Лекція 1. Елементи лінійної алгебри.

§1. Матриці та дії над ними.

1.1. Основні означення.

Означення. Множину дійсних чисел, записану у вигляді прямокутної таблиці, яка має n рядків і m стовпців, називають матрицею розміру n×m і позначають

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \qquad (1.1)$$

Коротко матрицю позначають так: $A = (a_{ij})$; $A = \|a_{ij}\|$.

Числа a_{ij} називають елементами матриці. Перший індекс i числа a_{ij} вказує на номер рядка, в якому він перебуває, другий індекс j – на номер стовпця.

Матриця називається нульовою, якщо всі її елементи рівні нулю. Нульова матриця позначається літерою 0.

Якщо в матриці A (1.1) $n = m$, то вона називається квадратною матрицею порядку n:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (1.2)$$

Елементи $a_{11},\ a_{22},\ a_{33,\dots,}\ a_{nn}$ утворюють головну діагональ квадратної матриці (1.2), а елементи $a_{n1},\ a_{n-1\,2},\ a_{n-2\,3,\dots,}\ a_{1n}$ - її побічну діагональ.

Кожній квадратній матриці $A = (a_{ij})$ порядку n ставиться у відповідність деяке число, правило обчислення якого буде сформульовано нижче. Це число називають визначником (детермінантом) n -го порядку і позначають

$$detA = \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (1.3)$$

Квадратна матриця називається діагональною, якщо всі її елементи, крім тих, що знаходяться на головній діагоналі, дорівнюють нулю.

Діагональна матриця, у якої кожен елемент головної діагоналі дорівнює одиниці, називається одиничною і позначається літерою E. Наприклад, одинична матриця другого порядку має вигляд

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (1.4)$$

Матриця розміру $1 \times n$ називається матрицею-рядком, а розміру $n \times 1$ – матрицею-стовпцем.

Дві матриці $A_{n\times m} = (a_{ij})$ та $B_{n\times m} = (b_{ij})$ називаються рівними, якщо вони однакових розмірів і всі їх відповідні елементи рівні, тобто $a_{ij} = b_{ij}$, де $i = \overline{1,n}$ та $j = \overline{1,m}$.

1.2. Дії над матрицями.

1°. Добутком матриці $A = (a_{ij})$ на число β називають матрицю βA, елементи якої дорівнюють добутку числа β на всі відповідні елементи матриці A:

$$\beta A = \begin{pmatrix} \beta a_{11} & \beta a_{12} & \cdots & \beta a_{1m} \\ \beta a_{21} & \beta a_{22} & \cdots & \beta a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta a_{n1} & \beta a_{n2} & \cdots & \beta a_{nm} \end{pmatrix} \qquad (1.5)$$

Приклад 1.

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -2 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 21 \\ -6 & 12 \\ 15 & 0 \end{pmatrix}$$

2°. Операція додавання матриць визначена лише для матриць однакового розміру. Сумою двох матриць $A_{n\times m} = (a_{ij})$ та $B_{n\times m} = (b_{ij})$ називають матрицю $C_{n\times m} = (c_{ij})$, елементи якої дорівнюють сумі відповідних елементів матриць A та B, тобто

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad (1.6)$$

Приклад 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 3+(-1) & -2+3 \\ 5+4 & -1+2 & 3+0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 9 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

3°. Різницею матриць A та B називається сума матриці A і матриці B, помноженої на –1: $A - B = A + (-1)B$.

4°. Операція множення двох матриць визначена лише для узгоджених матриць. Матриця A називається узгодженою з матрицею

B, якщо кількість стовпців першої матриці A дорівнює кількості рядків другої матриці B. Якщо матриця A узгоджена з матрицею B, то звідси не випливає те, що матриця B узгоджена з матрицею A.

Квадратні матриці одного порядку взаємно узгоджені.

Добутком матриці $A = (a_{ij})$ розміру $m \times n$ на матрицю $B = (b_{ij})$ розміру $n \times p$ називають матрицю $C = (c_{ij})$розміру $m \times p$, елементи якої визначаються за формулою ($C = AB$)

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\,; \qquad (1.7)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, m; \quad j = 1, 2, \ldots, p)$$

тобто елемент c_{ij} дорівнює сумі добутків елементів i-го рядка матриці A на відповідні елементи j- го стовпця матриці B.

В загальному випадку $AB \neq BA$.

Приклад 3. Знайти добуток матриць AB, де

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Матриця A розміру 2×3, а матриця B розміру 3×3. Тому матриця A узгоджена з матрицею B і добуток AB можна обчислити. Матриця $C = AB$ має розмір 2×3.

Маємо

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 2 \cdot 0 + 3 \cdot (-3) + 1 \cdot (-1) \\ -4 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 5 \cdot 0 & -4 \cdot (-3) + 0 \cdot 1 + 5 \cdot 2 & -4 \cdot 0 + 0 \cdot (-3) + 5 \cdot (-1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & -1 & -10 \\ -8 & 22 & -5 \end{pmatrix}.$$

Матриці B і A перемножити не можна, бо вони не узгоджені.

Операція множення матриць не комутативна, тобто $AB \neq BA$. Покажемо це на прикладі. Нехай маємо матриці A і B.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Тоді,

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Отже $AB \neq BA$.

Слід зауважити, що для того, щоб добутки AB і BA були не тільки визначені, але й мали однаковий розмір, необхідно і достатньо, щоб обидві матриці A та B були квадратними матрицями одного і того ж порядку.

Легко також перевірити, що дії над матрицями задовольняють наступним властивостям:

1. $A + B = B + A$
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. $A + 0 = A, \quad A - A = 0$
4. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A = \beta(\alpha A)$
5. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
6. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
7. $A(B + c) = AB + AC$
8. $(AB)C = A(BC)$
9. $(\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha(AB)$
10. $AE = EA = A$
11. $A \cdot 0 = 0, \quad 0 \cdot A = 0$
12. $det(AB) = detA \cdot detB$

Тут α та β - довільні числа, а A, B, C – матриці, E – одинична матриця, 0 – нульова матриця.

§ 2. Визначники.

2.1. Визначники другого та третього порядку та їх властивості.

Вираз $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{12}$ (2.1)

називається визначником (детермінантом) другого порядку. Для його обчислення потрібно від добутку елементів головної діагоналі відняти добуток елементів другої діагоналі.

Приклади 4. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 4 \cdot (-5) = 6 + 20 = 26.$

б) $\begin{vmatrix} cos\alpha & -sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{vmatrix} = cos^2\alpha + sin^2\alpha = 1.$

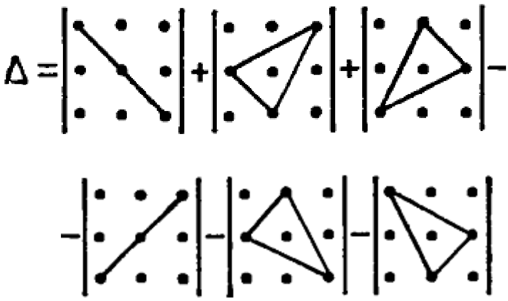
Вираз

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{21}\, a_{32}\, a_{13} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} -$$

$$-a_{31}\, a_{22}\, a_{13} - a_{21}\, a_{12}\, a_{33} - a_{32}\, a_{23}\, a_{11} \qquad (2.2)$$

називається визначником (детермінантом) третього порядку.

Нижче запишемо схему обчислення визначника третього порядку.



(2.3)

Визначник третього порядку (2.2) обчислюється за правилом трикутника (2.3): перший доданок в правій частині формули є добуток елементів, що стоять на головній діагоналі, другий і третій доданки є добутками елементів, що знаходяться у вершинах двох трикутників, у яких одна сторона паралельна головній діагоналі. Аналогічно знаходяться доданки зі знаком мінус, де за основу береться друга діагональ.

Приклад 5. Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot(-3) + (-2)\cdot 5\cdot 1 + 3\cdot 4\cdot 4 - 4\cdot 2\cdot 1 -$$

$$-(-2)\cdot 3\cdot(-3) - 5\cdot 4\cdot 1 = -6 - 10 + 48 - 8 - 18 - 20 = -14\,.$$

Розглянемо на прикладі визначників третього порядку основні властивості визначників. Всі вони доводяться безпосередньою перевіркою. Пропонується зробити це самостійно.

Властивості визначників:

1^0. Якщо у визначнику замінити всі його рядки відповідними стовпцями (транспонувати) то величина визначника при цьому не зміниться:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Дана властивість встановлює рівноправність рядків і стовпців визначника. Тому всі подальші властивості справедливі і для рядків і для стовпців визначника.

2^0. Якщо у визначнику поміняти місцями будь-які два рядки (стовпці), то визначник змінить свій знак на протилежний. Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}.$$

3^0. Якщо у визначнику є нульовий рядок (стовпець), то визначник дорівнює нулю. Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

4^0. Якщо у визначнику є два однакових рядки (стовпці), то він дорівнює нулю. Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a & a \\ a_{21} & b & b \\ a_{31} & c & c \end{vmatrix} = 0.$$

5^0. Спільний множник, що міститься в усіх елементах довільного рядка (стовпця) можна винести за знак визначника. Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

6^0. Якщо у визначнику елементи будь-яких двох рядків (стовпців) пропорційні, то визначник дорівнює нулю.

7^0. Якщо кожен елемент деякого рядка (стовпця) визначника є сума двох доданків, то такий визначник дорівнює сумі двох визначників, у одного з яких вказаний рядок (стовпець) складається з перших доданків, а у другого з других. Інші рядки (стовпці) усіх трьох визначників однакові. Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + b_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

8^0. Якщо до елементів довільного рядка (стовпця) визначника додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне й те саме число, то визначник при цьому не зміниться. Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + ka_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} + ka_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} + ka_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

2.2. Розклад визначника за елементами рядка або стовпця.

Нехай задано визначник n -го порядку

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (2.4)$$

Означення. Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника називається визначник $(n-1)$-го порядку, який утворюється з даного визначника викреслюванням i-го рядка та j-го стовпця.

Означення. Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} називається його мінор, взятий зі знаком $(-1)^{i+j}$, тобто $A_{ij} = (-1)^{i+j}\, M_{ij}$.

Наприклад, для визначника третього порядку $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

Мінорами елементів a_{21} та a_{33} будуть відповідно визначники другого порядку: $M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ та $M_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

Алгебраїчні доповнення елементів a_{21} та a_{33} рівні відповідно:

$A_{21} = (-1)^{2+1}\, M_{21} = -\,M_{21}$, $\quad A_{33} = (-1)^{3+3}\, M_{33} = M_{33}$.

Якщо, $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 6 \\ -2 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & -3 \end{vmatrix}$, то $A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -26$.

Теорема 1.1. Визначник дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) визначника на їхні алгебраїчні доповнення.

Тобто для визначника (2.4) виконуються такі рівності:

$$\Delta_n = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}A_{1k} \qquad (2.5)$$

$$\Delta_n = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + \cdots + a_{n1}A_{n1} = \sum_{k=1}^{n} a_{k1}A_{k1} \qquad (2.6)$$

(2.5) та (2.6) - розклади визначника (2.4) відповідно за елементами першого рядка та першого стовпця визначника.

Аналогічно можна записати розклад визначника (2.4) за довільним рядком або стовпцем.

Покажемо це на прикладі обчислення визначника третього порядку.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Для нього існує лише шість різних розкладів (бо він має три рядки та три стовпці). Запишемо всі ці рівності.

$$\Delta_3 = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}; \quad \Delta_3 = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31};$$
$$\Delta_3 = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}; \quad \Delta_3 = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}; \quad (2.7)$$
$$\Delta_3 = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}; \quad \Delta_3 = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}.$$

Приклад 6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & -3 \end{vmatrix}$, розкладаючи його за елементами другого стовпця.

За п’ятою з формул (2.7): $\Delta_3 = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$ маємо

$$\Delta_3 = 3 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}$$

$$+5 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = (-3) \cdot (-10) + 2 \cdot (-7) + (-5) \cdot 6 = -14.$$

Отже ми отримали той же результат, що і в прикладі 5, розв’язавши його іншим способом.

Теорема 1.2. Сума добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) визначника на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого рядка (стовпця) дорівнює нулю.

Пункт 2.3 для самостійного ознайомлення бажаючих.

2.3. Визначники вищих порядків.

За допомогою теореми 1.1 можна обчислити визначник довільного порядку. Для цього можна використати зокрема формули (2.5) або (2.6). Але якщо для обчислення за вказаною теоремою визначника четвертого порядку потрібно обчислити 4 визначника третього порядку, то для обчислення визначника п'ятого порядку потрібно вже обчислити 5 визначників четвертого порядку або 20 визначників третього порядку і після цього знайти відповідну суму. А це вже досить громіздкі обчислення. Тому на практиці спочатку за допомогою властивості 8^0 перетворюють заданий визначник так, щоб у деякому рядку чи стовпці всі елементи, крім одного, стали нулями. Розкладаючи тоді визначник згідно з теоремою 1.1 за елементами цього рядка чи стовпця, дістанемо лише один доданок, тому що всі інші доданки є добутками алгебраїчних доповнень на нуль.

Приклад 7. Обчислити визначник:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

У першому стовпчику перетворимо всі елементи, крім другого, на нулі. Для цього залишаючи другий рядок без змін, до першого рядка додамо другий помножений на (-2), до третього - другий помножений на (-3), а до четвертого - другий помножений на 2. Тоді отримаємо

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 2-2 & 3-8 & -2-2 & 5-10 \\ 1 & 4 & 1 & 5 \\ 3-3 & 1-12 & 4-3 & 2-15 \\ -2+2 & 2+8 & 3+2 & 1+10 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -5 & -4 & -5 \\ 1 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & -11 & 1 & -13 \\ 0 & 10 & 5 & 11 \end{vmatrix}$$

Розклавши цей визначник за елементами першого стовпця, отримаємо

$$\Delta_4 = 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -5 & -4 & -5 \\ -11 & 1 & -13 \\ 10 & 5 & 11 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -5 & -4 & -5 \\ -11 & 1 & -13 \\ 10 & 5 & 11 \end{vmatrix}$$

У нас елементи першого рядка визначника мають спільний множник(-1). Використовуючи властивість 5^0, винесемо цей множник за знак визначника. Тоді отримаємо: $\Delta_4 = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 5 \\ -11 & 1 & -13 \\ 10 & 5 & 11 \end{vmatrix}$.

У другому стовпчику перетворимо всі елементи, крім другого, на нулі. Для цього залишаючи другий рядок без змін, до першого рядка додамо другий помножений на (-4), до третього - другий помножений на (-5). Тоді отримаємо

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 5+44 & 4-4 & 5+52 \\ -11 & 1 & -13 \\ 10+55 & 5-5 & 11+65 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 49 & 0 & 57 \\ -11 & 1 & -13 \\ 65 & 0 & 76 \end{vmatrix}$$

Розклавши цей визначник за елементами першого стовпця, отримаємо

$$\Delta_4 = 1 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 49 & 57 \\ 65 & 76 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 49 & 57 \\ 65 & 76 \end{vmatrix} =$$

$$= 49 \cdot 76 - 65 \cdot 57 = 19.$$

§ 3. Обернена матриця.

Матриця B називається оберненою до квадратної матриці A, якщо

$$BA = AB = E.$$

Позначають обернену матрицю $B = A^{-1}$, тоді

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Отже, матриця, обернена до даної, - це така матриця, в добутку з якою отримаємо одиничну матрицю. Ясно, що обернені матриці можуть мати тільки квадратні матриці.

Нехай ми маємо квадратну матрицю n-го порядку

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (3.1)$$

Квадратна матриця A називається невиродженою, коли її визначник відмінний від нуля ($det\, A \neq 0$). У противному випадку матриця A називається виродженою ($det\, A = 0$).

Теорема 1.3. Для існування оберненої матриці A^{-1} необхідно і достатньо, щоб матриця A була невиродженою.

При цьому обернену матрицю можна обчислити за формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{det\, A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (3.2)$$

Сам вигляд формули A^{-1} вказує на спосіб її обчислення: знаходимо алгебраїчні доповнення кожного елемента матриці A і підставляємо їх у формулу (3.2).

Розглянемо окремі випадки формули (3.2).

Для квадратної матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ другого порядку обернена матриця має вигляд:

$$A^{-1} = \frac{1}{det\ A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}. \qquad (3.3)$$

Приклад 8. Знайти обернену до матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$.

Спочатку обчислимо визначник матриці A:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} = -10 - (-21) = 11 \neq 0.$$

Отже, існує обернена A^{-1}, так як задана матриця A – невироджена. Знаходимо відповідні алгебраїчні доповнення:

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot (-5) = -5;$ $\quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 7 = -7;$

$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot (-3) = 3;$ $\quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 2 = 2;$

Отже згідно формули (3.3.), $A^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$.

Можна переконатись, що $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Для квадратної матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ третього порядку обернена матриця має вигляд:

$$A^{-1} = \frac{1}{det\ A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}. \qquad (3.4)$$

Приклад 9. Знайти обернену до матриці $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Спочатку обчислимо визначник матриці A:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 12 - (-3) - (-4) = 19 \neq 0.$$

Отже, існує обернена A^{-1}, так як задана матриця A – невироджена. Знаходимо відповідні алгебраїчні доповнення:

$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5;$ $\quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4;$

$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2;\quad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2;$

$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6;\qquad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 3;$

$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1;\qquad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3;$

$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 8.$

Отже згідно формули (3.4.), $A^{-1} = \frac{1}{19}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -4 & 6 & -3 \\ -2 & 3 & 8 \end{pmatrix}$.

Можна переконатись, що $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.