Вища математика.

Лекція 7

Тема: Границя функції.

2.10. Основні теореми про границі.

Теорема 1 (про границю суми, різниці, добутку і частки). Якщо кожна з функцій $f(x)$ та $g(x)$ має скінченну границю в точці x_0, то в цій точці існують також границі функцій $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ (остання за умови, що $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$) і справедливі формули

$$\lim_{x\to x_0}\big(f(x)+g(x)\big) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x\to x_0}\big(f(x)-g(x)\big) = \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x\to x_0}\big(f(x)g(x)\big) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$$

Дана теорема справджується для алгебраїчної суми та добутку будь-якого скінченного числа функцій, які мають границю в точці.

Наслідки. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ існує, то виконуються рівності:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} cf(x) = c\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $c \in R$;
2. $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right]^n$;
3. $\lim\limits_{x\to x_0} x^n = {x_0}^n$.

Приклад. Знайти границю функції: $\lim\limits_{x\to 3}(4x^2 - 5x + 8)$.

Розв'язання. Оскільки функція $f(x) = 4x^2 - 5x + 8$ $\big(D(f) = (-\infty, +\infty)\big)$ є елементарною, то підставивши в аналітичний вираз функції замість аргументу x його граничне значення 3, одержимо

$$\lim_{x\to 3}(4x^2 - 5x + 8) = 4\cdot 3^2 - 5\cdot 3 + 8 = 36 - 15 + 8 = 29.$$

§3. ОБЧИСЛЕННЯ ГРАНИЦЬ ФУНКЦІЙ.

1.1. Важливі границі.

3.1.1. Перша важлива границя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

Наслідки:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1$ 2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = 1$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1$ 4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1$

Приклади. 1. Знайти границю функції: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 9x}{x}$.

Розв'язання. При $x\to 0$ чисельник та знаменник є нескінченно малими. Тому маємо невизначеність$\left(\frac{0}{0}\right)$. Обчислимо цю границю:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 9x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{9\sin 9x}{9x}=9\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 9x}{9x}=9\cdot 1=9.$$

2. Знайти границю функції: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{tg3x}$.

Розв'язання. При $x\to 0$ чисельник та знаменник є нескінченно малими. Тому маємо невизначеність $\left(\frac{0}{0}\right)$. Обчислимо цю границю:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{tg3x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 4x}{x}\cdot\frac{x}{tg3x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{tg3x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin 4x}{4x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{3x}{3tg3x}=\frac{4}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{3x}{tg3x}=\frac{4}{3}\cdot 1\cdot 1=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}.$$

3. Знайти границю функції:$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

Розв'язання. При $x\to 0$ чисельник та знаменник є нескінченно малими. Тому маємо невизначеність$\left(\frac{0}{0}\right)$. Обчислимо цю границю. Для цього використаємо формулу: $1-cos\alpha=2sin^2\frac{\alpha}{2}$. Тоді

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=2\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{sin\frac{x}{2}}{x}\right)^2=$$

$$=2\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{sin\frac{x}{2}}{2\cdot\frac{x}{2}}\right)^2=2\cdot\frac{1}{2^2}\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot 1^2=\frac{1}{2}.$$

3.1.2. Друга важлива границя:

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ або $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

Приклади. 1. Знайти границю функції: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-4}{3x+5}\right)^{2-7x}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-4}{3x+5}\right)^{2-7x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+5-5-4}{3x+5}\right)^{2-7x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{9}{3x+5}\right)^{2-7x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{(3x+5)/_{-9}}\right)^{2-7x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{(3x+5)/_{-9}}\right)^{\frac{3x+5}{-9}\cdot\frac{-9}{3x+5}(2-7x)}=$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{(3x+5)\big/_{-9}}\right)^{\frac{3x+5}{-9}}\right]^{\frac{-9}{3x+5}(2-7x)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-9}{3x+5}(2-7x)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-9}{3x+5}(2-7x)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{63x-18}{3x+5}} = e^{21}$$

Окремо знайдемо $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{63x-18}{3x+5} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{63-\frac{18}{x}}{3+\frac{5}{x}} = \frac{63-0}{3+0} = 21$.

2. Знайти границю функції: $\lim\limits_{x\to 3}(7-2x)^{\frac{5x}{3-x}}$.

Розв'язання. Дана границя має невизначеність виду 1^∞ і обчислюється з використанням формули $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$. Для цього нам потрібно у прикладі перейти від границі при $x\to 3$ до границі при $x\to 0$, що можна зробити здійснивши заміну $y = x-3$:

$$\lim_{x\to 3}(7-2x)^{\frac{5x}{3-x}} = \left|\begin{matrix} y = x-3, \\ x = y+3 \end{matrix}\right| = \lim_{y\to 0}\big(7-2(y+3)\big)^{\frac{5(y+3)}{3-(y+3)}} =$$

$$= \lim_{y\to 0}(7-2y-6)^{\frac{5y+15}{3-y-3}} = \lim_{y\to 0}(1-2y)^{\frac{5y+15}{-y}} =$$

$$= \lim_{y\to 0}\big(1+(-2y)\big)^{\frac{5y+15}{-y}} = \lim_{y\to 0}\big(1+(-2y)\big)^{\frac{1}{-2y}\cdot(-2y)\cdot\frac{5y+15}{-y}} =$$

$$= \left[\lim_{y\to 0}\big(1+(-2y)\big)^{\frac{1}{-2y}}\right]^{(-2y)\cdot\frac{5y+15}{-y}} = e^{\lim\limits_{y\to 0}(-2y)\cdot\frac{5y+15}{-y}} = e^{2\lim\limits_{y\to 0}(5y+15)} =$$

$$= e^{2(5\cdot 0+15)} = e^{30} .$$

3.1.3. Розкриття деяких невизначеностей.

Як уже вказувалось, у найпростіших випадках знаходження границі $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}$ зводиться до підстановки у функцію $\boldsymbol{f(x)}$ граничного значення аргументу $\boldsymbol{x_0}$**.** Але часто така підстановка приводить до невизначених виразів. Це такі вирази:

1) відношення двох нескінченно великих величин — невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$;

2) різниця двох нескінченно великих величин—невизначеність виду $\infty-\infty$;

3) добуток нескінченно малої функції на нескінченно велику —невизначеність виду $0\cdot\infty$;

4) відношення двох нескінченно малих величин — невизначеність виду $\frac{0}{0}$;

5) якщо $\alpha_1(x)\to 0$ та $\alpha_2(x)\to 0$ при $x\to x_0$, то вираз ${\alpha_1}^{\alpha_2}$ — невизначеність виду 0^0;

6) якщо $\alpha(x)\to 0$, $\beta(x)\to\infty$ при $x\to x_0$, то вираз β^α — невизначеність виду ∞^0;

7) якщо $f(x)\to 1$, $\beta(x)\to\infty$ при $x\to x_0$, то вираз f^β — невизначеність виду 1^∞ (це не одиниця в якомусь конкретному степені, а символ для скороченого позначення границі виразу f^β, де $f\to 1$, $\beta\to\infty$).

Операцію знаходження границі у цих випадках називають розкриттям невизначеності. Розглянемо деякі окремі випадки.

1. Невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$ задана відношенням двох многочленів.

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3-4x^2+8}{7x^3+3x-2}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$. Поділимо чисельник і значенник дробу на x^3:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x^3-4x^2+8}{9x^3+3x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{6x^3}{x^3}-\frac{4x^2}{x^3}+\frac{8}{x^3}}{\frac{9x^3}{x^3}+\frac{3x}{x^3}-\frac{2}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{6-\frac{4}{x}+\frac{8}{x^3}}{9+\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x^3}}=\frac{6-0+0}{9+0-0}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}.$$

Застосований прийом є загальним: щоб розкрити невизначеність виду$\frac{\infty}{\infty}$, задану відношенням двох многочленів, треба чисельник і знаменник розділити на найвищий степінь x у цих многочленах.

2. Невизначеність виду $\frac{0}{0}$ задана відношенням двох многочленів.

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to1}\frac{2x^2+x-3}{x^2+5x-6}$

Розв'язання. Підстановкою значення $x=1$ переконуємось, що маємо невизначеність типу $\frac{0}{0}$. Спочатку розкладемо чисельник та знаменник дробу на множники.

Розглянемо рівняння $2x^2+x-3=0$. Його коренями є числа $x_1=1$ та $x_2=-\frac{3}{2}$.

Тому за формулою $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$:

$2x^2+x-3=2(x-1)\left(x+\frac{3}{2}\right)=(x-1)(2x+3)$.

Аналогічно, розв'язавши рівняння $x^2+5x-6=0$, одержимо $x_1=1$, $x_2=-6$ та представимо $x^2+5x-6=(x-1)(x+6)$.

Тому

$$\lim_{x\to1}\frac{2x^2+x-3}{x^2+5x-6}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(2x+3)}{(x-1)(x+6)}=\lim_{x\to1}\frac{2x+3}{x+6}=\frac{2\cdot1+3}{1+6}=\frac{5}{7}.$$

Це загальний прийом. Скорочення на $x-1$ тут можливе, тому що при визначенні границі $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ значення $x\neq x_0$.

Множник $x-x_0$, через який чисельник і знаменник прямують до нуля, іноді називають критичним множником.

3. Невизначеність виду $\frac{0}{0}$ задана ірраціональними виразами.

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{x^2+7}-4}{x-3}$.

Розв'язання. Тут невизначеність $\frac{0}{0}$, $x-3$ — критичний множник. Позбудемось від ірраціональності в чисельнику. Маємо

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2+7}-4}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x^2+7}-4\right)\left(\sqrt{x^2+7}+4\right)}{(x-3)\left(\sqrt{x^2+7}+4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x^2+7-16}{(x-3)\left(\sqrt{x^2+7}+4\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{(x-3)\left(\sqrt{x^2+7}+4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)\left(\sqrt{x^2+7}+4\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{\sqrt{x^2+7}+4}=\frac{3+3}{\sqrt{3^2+7}+4}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}.$$

2. Невизначеності виду $\infty-\infty$ задані ірраціональними виразами.

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2+8x}-3x\right)$

Розв'язання.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+x}-3x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{9x^2+x}-3x\right)\left(\sqrt{9x^2+x}+3x\right)}{\sqrt{9x^2+8x}+3x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{9x^2+x-(3x)^2}{\sqrt{9x^2+x}+3x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{9x^2+x}+3x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{9+\frac{1}{x}}+3}=\frac{1}{\sqrt{9+0}+3}=\frac{1}{6}$$