

Лабораторна робота 3

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ МЕТОДОМ ШТУЧНОГО БАЗИСУ

Мета: засвоїти метод штучного базису розв'язання задач ЛП.

3.1 Порядок виконання роботи

Метод штучного базису розв'язання задач ЛП призначений для розв'язання задач ЛП із умовами-обмеженнями будь-якого виду.

Розглянемо метод на прикладі такої задачі:

$$F(x_1, x_2) = 5x_1 + 30x_2 \rightarrow \min$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 50 \\ x_2 \geq 5 \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 150 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Приведемо математичну модель задачі ЛП до канонічного вигляду.

Перейдемо від задачі на відшукування *min* значення цільової функції до задачі на відшукування *max* значення цільової функції:

$$F'(x_1, x_2) = -F(x_1, x_2) = -5x_1 - 30x_2 \rightarrow \max$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 50 \\ x_2 \geq 5 \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 150 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Обернемо нерівності в рівності шляхом введення вільних змінних x_3, x_4, x_5 відповідно:

$$F'(x_1, x_2, \dots, x_5) = -5x_1 - 30x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \rightarrow \max$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 50 \\ x_2 + 0x_3 - 1x_4 + 0x_5 = 5 \\ 5x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 - 1x_5 = 150 \\ x_1, x_2, \dots, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

Отримаємо початковий допустимий базисний розв'язок задачі, який задовольнятиме всім умовам-обмеженням. Але зробити це так легко, як у попередньому прикладі, не вдасться.

Введемо в задачу три штучні змінні x_6, x_7, x_8 :

$$F'(x_1, x_2, \dots, x_8) = -5x_1 - 30x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 - Mx_6 - Mx_7 - Mx_8 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 1x_6 + 0x_7 + 0x_8 = 50 \\ x_2 + 0x_3 - 1x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 1x_7 + 0x_8 = 5 \\ 5x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 - 1x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 1x_8 = 150 \\ x_1, x_2, \dots, x_8 \geq 0. \end{cases}$$

Тоді отримаємо початковий допустимий базисний розв'язок задачі:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 50, x_7 = 5, x_8 = 150.$$

Заповнимо вихідну симплекс-таблицю:

Таблиця 3.1

	C	-	-5	-30	0	0	0	-M	-M	-M
	B	A ₀	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A ₅	A ₆	A ₇	A ₈
-M	x ₆	50	1	2	-1	0	0	1	0	0
-M	x ₇	5	0	1	0	-1	0	0	1	0
← -M	x ₈	150	5	2	0	0	-1	0	0	1
	Δ	-205M	-6M + 5	-5M + 30	M	M	M	0	0	0

Оцінки індексного рядка розраховуються таким чином:

$$\Delta_0 = -M \cdot 50 + (-M) \cdot 5 + (-M) \cdot 150 = -205M,$$

$$\Delta_1 = -M \cdot 1 + (-M) \cdot 0 + (-M) \cdot 5 - (-5) = -6M + 5,$$

$$\Delta_2 = -M \cdot 2 + (-M) \cdot 1 + (-M) \cdot 2 - (-30) = -5M + 30,$$

$$\Delta_3 = -M \cdot (-1) + (-M) \cdot 0 + (-M) \cdot 0 - 0 = M,$$

$$\Delta_4 = -M \cdot 0 + (-M) \cdot (-1) + (-M) \cdot 0 - 0 = M,$$

$$\Delta_5 = -M \cdot 0 + (-M) \cdot 0 + (-M) \cdot (-1) - 0 = M,$$

$$\Delta_6 = -M \cdot 1 + (-M) \cdot 0 + (-M) \cdot 0 - (-M) = 0,$$

$$\Delta_7 = -M \cdot 0 + (-M) \cdot 1 + (-M) \cdot 0 - (-M) = 0,$$

$$\Delta_8 = -M \cdot 0 + (-M) \cdot 0 + (-M) \cdot 1 - (-M) = 0.$$

Визначимо:

напрямний стовпець – A₁,

напрямний рядок – x₈,

напрямний елемент – x₈₁ = 5.

Розрахуємо елементи наступної симплекс-таблиці:

Таблиця 3.2'

C	-	-5	-30	0	0	0	-M	-M
---	---	----	-----	---	---	---	----	----

B	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
x_6	$50 - \frac{150 \cdot 1}{5}$	$1 - \frac{5 \cdot 1}{5}$	$2 - \frac{2 \cdot 1}{5}$	$-1 - \frac{0 \cdot 1}{5}$	$0 - \frac{0 \cdot 1}{5}$	$0 - \frac{-1 \cdot 1}{5}$	$1 - \frac{0 \cdot 1}{5}$	$0 - \frac{0 \cdot 1}{5}$
x_7	$5 - \frac{150 \cdot 0}{5}$	$0 - \frac{5 \cdot 0}{5}$	$1 - \frac{2 \cdot 0}{5}$	$0 - \frac{0 \cdot 0}{5}$	$-1 - \frac{0 \cdot 0}{5}$	$0 - \frac{-1 \cdot 0}{5}$	$0 - \frac{0 \cdot 0}{5}$	$1 - \frac{0 \cdot 0}{5}$
x_1	$150 : 5$	$5 : 5$	$2 : 5$	$0 : 5$	$0 : 5$	$-1 : 5$	$0 : 5$	$0 : 5$
Δ								

Таблиця 3.2

C	-	-5	-30	0	0	0	$-M$	$-M$
B	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
$-M$ x_6	20	0	$\frac{8}{5}$	-1	0	$\frac{1}{5}$	1	0
$-M$ x_7	5	0	1	0	-1	0	0	1
-5 x_1	30	1	$\frac{2}{5}$	0	0	$-\frac{1}{5}$	0	0
Δ	$-25M - 150$	0	$-\frac{13}{5}M + 28$	M	M	$-\frac{1}{5}M + 1$	0	0

Визначимо:

напрямний стовпець – A_2 ,

напрямний рядок – x_7 ,

напрямний елемент – $x_{72} = 1$.

Розрахуємо елементи наступної симплекс-таблиці:

Таблиця 3.3

C	-	-5	-30	0	0	0	$-M$
B	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
$-M$ x_6	12	0	0	-1	$\frac{8}{5}$	$\frac{1}{5}$	1
-30 x_2	5	0	1	0	-1	0	0
-5 x_1	28	1	0	0	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0

Δ	$-12M - 290$	0	0	M	$-\frac{8}{5}M + 28$	$-\frac{1}{5}M + 1$	0
----------	--------------	---	---	-----	----------------------	---------------------	---



Визначимо:

напряний стовпець – A_4 ,

напряний рядок – x_6 ,

напряний елемент – $x_{64} = \frac{8}{5}$.

Розрахуємо елементи наступної симплекс-таблиці:

Таблиця 3.4

	C	–	-5	-30	0	0	0
	B	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
← 0	x_4	$\frac{60}{8}$	0	0	$-\frac{5}{8}$	1	$\frac{1}{8}$
-30	x_2	$\frac{25}{2}$	0	1	$-\frac{5}{8}$	0	$\frac{1}{8}$
-5	x_1	25	1	0	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$
	Δ	-500	0	0	$\frac{35}{2}$	0	$-\frac{5}{2}$



Визначимо:

напряний стовпець – A_5 ,

напряний рядок – x_4 ,

напряний елемент – $x_{45} = \frac{1}{8}$.

Розрахуємо елементи наступної симплекс-таблиці:

Таблиця 3.5

	C	–	-5	-30	0	0	0
	B	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
0	x_5	60	0	0	-5	8	1
-30	x_2	5	0	1	0	-1	0
-5	x_1	40	1	0	-1	2	0

Δ	-350	0	0	5	20	0
----------	------	---	---	---	----	---

Отримали оптимальний розв'язок задачі:

$$x_1 = 40, x_2 = 5, F_{min} = 350.$$

Таким чином, якщо в задачі ЛП мають місце умови-обмеження різного виду ($\leq, \geq, =$), то після приведення математичної моделі до канонічного вигляду штучні змінні вводяться тільки в ті обмеження, де у вихідній системі були знаки $\geq, =$ (за всіх додатніх вільних членах).

Завдання

Розв'язати задачу лінійного програмування методом штучного базису.

№ варіанту	Умови задачі
1	2
1	$F(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max$ $\begin{cases} x_1 - 2x_2 \geq 4 \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ 4x_1 - 3x_2 \leq 12 \\ 7x_1 + 4x_2 \leq 28 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$
2	$F(x_1, x_2) = 2x_1 - 4x_2 \rightarrow \max$ $\begin{cases} 8x_1 - 5x_2 \leq 16 \\ x_1 + 3x_2 \leq 2 \\ 2x_1 + 7x_2 \geq 9 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$
3	$F(x_1, x_2) = -3x_1 + 6x_2 \rightarrow \min$ $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \leq 4 \\ x_1 - 2x_2 \geq -4 \\ x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$
4	$F(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \rightarrow \max$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1 \\ -5x_1 + x_2 \leq 0 \\ -x_1 + 5x_2 \geq 0 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$
5	$F(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \rightarrow \max$ $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \leq 7 \\ -x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$

1	2
6	$F(x_1, x_2) = -2x_1 + x_2 \rightarrow \min$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ -3x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$
7	$F(x_1, x_2) = -3x_1 + 2x_2 \rightarrow \min$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ 3x_1 + x_2 \geq 15 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$
8	$F(x_1, x_2) = 2x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$ $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \geq -6 \\ x_1 + x_2 \geq 3 \\ 0 \leq x_1 \leq 3 \\ 0 \leq x_2 \leq 5 \end{cases}$
9	$F(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$ $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \leq 4 \\ x_1 - 2x_2 \geq -4 \\ x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$
10	$F(x_1, x_2) = 2x_1 - 4x_2 \rightarrow \min$ $\begin{cases} 8x_1 - 5x_2 \leq 16 \\ x_1 + 3x_2 \geq 2 \\ 2x_1 + 7x_2 \leq 9 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$
11	$F(x_1, x_2) = 7x_1 + 5x_2 \rightarrow \max$ $\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 \geq 7 \\ 7x_1 - 5x_2 \geq 35 \\ x_1 - x_2 \leq 0 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$

1	2
12	$F(x_1, x_2) = 2x_1 - 3x_2 \rightarrow \max$ $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$
13	$F(x_1, x_2) = -2x_1 + x_2 \rightarrow \min$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6 \\ -3x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$
14	$F(x_1, x_2) = 3x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4 \\ 3x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1 + 5x_2 \geq 4 \\ 0 \leq x_1 \leq 3 \\ 0 \leq x_2 \leq 3 \end{cases}$
15	$F(x_1, x_2) = 3x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 8 \\ 3x_1 + 7x_2 \geq 21 \\ x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ 0 \leq x_1 \leq 1 \\ 0 \leq x_2 \leq 1 \end{cases}$