

Лабораторна робота 5

РОЗВ'ЯЗАННЯ ТРАНСПОРТНОЇ ЗАДАЧІ (Т-ЗАДАЧІ)

Мета: засвоїти методи «північно-західного кута» та «мінімального елемента» побудови початкового опорного плану Т-задачі та метод потенціалів розв'язання Т-задачі.

5.1 Порядок виконання роботи

Для розв'язання транспортної задачі будемо використовувати метод потенціалів. Процес розв'язання Т-задачі за допомогою методу потенціалів складається з таких етапів:

- 1) будується початковий опорний план задачі;
- 2) виконується оцінювання отриманого опорного плану;
- 3) здійснюється перехід до наступного, більш кращого плану.

Розглянемо метод на прикладі такої Т-задачі, заданої матрицею транспортних витрат C , $a_i, i = \overline{1,4}$ – обсяги виробництва, $b_j, j = \overline{1,4}$ – обсяги споживання:

$$C = \begin{array}{cccc|c} & & & & a_i \\ \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 9 & 7 \\ 3 & 4 & 1 & 5 \\ 6 & 4 & 8 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{array} \right] & & & & \begin{array}{c} 60 \\ 55 \\ 40 \\ 35 \end{array} \\ b_j & 70 & 5 & 45 & 70 \end{array} .$$

Початковий опорний план Т-задачі може бути отриманий або методом «північно-західного кута», або методом «мінімального елемента».

Побудуємо початковий опорний план X_0 даної Т-задачі за допомогою методу «північно-західного кута».

Перевіряємо умову балансу $\sum_{i=1}^4 a_i = \sum_{j=1}^4 b_j$:

$$\sum_{i=1}^4 a_i = 60 + 55 + 40 + 35 = 190,$$

$$\sum_{j=1}^4 b_j = 70 + 5 + 45 + 70 = 190,$$

$$190 = 190.$$

Таким чином, умова балансу виконується, отже модель даної Т-задачі є закритою. Визначаємо елементи матриці X_0 , починаючи з верхнього лівого кута.

$$X_0 = \begin{bmatrix} 60 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 5 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 35 \\ 0 & 0 & 0 & 35 \end{bmatrix}$$

Знаходимо значення $x_{11} = \min\{a_1, b_1\} = \min\{60, 70\} = 60$. Оскільки $a_1(60) < b_1(70)$, то перший рядок «закритий» для розрахунку решти елементів, тобто $x_{12} = 0, x_{13} = 0, x_{14} = 0$.

Далі обчислюємо $x_{21} = \min\{a_2, b_1 - x_{11}\} = \min\{55, 70 - 60\} = 10$. Вочевидь, що $x_{31} = 0, x_{41} = 0$.

Виходячи з тих самих міркувань, розраховуємо решту елементів:
 $x_{22} = \min\{a_2 - x_{21}, b_2\} = \min\{55 - 10, 5\} = 5,$

$$x_{32} = 0, x_{42} = 0,$$

$$x_{23} = \min\{a_2 - x_{21} - x_{22}, b_3\} = \min\{55 - 10 - 5, 45\} = 40,$$

$$x_{24} = 0,$$

$$x_{33} = \min\{a_3, b_3 - x_{23}\} = \min\{40, 45 - 40\} = 5,$$

$$x_{43} = 0,$$

$$x_{34} = \min\{a_3 - x_{33}, b_4\} = \min\{40 - 5, 70\} = 35,$$

$$x_{44} = \min\{a_4, b_4 - x_{34}\} = \min\{35, 70 - 35\} = 35.$$

Побудований план є невиродженим, оскільки ранг матриці $m + n - 1 = 4 + 4 - 1 = 7$ і кількість ненульових елементів матриці X_0 дорівнює 7.

Знайдемо тепер початковий опорний план Т-задачі методом «мінімального елемента»:

$$X_0 = \begin{bmatrix} 60 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 45 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 35 \\ 0 & 0 & 0 & 35 \end{bmatrix} .$$

Для цього записуємо елементи заданої матриці транспортних витрат C , починаючи від елемента з мінімальним значенням, в порядку зростання їхніх значень:

$$C_{11}, C_{23}, C_{44}, C_{12}, C_{41}, C_{21}, C_{34}, C_{42}, C_{43}, C_{22}, C_{32}, C_{24}, C_{31}, C_{14}, C_{33}, C_{13}.$$

А далі в такому самому порядку визначаємо значення елементів матриці X_0 :

$$x_{11} = \min\{a_1, b_1\} = \min\{60, 70\} = 60,$$

$$x_{23} = \min\{a_2, b_3\} = \min\{55, 45\} = 45,$$

$$x_{44} = \min\{a_4, b_4\} = \min\{35, 70\} = 35,$$

$$x_{12} = \min\{a_1 - x_{11}, b_2\} = \min\{60 - 60, 5\} = 0,$$

$$x_{41} = \min\{a_4 - x_{44}, b_1 - x_{11}\} = \min\{35 - 35, 70 - 60\} = 0,$$

$$x_{21} = \min\{a_2 - x_{23}, b_1 - x_{11} - x_{41}\} = \min\{55 - 45, 70 - 60 - 0\} = 10,$$

$$x_{34} = \min\{a_3, b_4 - x_{44}\} = \min\{40, 70 - 35\} = 35,$$

$$x_{42} = \min\{a_4 - x_{44} - x_{41}, b_2 - x_{12}\} = \min\{35 - 35 - 0, 5 - 0\} = 0,$$

$$x_{43} = \min\{a_4 - x_{44} - x_{41} - x_{42}, b_3 - x_{23}\} =$$

$$= \min\{35 - 35 - 0 - 0, 45 - 45\} = 0,$$

$$x_{22} = \min\{a_2 - x_{23} - x_{21}, b_2 - x_{12} - x_{42}\} =$$

$$= \min\{55 - 45 - 10, 5 - 0 - 0\} = 0,$$

$$x_{32} = \min\{a_3 - x_{34}, b_2 - x_{12} - x_{42} - x_{22}\} =$$

$$= \min\{40 - 35, 5 - 0 - 0 - 0\} = 5.$$

Елементи матриці X_0 , які відповідають елементам $C_{24}, C_{31}, C_{14}, C_{33}, C_{13}$, не розглядаються, оскільки вже вичерпані всі ресурси та задоволені всі потреби.

Отриманий план є виродженим, оскільки $m + n - 1 = 4 + 4 - 1 = 7$, а

кількість ненульових елементів матриці X_0 дорівнює 6.

Для отриманого початкового опорного плану даної Т-задачі, за методом «північно-західного кута»,

$$X_0 = \begin{bmatrix} 60 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 5 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 35 \\ 0 & 0 & 0 & 35 \end{bmatrix},$$

представимо графічно відповідний план перевезень, для зручності обчислення потенціалів (рис. 5.1).

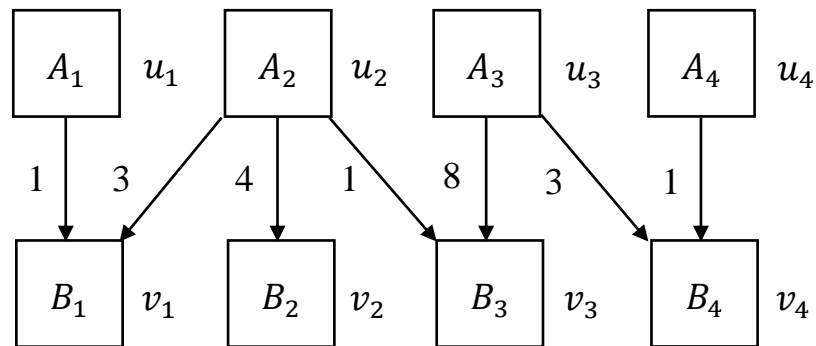


Рисунок 5.1

На рис. 5.1 прийняті такі позначення:

$A_i, i = \overline{1, 4}$ – пункти виробництва (відправлення);

$B_j, j = \overline{1, 4}$ – пункти споживання (отримання);

$u_i, i = \overline{1, 4}$ – потенціали пунктів виробництва (відправлення);

$v_j, j = \overline{1, 4}$ – потенціали пунктів споживання (отримання).

За відповідними маршрутами вказуємо вартості перевезення c_{ij} одиниці продукту з i -го пункту в j -й (дані беремо з заданої матриці транспортних витрат C).

Приймаємо $u_1 = 0$.

Визначаємо потенціали, використовуючи співвідношення

$$v_j - u_i = c_{ij}:$$

$$v_1 = c_{11} + u_1 = 1 + 0 = 1,$$

$$u_2 = v_1 - c_{21} = 1 - 3 = -2,$$

$$v_2 = c_{22} + u_2 = 4 + (-2) = 2,$$

$$v_3 = c_{23} + u_2 = 1 + (-2) = -1,$$

$$u_3 = v_3 - c_{33} = -1 - 8 = -9,$$

$$v_4 = c_{34} + u_3 = 3 + (-9) = -6,$$

$$u_4 = v_4 - c_{44} = -6 - 1 = -7.$$

Далі розрахуємо елементи оціночної матриці C_1 за співвідношенням

$$c'_{ij} = c_{ij} - (v_j - u_i):$$

$$c'_{11} = c_{11} - (v_1 - u_1) = 1 - (1 - 0) = 0,$$

$$c'_{12} = c_{12} - (v_2 - u_1) = 2 - (2 - 0) = 0,$$

$$c'_{13} = c_{13} - (v_3 - u_1) = 9 - (-1 - 0) = 10,$$

$$c'_{14} = c_{14} - (v_4 - u_1) = 7 - (-6 - 0) = 13,$$

$$c'_{21} = c_{21} - (v_1 - u_2) = 3 - (1 - (-2)) = 0,$$

$$c'_{22} = c_{22} - (v_2 - u_2) = 4 - (2 - (-2)) = 0,$$

$$c'_{23} = c_{23} - (v_3 - u_2) = 1 - (-1 - (-2)) = 0,$$

$$c'_{24} = c_{24} - (v_4 - u_2) = 5 - (-6 - (-2)) = 9,$$

$$c'_{31} = c_{31} - (v_1 - u_3) = 6 - (1 - (-9)) = -4,$$

$$c'_{32} = c_{32} - (v_2 - u_3) = 4 - (2 - (-9)) = -7,$$

$$c'_{33} = c_{33} - (v_3 - u_3) = 8 - (-1 - (-9)) = 0,$$

$$c'_{34} = c_{34} - (v_4 - u_3) = 3 - (-6 - (-9)) = 0,$$

$$c'_{41} = c_{41} - (v_1 - u_4) = 2 - (1 - (-7)) = -6,$$

$$c'_{42} = c_{42} - (v_2 - u_4) = 3 - (2 - (-7)) = -6,$$

$$c'_{43} = c_{42} - (v_3 - u_4) = 3 - (-1 - (-7)) = -3,$$

$$c'_{44} = c_{44} - (v_4 - u_4) = 1 - (-6 - (-7)) = 0.$$

Тоді оціночна матриця C_1 виглядатиме так:

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \\ -4 & -7 & 0 & 0 \\ -6 & -6 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Оскільки в оціночній матриці C_1 є від'ємні елементи, то план X_0 – неоптимальний.

Найвід'ємнішим елементом є $c'_{32} = -7$.

Тому, в матриці X_0 , починаючи з елемента x_{32} (який відповідає в оціночній матриці C_1 найвід'ємнішому елементу $c'_{32} = -7$) будемо замкнений ланцюжок, до якого входять ненульові елементи:

$$X_0 = \begin{bmatrix} 60 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 5[-] & 40[+] & 0 \\ 0 & 0[+] & 5[-] & 35 \\ 0 & 0 & 0 & 35 \end{bmatrix} .$$

Знайдемо новий план X_1 , змінюючи елементи, які входять до ланцюжка, на величину $\theta = \min\{5; 5\}$ (θ – мінімальний елемент серед непарних елементів, що входять до ланцюжка. При цьому за 1-й вважається наступний за x_{32} елемент), $\theta = 5$. Додаємо θ до всіх парних елементів ланцюжка й віднімаємо θ від непарних елементів ланцюжка. Елементи матриці X_0 , які не входять до ланцюжка, переносимо до матриці X_1 без змінення:

$$X_1 = \begin{bmatrix} 60 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 \rightarrow \varepsilon & 45 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 35 \\ 0 & 0 & 0 & 35 \end{bmatrix} .$$

Отриманий новий план X_1 є виродженим, тому замінюємо один із 0 з ланцюжка на $\varepsilon \neq 0$.

Оцінимо новий план T-задачі.

Виконаємо еквівалентні перетворення в матриці C_1 . Підкреслюємо всі елементи, що відповідають ненульовим елементам матриці X_1 – $c'_{11}, c'_{21}, c'_{22}, c'_{23}, c'_{32}, c'_{34}, c'_{44}$. Закреслюємо 3-й рядок, який містить найвід'ємніший елемент $c'_{32} = -7$. Оскільки в цьому рядку є підкреслений елемент (c'_{34}) то закреслюємо відповідний 4-й стовпець. Оскільки в цьому стовпці також є підкреслений елемент (c'_{44}), то закреслюємо відповідний 4-й рядок.

$$C_1 = \begin{bmatrix} \bar{0} & 0 & 10 & 13 \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & 9 \\ -4 & \bar{-7} & 0 & \bar{0} \\ -6 & -6 & -3 & \bar{0} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ +7 \\ +7 \end{array}$$

-7

Додаємо до всіх елементів закреслених рядків $|c'_{32}| = |-7| = 7$, й віднімаємо від усіх елементів закресленого стовпця $|c'_{32}| = |-7| = 7$.

Тоді отримаємо наступну оціночну матрицю C_2 :

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 7 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} .$$

В оціночній матриці C_2 немає від'ємних елементів, тому план X_1 є оптимальним.

Вартість перевезень дорівнюватиме:

$$\mathcal{L} = 60 \cdot 1 + 10 \cdot 3 + 45 \cdot 1 + 5 \cdot 4 + 35 \cdot 3 + 35 \cdot 1 = 295(\text{y. o.}).$$

Завдання

Розв'язати транспортну задачу методом потенціалів. Знайти початковий опорний план Т-задачі двома методами: методом «північно-західного кута» та методом «мінімального елемента».

Таблиця 5.1

№ варіанту	Умови задачі					
1	2					
1	C=	4	5	5	7	a _i 100 120 150 130
	b _j	140	130	90	140	
2	C=	1	3	3	4	a _i 50 20 30 20
	b _j	40	30	35	15	

Продовження табл. 5.1

1	2				
3	C=	$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 9 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$	a_i 60 70 20		
	b_j	40 30 30 50			
4	C=	$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$	a_i 60 65 70		
	b_j	40 60 70 25			
5	C=	$\begin{bmatrix} 10 & 5 & 7 & 4 \\ 7 & 4 & 9 & 10 \\ 6 & 14 & 8 & 7 \end{bmatrix}$	a_i 40 25 35		
	b_j	15 40 30 15			
6	C=	$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$	a_i 50 40 20		
	b_j	30 25 35 20			

1	2					
7	$C = \begin{bmatrix} 8 & 12 & 4 & 9 & 10 \\ 7 & 5 & 15 & 3 & 6 \\ 9 & 4 & 6 & 12 & 7 \\ 5 & 3 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}$ $b_j = \begin{matrix} 30 & 80 & 65 & 35 & 40 \end{matrix}$	a_i 60 40 100 50				
8	$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 & 8 & 2 & 10 \\ 8 & 1 & 2 & 3 & 5 & 6 \\ 7 & 4 & 4 & 1 & 4 & 8 \\ 2 & 8 & 5 & 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ $b_j = \begin{matrix} 110 & 50 & 30 & 80 & 100 & 90 \end{matrix}$	a_i 130 90 100 140				
9	$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 & 7 \\ 3 & 40 & 15 & 5 \\ 6 & 4 & 8 & 3 \\ 24 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ $b_j = \begin{matrix} 70 & 5 & 45 & 70 \end{matrix}$	a_i 60 55 40 35				
10	$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 9 & 7 \\ 3 & 4 & 6 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 8 & 1 \end{bmatrix}$ $b_j = \begin{matrix} 16 & 18 & 12 & 15 \end{matrix}$	a_i 20 16 14 11				

Продовження табл. 5.1

1	2				
11	C=	$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 8 \\ 8 & 6 & 2 & 6 \\ 4 & 7 & 7 & 3 \\ 5 & 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$	a_i 10 20 35 45		
	b_j	25	30	40	15
12	C=	$\begin{bmatrix} 1 & 8 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}$	a_i 30 50 20		
	b_j	15	15	40	30
13	C=	$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 9 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$	a_i 60 70 20		
	b_j	40	30	30	50
14	C=	$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \\ 3 & 7 & 9 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 7 \end{bmatrix}$	a_i 30 20 40 50		
	b_j	35	20	55	30

1	2						
15	C=	$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & 2 & 1 & 6 \\ 3 & 6 & 2 & 4 & 3 & 3 \\ 8 & 10 & 4 & 5 & 6 & 8 \\ 7 & 3 & 7 & 9 & 1 & 2 \end{bmatrix}$	a _i 100 15 90 55				
				b _j	30 40 55 80 45 10		