КІНЕМАТИКА

Кінематика точки. Способи задання руху. Траєкторія, швидкість і прискорення точки

Кінематика – розділ теоретичної механіки, в якому вивчається механічний рух матеріальних об’єктів незалежно від причин, які його викликають.

При розв’язанні задач кінематики рух матеріальних об’єктів визначається відносно певної системи відліку.

В кінематиці відсутні такі фізичні поняття як сила та маса, а розглядаються лише геометричні характеристики руху - траєкторії, швидкості і прискорення.

В кінематиці всі лінійні величини (координати, довжина шляху та ін.) виражаються в метрах (м - система СІ). Час, як скалярна величина розглядається як незалежна змінна (аргумент).

Усі інші змінні величини розглядаються як функції часу (координати тіла, швидкості, прискорення і т.п.). Одиниця часу - секунда (с - система СІ).

Кінематично визначити (задати) рух даного об’єкта означає встановити його положення відносно системи відліку у будь-який момент часу.

Дві задачі кінематики:

Перша задача кінематики – встановлення математичних способів задання руху об’єктів дослідження.

Друга задача кінематики – на підставі математичних способів задання руху об’єктів дослідження відносно даної системи відліку визначити всі кінематичні величини, які характеризують рух об’єктів в цілому, а також рух кожної з їх точок окремо (траєкторію, швидкість і прискорення).

1. Кінематика точки

Траєкторією точки називається геометричне місце її послідовних положень в просторі з часом відносно даної системи відліку.

Форма траєкторії може бути прямолінійною або криволінійною і залежить від вибраної системи координат.

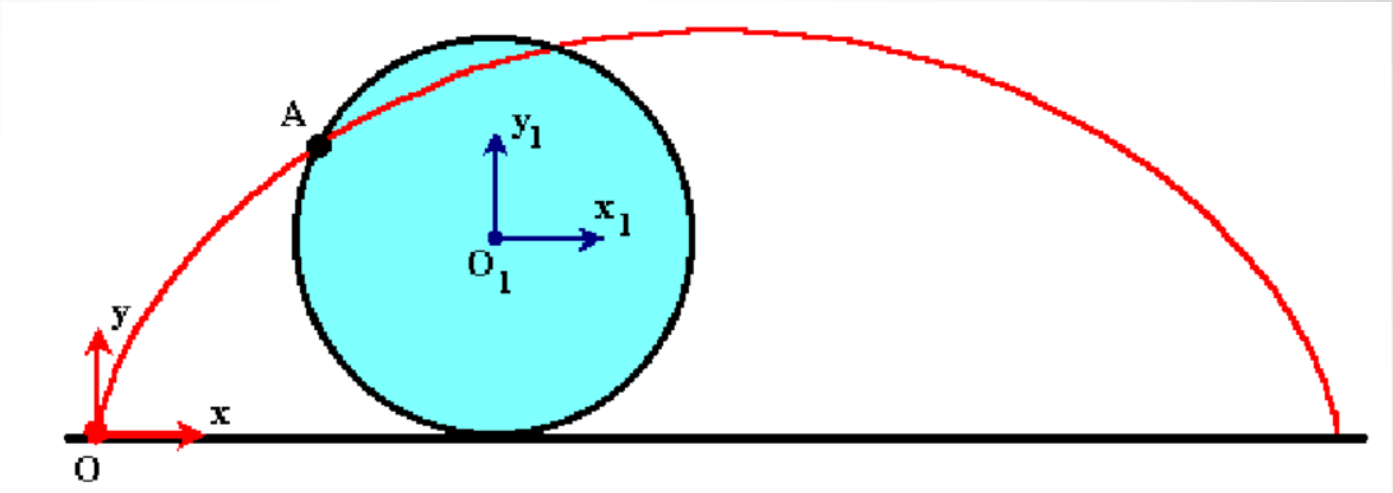


Рис. 2. Траєкторія точки А відносно різних систем відліку

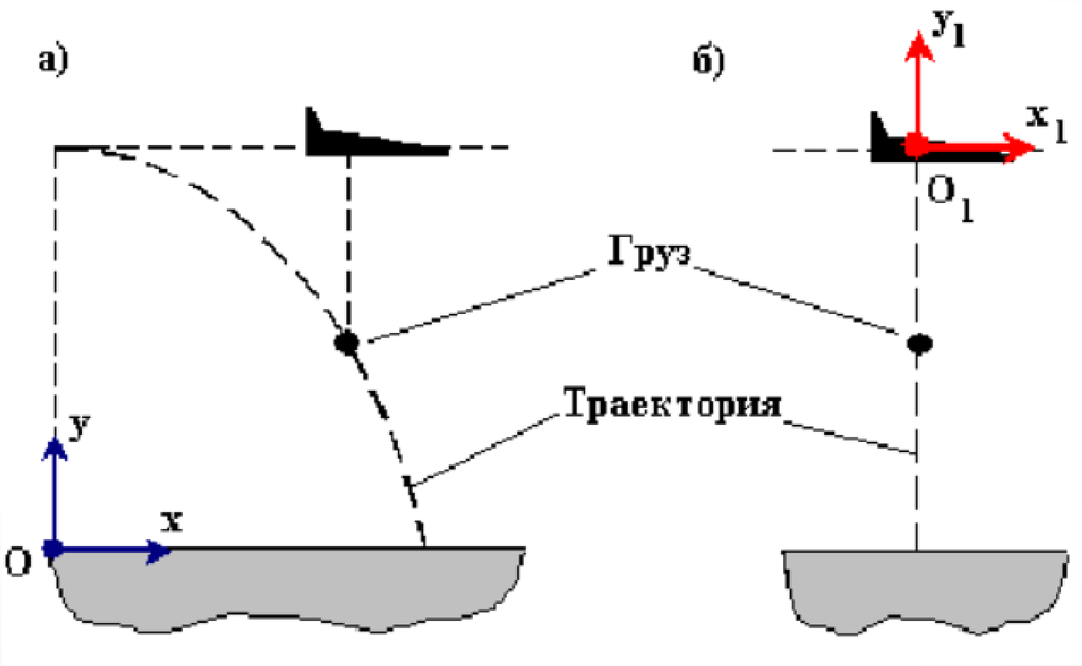


Рис. 2. Траєкторія центра мас вантажу відносно різних систем відліку

2. Способи задання руху точки

Задання руху точки може виконуватися векторним, координатним та натуральним способами.

Векторний та координатний способи задання руху точки

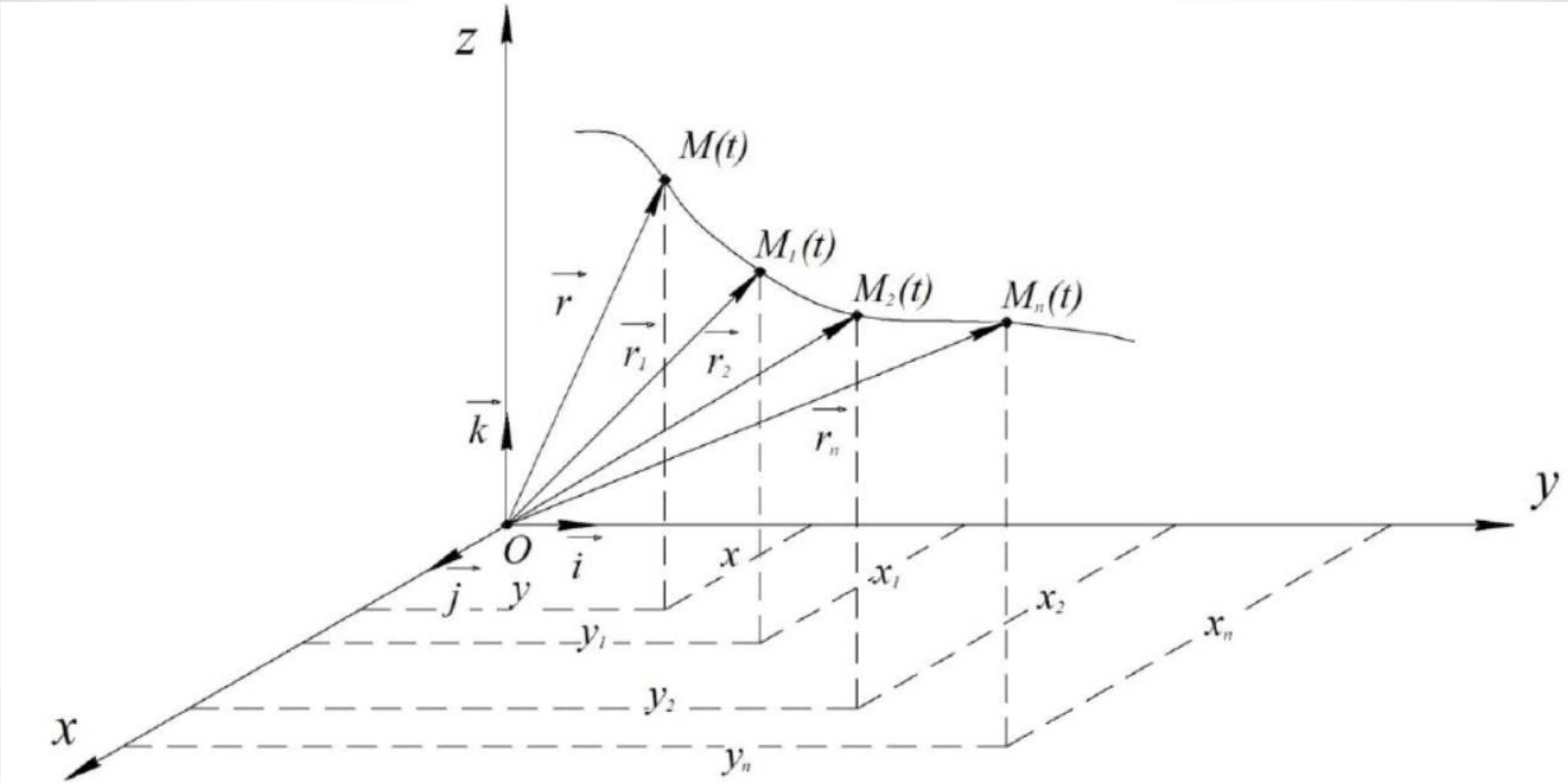


Рис. 3. Задання руху точки M в системі координат Oxyz з часом руху t

- Кожному моменту часу t_i відповідають певні значення радіус-вектору r_i або координат x_i, y_i, x_i, які є фактично функціями часу.

Тоді:

$r = r(t)$ - кінематичне рівняння руху точки у векторній формі (векторний спосіб задання руху точки).

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1(t) \\ y &= f_2(t) \\ z &= f_3(t) \end{aligned}\right\}$$

- кінематичні рівняння руху точки в декартових координатах. (координатний спосіб задання руху точки).

З математичної точки зору функції (1) і (2) - неперервні, однозначні і можуть бути продиференційовані.

Співвідношення між векторним та координатним способами задання руху точки має вигляд:

$$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k},$$

де i, j, k - одиничні вектори (орти) декартової системи координат

Наведені рівняння є рівняннями траєкторії руху точки в параметричній формі (параметром є t). Щоб визначити рівняння траєкторії точки в координатній формі з рівнянь необхідно виключити час.

З отриманих рівнянь двох поверхонь $Ф_1(x,y) = 0$; $Ф_2(z,y) = 0$ на перетині цих поверхонь утворюється крива в просторі – траєкторія точки.

Натуральний (природний) спосіб задання руху точки

Рух точки буде задано натуральним способом, якщо буде відомо:
1) траєкторія руху точки;
2) напрям додатного та від'ємного відліку руху точки по траєкторії;
3) кінематичне рівняння руху точки по траєкторії, тобто S' = S(t)
де S' - дугова координата точки.

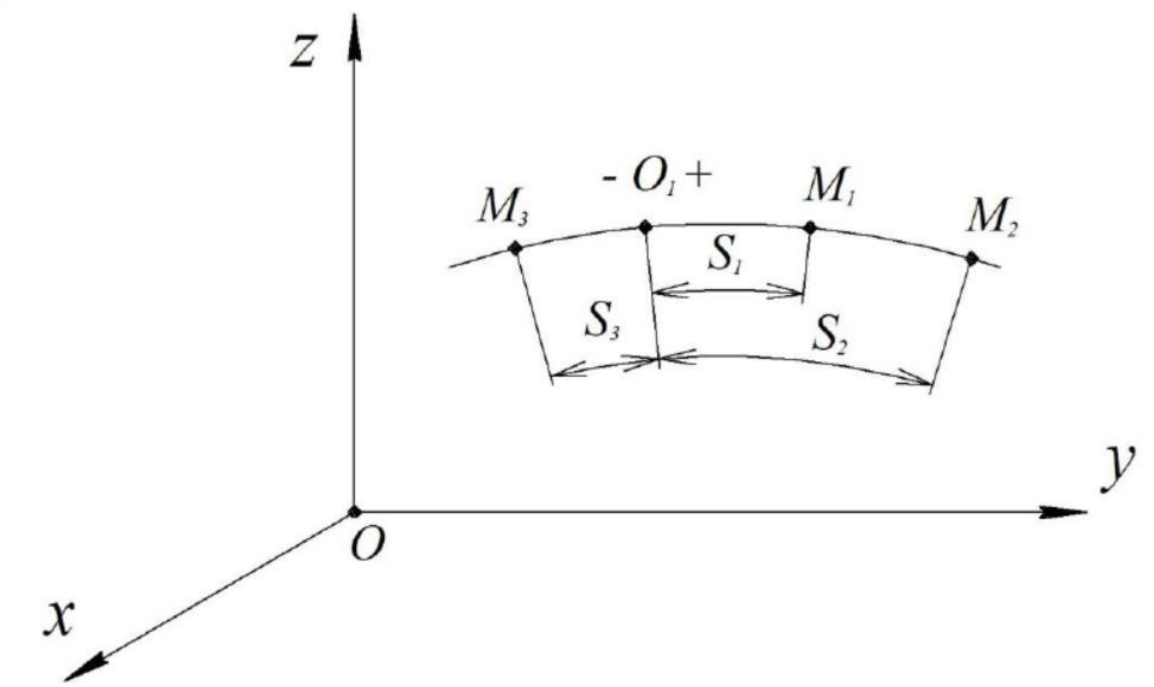


Рис. 4. Задання руху точки М по траєкторії S

Дуги S_i визначають координати точок M_i для даного моменту часу. Шлях дорівнює сумі абсолютних значень дугових координат. В кожній точці кривої можна вказати три взаємно перпендикулярні напрями: напрям дотичної, головної нормалі та бінормалі.
Ці три взаємо перпендикулярні напрями утворюють натуральну систему координат з початком у т. О (рис. 5).

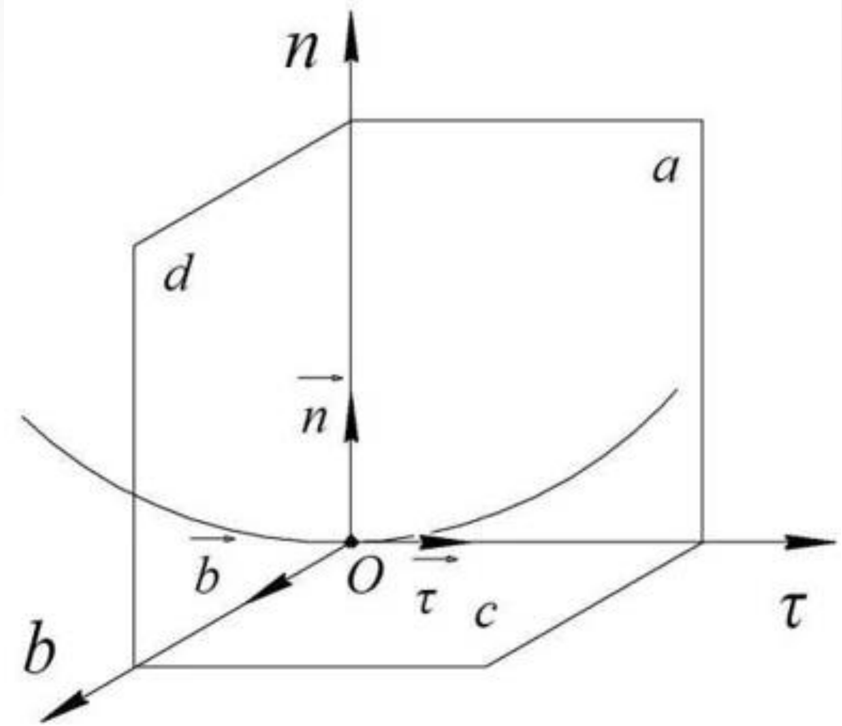


Рис. 5. Натуральна система координат з початком у т. О (М)

Дотична вісь τ з одиничним вектором τ, що має напрям у бік додатнього відліку дуги, вісь головної нормалі n з одиничним вектором n, що має напрям у бік угнутості кривої та бінормальну вісь b з одиничним вектором b, що має напрям вектору векторного добутку b = τ x n.

3. Швидкість і прискорення точки

На основі розгляду радіус-векторів у т. М як векторної функції по скалярному аргументу є можливість ввести поняття миттєвої швидкості та миттєвого прискорення.

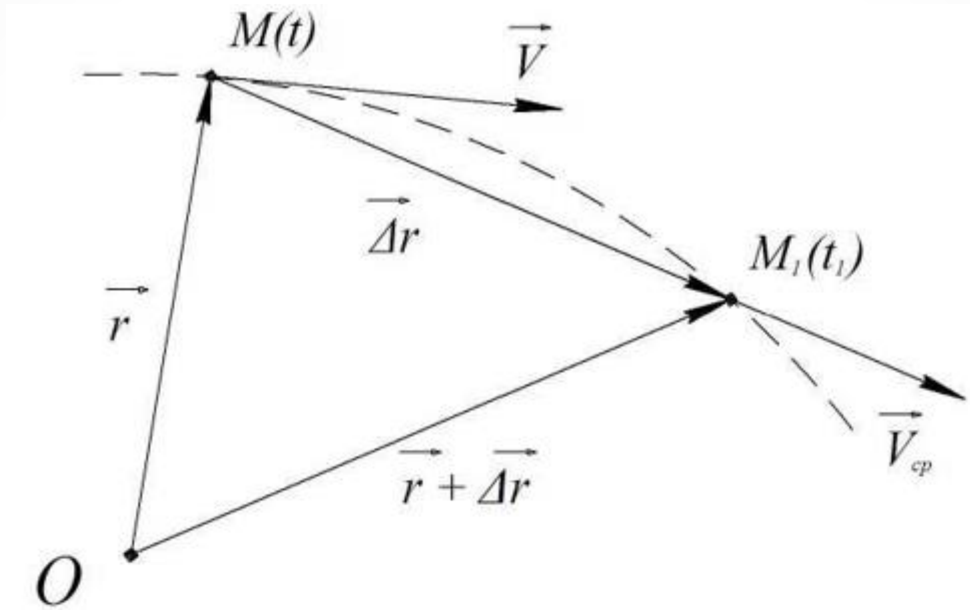


Рис. 6. Зміна швидкості точки при русі за криволінійною траєкторією

Точки М І M_1 – положення точки, що рухається у просторі, в моменти часу t і (t + Δt), де Δt – скінчений приріст часу при переміщенні точки з положення М в положення M_1.

В момент часу t положення т. М визначається радіус-вектором г + Δг.

Δг = MM_1 – вектор переміщення точки за проміжок часу Δt.

Відношення вектору Δг до проміжку часу Δt називається вектором середньої швидкості точки за проміжок часу Δt:

$$\vec{\vartheta}_{cp} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}.$$

Вектором миттєвої швидкості точки або вектором швидкості в даний момент часу, називається границя відношення вектору переміщення точки Δг до проміжку часу, за який відбувається переміщення, коли проміжок часу прямує до нуля:

$$\vec{\vartheta} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Вектор миттєвої швидкості точки дорівнює першій похідній за часом від радіуса-вектору точки.

Вектор швидкості точки напрямлений вздовж дотичної до траєкторії точки у бік руху точки та характеризує швидкість зміни просторового положення точки з часом (рис. 7).

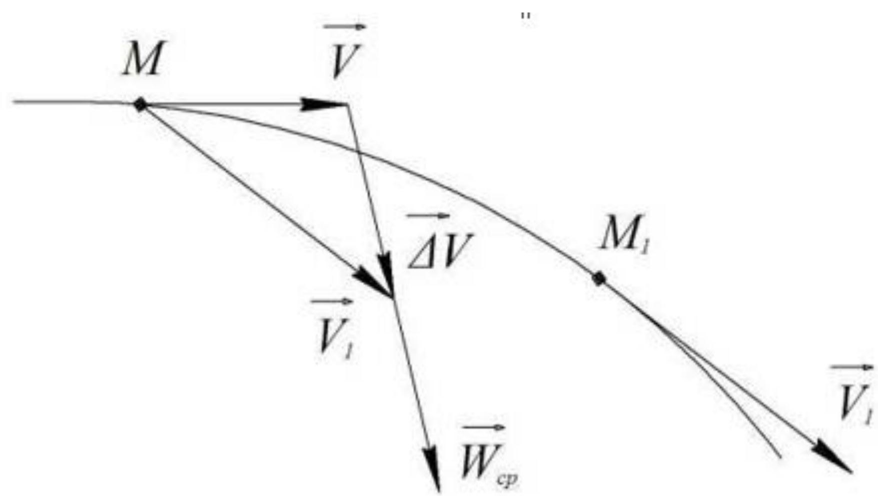


Рис. 7. Середнє прискорення Wср, як зміна швидкості точки при її русі

$$\vec{W}_{cp} = \frac{\Delta \vec{\vartheta}}{\Delta t}$$

– відношення вектору приросту швидкості ΔV до проміжку часу Δt є середнім прискоренням точки за проміжок часу Δt.

Вектором миттєвого прискорення точки називається границя відношення вектору приросту швидкості точки ΔV до проміжку часу, за який відбувається цей приріст, коли проміжок часу прямує до нуля:

$$\vec{W} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\vartheta}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\vartheta}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}.$$

Вектор прискорення точки (миттєвого) дорівнює першій похідній за часом від вектору швидкості точки V або другій похідній за часом від радіус-вектору точки r.

Вектор прискорення точки характеризує швидкість зміни вектору швидкості з часом.

Визначення швидкості точки в декартовій системі координат

З визначення швидкості точки (з рівняння вектору швидкості):

$$\vec{\vartheta} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = \dot{x}\,\vec{i} + \dot{y}\,\vec{j} + \dot{z}\,\vec{k},$$

$$\dot{x} = \vartheta_x = \frac{dx}{dt};\ \dot{y} = \vartheta_y = \frac{dy}{dt};\ \dot{z} = \vartheta_z = \frac{dz}{dt}$$

- проекції вектору швидкості точки на осі декартової системи координат

Числове значення (модуль) вектору швидкості точки визначається за формулою:

$$\vartheta = \sqrt{\vartheta_x^2 + \vartheta_y^2 + \vartheta_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2};$$

Напрям вектору швидкості точки відносно декартової системи координат визначається за допомогою напрямних косинусів:

$$\cos(\vartheta, x) = \frac{\vartheta_x}{\vartheta} = \frac{\dot{x}}{\vartheta};\ \cos(\vartheta, y) = \frac{\vartheta_y}{\vartheta} = \frac{\dot{y}}{\vartheta};\ \cos(\vartheta, z) = \frac{\vartheta_z}{\vartheta} = \frac{\dot{z}}{\vartheta}.$$

Визначення прискорення точки в декартовій системі координат

Аналогічно швидкості виконується визначення прискорення точки:
З рівняння вектору прискорення точки при векторному способі задання її руху:

$$\vec{W} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\cdot\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} = \ddot{x}\cdot\vec{i} + \ddot{y}\,\vec{j} + \ddot{z}\,\vec{k}$$

$$\ddot{x} = W_x = \frac{d^2x}{dt^2};\ \ddot{y} = W_y = \frac{d^2y}{dt^2};\ \ddot{z} = W_z = \frac{d^2z}{dt^2}$$

- проекції вектору прискорення точки на осі декартової системи координат дорівнюють другим похідним від відповідних координат точки, що визначаються функціями координат положення точки за часом.

Числове значення (модуль) вектора прискорення точки визначається за формулою:

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$$

Напрям вектора прискорення точки відносно декартової системи координат, визначається за допомогою напрямних косинусів:

$$\cos(\vec{W}, x) = \frac{W_x}{W} = \frac{\ddot{x}}{W};\ \cos(\vec{W}, y) = \frac{W_y}{W} = \frac{\ddot{y}}{W};\ \cos(\vec{W}, z) = \frac{W_z}{W} = \frac{\ddot{z}}{W}.$$

Рівності визначають величину та напрям вектору прискорення точки при координатному способі задання руху точки.

КІНЕМАТИКА

Кінематика твердого тіла. Траєкторія, швидкість і прискорення твердого тіла

Абсолютно твердим тілом називається матеріальне тіло, геометрична форма якого і розміри не змінюються ні при яких механічних діях з боку інших тіл, а відстань між будь-якими двома його точками залишається постійним.

Дві основні задачі кінематики твердого тіла:

1. Встановлення способів задання руху твердого тіла і вивчення кінематичних характеристик, притаманних тілу;
2. Визначення руху точок твердого тіла, тобто визначення траєкторій, швидкостей і прискорень окремих точок тіла.

Визначити (задати) положення вільного твердого тіла у будь-який момент часу відносно даної системи відліку - мати спосіб визначення координат кожної його точки в даній системі у будь-який момент часу.

Для визначення умов задання руху вільного твердого тіла (рис. 8) розглянемо його рух відносно нерухомої системи відліку (нерухомої системи координат Oxyz).

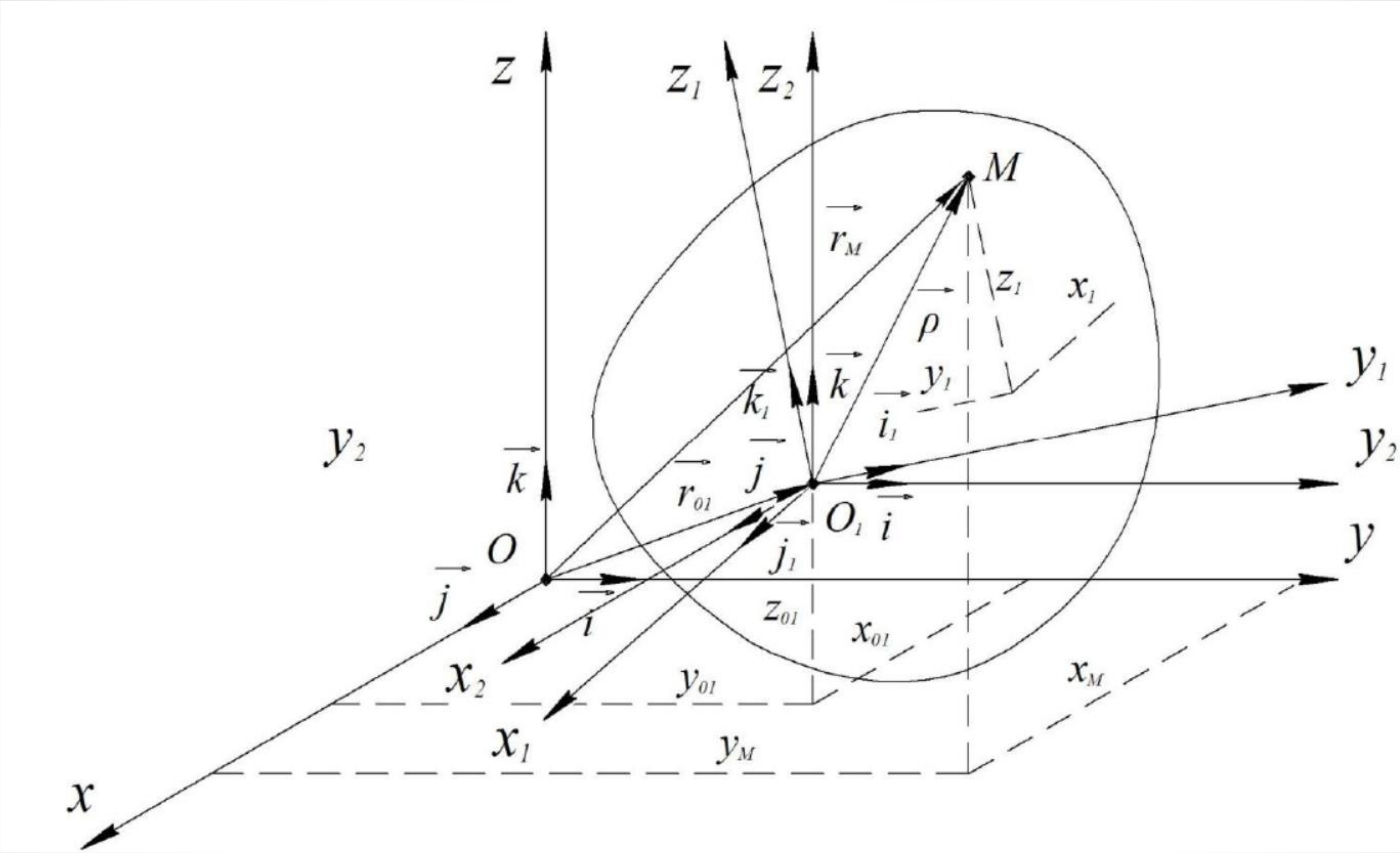


Рис. 8. Представлення руху вільного твердого тіла з використанням трьох взаємопов'язаних систем координат

$$\vec{r}_м = \vec{r}_{o_1} + \vec{\rho}, \tag{5.1}$$

$$\vec{r}_м = \vec{r}_{o_1} + x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1 + z_1\vec{k}_1,$$

Після проециювання рівності (5.1) на осі нерухомої системи координат:

$$
\begin{aligned}
x_м &= x_{o_1} + x_1 \cdot a_{11} + y_1 \cdot a_{12} + z_1 \cdot a_{13}; \\
y_м &= y_{o_1} + x_1 \cdot a_{21} + y_1 \cdot a_{22} + z_1 \cdot a_{23}; \\
z_м &= z_{o_1} + x_1 \cdot a_{31} + y_1 \cdot a_{32} + z_1 \cdot a_{33}
\end{aligned}
\qquad (5.2)
$$

де $x_{o_1}, y_{o_1}, z_{o_1}$ – координати полюса O_1 в системі $Oxyz$;

x_1, y_1, z_1 – координати точки M в системі $O_1x_1y_1z_1$;

$a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$ – косинуси кутів (напрямні косинуси) між осями координат $O_1x_2y_2z_2$ і $O_1x_1y_1z_1$.

Положення довільної точки вільного твердого тіла відносно нерухомої системи відмінне від положення т. O_1 і тим самим положення тіла відносно цієї системи визначається шістьма незалежними параметрами – трьома координатами точки O_1 і трьома напрямними косинусами. т. O_1 називається полюсом.

Рівняння (5.2) називаються кінематичними рівняннями руху вільного твердого тіла.

Кількість незалежних між собою параметрів, які однозначно визначають положення вільного твердого тіла, тобто положення кожної його точки відносно системи відліку, називається кількістю ступенів вільності тіла.

Вільне тверде тіло має шість ступенів вільності.

Числом ступенів свободи твердого тіла називається число незалежних параметрів, які однозначно визначають положення тіла в просторі відносно даної системи відліку.

Рух твердого тіла багато в чому залежить від числа його ступенів свободи.

Існує п'ять видів руху твердого тіла (залежних від кількості ступенів свободи тіла):

1. Поступальний рух;
2. Обертання навколо нерухомої осі;
3. Плоский рух;
4. Обертання навколо нерухомої точки;
5. Вільний рух.

Перші два називаються простими рухами твердого тіла.

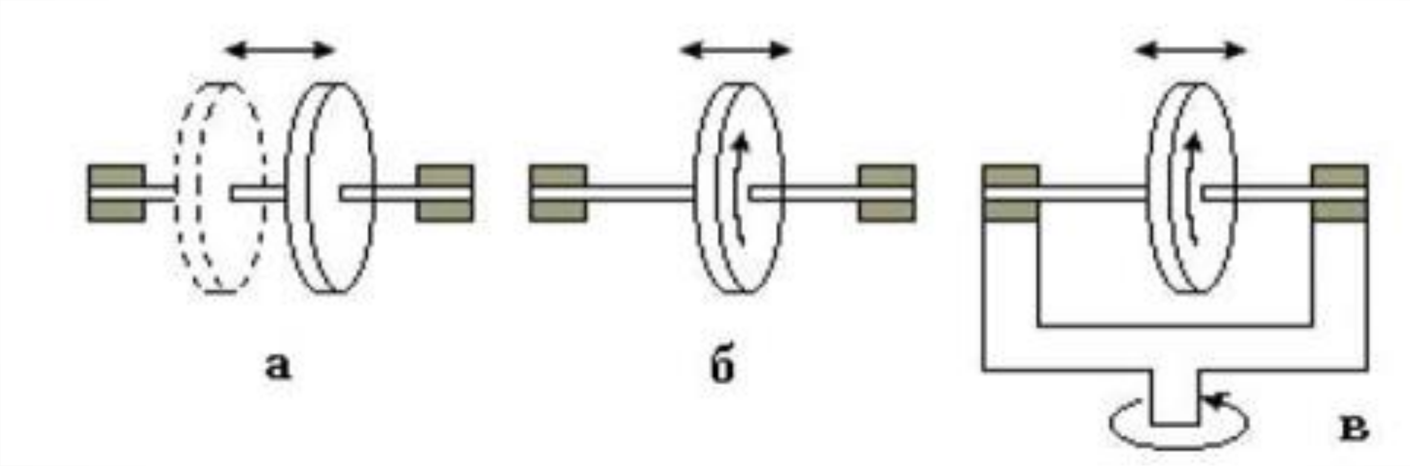
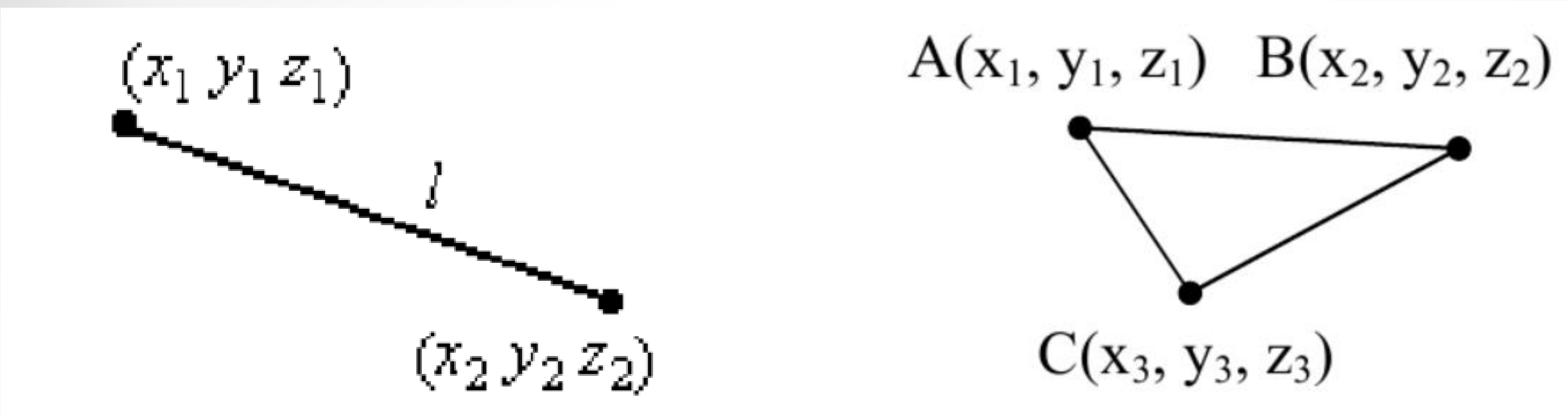


Рис. 9. Ступені свободи твердого тіла

Вільна матеріальна точка в просторі має три ступеня свободи незалежно від системи координат (декартової, циліндричної чи сферичної), на площині (поверхні) – два, на лінії (і кривій) – один.

Положення кожної точки (рис. 10) в просторі визначається трьома параметрами, але на них накладений зв'язок, який обмежує кількість їх ступенів вільності:



а) б)

Рис. 10. Обмеження ступенів свободи твердого тіла

$$l^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2,$$

- рівняння зв'язку до схеми рис. 10, а, з якого будь-яка одна координата може бути виражена через решту п'ять координат (п'ять незалежних параметрів). Вони мають (2 • 3 -1 = 5) - п’ять ступенів свободи.

Для трьох матеріальних точок в просторі (рисунок 10, б), які не лежать на одній прямій, сполучені трьома жорсткими стрижнями, число ступенів свободи дорівнює (3 • 3 - 3 = 6) - шести.