

### 2.2.3. Зональна система плоских прямокутних координат Гаусса-Крюгера

Земну сферу (еліпсоїд) неможливо розгорнути на площину без розривів і згинів. Для зображення на площині великих ділянок земної поверхні використовують спеціальні картографічні проєкції, які дають змогу перенести точки поверхні Землі на площину за відповідними математичними законами. У геодезії найбільшого розповсюдження набули рівнокутні проєкції, оскільки для врахування спотворення необхідно вводити практично однакові поправки в довжину ліній у межах окремих ділянок. Для проведення топографо-геодезичних робіт на місцевості та складання топографічних карт масштабу 1:1 000 000 і крупніших в Україні прийнята рівнокутна поперечно-циліндрична проєкція еліпсоїда (сферичної поверхні) на площині, яку ще називають *проєкцією Гаусса-Крюгера*, та відповідна до неї система прямокутних координат. К. Гаусс (1777-1855) – німецький учений, який у 30-ті роки XIX ст. розробив загальну теорію рівнокутних проєкцій. У 1912 р. Л. Крюгер (1857-1923) у роботі "Конформне зображення земного еліпсоїда на площині" запропонував формули для обчислень у цій проєкції. Зауважимо, що в наш час у цій проєкції використовують не формули Крюгера, а точніші формули, які вивели Ф.М. Красовський та О.О. Ізотов.

Розглянемо коротко геометричну суть проєкції Гаусса-Крюгера. Для її побудови поверхню земного еліпсоїда розбивають спочатку меридіанами на 60 зон по  $6^\circ$  довготи кожна (інколи приймають зони по  $3^\circ$  довготи). Нумерацію зон ведуть від нульового меридіана на схід. Границі зон проводять у системі географічних координат: 1-ша зона –  $0-6^\circ$  східної довготи; 2-га –  $6-12^\circ$  і т.д.

Розбитий на зони еліпсоїд вписують у циліндр, вісь якого лежить у площині екватора, а поверхня дотикається осьового меридіана однієї із зон (рис. 6). Усі точки та лінії цієї зони проєктують на бокову поверхню циліндра. Поступально-обертвовим рухом еліпсоїда виводять осьові меридіани кожної із зон у дотичне положення до поверхні циліндра та по чергову проєктують на неї решту зон незалежно одна від одної. Після цього циліндр розрізають уздовж довгої осі та розгортають його на площину. У такий спосіб буде виконана умова рівних кутів – кути на площині дорівнюють відповідним кутам на еліпсоїді.

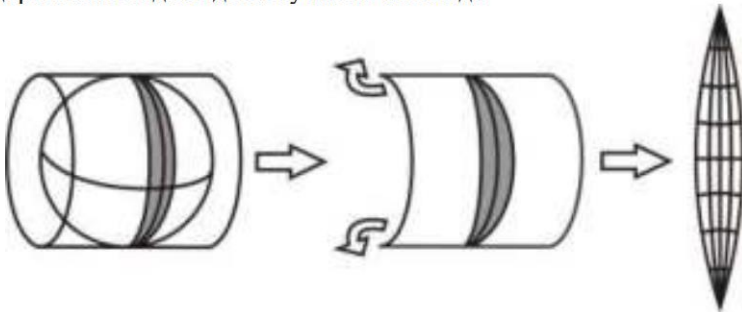


Рис. 6. Послідовність отримання проєкції 6-градусної зони Гаусса-Крюгера

Осьовий меридіан і екватор зони у проєкції Гаусса-Крюгера зображені у вигляді прямих ліній, решта меридіанів і паралелей – кривими. Меридіани проходять симетрично щодо осьового меридіана, а паралелі – щодо екватора. Осьовий меридіан, який є дотичним до поверхні проєктування, переданий без спотворень, і масштабний коефіцієнт (відношення фактичного масштабу

зображення до номінального) уздовж нього дорівнює одиниці (рис. 8, а). Довжини інших ліній і площі об'єктів будуть більшими, порівняно з їхніми горизонтальними проєкціями на рівневу поверхню. Площа зони загалом у проєкції також трохи збільшена. Спотворення довжин ліній збільшується з віддаленням від осьового меридіана, однак воно не перевищує межі точності графічних побудов для зазначених вище масштабів. Натомість ці похибки завеликі для складання карт і планів у масштабі 1:5 000 та крупніших, і тоді вже використовують 3-градусні зони. Середні меридіани таких зон збігаються з осьовими меридіанами 6-градусних зон або з їхніми крайніми меридіанами. Перші 3-градусна і 6-градусна зони мають один і той самий середній меридіан зі східною довготою у  $3^\circ$ . Довготу осьового меридіана обчислюють за формулою  $L_c = 3n$ .

Для кожної 6-градусної зони будують самостійну систему прямокутних координат. Середній (осьовий) меридіан зони приймають за вісь абсцис, а проєкцію екватора – за вісь ординат; точка їхнього перетину – початок координат. Щоб визначити прямокутні координати точки М, треба опустити з неї перпендикуляри на вісь Х та вісь Y (рис. 7). Значення перпендикулярів у масштабі картографічного зображення території відповідатиме координатам Х та Y певної точки. У північній півкулі всі абсциси додатні. Щоб ординати точок теж були додатні, ординату початку координат приймають рівною 500 км, уявно зміщуючи вісь Х на захід за межі зони. Число +500 вибрано з таких міркувань: довжина дуги в 1 градус на екваторі дорівнює приблизно 111 км, у 3 градуси – відповідно 333 км. Тому Y у межах зони може набувати значень від 333 до -333. Щоб ординати були додатні, ординаті осьового меридіана приписали ціле число кілометрів, більше 333. Таким числом є +500. Усі точки,

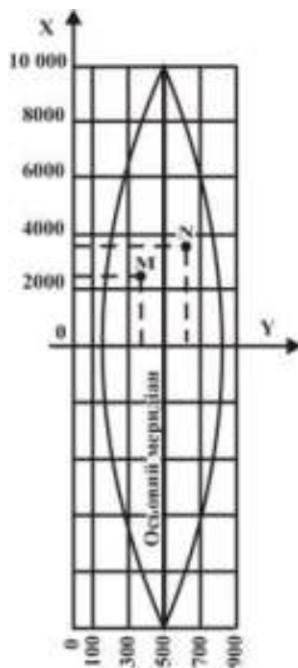


Рис. 7. Система прямокутних координат для проєкції 6-градусної зони

розташовані західніше осьового меридіана, мають ординату меншу +500 км, а східніше – більшу 500 км. Щоб було зрозуміло, в якій зоні розташована точка, до її ординати дописують номер зони. Наприклад, запис  $Y = 7\ 381\ 252$  м означає, що точка розташована у сьомій зоні та віддалена від осьового меридіана на захід на 118 748 м. Координати, визначені у системі зі зміщеним початком відліку, називають *перетвореними (умовними, приведеними)*.

Координатну сітку в кожній проекції 6-градусної зони утворюють рівновіддалені взаємно перпендикулярні лінії, які проведені паралельно осям  $X$  та  $Y$ . Труднощі з використанням зональної системи координат виникають у тих випадках, коли топографо-геодезичні роботи проводять на периферійних ділянках, розташованих у двох сусідніх зонах. Координатні лінії таких зон розташовані під кутом одні до одних. Для уникнення ускладнень вводять смугу перекриття, у якій координати точок можна визначити у двох суміжних системах. Ширина смуги перекривання дорівнює  $4'$ , по  $2'$  у кожній зоні.

Для визначення довготи меридіанів, які обмежують зону, та її осьового меридіана можна скористатися такими формулами:

а) для східної півкулі:

$$L_{\text{зах.}} = 6^\circ(n - 1); \quad L_{\text{сер.}} = 6^\circ n - 3^\circ; \quad L_{\text{сх.}} = 6^\circ n, \quad (2.1)$$

б) для західної півкулі:

$$\begin{aligned} L_{\text{зах.}} &= 180^\circ - 6^\circ(n - 30 - 1) \\ L_{\text{сер.}} &= 180^\circ - 6^\circ(n - 30) + 3^\circ \\ L_{\text{сх.}} &= 180^\circ - 6^\circ(n - 30), \end{aligned} \quad (2.2)$$

де  $L_{\text{зах.}}$  – довгота західного меридіана зони;  $L_{\text{сер.}}$  – довгота осьового меридіана;  $L_{\text{сх.}}$  — довгота східного меридіана зони;  $n$  – номер зони.

#### **2.2.4. Система координат UTM**

У західних країнах для складання топографічних карт і розгортання системи прямокутних координат на великі території використовують також проекцію UTM (Universal Transverse Mercator – універсальна поперечно-циліндрична Меркатора), яку називають ще проекцією Гаусса-Боага. Це вдосконалений варіант проекції Гаусса-Крюгера, реалізований також на 6-градусних зонах. Кожна зона у цій проекції простягається від 80 паралелі на півдні до 84 паралелі на півночі. Асиметрія зон зумовлена тим, що 80 паралель проходить південніше Південної Америки, Африки й Австралії, але треба піднятися до 84 паралелі на півночі, щоб повністю охопити територію Гренландії. Тобто такі 6-градусні зони сукупно покривають майже всю поверхню планети, крім Північного Льодовитого океану та центральних районів Антарктиди.



Нумерацію зон починають від 180 меридіана у східному напрямку. Перша зона (UTM-1) на заході обмежена 180-м меридіаном, на сході – 174°, а центральний меридіан має західну довготу 177°.

У системі UTM для проектування зон використано поверхню циліндра, який є січним до поверхні еліпсоїда. Поверхня проектування (циліндра) проходить трохи нижче осьового меридіана зони й утворює дві лінії перетину з поверхнею еліпсоїда, які розташовані приблизно на 180 км по обидва боки від осьового меридіана (рис. 8, б). Уздовж останнього, де масштабний коефіцієнт дорівнює 0,9996, проекція кожної зони має невеликі спотворення, виражені зменшенням лінійних розмірів і площ об'єктів, порівняно з їхніми проекціями на рівневу поверхню. Далі по обидва боки від центрального меридіана проходять два меридіани з нульовими спотвореннями, а для периферії проекції зони властиве завищення довжин і площ. Загалом спотворення в UTM помітно менші, ніж у звичайній проекції Гаусса-Крюгера. За базову модель Землі в системі координат UTM у наш час використовують еліпсоїд WGS84.

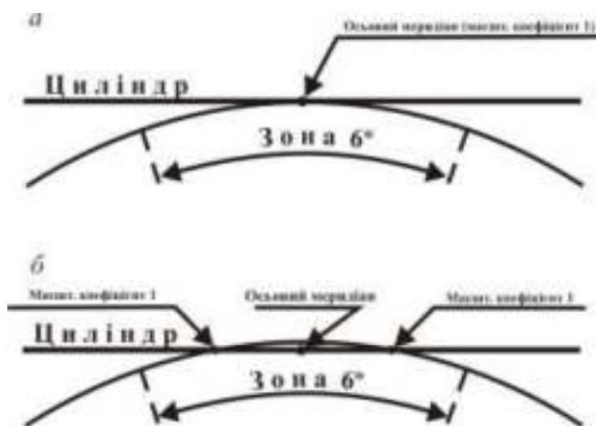


Рис. 8. Положення 6-градусної зони щодо поверхні проектування у проекції Гаусса-Крюгера (а) та у проекції UTM (б)

Положення проекції точки Землі на поверхню еліпсоїда визначають номер UTM-зони та пара координат – східна і північна (easting і northing). Кожна зона має два комплекти декартових координат для північної та південної частин окремо (рис. 9). У північній частині зони початок координат розташований на екваторі на 500 км західніше від точки перетину екватора й

осьового меридіана. Північна координата як найкоротша відстань від екватора до точки може набувати значень від нуля на екваторі до 9 328 000 м на 84-й паралелі. Для південної частини зони початок координат зміщено також на 500 км на захід (false easting) та на 10 000 км на південь від екватора (false northing). Завдяки такому положенню початків відліку в системі UTM, як і в системі Гаусса-Крюгера, будь-яка точка у межах 6-градусної зони завжди матиме додатні східну та північну координати.

Однак використання двох комплектів координат зумовлює певну плутанину, пов'язану з тим, що і в північній, і в південній підзонах є точки з однаковими координатами. Для того, щоб однозначно вказати положення точки, треба до номера зони дописати позначення півкулі – північної (N) або південної (S). Тоді прямокутні координати точки у системі UTM матимуть, наприклад, такий формат запису: 17N 630 084 9 582 438. Це означає, що точка розташована у північній частині 17-ї зони, східна координата її дорівнює 630 084 м, а північна (зміщення на північ від екватора) – 9 582 438 м.

Для уточнення положення точки використовують також інший спосіб, запропонований у 1951 р. військовими армії США та згодом запроваджений у НАТО. Кожну зону вони розділяють на 20 широтних смуг по 8° кожна (рис. 10). Позначають смуги літерами англійського алфавіту, починаючи від 80-ї паралелі південної широти, яка є південною межею смуги С, до 84-ї паралелі північної широти, яка обмежує з півночі смугу Х (широту останньої збільшено на 4°, щоб повністю охопити північ Гренландії). Із позначення смуг виключено літери І та О через їхню подібність до цифр 1 та 0. Введено також смуги А, В і Y, Z, які охоплюють західні та східні частини антарктичних і арктичних регіонів відповідно. Крайні меридіани 6-градусних зон і

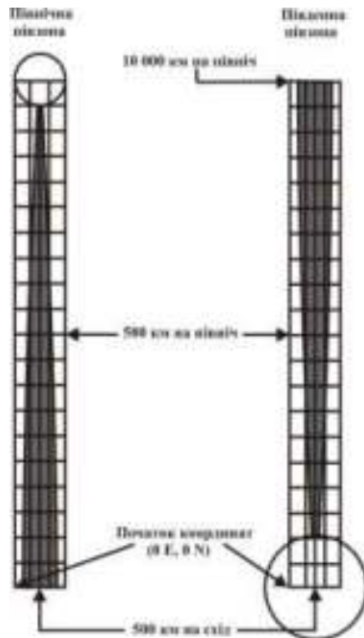


Рис. 9. Бінарна система координат в UTM