Довільна просторова система сил. Умови рівноваги

1. Еквівалентні перетворення систем паралельних сил

Складання двох однонаправлених паралельних сил $\overrightarrow{F_1} \| \overrightarrow{F_2}$

$$\{\overrightarrow{Q_1}, \overrightarrow{Q_2}\} \sim 0; \{\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{Q_1}\} \sim \overrightarrow{R_1}; \{\overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{Q_2}\} \sim \overrightarrow{R_2};$$

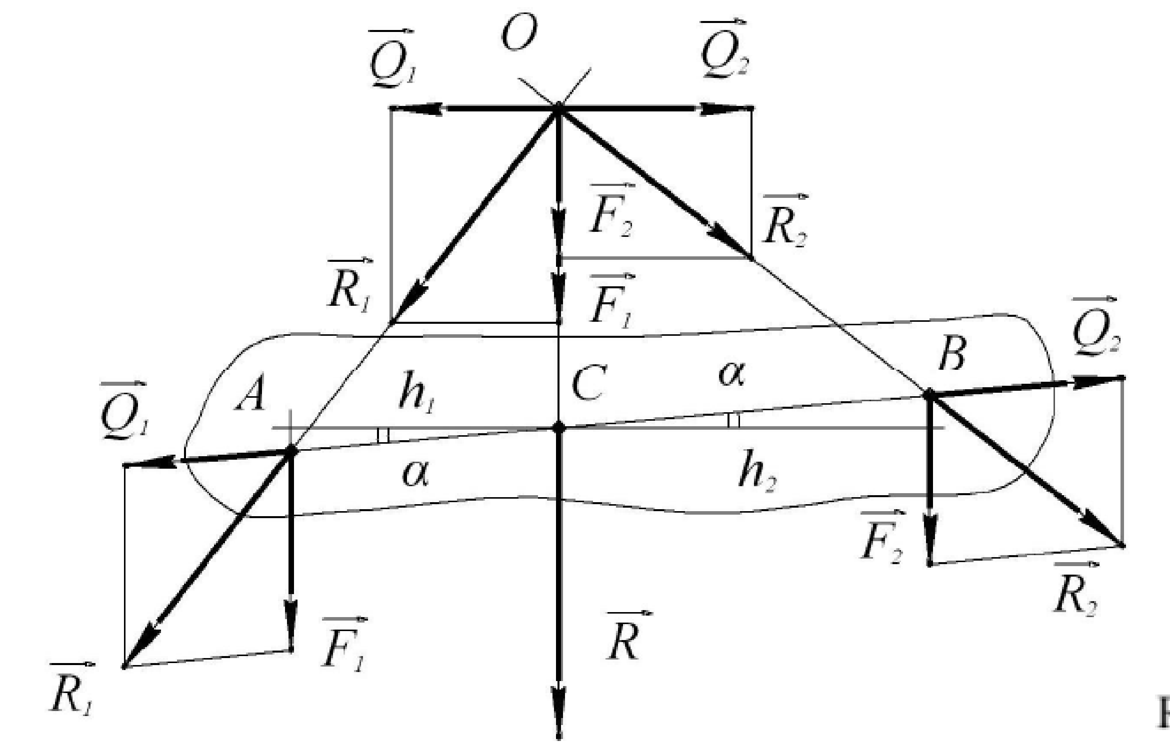


Рис. 1

$$\frac{AC}{BC} = \frac{F_2}{F_1}$$

Співвідношення називається правилом важеля.

Для протилежно направлених паралельних сил:

$$R = F_1 - F_2; \qquad \frac{AC}{AB} = \frac{F_2}{F_1};$$

У випадку розгляду системи (множини) паралельних сил значення їх рівнодійної дорівнює алгебраїчній сумі всіх сил системи.

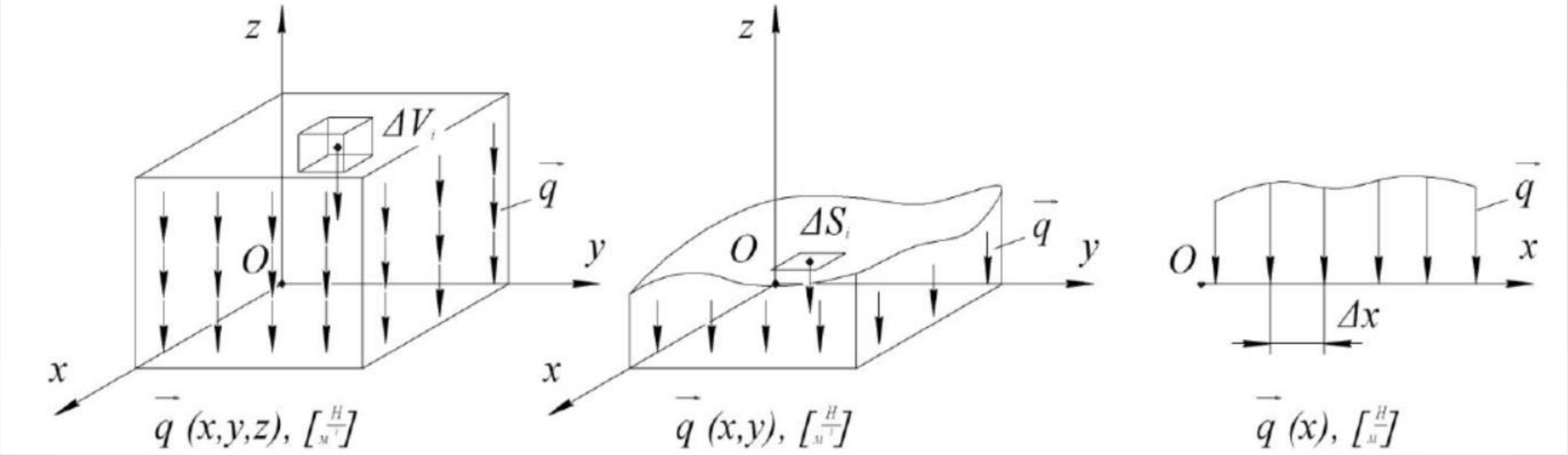


Рис. 2. Паралельні розподілені сили, що характеризуються інтенсивністю q

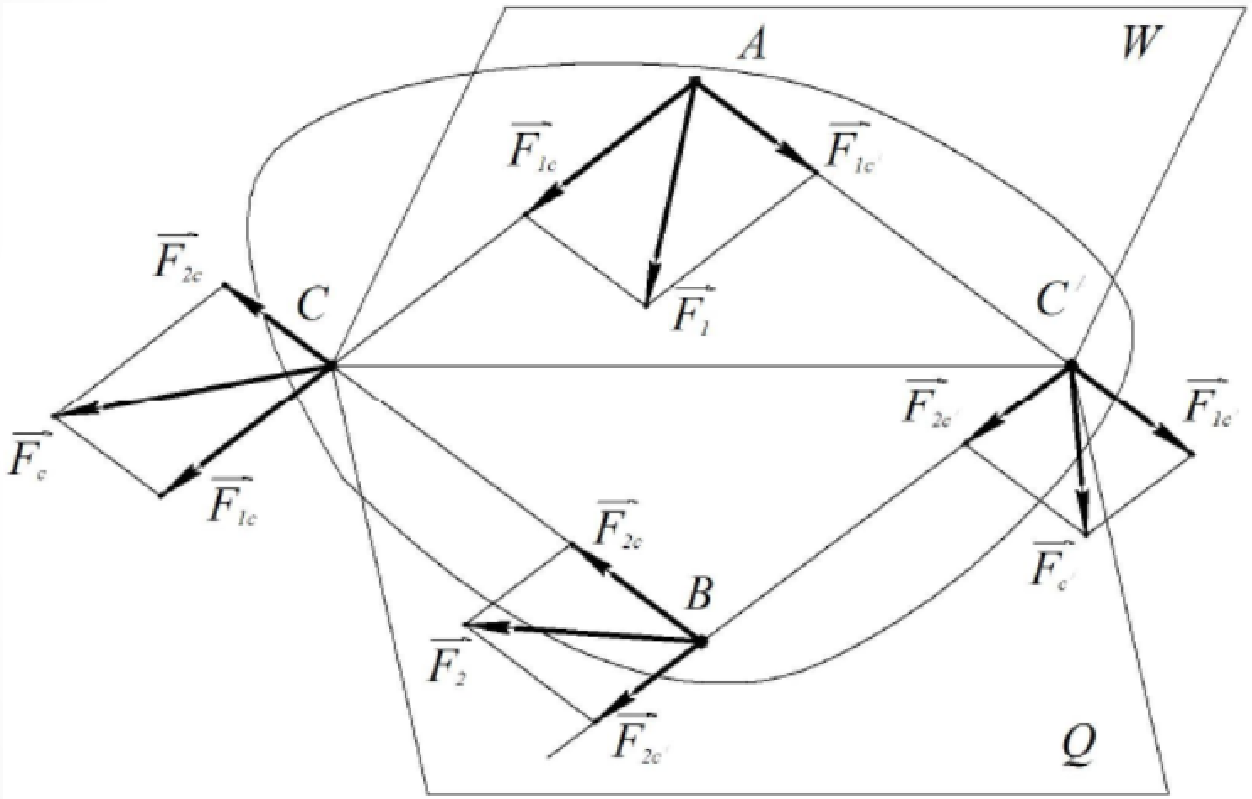
Якщо система паралельних сил складається з сил однакових за модулем, то еквівалентний перехід від розподілених до зосереджених сил (за умови q = const) має вигляд:

$$\vec{Q} = q \cdot V, \quad (q(x,y,z))$$
$$\vec{Q} = q \cdot S, \quad (q(x,y,))$$
$$\vec{Q} = q \cdot l, \quad (q(x))$$

2. Загальні теореми статики твердого тіла

Лемма про дві сили

Систему двох довільно розташованих у просторі сил, що діють на тверде тіло, можна, не змінюючи механічного стану твердого тіла, замінити <u>еквівалентною системою двох сил, одна з яких буде прикладена у довільному наперед заданому центрі</u>



$$\overrightarrow{F_1}\sim\left\{\overrightarrow{F_{1c}},\overrightarrow{F_{1c'}}\right\},\ \overrightarrow{F_2}\sim\left\{\overrightarrow{F_{2c}},\overrightarrow{F_{2c'}}\right\},\ \left\{\overrightarrow{F_{2c}},\overrightarrow{F_{2c'}}\right\}\sim\overrightarrow{F_c}$$

$$\left\{\overrightarrow{F_{1c}},\overrightarrow{F_{1c'}}\right\}\sim\overrightarrow{F_{c'}},\ \left\{\overrightarrow{F_c},\overrightarrow{F_{c'}}\right\}\sim\left\{\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2}\right\}$$

Рис. 3.

Теорема 1.

Довільну систему сил, що діє на тверде тіло, можна, не змінюючи її дії на тверде тіло, замінити еквівалентною системою двох сил, одна з яких прикладена у довільному наперед заданому центрі, причому головний вектор та головний момент системи сил відносно центра зведення не змінюються.

Теорема 2.

Для рівноваги довільної системи сил необхідно і достатньо, щоб головний вектор та головний момент системи сил відносно довільного центра дорівнювали нулю.

Теорема 3.

Для еквівалентності двох систем сил необхідно і достатньо, щоб їх головні вектори та головні моменти відносно довільного центра були геометрично рівні.

Пара сил. Момент пари сил

Пара сил, що прикладена до твердого тіла, - це система двох рівних за модулем паралельних між собою сил, які напрямлені у протилежні боки вздовж різних прямих.

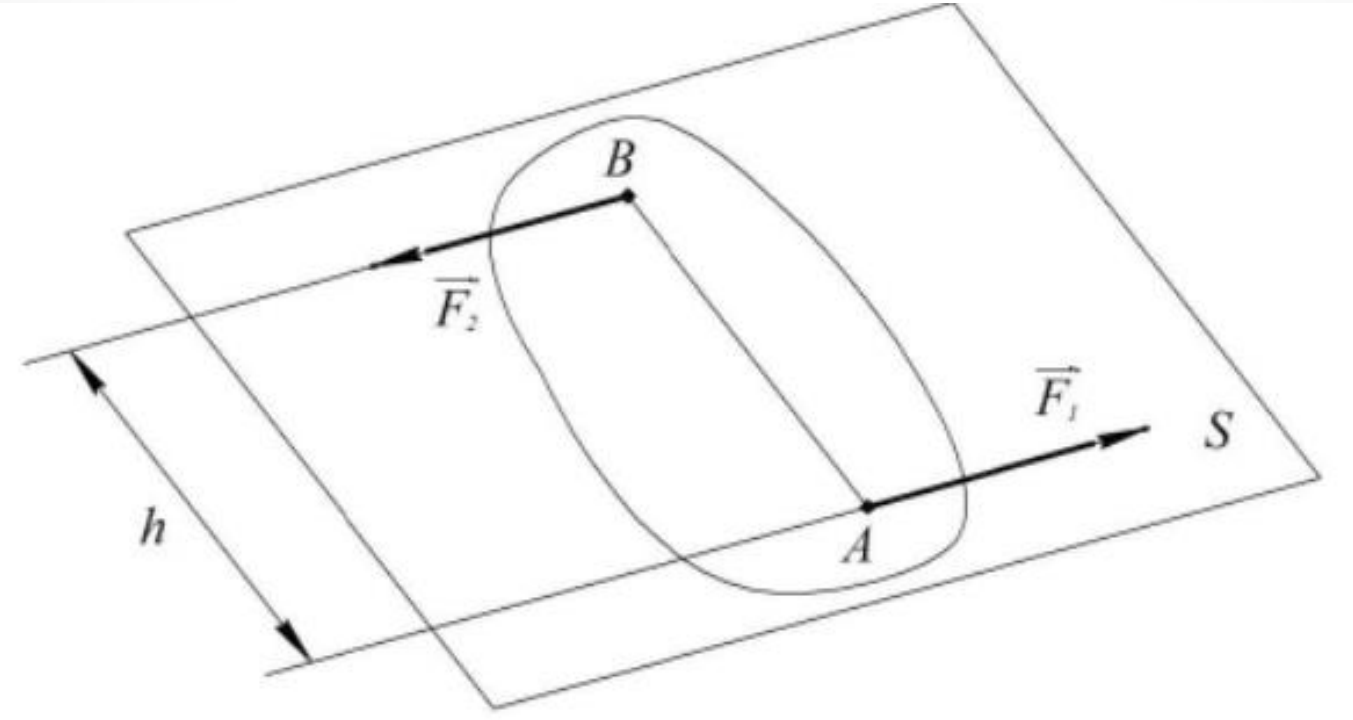


Рис. 4.

Система сил, що створює пару, не перебуває у стані рівноваги.
Пари сил не має рівнодійної, оскільки головний вектор сил пари дорівнює нулю.

Визначення суми моментів сил, що складають пару відносно довільної точки О

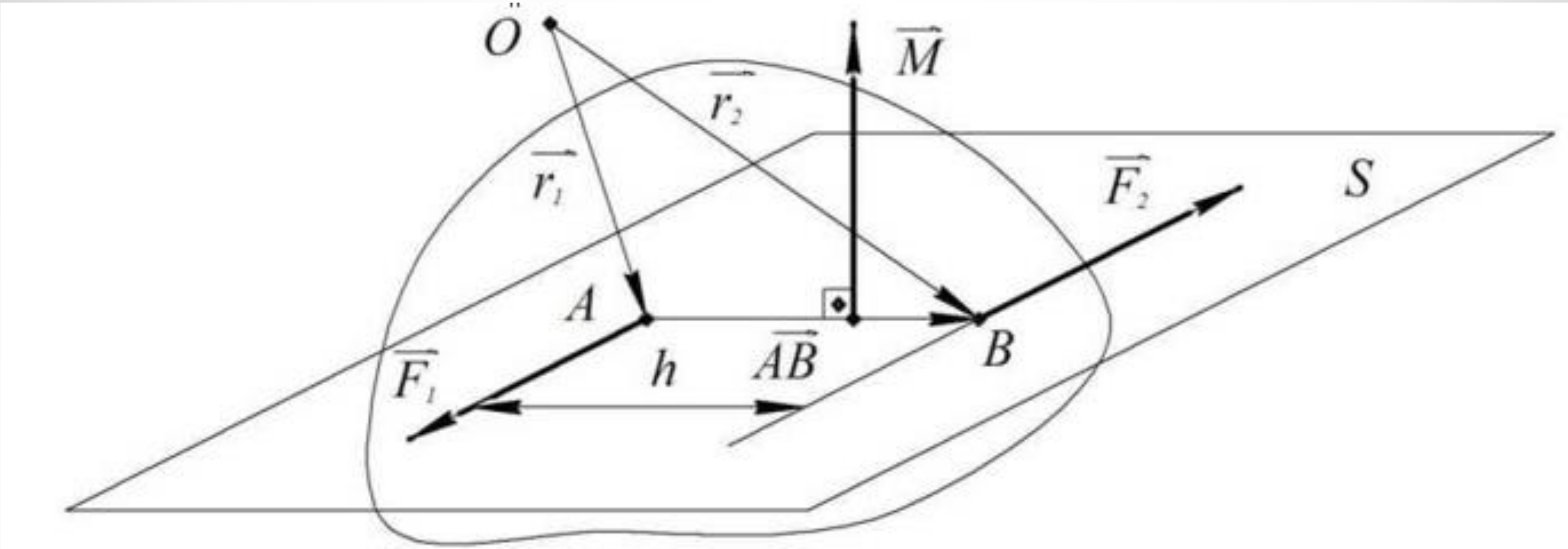


Рис. 8.

$$\overrightarrow{M_0}\left(\overrightarrow{F_1}\right) + \overrightarrow{M_0}\left(\overrightarrow{F_2}\right) = \overrightarrow{r_1} \times \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{r_2} \times \overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{r_2} \times \overrightarrow{F_2} - \overrightarrow{r_1} \times \overrightarrow{F_2} = (\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}) \times \overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{F_2}$$

Різниця векторів : $\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1} = \overrightarrow{AB}$

Векторний добуток називається моментом пари сил. $\overrightarrow{M} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{F_2}$

Момент пари сил – вектор перпендикулярний до площини дії пари сил, який дорівнює за модулем добутку модуля однієї сил з пари на довжину плеча пари і напрямлений на ту частину простору, звідки обертання тіла видно проти ходу стрілки годинника.

4. Умови рівноваги довільної просторової системи сил

а) Механічні умови рівноваги

Для рівноваги довільної просторової системи сил необхідно і достатньо, щоб головний вектор і головний момент цієї системи сил відносно довільного центра дорівнювали нулю:

$$\overrightarrow{R_0} = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{F_k} = 0 \qquad \overrightarrow{M_0} = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{M_k} = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{M_k}(\overrightarrow{F_k}) = 0$$

б) Аналітичні умови рівноваги :

На підставі теореми про проекцію геометричної суми векторів на будь- яку вісь:

$$R_0 = \sqrt{R_x^{\ 2} + R_y^{\ 2} + R_z^{\ 2}} = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} F_{kx}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} F_{ky}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} F_{kz}\right)^2}; \qquad R_0 = 0;$$

$$\mathrm{M}_0 = \sqrt{\mathrm{M_X}^2 + \mathrm{M}_y^{\ 2} + \mathrm{M}_z^{\ 2}} = \left(\sum_{k=1}^{n} M_x\left(\vec{F}_k\right)\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} M_y\left(\vec{F}_y\right)\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} M_z\left(\vec{F}_z\right)\right)^2 \qquad \mathrm{M}_0 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0;$$

(модулі та проекції головного вектору та головного моменту довільної просторової системи сили)

$$\sum_{k=1}^{n} M_x\left(\vec{F}_k\right) = 0; \sum_{k=1}^{n} M_y\left(\vec{F}_k\right) = 0; \sum_{k=1}^{n} M_z\left(\vec{F}_k\right) = 0;$$

Для рівноваги довільної просторової системи сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми проекцій усіх сил системи на осі декартової системи координат та алгебраїчні суми моментів цих сил відносно цих координатних осей дорівнювали нулю

4.1. Умови рівноваги довільної плоскої системи сил

Механічні умови рівноваги: Для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб головний вектор і головний момент цієї системи сил відносно довільного центра дорівнювали нулю:

$$\vec{R}_0 = \sum_{k=1}^{n} F_k = 0; \quad \vec{M}_0 = \sum_{k=1}^{n} M_0(\vec{F}_k) = 0;$$

Аналітичні умови рівноваги: необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми проекцій усіх сил системи на кожну з двох осей декартової системи координат та алгебраїчна сума моментів цих сил відносно будь якого центра, що лежить у площині дії сил системи дорівнювали нулю.

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} M_0(\vec{F}_k) = 0;$$

Додаткові форми рівнянь рівноваги плоскої системи сил:

Форма 1:

$$\sum_{k=1}^{n} M_A(\vec{F}_k) = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_B(\vec{F}_k) = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_{kx} = 0;$$

Форма 2:

$$\sum_{k=1}^{n} M_A(\vec{F}_k) = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_B(\vec{F}_k) = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_c(\vec{F}_k) = 0$$

Для плоскої системи паралельних сил:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} M_0(\vec{F}_k) = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_A(\vec{F}_k) = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} M_B(\vec{F}_k) = 0;$$

5. Теорема про зведення довільної просторової системи сил до динамічного гвинта

5.1. Поняття про статичні інваріанти систем сил

(інваріанти – мат. величини, які не змінюються при будь-яких перетвореннях)

1 статичний інваріант: головний вектор довільної системи сил не змінюється зі зміною центра звернення.

$$\vec{I}_1 = \vec{R}_0$$

2 статичний інваріант: скалярний добуток головного моменту системи сил на головний вектор системи зі зміною центра зведення не змінюється.

$$\vec{I}_2 = \vec{M}_0 \times \vec{R}_0$$

$$I_2 = M_0 \times R_0 \times cos(\widehat{M_0, R_0})$$

$$\cos(M_0, R_0) = \frac{M_x R_x + M_y R_y + M_z R_z}{M_0 \times R_0}$$

5.2. Поняття про динамічний гвинт

Динамічним гвинтом називається сукупність сили і пари сил, яка лежить у площині, перпендикулярній до сили

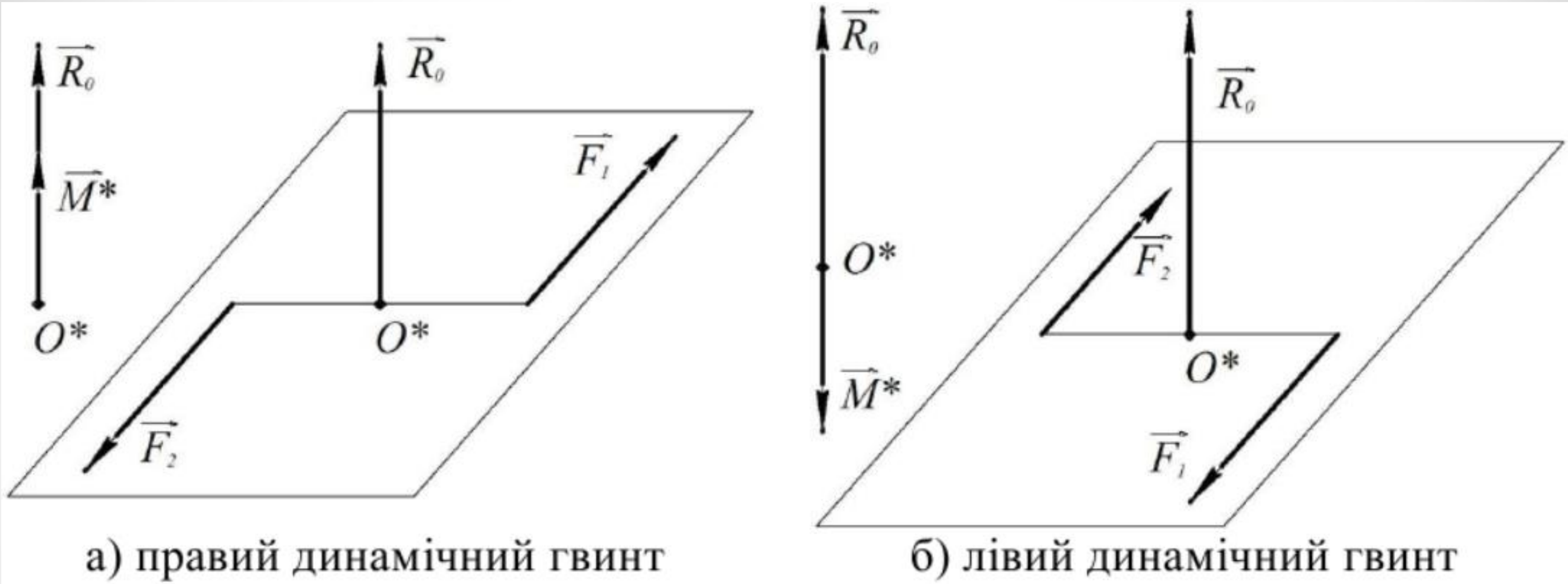


Рис. 9

Якщо другий статичний інваріант довільної просторової системи сил не дорівнює нулю, то цю систему сил можна звести до динамічного гвинта

6. Поняття про тертя твердих тіл

6.1. Тертя ковзання

Опір, що виникає при ковзанні контактуючих поверхонь твердих тіл, називається тертям ковзання.

1. При намаганні зрушити одне тіло по поверхні другого у площині контакту тіл виникає сила тертя. (величина сили тертя може мати значення від 0 де $F_{тр}$ - граничної сили тертя.

Сила тертя напрямлена у протилежному напрямку дії активних сил, які намагаються зрушити тіло.

2. Величина граничної сил тертя дорівнює добутку коефіцієнта тертя на нормальну реакцію:

$$F_{тр} = f \cdot N,$$

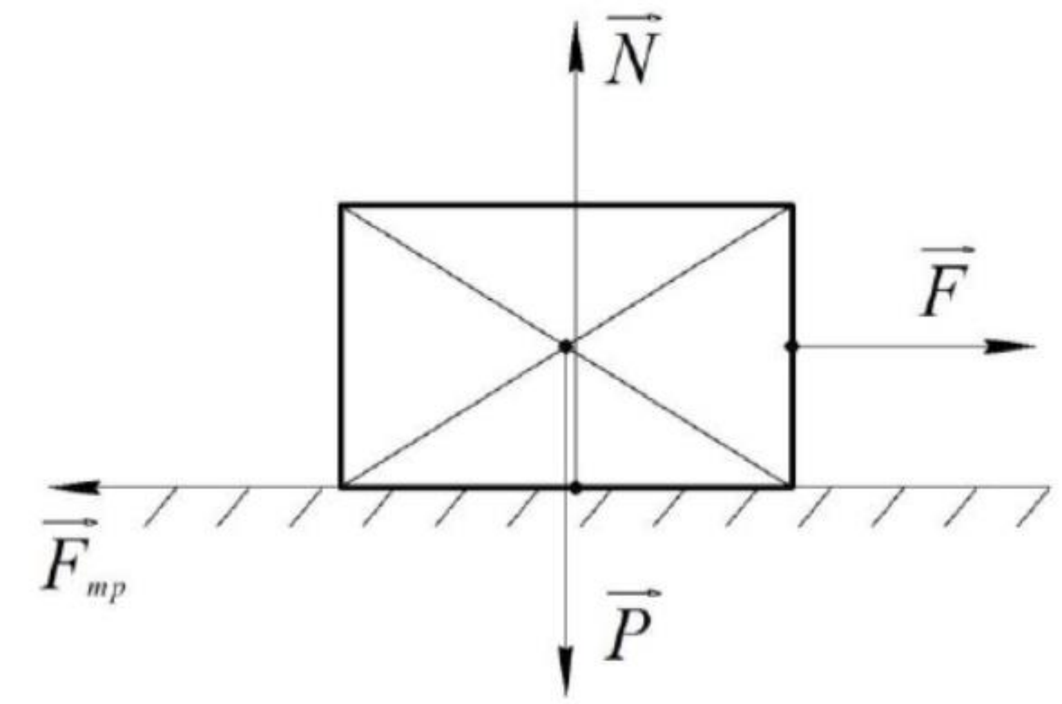


Рис. 10

3. Величина сили тертя $F_{тр}$ не залежить від розмірів контактуючих поверхонь.

<u>Сила тертя спокою.</u>

$F'_{тр} \leq F_{тр}$ - при перевищенні активною силою $F_{тр}$ починається рух тіла (тертя у русі)

$\vec{R} = \vec{N} + \vec{F}_{тр}$ - рівнодійна сил N і $F_{тр}$, т. нова реакція поверхні в’язі на тверде тіло.

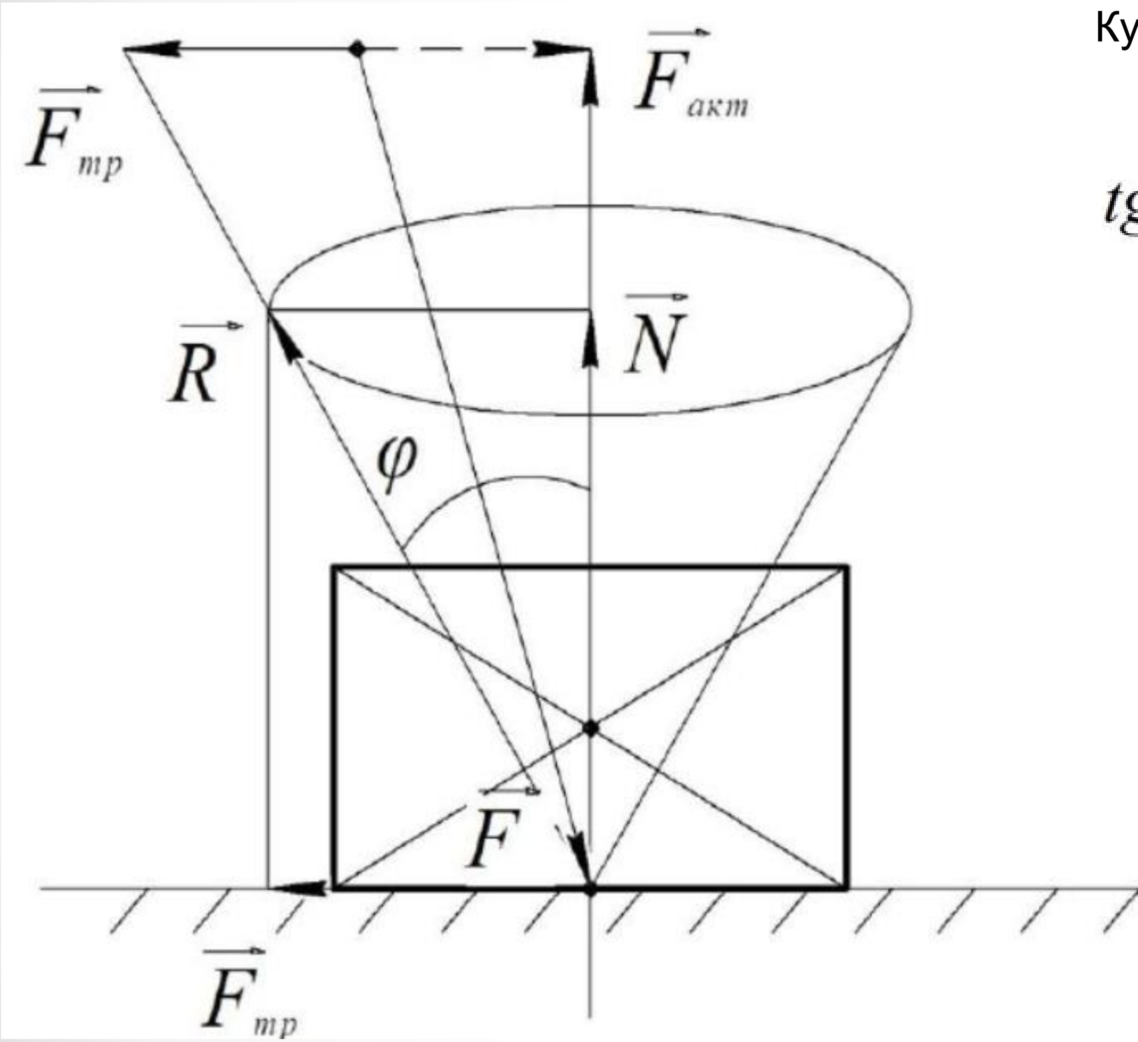


Рис. 11

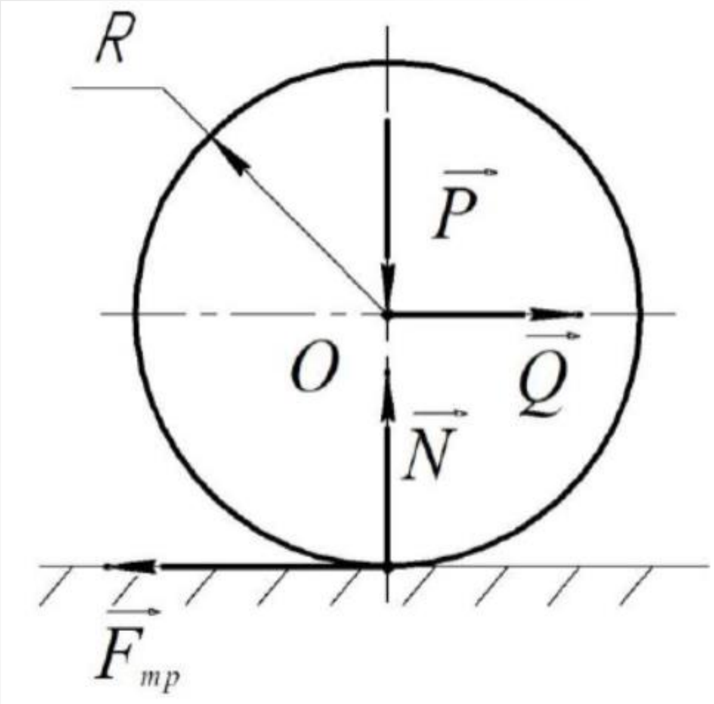
Кут φ - кут тертя.

$$tg\varphi = \frac{F_{Тр}}{N} = \frac{f \cdot N}{N} = f$$

Геометричним місцем усіх можливих напрямків граничної реакції поверхні R (з врахуванням сили тертя) є поверхня конуса - конуса тертя. Якою б великою за інтенсивністю не була активна сила F, лінія дії якої розташована в середині області тертя, вона не може привести в рух тіло, що спирається на поверхню в’язі.

6.1. Тертя кочення

а) стан спокою



б) стан руху

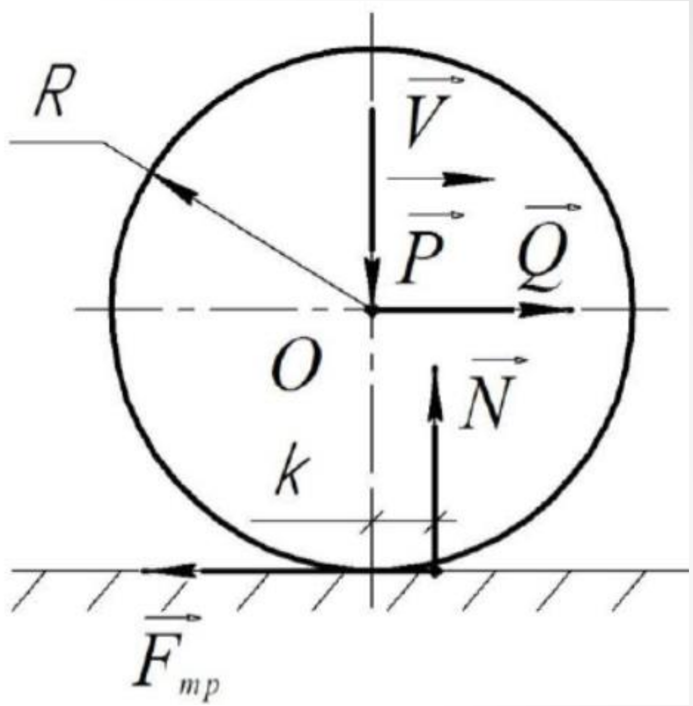


Рис. 12

К - коефіцієнт тертя кочення.

$$\sum M_0 = 0;\ N \cdot K - F_{Tp} \cdot R = 0;\ R = \frac{D}{2};$$

$$F_{Tp} = \frac{K}{R} \cdot N;\ F_{Tp} = \frac{2K}{D} \cdot N;$$