ПРИКЛАДНА МЕХАНІКА

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ З ПІДГОТОВКИ ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ З ВАРІАНТАМИ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ

РОЗДІЛ «КІНЕМАТИКА»

Практичне заняття №7

Тема «Визначення швидкості та прискорення точки за заданими рівняннями її руху»

План проведення практичного заняття

1. Обговорення основних положень теми та питань самостійного вивчення:

1. Основні задачі кінематики.
2. Векторний спосіб завдання руху точки (траєкторія руху, вектори швидкості і прискорення).
3. Координатний та природний способи завдання руху.
4. Поступальний рух.
5. Кутова швидкість, кутове прискорення. Швидкість і прискорення точки тіла, що обертається.

2. Індивідуальне тестування.

3. Практичні завдання.

Короткі відомості з теорії

Завдання базується на теоретичних засадах кінематики точки.

У разі, коли рух точки задається координатним способом, відомі закони, за якими змінюються в часі ***t*** координати точки $\boldsymbol{X}$ **,** $\boldsymbol{Y}$ **,** $\boldsymbol{Z}$ **:**

$$X = X(t);\ Y = Y(t);\ Z = Z(t). \qquad (7.1)$$

Рівняння (7.1) одночасно є рівняннями траєкторії точки в параметричному вигляді. Щоб одержати рівняння траєкторії у звичайній (геометричній) формі, з рівнянь треба вилучити параметр t.

Точка починає рухатись в момент часу $t = 0$. Її вихідні координати визначаються шляхом підстановки в рівняння зазначеного часу.

Координати точки в який-небудь інший момент часу можна підрахувати, підставляючи в рівняння (див.7.1) задане значення t.

Вектори швидкості $\vec{V}$ та прискорення $\vec{a}$ точки визначається через їхні проекції на осі нерухомої системи координат - OXYZ :

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2},$$

$$\begin{cases} V_x = \dot{x}, & \cos(\vec{V} \wedge X) = \frac{V_x}{V}; \\ V_y = \dot{y}, & \cos(\vec{V} \wedge Y) = \frac{V_y}{V}; \\ V_z = \dot{z}, & \cos(\vec{V} \wedge Z) = \frac{V_z}{V}. \end{cases} \tag{7.2}$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2},$$

$$\begin{aligned} a_x = \ddot{x}, & \quad \cos(\vec{a} \wedge X) = \frac{a_x}{a}; \\ a_y = \ddot{y}, & \quad \cos(\vec{a} \wedge Y) = \frac{a_y}{a}; \\ a_z = \ddot{z}, & \quad \cos(\vec{a} \wedge Z) = \frac{a_z}{a}. \end{aligned} \tag{7.3}$$

У рівняннях (7.2) та (7.3) однією чи двома крапками над змінними величинами позначенні відповідно перша чи друга похідні від цих величин за часом.

Вектор прискорення точки можна розкласти на складові уздовж осей координат, що рухаються разом з точкою, a_τ - дотичну та нормаль a_n :

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n. \tag{7.4}$$

У цьому разі вектори дотичного $\vec{a}_\tau$ та нормального $\vec{a}_n$ прискорень можна визначити таким чином:

$$\vec{a}_\tau = a_\tau \cdot \vec{\tau}, \tag{7.5}$$

$$\vec{a}_n = a_n \cdot \vec{n}. \tag{7.6}$$

де a_τ та a_n - проекції вектора а відповідно на дотичну і нормаль;

$\vec{\tau}$ та $\vec{n}$ - орти відповідно дотичної та нормалі.

Будемо вважати дотичну спрямованою в бік руху точки, а саме в напрямку її швидкості. В такому разі проекція вектора $\vec{V}$ на дотичну V_τ та його модуль V збігаються. Тому

$$a_\tau = \dot{V}_\tau = \dot{V} = \frac{V_x \cdot a_x + V_y \cdot a_y + V_z \cdot a_z}{V}. \tag{7.7}$$

Модуль вектора $\vec{a}_\tau$ дорівнює модулю a_τ , а його напрямок визначається знаком a_τ . Якщо a_τ >0, вектор $\vec{a}_\tau$ спрямований як і дотична (тобто в напрямку швидкості точки), і рух є прискореним. Якщо a_τ < 0 , вектор $\vec{a}_\tau$ спрямований в протилежний бік і рух точки є уповільненим.

Вектор нормального прискорення за напрямком завжди збігається з нормаллю, яка в свою чергу спрямована під прямим кутом в бік увігнутості траєкторії. Модуль цього вектора дорівнює значенню a_n, яке в даному випадку може бути підраховане за формулою

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}. \tag{7.8}$$

Маючи значення швидкості та нормального прискорення, можна знайти радіус кривизни траєкторії в місці знаходження точки

$$\rho = V^2 / a_n. \tag{7.9}$$

Приклади розв'язування задач.

Приклад 1. Нехай рух точки у площині Оху заданий рівняннями:

$$x = 2t; y = 12t^2 .$$

Знайти траєкторію руху точки та векторне рівняння.

Розв'язання

1) Траєкторію можна знайти, задаючи різні моменти часу та зображуючи координати x, y точки на графіку;

2) Траєкторію можна також знайти, виключивши $\boldsymbol{t}$ із рівнянь руху. З першого рівняння ***t = x/2***. Тоді, після підстановки в друге рівняння $y = 3t^2$. Векторне рівняння запишеться таким чином:

$$\vec{r} = 2t \cdot \vec{\imath} + 12t^2 \cdot j.$$

Приклад 2. За рівняннями руху точки ***x=3sin t***; ***y=3cos t*** (x і y – в см, t – в сек). Знайти рівняння її траєкторії.

Разв'язанная

Рівняння траєкторії дістанемо, вилучивши час $\boldsymbol{t}$ з рівнянь руху:

$$\sin t = x/3\,;\ \cos t = y/3.$$

Підносячи до квадрата і додаючи окремо ліві і праві частини, матимемо:

$$1 + \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{3^2}, \text{або } x^2 + y^2 = 3.$$

Отже, рівняння траєкторії буде рівнянням кола радіусом R=3см.

Приклад 3. За рівняннями руху точки М: $x = 4t; y = 16t^2 - 1$ (x і y – в см, t – в сек). Встановити вид її траєкторії і для моменту часу $t = 0{,}5\ c$ знайти положення точки на траєкторії, її швидкість, повне, дотичне і нормальне прискорення, а також радіус кривизни траєкторії в цій точці.

Разв'язанная

Рівняння руху є параметричними рівняннями траєкторії точки М. Для того, щоб отримати рівняння траєкторії в звичайній формі виключимо час $\boldsymbol{t}$ із рівнянь руху.

Тоді

$$y = x^2 - 1.$$

Цей вираз є рівнянням параболи.

Для визначення швидкості точки знаходимо проекції швидкості на координатні осі:

$$V_x = \dot{x} = 4\ \text{см/с}\,;\ V_y = \dot{y} = 32t\ \text{см/с}.$$

Модуль швидкості точки

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{4^2 + (32 \cdot 0{,}5)^2} = 16{,}5\,\text{см/с}\,.$$

Аналогічно знаходять проекції прискорень точки М

$$a_x = \ddot{x} = 0\,;\ a_y = \ddot{y} = 32\ \text{см/с}^2.$$

Модуль прискорення точки М

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 32 \text{ см/с}^2.$$

Координати точки М, а також її швидкість, прискорення та їх проекції на координатні осі для заданого моменту часу $t = 0{,}5\ c$ обчислимо за наведеними формулами і представимо в таблиці.

$$x = 4t = 4 \cdot 0{,}5 = 2 \text{ см};$$

$$y = 16t^2 - 1 = 16 \cdot 0{,}5^2 - 1 = 3;$$

$$a_\tau = \left|\frac{dV}{dt}\right| = \frac{V_x a_x + V_y a_y}{V} = \frac{4 \cdot 0 + 16 \cdot 32}{16{,}5} = 31 \text{ см/с}^2.$$

Як наслідок, модуль дотичного прискорення

$$a_\tau = 31 \text{ см/с}^2.$$

Знак «+» для *dV/dt* показує, що рух точки М прискорений і, як наслідок, напрямок $\vec{a}_\tau$ і $\vec{V}$ співпадають.

Нормальне прискорення точки в даний момент часу

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{32^2 - 31^2} = 7{,}94 \text{ см/с}^2.$$

Радіус кривизни траєкторії в тій точці, де при $t = 0{,}5\ c$ знаходиться точка М,

$$\rho = V^2/a_n = 16{,}5^2/7{,}94 = 34{,}3 \text{ см}.$$

Отримані значення всіх кінематичних характеристик точки М представимо таблично (табл. 1).

Таблиця 1

Координати, см		Швидкість, см/с			Прискорення, см/с^2					Радіус кривизни, см
X	*У*	V_x	V_y	V	a_x	a_y	a	a_τ	a_n	ρ
2	3	4	16	16,5	0	32	32	31	7,94	34,3

Користуючись рівнянням

$$y = x^2 - 1,$$

будуємо траєкторію (рис.7.1) і показуємо на ній положення точки М в заданий момент часу. Вектор $\vec{V}$ будуємо за складовими $\vec{V}_x$ і $\vec{V}_y$, причому цей вектор повинен бути направлений по дотичній до траєкторії точки. Вектор $\vec{a}$ знаходимо як по складових $\vec{a}_x$ і $\vec{a}_y$, так і по $\vec{a}_\tau$ і $\vec{a}_n$, чим контролюється правильність обчислень

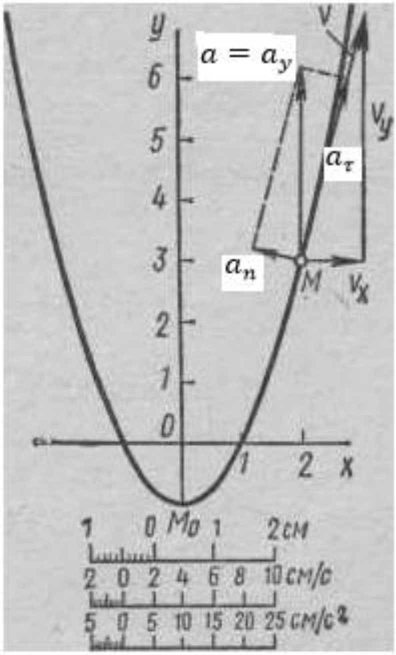

Рис. 7.1

Приклад 4. Палець кривошипа парової машини рухається відповідно до рівнянь: x=*50cos3*π *t*; y=*50sin3*π *t* (x і y – в см, t – в сек). Визначити швидкість пальця.

Разв'язанная

Визначимо проекції швидкості пальця на координатні осі:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = -150\pi \sin 3\pi t,$$

$$V_y = \frac{dy}{dt} = -150\pi \cos 3\pi t.$$

Модуль швидкості пальця $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = 150\pi.$

Приклад 5. Точка на ободі маховика в період розгону рухається згідно з рівнянням $\boldsymbol{S=0{,}1t^3}$ (t – в сек, S – в м).

Радіус маховика дорівнює R=0,5м. Визначити дотичне і нормальне прискорення точки в момент, коли її швидкість V=30 м/с.

Разв'язанная

Рівняння руху точки задане натуральним способом, тому швидкість точки визначаємо за формулою:

$$V=\frac{dS}{dt}=\frac{d}{dt}(0{,}1t^3)=0{,}3t^2.$$

Підставляючи числове значення швидкості (з умови) визначаємо момент часу, для якого треба знайти прискорення:

$$30=0{,}3t^2,\text{ звідки } t=\sqrt{\frac{30}{0{,}3}}=10\ c.$$

Дотичне прискорення дорівнює:

$$a_\tau=\frac{dV}{dt}=\frac{d}{dt}(0{,}3t^2)=0{,}6t=6\ \text{м/с}^2.$$

Нормальне прискорення:

$$a_n=\frac{V^2}{R}=\frac{(0{,}3t^2)^2}{0{,}5}=180\ \text{м/с}^2.$$

Знак "+" перед дотичним прискоренням означає, що маховик дійсно знаходиться в стані розгону.

Умови завдання

За заданими рівняннями руху точки, що відбувається в площині XOY (табл. 7.1), визначити вид та рівняння траєкторії, початкові координати точки, також її координати в заданий момент часу і відповідні вектори швидкості, повного, дотичного та нормального прискорень, радіус кривизни траєкторії в місті знаходження точки. Необхідні значення коефіцієнтів для рівнянь руху і момент часу взяти з таблиці 7.2, 7.3. Варіант індивідуального завдання вибрати з таблиці 7.0 за номером в журнальному списку. Результати розрахунків зобразити на рисунку.

Приклад виконання завдання

Дано: *X =2t, см; Y= t^2, см; t =1c.*

Знайти: *траєкторію руху точки, швидкість і прискорення точки у заданий момент часу та радіус кривизни траєкторії в заданій точці.*

Рішення

Виражаючи ***t*** з першого рівняння маємо:

$$t = X/2.$$

Підставивши t в такому вигляді в друге рівняння руху, отримаємо рівняння параболи:

$$Y = X^2/4.$$

Початкові координати точки:

$$X_0 = 2 \cdot 0 = 0 \text{ см}, Y_0 = 0^2 = 0 \text{ см}.$$

Зауважимо, що точка рухається в такому напрямку, де її координати завжди більше нуля. Таким чином, траєкторією точки є не вся парабола, а тільки її права половина.

У заданий момент часу точка має координати

$$X = 2 \cdot 1 = 2см;\ Y = 1^2 = 1см.$$

Визначимо модуль та напрямок швидкості точки:

$$V = \sqrt{V_X^2 + V_Y^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \approx 2{,}8 \text{ см/с},$$

$$V_X = \dot{X} = 2 \text{ см/с} \ \ (const),$$

$$V_Y = \dot{Y} = 2t; t = 1\ c;\ \rightarrow V_Y = 2 \text{ см/с},$$

$$\cos(\vec{V} \wedge X) = \frac{V_X}{V} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ (кут } 45°),$$

$$\cos(\vec{V} \wedge Y) = \frac{V_Y}{V} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ (кут 45°)}.$$

Визначимо модуль та напрямок прискорення точки:

$$a = \sqrt{a_X^2 + a_Y^2} = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2 \text{ см/с}^2,$$

$$a_X = \dot{V}_X = \ddot{X} = 0; \; a_Y = \dot{V}_Y = \ddot{Y} = 2 \text{ см/с}^2,$$

$$\cos(\vec{a} \wedge X) = \frac{a_X}{a} = \frac{0}{2} = 0 \text{ (кут 90°)},$$

$$\cos(\vec{a} \wedge Y) = \frac{a_Y}{a} = \frac{2}{2} = 1 \text{ (кут 90°)}.$$

Визначимо дотичне та нормальне прискорення точки:

$$a_\tau = \frac{V_X \cdot a_X + V_Y \cdot a_Y}{V} = \frac{2 \cdot 0 + 2 \cdot 2}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \approx 1{,}4 \text{ см/с}^2,$$

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{2^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{2} \approx 1{,}4 \text{ см/с}^2.$$

Оскільки $a_\tau > 0$, рух точки - прискорений і вектори $\vec{a}_\tau$ та $\vec{V}$ за напрямком збігаються. Підрахуємо радіус кривизни траєкторії

$$\rho = \frac{V^2}{a_n} = \frac{\left(2\sqrt{2}\right)^2}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} \approx 5{,}6 \text{ см}.$$

Результати розрахунків зведені в таблиці 7.4 і зображені на рисунку 7.2.

Таблиця 7.4

Координати , см				*Швидкість, см/с*			*Прискорення, см/с^2*					*ρ, см*
X_0	Y_0	X	Y	υ_X	υ_Y	υ	a_X	a_Y	a	a_τ	a_n	
0	0	2	1	2	2	2,8	0	2	2	1,4	1,4	5,6

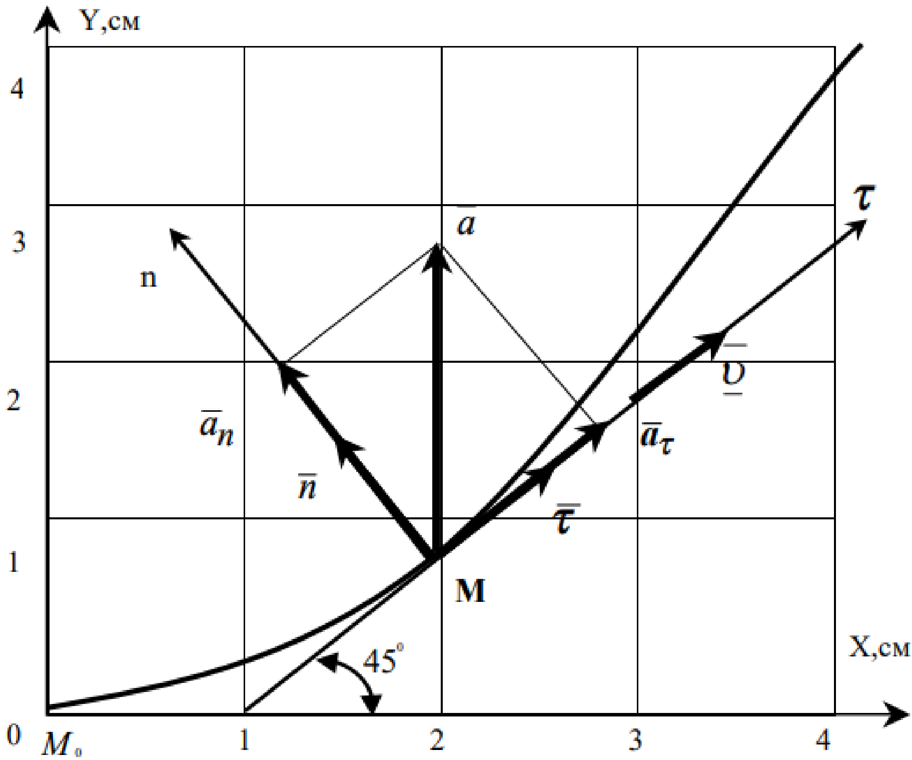

Рис. 7.2 – ***Розрахункова схема до виконання завдання***

Відповідь:

V =2,8 см/с, а = 2 см/с² , ρ = 5,6 см.

Таблиця 7.0

Варіант №, п/п	**X=X(t),см** **Y=Y(t),см** (табл. 7.1)	Значення коефіцієнтів ***a, b, c*** (табл. 7.2)	Значення коефіцієнтів ***d, f*** і часу ***t*** (табл. 7.3)
1	1	0	0
2	2	1	1
3	3	2	2
4	4	3	3
5	5	4	4
6	6	5	5
7	7	6	6
8	8	7	7
9	9	8	8
10	0	9	9
11	1	8	8
12	2	7	7
13	3	6	6
14	4	5	5
15	5	4	4
16	6	3	3
17	7	2	2
18	8	1	1
19	9	0	0
20	0	1	1
21	9	2	2
22	8	3	3
23	7	4	4
24	6	5	5
25	5	6	6
26	4	7	7
27	3	8	8
28	2	9	9
29	1	0	0

Таблиця 7.1

Варіант №, п/п	**X=X(t),см**	**Y=Y(t),см**
1	$a \cdot t^2 + b \cdot t + c$	$d \cdot t + f$
2	$a \cdot t + b$	$c/(d \cdot t + f)$
3	$a \cdot \sin(b \cdot \pi t) + c$	$d \cdot \cos(b \cdot \pi t) + f$
4	$a \cdot \sin^2(b \cdot \pi t^2) + c$	$d \cdot \cos^2(b \cdot \pi t^2) + f$
5	$a \cdot t$	$(b \cdot t + c)/(d \cdot t + f)$
6	$d \cdot t + f$	$a \cdot t^2 + b \cdot t + c$
7	$a \cdot t$	$(b \cdot t + c)/(d \cdot t + f)$
8	$d \cdot \sin(2b \cdot \pi t) + f$	$a \cdot \sin(b \cdot \pi t) + c$
9	$d \cdot t + f$	$a \cdot \cos(b \cdot \pi t) + c$
0	$c/(d \cdot t + f)$	$a \cdot t + f$

Таблиця 7.2

Величини	Значення безрозмірних коефіцієнтів до варіантів завдань									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	-4	2	-3	4	-2	3	-4	2	-3	4
b	3	-4	2	-3	4	-2	3	-4	2	-3
c	2	3	4	2	3	4	2	3	4	2

Таблиця 7.3

Величини	Значення безрозмірних коефіцієнтів та моменту часу ***t*** до варіантів завдань									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
d	4	-2	3	-4	2	-3	4	-2	3	-4
f	-3	4	-2	3	-4	2	-3	4	-2	3
t, c	1/4	1/3	1/4	1/2	1/3	1/4	1/2	1/3	1/4	1/2

Завдання для самостійної роботи:

1. Опрацюйте конспект лекцій та рекомендовану літературу для обговорення теоретичних питань теми на практичному занятті.

2. Розв'яжіть тестові завдання.

1. **Кінематика є розділом теоретичної механіки, в якому вивчається**

A. властивості сил, умови рівноваги абсолютно твердого тіла
B. механічний рух матеріальних об'єктів незалежно від причин, які його викликають
C. умови не рівноваги абсолютно твердого тіла
D. умови не рівноваги будь-якого тіла

2. **При розв'язанні задач кінематики рух матеріальних об'єктів визначається відносно**

A. певної системи відліку
B. певної шкали
C. певного напрямку
D. певних умов

3. **В кінематиці відсутні такі фізичні поняття як**

A. траєкторія руху
B. швидкість та прискорення
C. сила та маса
D. вага

4. **В кінематиці розглядаються лише геометричні характеристики**

A. руху
B. сили
C. маси
D. ваги

5. **У кінематиці всі лінійні величини (координати, довжина шляху тощо) виражаються в**

A. см
B. метрах
C. дюймах
D. кг

6. **Кінематично визначити (задати) рух даного об'єкта означає**

A. встановити його положення відносно системи відліку у будь-який момент часу
B. встановити його положення відносно шкали часу
C. визначити швидкість та прискорення у будь-який момент часу
D. дослідити гальмування відносно даної системи відліку

7**. Предметом дослідження в кінематиці є**

A. математичні способи задання руху об'єктів
B. дослідження відносно даної системи відліку
C. матеріальна точка і абсолютно тверде тіло
D. встановлення положення тіла відносно системи відліку у будь-який момент часу

8. **Безперервна послідовність точок простору, через які проходить точка при її русі, називається**

A. траєкторією руху цієї точки
B. траєкторією руху простора
C. безперервним потоком руху цієї точки
D. траєкторією прискорення руху

9. **Годографом векторної функції по скалярному аргументу називається**

A. просторова лінія
B. крива
C. гіпербола

D. парабола

10. **Площину, проведену через точку перпендикулярно до бінормалі називають**

A. січною площиною
B. стичною площиною
C. площиною бінормалі
D. перерізом площини

11. **Площина, проведена через точку перпендикулярно до дотичної називається**

A. нормальна площина
B. січна площина
C. стична площина
D. приєднувальна площина

12. **Площина, проведена через точку перпендикулярно до головної нормалі називається**

A. спрямна площина
B. нормальна площина
C. січна площина
D. приєднувальна площина

Рекомендована література при вивченні заданої теми:

1. Павловський М.А. Теоретична механіка. – К. : Техніка, 2002.
2. Воронков И.М. Курс теоретической механики. – М.: Наука, 1989.
3. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Наука, 1988.
4. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. – М.: Наука, 1990.
5. Павловський М.А., Акінфієва Л.Ю., Юрокін А.І., Свістунов С.Я. Кінематика та динаміка точки. – Київ: Либідь, 1993.
6. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Ф., Курс теоретической механіки, т.1, 2 М., 1979.

7. Сборник задач для курсовых работ по теоретической механике / Под ред. А.А. Яблонского. – М.: Высшая школа, 1989.