δ	$\frac{52}{10}$	0	0	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{37}{10}$

Оскільки в стовпці A_0 немає від'ємних елементів, то отримано

оптимальний розв'язок: $x_1 = \frac{12}{10}, x_2 = 1, F_{max} = \frac{52}{10}$, але він ще не є цілочисельним. Тому формуємо наступну додаткову умову-обмеження:

$$r_{10} = x_{10} - [x_{10}] = \frac{12}{10} - 1 = \frac{2}{10},$$

$$r_{14} = x_{14} - [x_{14}] = \frac{1}{10} - 0 = \frac{1}{10},$$

$$r_{15} = x_{15} - [x_{15}] = -\frac{3}{10} - (-1) = \frac{7}{10},$$

$$\frac{1}{10}x_4 + \frac{7}{10}x_5 \geq \frac{2}{10},$$

$$\frac{1}{10}x_4 + \frac{7}{10}x_5 - x_6 = \frac{2}{10},$$

$$-\frac{2}{10} = x_6 - \frac{1}{10}x_4 - \frac{7}{10}x_5,$$

та додаємо її до останньої симплекс-таблиці:

Таблиця 6.6

	C	-	1	4	0	0	0	0
	B	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
4	x_2	1	0	1	0	0	1	0
0	x_3	$\frac{3}{5}$	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{17}{5}$	0
1	x_1	$\frac{12}{10}$	1	0	0	$\frac{1}{10}$	$-\frac{3}{10}$	0
← 0	x_6	$-\frac{2}{10}$	0	0	0	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{7}{10}$	1
	Δ	$\frac{52}{10}$	0	0	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{37}{10}$	0
	θ	-	-	-	1	$\frac{37}{7}$	-	-

Визначимо:

напрямний рядок – x_6 ;

напрямний стовпець – A_4 ;

напрямний елемент – $x_{64} = -\frac{1}{10}$.

Розв'язуємо задачу далі, двоїтим симплекс-методом.

Розрахуємо елементи наступної симплекс-таблиці:

Таблиця 6.7

	C	-	1	4	0	0	0	0
	B	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
4	x_2	1	0	1	0	0	1	0
0	x_3	1	0	0	1	0	-2	-2
1	x_1	1	1	0	0	0	-1	1
0	x_4	2	0	0	0	1	7	-10
	Δ	5	0	0	0	0	3	1

У стовпці A_0 немає від'ємних елементів – отримано оптимальний цілочисельний розв'язок задачі:

$$x_1 = 1, x_2 = 1, F_{max} = 5.$$

Завдання

Розв'язати задачу цілочисельного програмування методом правильних відсічень (методом Гоморі).

Таблиця 6.8

№ варіанту	Умови задачі
1	2
1	$F(x_1, x_2) = x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$ $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 17 \\ 10x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \text{ — цілі} \end{cases}$
2	$F(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$ $\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 \leq 21 \\ -x_1 + 3x_2 \leq 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \text{ — цілі} \end{cases}$

1	2
3	$F(x_1, x_2) = 5x_1 + 6x_2 + 6x_3 \rightarrow \min$ $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \geq 10 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \\ x_1, x_2, x_3 — \text{цілі} \end{cases}$
4	$F(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \rightarrow \max$ $\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 \leq 20 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 — \text{цілі} \end{cases}$
5	$F(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$ $\begin{cases} 2x_1 + 9x_2 \leq 36 \\ x_1 + x_2 \leq 7 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 — \text{цілі} \end{cases}$
6	$F(x_1, x_2) = 8x_1 + 6x_2 \rightarrow \max$ $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 11 \\ 4x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 — \text{цілі} \end{cases}$
7	$F(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \rightarrow \max$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 18 \\ x_1 + 2x_2 \leq 16 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 — \text{цілі} \end{cases}$
8	$F(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \rightarrow \max$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 — \text{цілі} \end{cases}$

1	2
9	$F(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \rightarrow \max$ $\begin{cases} 2x_1 + 11x_2 \leq 38 \\ x_1 + x_2 \leq 7 \\ 4x_1 - 5x_2 \leq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \text{— цілі} \end{cases}$
10	$F(x_1, x_2) = 4x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 5 \\ 2x_1 + x_2 \leq 9 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \text{— цілі} \end{cases}$
11	$F(x_1, x_2) = 2x_1 - x_2 \rightarrow \max$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ 3x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \text{— цілі} \end{cases}$
12	$F(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \rightarrow \max$ $\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 \leq 20 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \text{— цілі} \end{cases}$
13	$F(x_1, x_2) = 7x_1 - 2x_2 \rightarrow \max$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 6 \\ 3x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1 - x_2 \geq -3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \text{— цілі} \end{cases}$

1	2
14	$F(x_1, x_2) = x_1 - 3x_2 + 3x_3 \rightarrow \max$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 \leq 4 \\ 4x_1 - 3x_2 \leq 2 \\ -3x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \\ x_1, x_2, x_3 \text{ — цілі} \end{cases}$
15	$F(x_1, x_2) = 6x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \text{ — цілі} \end{cases}$