Лекція 4 (нумерація лекцій ведеться, починаючи з першої)

Тема 3. [Короткі теоретичні відомості про теорію кватерніонів](file:///C%3A%5CUsers%5Chome-pk%5CDesktop%5C%D0%94%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B0%D0%BD%D1%86%D1%96%D0%B9%D0%BD%D0%B5%20%D0%BD%D0%B0%D0%B2%D1%87%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D1%8F%20%2812.03-03.04%29.2020%5C3.%D0%9F%D0%A2%20%D0%B2%20%D0%90%D0%92%5C%D0%9F%D0%A2%D0%B2%D0%90%D0%92_%D0%BF%D1%80%D0%B0%D0%BA%D1%82%D0%B8%D0%BA%D1%83%D0%BC_2016.docx#_Toc457216141) як математичну основу складання інформаційних моделей (ІМ) складових ГВК

План

3.1. [Короткі теоретичні відомості про теорію кватерніонів](file:///C%3A%5C%5CUsers%5C%5Chome-pk%5C%5CDesktop%5C%5C%D0%94%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B0%D0%BD%D1%86%D1%96%D0%B9%D0%BD%D0%B5%20%D0%BD%D0%B0%D0%B2%D1%87%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D1%8F%20%2812.03-03.04%29.2020%5C%5C3.%D0%9F%D0%A2%20%D0%B2%20%D0%90%D0%92%5C%5C%D0%9F%D0%A2%D0%B2%D0%90%D0%92_%D0%BF%D1%80%D0%B0%D0%BA%D1%82%D0%B8%D0%BA%D1%83%D0%BC_2016.docx%22%20%5Cl%20%22_Toc457216141) як математичну основу складання інформаційних моделей (ІМ) складових ГВК

3.1. Короткі теоретичні відомості про теорію кватерніонів як математичну основу складання інформаційних моделей (ІМ) складових ГВК

Кватерніон – це впорядкована четвірка дійсних чисел *s, a, b, c*, які зв’язані з чотирма базисними елементами *1, i, j, k* (рис 3.1), що мають такі властивості:

|  |  |
| --- | --- |
| *i2* = *j2* = *k2* = –*1*; *i*⋅*j* = *k*;  *j*⋅*k* = *i*; *k*⋅*i* = *j*; *j*⋅*i* = –*k*; *k*⋅*j* = –*i*; *i*⋅*k*= -*j*. | (3.1) |

Операції додавання і віднімання кватерніонів визначені покомпонентно. Множення кватерніонів визначається законом множення їх уявних одиниць. Будь який кватерніон може бути записаний у вигляді:

|  |  |
| --- | --- |
| , | (3.2) |

де *i, j, k* – уявні одиниці.

Кожен кватерніон *q* можна записати у вигляді суми двох кватерніонів: скаляра (*s*) і вектора (*a*⋅*i+b*⋅*j+c*⋅*k*), тобто:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.3) |

де *s*(*q*) =*s* – скалярна частина кватерніона *q*; *v*(*q*) = *a*⋅*i+b*⋅*j+c*⋅*k* – векторна частина кватерніона *q*.

Наприклад, у кватерніоні *q=3–5*⋅*i+4*⋅*k* скалярна частина дорівнює *3*, а векторна частина дорівнює –*5*⋅*i+4*⋅*k*.

|  |
| --- |
| **ДІЙСНІ ЧИСЛА**Базисні елементи ***1*****ВЕКТОРИ В ПРОСТОРІ**Базисні елементи ***i, j, k*****КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА**Базисні елементи ***1, i*****КВАТЕРНІОНИ**Базисні елементи ***1, i, j, k*** |
| *Рис. 3.1. Числові системи та базисні елементи* |

Іноді кватерніон зручно представляти набором чотирьох чисел: як число та 3D-вектор, тобто як гіперкомплексне число з трьома уявними одиницями *i, j, k,* що може бути записано у вигляді:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.4)) |

Іноді достатньо обмежитись лише окремим видом кватерніонів – вектором. Кватерніон (3.2) приймає вид вектора у випадку рівності нулю його скалярної частини:

|  |  |
| --- | --- |
|   | (3.5) |

Геометричний зміст операцій з кватерніонами виду (3.5) відповідає геометричному змісту операцій з векторами. Причому, довжина вектора  кватерніона *q* в тривимірному просторі визначається за формулою (3.6). Цей вектор іде з початку координат *О* в точку *М* з координатами *a, b, c* (рис. 3.3). Тому:

|  |  |
| --- | --- |
| , | (3.6) |

де *v* – векторна частина кватерніону (3.4), *a, b, c* – координати точки *М*, що задає напрямок вектору(рис. 3.2).



*Рис. 3.2. Представлення кватерніону у вигляді вектора v і кута оберту α*

|  |
| --- |
| YXZjik0M(a,b,c,)*v* |
| *Рис. 3.3. Приклад розташування вектора v в тривимірному просторі* |

При описанні поворотів кватерніон представляють у вигляді:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.7) |

де *v* – одиничний вектор, однонаправлений із віссю повороту; ω – кут повороту.

Кватерніон несе в собі інформацію про оберт на заданий кут навколо вектора, початок якого збігається з початком поточної системи координат (рис. 3.2). Якщо значення кута позитивне (+α), то оберт відбувається проти годинникової стрілки (якщо дивитись в напрямку, протилежному напрямку заданого вектора), в противному випадку (–α) – за годинниковою стрілкою.

Важлива особливість кватерніонів полягає в тому, що підмножиною кватерніонів є дійсні числа (*s*, 0, 0, 0); комплексні числа (*s*, *a*, 0, 0); вектори в тривимірному просторі (0, *a*, *b*, *c*) (рис. 3.3), а при виконанні дій множення кватерніонів не виконується закон комутативності, тобто 

Крім того три уявні базисні одиниці *i, j, k* кватерніона можуть бути інтерпретовані як базисні вектори декартової системи координат у тривимірному просторі.

Важливими для розглядуваної проблеми є такі властивості кватерніонів як комутативність та асоціативність за додаванням, комутативність за множенням, асоціативність за множенням та дистрибутивність:

1. кватерніони комутативні та асоціативні за додаванням:

|  |
| --- |
|  |

2)кватерніони не комутативні за множенням:

|  |
| --- |
|  |

 3) кватерніони асоціативні за множенням:

|  |
| --- |
|  |

1. кватерніони дистрибутивні:

|  |
| --- |
|  |

Сферична лінійна інтерполяція здійснюється за виразом:

 , (3.8)

де  – вектори, що належать 4-D сфері, що перетинається площиною  утвореною даними векторами та центром кола,  (рис. 3.4, а). Очевидно, що шукані при інтерполяції точки будуть належати даній площині;  – кут між векторами  та ;  – локальний час.

а)б)в)

Ps

*Рис. 3.4. Спрощена схема сферичної лінійної інтерполяції:*

*а) неспівпадіння точок при лінійній (LI) та сферичній лінійній інтерполяції (SLI);*

*б) 4-D сфера та площина, утворена векторами  та і центром кола;*

*в) вид А на рис. 3.4, б*

Тема 4. Складання інформаційних (ІМ) (математичних ММ) моделей

складових ГВК (Ч.1 – виділено жирним)

**План теми**

 4.[1. Особливості склажання інформаційних моделей елементів ГВК](file:///C%3A%5CUsers%5Chome-pk%5CDesktop%5C%D0%94%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B0%D0%BD%D1%86%D1%96%D0%B9%D0%BD%D0%B5%20%D0%BD%D0%B0%D0%B2%D1%87%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D1%8F%20%2812.03-03.04%29.2020%5C3.%D0%9F%D0%A2%20%D0%B2%20%D0%90%D0%92%5C%D0%9F%D0%A2%D0%B2%D0%90%D0%92_%D0%BF%D1%80%D0%B0%D0%BA%D1%82%D0%B8%D0%BA%D1%83%D0%BC_2016.docx#_Toc457216143)

 4.2. [Інформаційні моделі маніпуляційних систем промислових роботів](file:///C%3A%5CUsers%5Chome-pk%5CDesktop%5C%D0%94%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B0%D0%BD%D1%86%D1%96%D0%B9%D0%BD%D0%B5%20%D0%BD%D0%B0%D0%B2%D1%87%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D1%8F%20%2812.03-03.04%29.2020%5C3.%D0%9F%D0%A2%20%D0%B2%20%D0%90%D0%92%5C%D0%9F%D0%A2%D0%B2%D0%90%D0%92_%D0%BF%D1%80%D0%B0%D0%BA%D1%82%D0%B8%D0%BA%D1%83%D0%BC_2016.docx#_Toc457216144)

 4.[3.ІМ схватів промислових роботів](file:///C%3A%5CUsers%5Chome-pk%5CDesktop%5C%D0%94%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B0%D0%BD%D1%86%D1%96%D0%B9%D0%BD%D0%B5%20%D0%BD%D0%B0%D0%B2%D1%87%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D1%8F%20%2812.03-03.04%29.2020%5C3.%D0%9F%D0%A2%20%D0%B2%20%D0%90%D0%92%5C%D0%9F%D0%A2%D0%B2%D0%90%D0%92_%D0%BF%D1%80%D0%B0%D0%BA%D1%82%D0%B8%D0%BA%D1%83%D0%BC_2016.docx#_Toc457216145)

 4.[4.4. ІМ об’єктів маніпулювання](file:///C%3A%5CUsers%5Chome-pk%5CDesktop%5C%D0%94%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B0%D0%BD%D1%86%D1%96%D0%B9%D0%BD%D0%B5%20%D0%BD%D0%B0%D0%B2%D1%87%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D1%8F%20%2812.03-03.04%29.2020%5C3.%D0%9F%D0%A2%20%D0%B2%20%D0%90%D0%92%5C%D0%9F%D0%A2%D0%B2%D0%90%D0%92_%D0%BF%D1%80%D0%B0%D0%BA%D1%82%D0%B8%D0%BA%D1%83%D0%BC_2016.docx#_Toc457216146)

 4.[5. ІМ технологічного обладнання](file:///C%3A%5CUsers%5Chome-pk%5CDesktop%5C%D0%94%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B0%D0%BD%D1%86%D1%96%D0%B9%D0%BD%D0%B5%20%D0%BD%D0%B0%D0%B2%D1%87%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D1%8F%20%2812.03-03.04%29.2020%5C3.%D0%9F%D0%A2%20%D0%B2%20%D0%90%D0%92%5C%D0%9F%D0%A2%D0%B2%D0%90%D0%92_%D0%BF%D1%80%D0%B0%D0%BA%D1%82%D0%B8%D0%BA%D1%83%D0%BC_2016.docx#_Toc457216147)

 4.[6. ІМ пристосувань технологічного обладнання](file:///C%3A%5CUsers%5Chome-pk%5CDesktop%5C%D0%94%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B0%D0%BD%D1%86%D1%96%D0%B9%D0%BD%D0%B5%20%D0%BD%D0%B0%D0%B2%D1%87%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D1%8F%20%2812.03-03.04%29.2020%5C3.%D0%9F%D0%A2%20%D0%B2%20%D0%90%D0%92%5C%D0%9F%D0%A2%D0%B2%D0%90%D0%92_%D0%BF%D1%80%D0%B0%D0%BA%D1%82%D0%B8%D0%BA%D1%83%D0%BC_2016.docx#_Toc457216148)

4.[1. Особливості складання інформаційних моделей елементів ГВК](file:///C%3A%5CUsers%5Chome-pk%5CDesktop%5C%D0%94%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B0%D0%BD%D1%86%D1%96%D0%B9%D0%BD%D0%B5%20%D0%BD%D0%B0%D0%B2%D1%87%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D1%8F%20%2812.03-03.04%29.2020%5C3.%D0%9F%D0%A2%20%D0%B2%20%D0%90%D0%92%5C%D0%9F%D0%A2%D0%B2%D0%90%D0%92_%D0%BF%D1%80%D0%B0%D0%BA%D1%82%D0%B8%D0%BA%D1%83%D0%BC_2016.docx#_Toc457216143)

Подання інформації про структурні складові ГВК у виді відповідних інформаційних моделей (ІМ) характеризується реалізацією методично обумовлених кроків в такій *послідовності*:

аналіз конструкції складової – складання її так званої схеми заміщення (СЗ, тобто складання ниткової моделі складової) – заміна рухомих та / або нерухомих елементів СЗ складової її 3D-еквівалентами з використанням геометричних примітивів (ГП) – складання ІМ складової як такої з урахуванням її можливої рухомості або нерухомості.

При складанні ІМ складових ГВК враховується той факт, що форма кожного із структурних елементів ГВК може бути описана з використанням кінцевої множини елементарних геометричних примітивів (ГП, Gp – сфера SE, циліндр CR, конус CE, паралелепіпед PD, трапеція TZ) та їх комбінацій.

Точка відліку при описі кожного з ГП формально описується так званою прив’язочною точкою з відповідними їй координатами при їх (ГП) подальшому (можливому) упорядкованому описі:

|  |  |
| --- | --- |
| , | (4.1.1) |

Нижче представлені приклади описів геометричних примітивів.

|  |  |
| --- | --- |
| XSe, YSe, ZSeRSeXEZEYE | *Опис ГП типу “сфера”:***Se**: XSe, YSe, ZSe, RSe |
| *Рис. 4.1.1. Базове розташування ГП типу “сфера” в СК елемента ГВК**Тут:**Se – іденідентифікатор примітиву Se (sphere) – “сфера”;**XSe – розташування сфери вздовж осі X в СК елемента Е, мм;**YSe – розташування сфери вздовж осі Y в СК елемента Е, мм;**ZSe – розташування сфери вздовж осі Z в СК елемента Е, мм;**RSe – радіус сфери, мм.* |

|  |  |
| --- | --- |
| XEZEYEXCr, YCr, ZCrLCrRCr | *Опис ГП типу “циліндр”:***Cr**: XCr, YCr, ZCr, RCr, LCr |
| *Рис. 4.1.2. Базове розташування ГП типу “циліндр” в СК елемента ГВК**Тут:**Cr – ідентифікатор примітиву Cr (cylinder) – “циліндр”;**XCr – розташування циліндра вздовж осі X в СК елемента Е, мм;**YCr – розташування циліндра вздовж осі Y в СК елемента Е, мм;**ZCr – розташування циліндра вздовж осі Z в СК елемента Е, мм;**RCr – радіус циліндра, мм;**LCr – довжина циліндра, мм.* |

|  |  |
| --- | --- |
| XEZEYEXCe, YCe, ZCeLCeRCerCe | *Опис ГП типу “конус”:***Ce**: XCe, YCe, ZCe, RCe, rCe, LCe |
| *Рис. 4.1.3. Базове розташування ГП типу “конус”* *в СК елемента ГВК**Тут:**Ce – ідентифікатор примітиву Ce (cone) – “конус”;**XCe – розташування конуса вздовж осі X в СК елемента Е, мм;**YCe – розташування конуса вздовж осі Y в СК елемента Е, мм;**ZCe – розташування конуса вздовж осі Z в СК елемента Е, мм;**RCe – лівий радіус конуса, мм;**rCe – правий радіус конуса, мм;**LCe – довжина конуса, мм.* |

|  |  |
| --- | --- |
| XEZEYEXPd, YPd, ZPdWPdHPdDPd | *Опис ГП типу “паралелепіпед”:***Pd**: XPd, YPd, ZPd, WPd, HPd, DPd |
| *Рис. 4.1.4. Базове розташування ГП типу “паралелепіпед”* *в СК елемента ГВК**Тут:**Pd – ідентифікатор примітиву Pd (parallelepiped) – “паралелепіпед”;**XPd – розташування паралелепіпеда вздовж осі X в СК елемента Е, мм;**YPd – розташування паралелепіпеда вздовж осі Y в СК елемента Е, мм;**ZPd – розташування паралелепіпеда вздовж осі Z в СК елемента Е, мм;**WPd – ширина паралелепіпеда, мм;**HPd  – висота паралелепіпеда, мм;**DPd – глибина паралелепіпеда, мм.* |

|  |  |
| --- | --- |
| XEZEYEXTz, YTz, ZTzWTzH2TzDTzbTzaTzH1TzB | *Опис ГП типу “трапеція”:***TZ**: XTz, YTz, ZTz, DTz, WTz, H1Tz, H2Tz, aTz, bTz |
| *Рис. 4.1.5. Базове розташування ГП типу “трапеція”* *в СК елемента ГВК**Тут:**Tz – ідентифікатор примітиву Tz (Trapeze) – “трапеція”;**XTz – розташування трапеції вздовж осі X в СК елемента Е, мм;**YTz – розташування трапеції вздовж осі Y в СК елемента Е, мм;**ZTz – розташування трапеції вздовж осі Z в СК елемента Е, мм;**DTz – глибина трапеції, мм;**WTz – ширина трапеції, мм;**H1Tz – ліва висота трапеції, мм;**H2Tz – права висота трапеції, мм;**aTz –відстань між базовою віссю B та центром грані із висотою H1, мм;**bTz – відстань між базовою віссю B та центром грані із висотою H2, мм.* |

При потребі змінити орієнтацію ГП вказується кватерніон його орієнтації, що описується за рахунок 4-ох додаткових параметрів:

|  |  |
| --- | --- |
| *Q = [ SQ, XQ, YQ, ZQ ].* | (4.1.2) |

XGP

ZGP

YGP

α

Q= (s, v) = (s, vx, vy, vz) =

= ( , , , )

v = (0, 0, 1)

vx vy vz

Приклад ІМ (ММ) геометричного примітиву типу “циліндр” з осьовим розміром 200 мм до і після його орієнтації (обертання навколо осі Y на 90° за годинниковою стрілкою при погляді на вісь Y) представлено на рисунку 4.1.6.

|  |  |
| --- | --- |
| XEZEYE*CR: 0, 0, 0, 50, 200**а)* | YEXEZE*CR: 0, 0, 0, 50, 200 , 0.7, 0, 0.7, 0**б)* |

*Рис. 4.1.6. Приклад опису та відповідної 3D-моделі ГП типу “циліндр”:*

*а) без кватерніона орієнтації;*

*б) із кватерніоном орієнтації*