Лабораторна робота 4
ДВОЇСТІСТЬ У ЛІНІЙНОМУ ПРОГРАМУВАННІ

Мета: навчитися складати двоїсту задачу ЛП; дослідити взаємний зв'язок поміж оцінками індексного рядка оптимальної симплекс-таблиці однієї та оптимальним розв'язком другої з пари задач ЛП.

4.1 Порядок виконання роботи

Розглянемо питання двоїстості в ЛП на такому прикладі.

Нехай маємо таку пряму задачу:

$$F(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow min$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \leq 3 \\ 2x_1 - x_2 \leq 10 \\ 3x_1 - x_2 \geq -5 \\ -x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Знайдемо оптимальний розв'язок прямої задачі, методом штучного базису.

Приведемо математичну модель задачі до канонічного вигляду. Перейдемо від задачі на відшуковування *min* значення цільової функції до задачі на відшуковування *max* значення цільової функції; обернемо нерівності в рівності шляхом введення вільних змінних – x_3, x_4, x_5, x_6:

$$F'(x_1, x_2, \dots, x_6) = -3x_1 - 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 \rightarrow max$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 + 0x_6 = 10 \\ -3x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 + 0x_6 = 5 \\ -x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 - 1x_6 = 3 \\ x_1, x_2, \dots, x_6 \geq 0. \end{cases}$$

Для отримання початкового допустимого базисного розв'язку задачі введемо в останню умову-обмеження штучну змінну x_7:

$$F'(x_1, x_2, \dots, x_7) = -3x_1 - 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 - Mx_7 \rightarrow max$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 = 10 \\ -3x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 + 0x_6 + 0x_7 = 5 \\ -x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 - 1x_6 + 1x_7 = 3 \\ x_1, x_2, \dots, x_7 \geq 0. \end{cases}$$

Тоді початковий допустимий базисний розв'язок прямої задачі буде:

$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 3, x_4 = 10, x_5 = 5, x_6 = 0, x_7 = 3.$

Складемо вихідну симплекс-таблицю:

Таблиця 4.1

	C	–	-3	-2	0	0	0	0	$-M$
	B	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
0	x_3	3	1	-2	1	0	0	0	0
0	x_4	10	2	-1	0	1	0	0	0
0	x_5	5	-3	1	0	0	1	0	0
$-M$	x_7	3	-1	**1**	0	0	0	-1	1
	Δ	$-3M$	$M+3$	$-M+2$	0	0	0	M	0

Напрямний стовпець – A_2, напрямний рядок – x_7, напрямний елемент – x_{72}.

Розрахуємо елементи наступної симплекс-таблиці:

Таблиця 4.2

	C	–	-3	-2	0	0	0	0
	B	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
0	x_3	9	-1	0	1	0	0	-2
0	x_4	13	1	0	0	1	0	-1
0	x_5	2	-2	0	0	0	1	1
-2	$\boldsymbol{x_2}$	**3**	-1	1	0	0	0	-1
	Δ	-6	5	0	0	0	0	2

Всі оцінки $\Delta_j,\ j = \overline{1,6},\ \geq 0 -$ отриманий оптимальний розв'язок прямої задачі:

$$\boldsymbol{x_1 = 0, x_2 = 3, F_{min} = 6.}$$

Складемо тепер двоїсту до даної задачі.

Оскільки система умов-обмежень прямої задачі задана у вигляді нерівностей, на змінні накладена вимога невід'ємності їхніх значень, то в даному випадку можна розглядати симетричну пару задач ЛП.

Приведемо математичну модель прямої задачі до канонічного вигляду:

$$F'(x_1, x_2) = -3x_1 - 2x_2 \rightarrow max$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \leq 3 \\ 2x_1 - x_2 \leq 10 \\ -3x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 - x_2 \leq -3 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Оскільки в розглядуваному прикладі пряма задача є задачею на відшуковування max значення цільової функції, то двоїста задача буде задачею на відшуковування min значення цільової функції.

Кількість змінних двоїстої задачі дорівнюватиме кількості умов-обмежень прямої задачі. Тобто, оскільки у даній прямій задачі кількість умов-обмежень дорівнює 4, то двоїста задача залежатиме від чотирьох змінних – y_1, y_2, y_3, y_4.

Ваговими коефіцієнтами цільової функції двоїстої задачі стають вільні члени умов-обмежень прямої задачі – $3, 10, 5, -3$.

Таким чином, цільова функція двоїстої задачі буде виглядати так:

$$\tilde{F}(y_1, y_2, y_3, y_4) = 3y_1 + 10y_2 + 5y_3 - 3y_4 \rightarrow min.$$

Матрицю умов-обмежень двоїстої задачі отримуємо транспонуванням матриці умов-обмежень прямої задачі:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \\ -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Вільними членами умов-обмежень двоїстої задачі стають вагові коефіцієнти цільової функції прямої задачі – $-3, -2$.

Оскільки в розглядуваному прикладі умови-обмеження прямої задачі являють собою нерівності зі знаком $\leq$, і на значення, які можуть приймати змінні, накладена вимога невід'ємності, то умови-обмеження двоїстої задачі будуть нерівностями зі знаком $\geq$.

На значення змінних двоїстої задачі також накладаємо вимогу невід'ємності.

Виходячи з вище викладеного, отримуємо такі умови обмеження двоїстої задачі:

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 - 3y_3 + y_4 \geq -3 \\ -2y_1 - y_2 + y_3 - y_4 \geq -2 \\ y_1, y_2, \dots, y_4 \geq 0. \end{cases}$$

Тоді двоїста задача виглядатиме так:

$$\tilde{F}(y_1, y_2, y_3, y_4) = 3y_1 + 10y_2 + 5y_3 - 3y_4 \to min$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 - 3y_3 + y_4 \geq -3 \\ -2y_1 - y_2 + y_3 - y_4 \geq -2 \\ y_1, y_2, \dots, y_4 \geq 0. \end{cases}$$

Розв'яжемо отриману двоїсту задачу.

Перепишемо умови двоїстої задачі у більш зручному вигляді:

$$\tilde{F}(y_1, y_2, y_3, y_4) = 3y_1 + 10y_2 + 5y_3 - 3y_4 \to min$$

$$\begin{cases} -y_1 - 2y_2 + 3y_3 - y_4 \leq 3 \\ 2y_1 + y_2 - y_3 + y_4 \leq 2 \\ y_1, y_2, \dots, y_4 \geq 0. \end{cases}$$

Обернемо нерівності в рівності шляхом введення вільних змінних – y_5 та y_6.

$$\tilde{F}(y_1, y_2, \dots, y_6) = 3y_1 + 10y_2 + 5y_3 - 3y_4 + 0y_5 + 0y_6 \to min$$

$$\begin{cases} -y_1 - 2y_2 + 3y_3 - y_4 + 1y_5 + 0y_6 = 3 \\ 2y_1 + y_2 - y_3 + y_4 + 0y_5 + 1y_6 = 2 \\ y_1, y_2, \dots, y_6 \geq 0. \end{cases}$$

Знайдемо початковий допустимий базисний розв'язок двоїстої задачі:

$y_1 = 0, y_2 = 0, y_3 = 0, y_4 = 0, y_5 = 3, y_6 = 2.$

Складемо вихідну симплекс-таблицю:

Таблиця 4.3

	C	–	3	10	5	-3	0	0
	B	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
0	y_5	3	-1	-2	3	-1	1	0
← 0	y_6	2	2	1	-1	**1**	0	1
	Δ	0	-3	-10	-5	3	0	0

Напрямний стовпець – A_4, напрямний рядок – y_6, напрямний елемент – y_{64}.

Розрахуємо елементи наступної симплекс таблиці:

Таблиця 4.4

	C	–	3	10	5	-3	0	0
	B	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
0	y_5	5	1	-1	2	0	1	1
-3	$\boldsymbol{y_4}$	**2**	2	1	-1	1	0	1
	Δ	-6	-9	-13	-2	0	0	-3

Всі оцінки $\Delta_i,\ i = \overline{1,6},\ \leq 0$, тому отриманий оптимальний розв'язок двоїстої задачі:

$$\boldsymbol{y_1 = 0, y_2 = 0, y_3 = 0, y_4 = 2, \widetilde{F}_{min} = -6.}$$

Встановимо взаємний зв'язок поміж значеннями оцінок індексного рядка оптимальної таблиці однієї з пари задач і значеннями змінних оптимального розв'язку другої задачі:

$y_i^{\text{опт}} = \Delta_{o(n+i)}^{\text{пр}}, n -$ кількість змінних прямої задачі, $n = 2$,

$y_1^{\text{опт}} = \Delta_{03}^{\text{пр}} = 0, \qquad y_2^{\text{опт}} = \Delta_{04}^{\text{пр}} = 0, \qquad y_3^{\text{опт}} = \Delta_{05}^{\text{пр}} = 0,$

$y_4^{\text{опт}} = \Delta_{06}^{\text{пр}} = 2, \qquad y_5^{\text{опт}} = \Delta_{07(1)}^{\text{пр}} = 5, \qquad y_6^{\text{опт}} = \Delta_{08(2)}^{\text{пр}} = 0$

– враховуємо циклічний перенос;

$x_j^{\text{опт}} = -\Delta_{o(m+j)}^{\text{дв}}, m -$ кількість змінних двоїстої задачі, $m = 4$,

$x_1^{\text{опт}} = -\Delta_{05}^{\text{дв}} = 0, \qquad x_2^{\text{опт}} = -\Delta_{06}^{\text{дв}} = 3, \qquad x_3^{\text{опт}} = -\Delta_{07(1)}^{\text{дв}} = 9,$

$x_4^{\text{опт}} = -\Delta_{08(2)}^{\text{дв}} = 13, \qquad x_5^{\text{опт}} = -\Delta_{09(3)}^{\text{дв}} = 2.$

Завдання

Скласти двоїсту задачу, розв'язати її та встановити взаємний зв'язок із розв'язком прямої задачі.

Таблиця 4.5

№ варіанту	**Умови задачі**
1	**2**
1	$F(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 \to max$ $\begin{cases} x_1 - 2x_2 \geq 4 \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ 4x_1 - 3x_2 \leq 12 \\ 7x_1 + 4x_2 \leq 28 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$
2	$F(x_1, x_2) = 2x_1 - 4x_2 \to max$ $\begin{cases} 8x_1 - 5x_2 \leq 16 \\ x_1 + 3x_2 \leq 2 \\ 2x_1 + 7x_2 \geq 9 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$
3	$F(x_1, x_2) = -3x_1 + 6x_2 \to min$ $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \leq 4 \\ x_1 - 2x_2 \geq -4 \\ x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$

1	**2**
4	$F(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \to max$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1 \\ -5x_1 + x_2 \leq 0 \\ -x_1 + 5x_2 \geq 0 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$
5	$F(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \to max$ $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \leq 7 \\ -x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$
6	$F(x_1, x_2) = -2x_1 + x_2 \to min$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ -3x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$
7	$F(x_1, x_2) = -3x_1 + 2x_2 \to min$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ 3x_1 + x_2 \geq 15 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$
8	$F(x_1, x_2) = 2x_1 + 2x_2 \to max$ $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \geq -6 \\ x_1 + x_2 \geq 3 \\ 0 \leq x_1 \leq 3 \\ 0 \leq x_2 \leq 5 \end{cases}$
9	$F(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 \to max$ $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \leq 4 \\ x_1 - 2x_2 \geq -4 \\ x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$

1	**2**
10	$F(x_1, x_2) = 2x_1 - 4x_2 \rightarrow min$ $\begin{cases} 8x_1 - 5x_2 \leq 16 \\ x_1 + 3x_2 \geq 2 \\ 2x_1 + 7x_2 \leq 9 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$
11	$F(x_1, x_2) = 7x_1 + 5x_2 \rightarrow max$ $\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 \geq 7 \\ 7x_1 - 5x_2 \geq 35 \\ x_1 - x_2 \leq 0 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$
12	$F(x_1, x_2) = 2x_1 - 3x_2 \rightarrow max$ $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$
13	$F(x_1, x_2) = -2x_1 + x_2 \rightarrow min$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6 \\ -3x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$
14	$F(x_1, x_2) = 3x_1 + 3x_2 \rightarrow max$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4 \\ 3x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1 + 5x_2 \geq 4 \\ 0 \leq x_1 \leq 3 \\ 0 \leq x_2 \leq 3 \end{cases}$
15	$F(x_1, x_2) = 3x_1 + 3x_2 \rightarrow max$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 8 \\ 3x_1 + 7x_2 \geq 21 \\ x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ 0 \leq x_1 \leq 1 \\ 0 \leq x_2 \leq 1 \end{cases}$