1. ПЛОСКІ ПРЯМОКУТНІ КООРДИНАТИ ГАУССА-КРЮГЕРА

Тема 1.4: Застосування проекції Гаусса-Крюгера.

1. Практика застосування проекції Гаусса-Крюгера
2. Перетворення координат Гаусса-Крюгера із зони в зону
3. Числовий приклад опрацювання фрагменту геодезичної мережі на площині в проекції Гаусса-Крюгера.

1. Практика застосування проекції Гаусса-Крюгера

Областю зображення або областю розповсюдження системи плоских прямокутних координат є *координатна зона*, обмежена двома меридіанами, з різницею довгот в $2l^0$, переважно в 6^o – шестиградусна зона. Нумерація зон, а відповідно і довгота осьового меридіана, пов'язана з прийнятою номенклатурою карт. Кожна шестиградусна зона відповідає одній колоні листів карти масштабу 1:1 000 000 і, якщо *N* є номером колони, то номер шестиградусної зони *n* визначається за формулою $n = N - 30$.

Осьовий меридіан шестиградусної зони проекції Гаусса-Крюгера збігається із середнім меридіаном відповідної колони карти масштабу 1:1 000 000. Звідси виходить, що довгота осьового меридіана може бути знайдена за формулою $L_o = 6n - 3^o$. Довгота межового меридіана шестиградусної зони відносно осьового рівна $l = \pm 3^o$.

В топографічних роботах крупного масштабу застосовуються триградусні зони, а в спеціальних роботах можуть і ще вужчі, але при цьому координати опорних пунктів даються і в шестиградусній зоні.

Прямолінійне зображення осьового меридіана і екватора, які приймаються за осі декартових координат, дозволяють створити в кожній координатній зоні самостійну систему плоских координат, яка використовується у всіх видах геодезичних і топографічних робіт, що виконуються в межах однієї зони.

Системи координат в кожній зоні проекції Гаусса-Крюгера абсолютно ідентичні: плоскі координати *x* і *y*, обчислені за геодезичними координатами B, l в будь-якій координатній зоні, мають одні і ті ж значення.

Для однотипного способу аналітичного вираження положення будь-якої точки земної поверхні Баумгарт (1919) вніс наступні пропозиції:

- оптимальним вважати поділ на триградусні зони;
- виключити з використання від'ємні ординати шляхом додавання до них 500 000 *м*;
- за осьові меридіани прийняти меридіани 3, 6, 9, 12^o, … східної довготи, відносячи їх до Грінвіча, а перед ординатою вказувати відповідні їм номери

Таблиця 1.2

L_o	0^o	3^o	6^o	9^o	12^o	15^o	…
n	0	1	2	3	4	5	…

В результаті цих пропозицій, отримана вище вказаним чином ордината називається *умовною ординатою*. Наприклад, *y* = 7 490 891,297 означає, що точка з цією ординатою розташована в 7 зоні, її істинна ордината рівна y = - 9 108,703, а довгота осьового меридіана $L_o = 7 \times 3 = 21^0$.

Пропозиції Баумгарта були прийняті багатьма державами.

В Україні на даний час за осьові прийняті меридіани 3, 9, 15, 21^o, … східної довготи відносно Грінвіча (*рис. 1.7*), тобто з інтервалом в 6о; номерація їх відповідає приведеному ряду

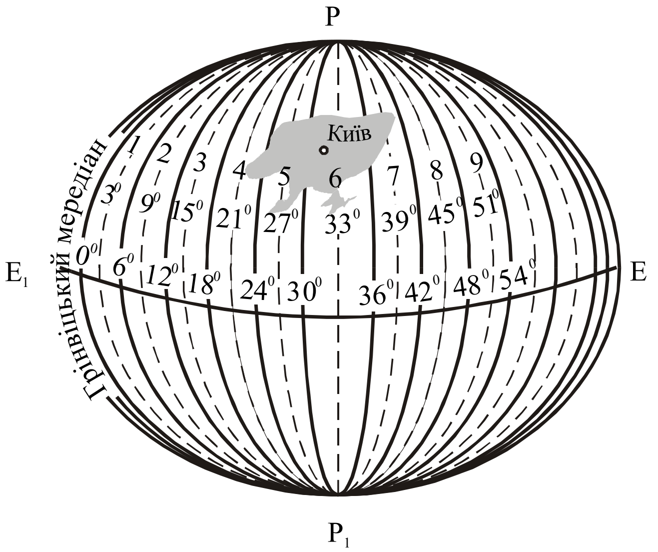


Рис. 1.7.

Таблиця 1.3

L_o	3^o	9^o	15^o	21^o	27^o	33^o	…
n	1	2	3	4	5	6	…

Система координатних зон створює незручності при обчисленні геодезичної мережі, а також при проведенні топографічних знімань у випадках, коли геодезична мережа або частина земної поверхні, на якій проводять знімання розташована не в одній, а в двох або навіть в декількох зонах. Хоча ці незручності розв'язуються порівняно просто, проте ширину зони стараються вибрати якомога більшою і тим самим зменшити труднощі, що можуть виникати в таких випадках.

При виконанні геодезичних робіт ширина координатної зони може бути, в принципі, довільною. Врахування більшої кількості членів у формулах для перетворення координат та редукцій кутів і ліній не є перешкодою для сучасних методів та засобів обчислень. Наприклад, вся територія України, що простягається по довготі на 20^o, може бути віднесена до однієї зони і формули (1.15) – (14.16) дозволяють обчислити +плоскі прямокутні координати будь-якої точки з точністю до 0,01 *м*.

Зовсім іншою є справа в топографії. Так при створенні топографічних карт, основна вимога, що стосується до будь-якої картографічної проекції – це рівність відстаней, які виміряні на карті, відстанням на місцевості в масштабі карти. Максимальне спотворення Δs можна визначити на основі формули редукції відстаней (1.36')

$$\Delta s = \frac{y_m^{\,2}}{2R^2} s_{\max} \qquad (1.37)$$

де $s_{\max}$ – максимальна відстань, яку можна виміряти між двома найбільш віддаленими точками в межах листа топографічної карти. Цю відстань можна обчислити на основі формул для сторін сфероїдної трапеції

$$\sqrt{a_1^{\ 2} + c^2} = s_{\max} = R\sqrt{\cos^2 B(\Delta L)^2 + (\Delta B)^2} \qquad (1.38)$$

де ΔB та ΔL – розміри рамок трапеції (листа карти певного масштабу) по широті та довготі відповідно.

Значення y_m, якому будуть відповідати максимальні лінійні спотворення, викликані масштабом проекції, для території України будуть в точці з координатами $B = 45^o, |l| = 3^o$. В цій точці $|y| = 236$ км. Тоді, згідно формул (1.38) та (1.37), отримаємо

Таблиця 1.4

Масштаби трапецій	$s_{\max}$, *км*	Δs, *м*
1:25 000	13.5	9
1: 10 000	6.8	5
1: 5 000	3.4	2
1: 2 000	1.1	0.8

Точність відстані, виміряної між двома точками на топографічній карті, характеризується похибкою порядку 0,7 *мм*. В залежності від масштабу карти дана похибка відповідає величині Δd в метрах

Таблиця 1.5

Масштаби трапецій	Δd, *м*
1:25 000	18
1: 10 000	7
1: 5 000	4
1: 2 000	1

Як видно із наведених таблиць, для топографічних карт масштабного ряду до 1:2 000, лінійними спотвореннями при виконанні картометричних робіт можна знехтувати в межах однієї шестиградусної зони від широти 45° та більше. Для більш крупних масштабів величина лінійних спотворень Δs на краю шестиградусної зони є недопустимою, тому в цих випадках потрібно застосовувати триградусні зони.

Спотворення виникають не тільки при використанні карт, але і при самих топографічних зніманнях. Тому при встановлені ширини зони виходять також із інтересів топографічних робіт: вибирають зони такого розміру по довготі, при якому не виникало би потреби враховувати спотворення. Завдяки властивості конформності проекції кути контурів будуть зберігатися і питання відноситься, головним чином, до врахування спотворень відстаней. Справді, на краю шестиградусної зони при y_m =250 км, $(x_2 - x_1)$ = 1 *км* значення редукції буде менше 1", тобто достатньо мала величина в порівнянні з похибками вимірювання кутів при розвитку знімальної основи (20-30").

З достатньою для даного питання точністю ординату *y* можна обчислити за формулою (див. 1.19)

$$y = lR\cos B.$$

Тоді, згідно формули (1.37), для відносного спотворення відстаней, напишемо

$$\frac{\Delta s}{s} = \frac{1}{2} l^2 \cos^2 B.$$

Південні райони України розташовані на широті біля 45°. Поставивши вимогу, щоб спотворення відстаней не переважало певної величини, отримаємо різні значення ширини зони по довготі

Таблиця 1.6

Відносна похибка	1 / 1 000	1 / 2 000	1 / 5 000	1 / 10 000
Ширина зони	3.5°	2.5°	1.5°	1°

Поскільки при зніманнях в кадастрових роботах, а також територій, що відводяться під будівництво великих інженерних споруд, допускаються досить незначні лінійні спотворення, щоб ними можна було знехтувати і лише в крайніх випадках враховувати за допомогою простих формул, то звідси і виходять при виборі ширини зони (див. *табл. 1.6*).

Викладені положення дозволяють встановити наступний порядок дій при опрацюванні геодезичної мережі 2 класу в проекції Гаусса-Крюгера, якщо вихідними даними є геодезичні координати B і L одного або обох пунктів вихідної сторони, її довжина s та азимут A і горизонтальні напрями на інші сторони мережі:

- виміряні напрями приводять до поверхні еліпсоїда шляхом їх редукування з фізичної поверхні Землі;
- від геодезичних координат (B, L) початкового пункту (пунктів) початкової (вихідної) сторони переходять до плоских прямокутних координат (x, y) цього пункту (пунктів), обчисливши також при цьому значення зближення меридіанів (γ);
- знаючи геодезичний азимут (A) вихідної сторони (геодезичної лінії) та зближення меридіанів (γ) в початковому пункті, обчислюють наближено (без врахування поправки за кривину зображення геодезичної лінії δ) дирекційний кут зображення геодезичної лінії на площині

  $$\alpha_{12}' = A_{12} - \gamma_1 .$$

  Коли дані про геодезичний азимут відсутні, тоді, при відомих геодезичних координатах другого пункту початкової сторони, шляхом розв'язування оберненої геодезичної задачі на еліпсоїді, знаходять його значення або переходять від геодезичних координат цього пункта до його плоских прямокутних координат, а значення дирекційного кута на площині в цьому випадку знаходять за відомою формулою

  $$tg\alpha_{12} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} .$$

- проводять попереднє (наближене) розв'язування трикутників (для тріангуляційної мережі) та обчислення сферичних надлишків трикутників;
- за відомими координатами x та y початкового пункту, наближеним значенням дирекційного кута α_{12}' вихідної сторони, наближеними значеннями довжин сторін мережі розв'язують послідовно прямі геодезичні задачі на площині, в результаті чого знаходять наближені координати x та y всіх пунктів мережі. Для геодезичних мереж нижчих класів (3 і 4) наближені координати можуть бути знайдені графічно з топографічної карти;

– за наближеними координатами обчислюють довжину хорди d вихідної сторони та поправки δ за кривину зображення геодезичних ліній всіх напрямів. Сума поправок δ в кути і сферичний надлишок ε в кожному трикутнику повинна бути рівна нулю;
– поправки δ вводять у виміряні напрями і отримують приведені на площину напрями хорд, після чого обчислюють приведені плоскі кути;
– проводять врівноваження мережі і отримують врівноважені значення кутів;
– за врівноваженими кутами та довжиною вихідної сторони (хорди) проводять остаточне обчислення довжин всіх сторін мережі;
– знаходять точне значення дирекційного кута вихідної сторони

$$\alpha_{12} = A_{12} - \gamma_1 - \delta_{12}$$

і дирекційні кути всіх сторін мережі за формулою

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \beta_{\text{µ‰}} \mp 180^o;$$

– за координатами початкового пункту, довжинами d і дирекційними кутами α всіх сторін обчислюють остаточні плоскі прямокутні координати x та y всіх пунктів мережі.

Відмітимо, що характерною особливістю супутникового методу визначення координат є забезпечення можливості прив'язки нової мережі до певної системи координат з виконанням відповідного їх перетворення. Більшість програмних комплексів може виконувати перехід від просторових декартових (чи еліпсоїдальних) координат системи WGS-84 в систему прямокутних плоских координат у заданій проекції, в тому числі і для проекції Гаусса-Крюгера.

При використанні проекції Гаусса-Крюгера можливі також випадки, коли:

а) виникає необхідність перечислення координат із системи однієї зони в систему другої зони;

б) потрібно здійснити перетворення із місцевої системи в державну систему координат чи навпаки;

в) обчислення координат в заданій проекції потрібно виконати за координатами інших геодезичних проекцій;

г) проведено переорієнтування референц-еліпсоїда і вимагається визначити вплив даного фактора на плоскі прямокутні координати мережі.

Перелічені випадки застосування проекції Гаусса-Крюгера є важливими в практичних роботах.

2. Перетворення координат Гаусса-Крюгера із зони в зону

Поділ поверхні еліпсоїда на меридіанні смуги певної ширини і зображення їх на площині у виді незалежних одна від другої координатних зон створює деякі труднощі в тих випадках, коли необхідно встановити геодезичний зв'язок між пунктами, координати яких задані в різних координатних зонах, тобто обчислені від різних осьових меридіанів.

Нехай деяка точка Q на еліпсоїді з координатами B і L розміщена між осьовими меридіанами L_0 та $L_0 + l_0$ двох суміжних смуг (*рис. 1.8*). Зображення її q_1 на площині, в проекції Гаусса-Крюгера, в системі координат західної зони (з осьовим меридіаном L_0) матиме координати x_I, y_I, а в системі координат східної зони (осьовий меридіан $L_0 + l_0$) – x_{II}, y_{II} (*рис. 1.8*).

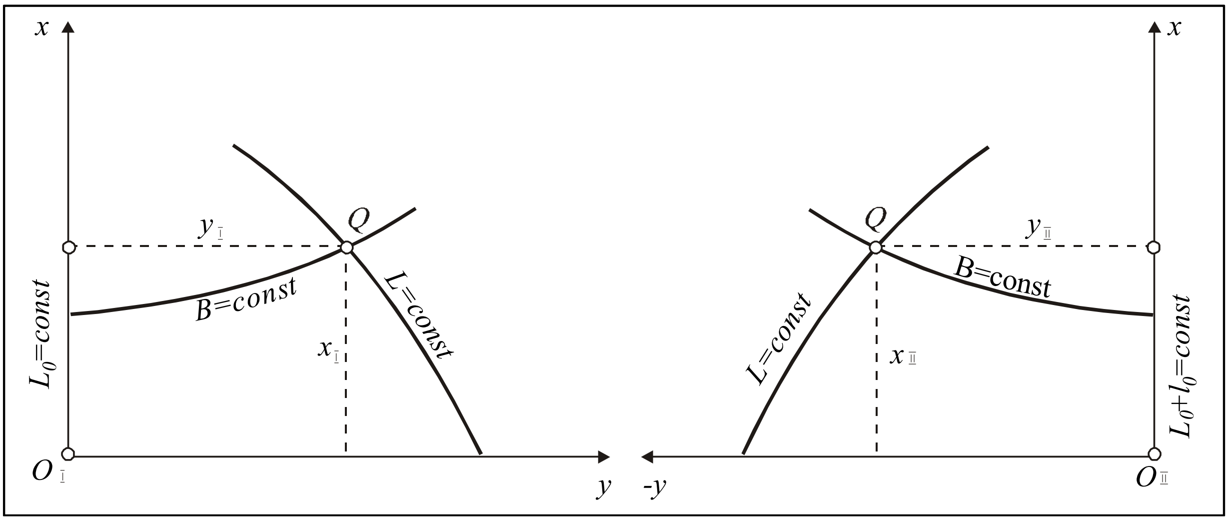


Рис. 1.8.

Якщо координати x_I, y_I (чи x_{II}, y_{II}) отримані в результаті опрацювання геодезичної мережі, в яку входить точка Q, то координати x_{II}, y_{II} (чи x_I, y_I) отримують відповідними обчисленнями на основі формул зв'язку між координатами x_I, y_I та x_{II}, y_{II}; називають такі обчислення *перетворенням координат*.

В практиці геодезичних робіт потреба перетворювання плоских координат x_I, y_I в координати x_{II}, y_{II}, тобто необхідність перейти від одної системи плоских прямокутних координат до другої, зустрічається доволі часто.

Наприклад, математичне опрацювання геодезичної мережі в системі плоских прямокутних координат Гаусса-Крюгера, пункти якої розміщені по обидві сторони від граничного меридіана сусідніх смуг на еліпсоїді, можливе тоді, якщо координати вихідних пунктів для цієї мережі будуть в одній системі плоских координат, тобто в одній координатній зоні.

При розв'язування оберненої геодезичної мережі на площині між пунктами, розміщеними в різних смугах на еліпсоїді плоскі координати повинні бути задані в одній координатній зоні.

Для таких і їм подібних випадків, що нерідко зустрічаються на практиці, передбачено при створенні каталогів плоских прямокутних координат "перекриття" зон. Всі пункти, розміщені на 30' по довготі на схід і захід від граничного меридіана шестиградусних смуг в каталогах мають координати в двох зонах: відносно осьового меридіана $L_0 = const$ своєї зони і осьового меридіана $L_0 + l_0 = const$ сусідньої зони. Схематично таке перекриття показано на *рис. 1.9*. Цим, фактично, протяжність шестиградусних зон по довготі збільшується до 7^0 та створюється перекриття в 1^0.

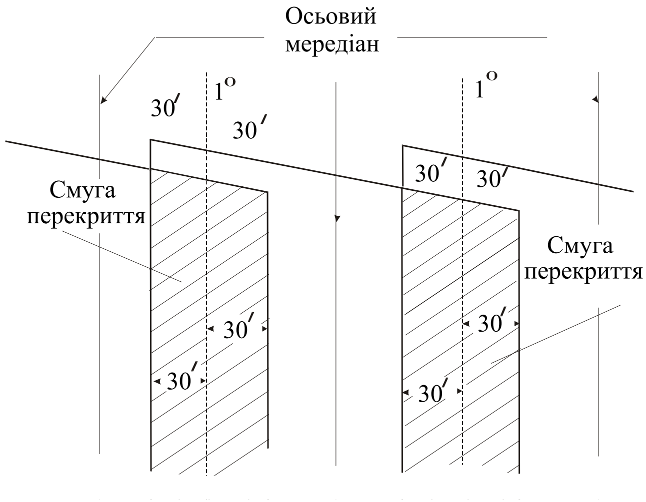


Рис. 1.9.

Проте перекриття зон не виключає всіх випадків обчислень на перетворення координат. Такі випадки можливі при проведенні топографо-геодезичних робіт на стику двох зон, як також і в одній зоні. В першому випадку виникає потреба перетворення координат із зони в зону, а в другому – переобчислення координат заданих в системі деякої стандартної зони відносно меридіана L_0 в місцеву систему координат відносно іншого меридіана з довготою L , прийнятого за осьовий.

Загальна схема перетворення координат, коли задано x_I, y_I в одній зоні (з довготою осьового меридіана L_I), треба знайти x_{II}, y_{II} в другій зоні (з осьовим меридіаном L_{II}):

1. Перехід від x_I, y_I до B і $L = L_I + l$ за формулами (1.20);
2. З врахуванням довготи L_{II} осьового меридіана другої зони перехід від B і $l = L - L_{II}$ до x_{II}, y_{II} за формулами (1.15).

Можливим є безпосереднє перетворення плоских прямокутних координат одної зони в плоскі координати другої зони без проміжного переходу в геодезичні координати, тобто $x_I, y_I \leftrightarrow x_{II}, y_{II}$. Проте алгоритм і самі обчислення в цьому випадку, при відсутності допоміжних засобів в виді спеціальних таблиць, доволі громіздкі.

Числовий приклад.

Нехай задані плоскі прямокутні координати $x = 5526832{,}803$*м,* $y = 209718{,}824$*м деякого пункту в системі шестиградусної зони (*$n = 4$*) з осьовим меридіаном* $L_{0I} = 24^0$*. Потрібно обчислити плоскі прямокутні координати цього пункту відносно осьового меридіана* $L_{0II} = 27^0$.

З заданими координатами x *і* y *визначаємо геодезичні координати* B *і* $L = l + 24^0$ *за формулами (1.20) з використанням (1.21). Тоді:* $B = 49^0 50' 11{,}2451''$, $L = 26^0 54' 55{,}4638''$. *Тепер, за відомими* B *і* $l = L - 27^0$*, використовуючи формули (1.15)-(1.17), знаходимо плоскі прямокутні координати відносно осьового меридіана* L_{0II}*:* $x = 5522757{,}110$*м і* $y = -6085{,}637$*м.*

3. Числовий приклад опрацювання фрагменту геодезичної мережі на площині в проекції Гаусса-Крюгера.

Нехай фрагмент геодезичної мережі (тріангуляції) 2-го класу складається з двох трикутників (*рис. 1.10*), сторона одного з них AB є вихідною стороною даної мережі, тобто відомо її довжина і геодезичний азимут; відомо також геодезичні координати вихідного пункту A:

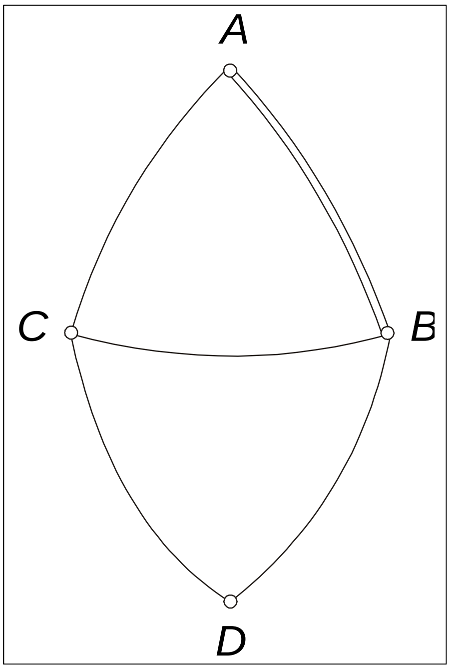


Рис. 1.10.

$$B_1 = 51^o\ 58'\ 08{,}3168''$$
$$L_1 = 21^o\ 50'\ 11{,}3692''$$
$$A_{12} = 177^o\ 15'\ 41{,}4940''$$
$$S_{12} = 24\ 796{,}232\ м$$

Виміряні горизонтальні кути на пунктах даної мережі (*рис. 1.10*), приведені на поверхню еліпсоїда Красовського, наведені в табл. 1.7

Таблиця 1.7

Назва вершин	Виміряні та приведені до еліпсоїда кути
C *B* *A*	55º 54' 45,56" 55º 46' 30,66" 68º 18' 46,67"
D *C* *B*	60º 52' 14,52" 56º 19' 23,45" 62º 48' 23,90"

Всі обчислення виконують для триградусної зони в послідовності, яка вказана у пункті 1 даної лекції, наступним чином:

1. Обчислення плоских прямокутних координат пункту A за його геодезичними координатами виконується за формулами (1.19). Перед обчисленнями координат проводять встановлення номера триградусної зони, в якій розташований пункт A та довготи осьового меридіана L_0:

$$n = 7; \qquad L_0 = 21^o,$$

а потім обчислюють самі координати та зближення меридіанів:

$$x = 5760323{,}417; \qquad y = 57488{,}742 \quad (7\,557488{,}742); \qquad \gamma = 0^o 39' 32{,}052'';$$

для контролю проводять обчислення геодезичних координат вихідного пункту за отриманими плоскими прямокутними на основі формул (1.20). При цьому значення величини $B_x = 51^o 58' 19{,}0119''$, а $N_x = 6391531{,}378$.

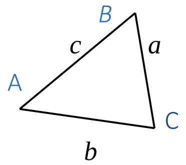
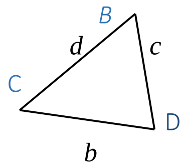
2. Попереднє (наближене) розв'язування трикутників проводиться з метою обчислення наближених довжин сторін мережі, які необхідні в свою чергу для обчислення сферичних

надлишків трикутників та наближених координат пунктів. Сторони обчислюються за формулами плоскої тригонометрії (теоремою синусів), а сферичний надлишок за формулою

$$\varepsilon = \frac{a^2}{2R^2}\frac{\sin B \sin C}{\sin A} = \frac{b^2}{2R^2}\frac{\sin A \sin C}{\sin B} = \frac{c^2}{2R^2}\frac{\sin A \sin B}{\sin C}.$$

Результати обчислень приведені в *таблиці 1.8*.

Таблиця 1.8

№ Трикутника	Трикутники	Довжини сторін, *м*	Сферичний надлишок
1		c = 24796 b = 24756 a = 27821	$\varepsilon = \frac{c^2}{2R^2}\frac{\sin A \sin B}{\sin C}\rho'' = 1.44''$
2		d = 27821 b = 28329 c = 26504	$\varepsilon = \frac{d^2}{2R^2}\frac{\sin C \sin B}{\sin D}\rho'' = 1.66''$

3. Дирекційний кут α_{12} хорди зображення геодезичної лінії початкової сторони на площині обчислюється за формулою (1.11). Оскільки значення поправки δ_{12} поки що нам невідоме, то можемо знайти тільки наближене значення дирекійного кута:

$$\alpha_{12}' = 176^{\circ}36'09''.$$

4. Обчислення наближених координат пунктів, необхідних для визначення поправок δ, а також приведення довжини вихідної сторони на площину в проекції наведено у *таблиці 1.9*.

Таблиця 1.9

Елементи	*A*(1)	*A*(1)	*B*(1)	*B*(1)	*C*(1)
	B(2)	*C*(2)		*D*(2)	
α кут	176⁰36'09"	176⁰36'09" 68⁰18'47"	356⁰36'09" 55⁰46'31"	300⁰49'38" 62⁰48'24"	120⁰49'38" 56⁰19'23"
α_{12}	176⁰36'09"	244⁰54'56"	300⁰49'38"	238⁰01'16"	177⁰09'01"
x_2	5735571	5749828	5749828	5721534	5721534
x_1 d y_1	5760323 24796 57489	5760323 24756 57489	5735571 27821 58958	5735571 26504 58958	5749828 28329 35068
y_2	58958	35068	35068	36476	36476

5. Обчислення поправок δ за формулою (1.31) проводять згідно *таблиці 1.10*.

Таблиця 4.10

Елементи	*A*(1)	*A*(1)	*B*(1)	*B*(1)	*C*(1)
	B(2)	*C*(2)		*D*(2)	
Δx	-24752	-10495	14257	-14037	-28294

$2y_1 + y_2$	173936	150046	152984	154392	106612
$2y_2 + y_1$	175405	127625	129094	131910	108020
δ_{12}	-3,632	-1,329	1,840	-1,828	-2,545
δ_{21}	3,663	1,130	-1,553	1,562	2,579

6. Введення поправок у виміряні напрями та врівноваження кутів за умови сум виконують згідно *таблиці 1.11*.

Таблиця 4.11

№ трикутника	Назва кута	Виміряні та приведені до поверхні еліпсоїда кути	Поправки в кути $-(\delta_{пр} - \delta_{лів})$	Поправки за врівноваження	Врівноважені плоскі кути
1	C	55º 54’ 45,56”	-2,683	-0,482	55º 54’ 47,76”
	B	55º 46’ 30,66”	1,823	-0,482	55º 46’ 28,36”
	A	68º 18’ 46,67”	2,304	-0,482	68 º 18’ 43,88”
		180º 00’ 02,89”	ε =1,444	ω =1,446	180º 00’ 00,00”
2	D	60º 52’ 14,52”	-1,016	-0,07	60º 52’15,47”
	C	56º 19’ 23,45”	-0,992	-0,07	56º 19’ 24,37”
	B	62º 48’ 23,90”	3,669	-0,07	62º 48’ 20,16”
		180º 00’ 01,87”	ε =1,660	ω =0,210	180º 00’ 00,00”

7. Обчислення довжини вихідної сторони на площині (довжини хорди зображення геодезичної лінії) за формулою (1.36)

$$d = 24797{,}264\ м.$$

8. Обчислення остаточного значення дирекційного кута вихідної сторони на площині за формулою (4.11)

$$\alpha_{12} = 176^{o}36'13{,}075''.$$