

Міністерство освіти і науки України
Державний університет «Житомирська політехніка»

В. П. Шумляківський
М. М. Можаровський
О. М. Пилипенко

Навчально – методичний комплекс з вивчення дисципліни
«Механіка матеріалів і конструкцій»

Підручник

Житомир
2023

УДК 539.4

М74

*Рекомендовано до друку Вченою радою університету
«Житомирська політехніка»
(протокол № 12 від 01 вересня 2023 р.)*

Рецензенти:

Сивак Р.І. – доцент кафедри механіки та інженерії агроєкосистем Поліського національного університету, д.т.н., доц.

Шелудченко Б.А. – професор кафедри механіки та інженерії агроєкосистем Поліського національного університету, к.т.н., проф..

Кирилович В.А. – професор кафедри робототехніки, електроенергетики та автоматизації ім. проф. Б.Б. Самотокіна, Державного університету «Житомирська політехніка», д.т.н., доц.

Шумляківський В.П.

М74 Навчально – методичний комплекс з вивчення дисципліни «Механіка матеріалів і конструкцій» : підручник : підручник / В.П. Шумляківський, М.М. Можаровський, О.М. Пилипенко. - Електронні дані. – Житомир : Державний університет «Житомирська політехніка». 2023. – 273 с.

ISBN 978-966-683-690-1

Підручник націлений на закріплення комплексу знань студентів із навчальної дисципліни «Механіка матеріалів і конструкцій» шляхом самостійної роботи і виконання відповідних розрахунків при виконанні індивідуальних розрахункових завдань, передбачених навчальним планом підготовки фахівців освітнього рівня «бакалавр» зі спеціальностей 274 «Автомобільний транспорт», 131 «Прикладна механіка», 133 «Галузеве машинобудування».

Підручник складений відповідно до програми навчальної дисципліни «Механіка матеріалів і конструкцій» і містить методики розрахунків на міцність, жорсткість і стійкість елементів конструкцій. Наведені приклади розрахунків елементів конструкцій, що працюють в умовах як простих видів деформацій, так і складних. Розроблені варіанти індивідуальних завдань розрахунків на міцність для різних видів деформацій з прикладами їх виконання.

Призначений для студентів денної і заочної (дистанційної) форми навчання за вказаними спеціальностями. Може бути корисним для студентів при виконанні курсових та дипломних робіт (проектів) за визначеним напрямом підготовки та ін.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	8
1. ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ	9
1.1. Основні допущення в механіці матеріалів і конструкцій.....	9
1.2. Типи зовнішніх навантажень	10
1.3. Елементи конструкцій	11
1.4. Метод перерізів. Внутрішні силові фактори	11
1.5. Загальні поняття про напруження	14
2. РОЗТЯГ І СТИСК ПРЯМОГО СИМЕТРИЧНОГО БРУСА	16
2.1. Розрахунок на розтяг і стиск статично визначних стержнів.....	16
2.1.1. Побудова епюр внутрішніх зусиль	16
2.1.2. Напруження в поперечних перерізах бруса.....	25
2.1.3. Побудова епюру нормальних напружень (епюру σ).....	25
2.1.4. Співвідношення для обчислення деформацій бруса і переміщень його перерізів.....	27
2.1.5. Врахування власної ваги бруса.....	29
2.1.6. Побудова епюру переміщень перерізів бруса (епюру δ).....	29
2.1.7. Розрахунки на міцність	31
2.1.8. Розрахунки на жорсткість	33
2.2. Практичні заняття	33
2.2.1. Контрольні запитання.....	33
2.2.2. Приклади розрахунків на розтяг і стиск	34
2.2.3. Задачі для самостійного розв'язання	42
2.3. Розрахунково-проектувальна робота «розрахунки на міцність і жорсткість бруса при розтягу (стиску)»	47
3. ДОСЛІДНЕ ВИВЧЕННЯ МЕХАНІЧНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ МАТЕРІАЛІВ.....	53
3.1. Діаграма розтягу маловуглецевої сталі.....	53
3.2. Основні механічні характеристики матеріалів.....	58
4. ЗРІЗ І ЗМИНАННЯ.....	66
4.1. Основні теоретичні відомості	66
4.1.1. Розрахунок болтових і заклепкових з'єднань.....	67

4.2.	Приклади розрахунків на зріз і зминання	68
4.3.	Розрахунок зварних з'єднань	71
4.3.1.	Приклади розрахунків зварних з'єднань	73
4.4.	Розрахунок з'єднань дерев'яних деталей.....	75
4.5.	Задачі для самостійного розв'язання	78
5.	ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ПЕРЕРІЗІВ.....	82
5.1.	Статичний момент площі	82
5.2.	Центральні вісі і центр ваги перерізу	83
5.3.	Осьові, полярний і відцентровий моменти інерції перерізу.....	90
5.4.	Зв'язок між величинами I_p , I_x і I_y	91
5.5.	Зміна осьових і відцентрових моментів інерції при паралельному перенесенні осей.....	95
5.6.	Зміна осьових і відцентрових моментів інерції перерізу при повороті координатних осей	97
5.7.	Інваріантність суми осьових моментів інерції перерізу відносно повороту осей	98
5.8.	Головні осі і головні моменти інерції перерізу	99
5.9.	Розрахунково-проектувальна робота «дослідження геометричних характеристик плоского складного перерізу».....	118
6.	КРУЧЕННЯ	120
6.1.	Короткі теоретичні відомості.....	120
6.1.1.	Загальні поняття	120
6.1.2.	Основні залежності при крученні круглих брусів	120
6.1.3.	Кручення брусів некруглого перерізу	123
6.1.4.	Кручення тонкостінних профілів.....	124
6.1.5.	Розрахунки на кручення прямих брусів	126
6.1.6.	Розрахунки циліндричних гвинтових пружин з малим кроком.....	127
6.2.	Практичні заняття	128
6.2.1.	Контрольні запитання Кручення стержнів різних	

перерізів, розрахунок циліндричних гвинтових пружин з малим кроком	128
6.2.2. Приклади розв'язання задач	129
6.2.3. Задачі для самостійного розв'язання	136
6.3. Розрахунково-проектувальна робота «розрахунок валів на кручення»	140
7. ЗГИН	151
7.1. Основні теоретичні відомості	151
7.1.1. Загальні поняття	151
7.1.2. Побудова епюр поперечних сил і згинальних моментів	152
7.1.3. Обчислення нормальних напружень	154
7.1.4. Розрахунки на міцність	156
7.1.5. Розрахунки на жорсткість	160
7.2. Практичні заняття розрахунки на міцність і жорсткість при прямому згині бруса	164
7.2.1. Контрольні запитання	164
7.2.2. Приклади розв'язання задач	165
7.2.3. Задачі для самостійного розв'язання	173
7.3. Розрахунково-проектувальна робота «Дослідження та розрахунок балки на міцність при згині»	176
8. ВИЗНАЧЕННЯ ПЕРЕМІЩЕНЬ У ПРУЖНИХ СИСТЕМАХ.....	187
8.1. Теоретичні відомості. загальні поняття	187
8.2. Інтеграл переміщень Мора-Максвелла	187
8.3. Визначення переміщень за допомогою інтегралу Мора	187
9. КРУЧЕННЯ ІЗ ЗГИНОМ	196
9.1. Запитання для самоконтролю:	206
9.2. Розрахунок вала на згин з крученням	207
10. СТІЙКІСТЬ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ	210
10.1. Поняття про стійкість і нестійкі форми рівноваги.....	210
10.2. Формула Ейлера	212
10.3. Рівняння зігнутої осі стрижня	213
10.4. Вплив умов закріплення стрижня на величину критичної	

сили	214
10.5. Критичні напруження. Гнучкість	215
10.6. Межі використання формули Ейлера	216
10.7. Формула Ясинського.....	217
10.8. Умова стійкості стиснутих стрижнів.....	219
10.9. Розрахунки стиснутих стрижнів на стійкість (Умова стійкості. Перевірочний та проектний розрахунки)	220
10.10. Про вибір матеріалу і раціональної форми поперечного перерізу стиснутих стрижнів.....	221
10.11. Практичні заняття розрахунок стиснутих стержнів на стійкість.....	224
10.11.1. Контрольні запитання	224
10.11.2. Приклади розв’язання задач.....	224
10.11.3. Задачі для самостійного розв’язання.....	238
11. РОЗРАХУНКИ НА МІЦНІСТЬ ПРИ ЗМІННИХ НАПРУЖЕННЯХ	242
11.1. Характер зміни напружень	242
11.2. Циклічні напруження	242
11.3. Розрахунки на міцність при повторно-змінних напруженнях. Визначення коефіцієнта запасу міцності	244
ДОДАТКИ.....	246
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ.....	272

ВСТУП

Даний навчально-методичний комплекс розроблений в відповідності з Державним освітнім стандартом України і робочими програмами по дисципліні «Механіка матеріалів і конструкцій».

В даному навчально-методичному комплексі представлений короткий теоретичний матеріал по дисципліні, приклади розв'язку типових завдань і задач, завдання для виконання контрольної роботи, довідковий матеріал, список рекомендованої літератури. В кожній темі теоретичного матеріалу приведені запитання для самоконтролю.

Навчально-методичний комплекс визначений для студентів технологічних спеціальностей денної і заочної (дистанційної) форми навчання.

Підручник також може бути використаний в якості довідкового і методичного матеріалу при виконанні курсових і дипломних робіт і проектів студентами спеціальностей 274 «Автомобільний транспорт», 131 «Прикладна механіка», 113 «Галузеве машинобудування» факультету комп'ютерно-інтегрованих технологій, мехатроніки і робототехніки.

1. ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

Предметом курсу «Механіка матеріалів і конструкцій» є вивчення поведінки різних матеріалів при дії зовнішніх навантажень на них, він вказує, яким чином підібрати для кожного елемента конструкції і деталі машин належний матеріал і відповідні поперечні розміри при умові повної надійності роботи і найменшої вартості конструкції.

Основною задачею дисципліни «Механіка матеріалів і конструкцій» є розрахунок елементів конструкції і деталей машин на міцність, жорсткість і стійкість.

Під **міцністю** елементів конструкцій і деталей машин розуміють здатність чинити опір руйнуванню під дією прикладених до них зовнішніх навантажень.

Жорсткістю об'єктів, що досліджуються, називається здатність елемента конструкції чинити опір деформації.

Стійкістю називається здатність елемента конструкції під дією зовнішнього навантаження зберігати свої першопочаткові розміри і форму рівноваги.

На відміну від теоретичної механіки, механіка матеріалів і конструкцій розглядає задачі, в яких найбільш суттєвими є властивості деформованих тіл, а закони руху тіла як жорсткого цілого не тільки відступають на другий план, але в цілому ряді випадків є незначними. В той же час в наслідок загальності основних положень дисциплін механіка матеріалів і конструкцій матеріалів може розглядатись як розділ механіки деформуємих твердих тіл.

В механіці матеріалів і конструкцій широко застосовуються методи розрахунків з теоретичної механіки (зокрема з розділу статyki), а також використовуються знання з розділів фізики, математики, матеріалознавства та інших дисциплін.

1.1. Основні допущення в механіці матеріалів і конструкцій

При розрахунках елементів конструкцій враховуються наступні припущення:

1. Схематизація властивостей матеріалу. Матеріал конструкції вважають суцільним, коли заповнює весь об'єм тіла без пустот, тобто властивості матеріалів по всіх напрямках однакові (матеріал є ізотропним).

2. Матеріал конструкції працює в межах ідеальної пружності.
Пружність – властивість тіла відновлювати свої першопочаткові

розміри і форму після зняття навантажень. Деформації, що зникають після зняття навантажень називають *пружними*, на відміну від *пластичних залишкових* деформацій, які не зникають після зняття навантажень.

Принцип відносної жорсткості: *деформації елементів під навантаженнями малі в порівнянні з розмірами самого тіла*. Це дозволяє розглядати конструкцію як недеформовану, що має ті ж розміри, що і до навантаження. Принцип незалежності дії сил: *результат дії на елемент системи сил дорівнює сумі результатів цих же сил, що прикладаються в окремоті*.

1.2. Типи зовнішніх навантажень

А. По характеру прикладання:

1. Зосереджене навантаження (сила) F – це навантаження, прикладене до тіла через малу площадку контакту (рис. 1.1). Вимірюється в одиницях сили (Н).

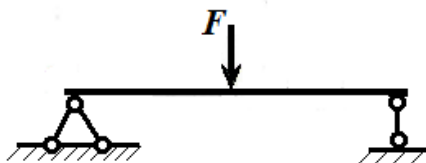


Рис. 1.1

2. Розподілене навантаження q - навантаження, рівномірно або нерівномірно розподілене по довжині бруса (всій або частині) (рис. 1.2). Інтенсивність такого навантаження вимірюють в н/м.

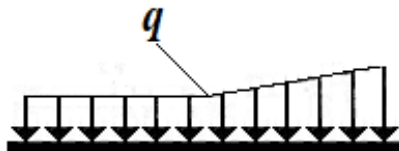


Рис. 1.2

3. Об'ємні навантаження - об'ємні сили, розподілені рівномірно або нерівномірно по всьому об'єму елемента конструкції (З-сили інерції, сили тяжіння, магнітні дії). Одиниці вимірювання об'ємного навантаження - н/м³.

Б. По характеру зміни в часі:

1. Статичні навантаження – це навантаження, які наростають повільно від нуля до свого кінцевого значення, а потім залишаються постійними (відцентрові сили, що наростають при розгоні ротора до визначеного числа обертів).

2. Повторні навантаження – навантаження, що багатократно змінюються за визначеним законом.

3. Навантаження короткочасні - навантаження, що прикладаються до конструкції короткочасно, в повну величину (так звані ударні або динамічні навантаження).

1.3. Елементи конструкцій

1. Брус - елемент конструкції, у якого один із розмірів більший за два інших в багато разів (рис. 1.3, а). Різновидом бруса є **стержень**, у якого площа його поперечного перерізу має форму кола (рис. 1.3, б).



Рис. 1.3

2. Оболонка - тіло, обмежене двома криволінійними поверхнями, відстань між якими мала (рис. 1.4, а). Різновидом оболонки є **пластина** - тіло, обмежене двома площинами (рис. 1.4, б).

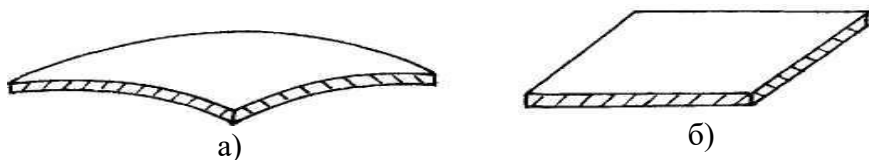


Рис. 1.4

3. Масив - елемент конструкції, у якого всі три розміри одного порядку. Це, як правило, фундаменти.

1.4. Метод перерізів. Внутрішні силові фактори

В залежності від того, які сили прикладені до бруса, він буде деформуватись по-різному. Щоб визначити напружений стан, необхідно знайти невідомі внутрішні зусилля, що будуть виникати в матеріалі тіла при дії на нього зовнішніх сил. Для цього використовують *метод перерізів*. Цей метод є універсальним в

механіці матеріалів і конструкцій і дозволяє виявляти внутрішні зусилля в матеріалі при різних деформаціях. Метод полягає в тому, що тіло уявно розсікають площиною на дві частини (рис. 1.5, а) і розглядають рівновагу будь-якої відсіченої частини.

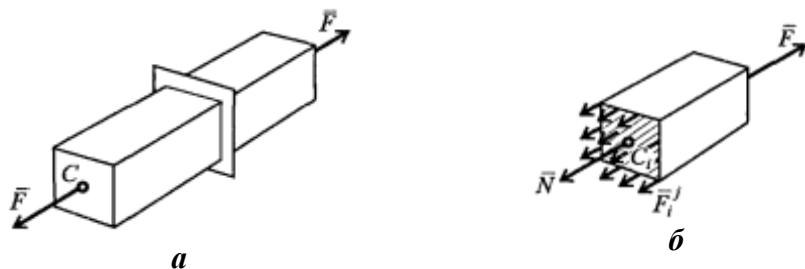


Рис. 1.5

Рахують, що внутрішні сили розподілені рівномірно по площині перерізу, їх рівнодіюча $\bar{N}$ (рис. 1.5, б) прикладена в центрі ваги перерізу. Складемо рівняння рівноваги сил, що діють на відсічену частину бруса:

$$\sum_i \bar{F}_i^E + \sum_i \bar{F}_i^J = 0, \text{ або } F - N = 0,$$

де $\bar{F}_i^E$ – зовнішні сили, що діють на тіло; $\bar{F}_i^J$ – внутрішні сили, які виникають в поперечних перерізах тіла, в результаті дії на нього зовнішніх сил.

Звідси

$$N = F. \quad (1.1)$$

В розглянутому прикладі внутрішні сили направлені по нормалі до поперечного перерізу.

В загальному випадку навантаження тіла зовнішніми силами (рис. 1.6) всі внутрішні сили можна привести до *головного вектору* $\bar{R}$ і *головного моменту* $\bar{M}$.

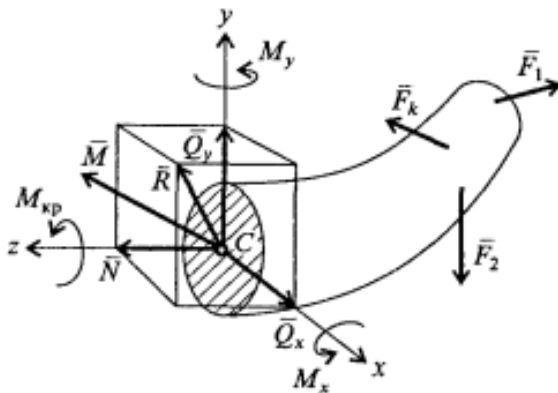


Рис. 1.6

Виберемо систему координат так, щоб вісь z була направлена по нормалі до перерізу, а осі x і y розташуємо в його площині. Спроектувавши головний вектор і головний момент на координатні осі вибраної системи координат, отримуємо шість рівнянь для визначення *внутрішніх силових факторів*. Складову внутрішніх сил по нормалі до перерізу $\bar{N}$ називають *поздовжньою силою*; сили $\bar{Q}_x$ і $\bar{Q}_y$ є складовими *поперечної сили* Q . Момент сил відносно осі z називають *крутним моментом* ($M_{кр}$), а моменти M_x і M_y – *згинальними моментами* відносно осей x і y . При заданих зовнішніх силах всі шість невідомих внутрішніх силових факторів можуть бути визначеними із шести рівнянь рівноваги, складених для відсіченої частини бруса. Якщо в поперечному перерізі виникає тільки внутрішня *нормальна сила* $\bar{N}$, а інші внутрішні силові фактори перетворюються в нуль, то будуть мати місце деформації *розтягу або стиску*, в залежності від напрямку сили $\bar{N}$. Якщо в поперечному перерізі буде виникати тільки *крутний момент* $M_{кр}$, то брус в даному перерізі працює тільки на кручення. У випадку, коли зовнішні сили прикладені до бруса таким чином, що в поперечних перерізах буде виникати тільки *згинальний момент* M_x або (M_y), то буде мати місце чистий згин в площині yOz (або xOz). Якщо в поперечному перерізі наряду зі *згинальним моментом*, наприклад M_x , виникає ще і *поперечна сила* $\bar{Q}_y$, то такий випадок називають *поперечним згином*

(в площині yOz). Можливі і інші випадки, коли в поперечному перерізі будуть діяти різні внутрішні силові фактори; при цьому брус буде зазнавати складного напруженого стану.

В результаті використання методу перерізів сили, що є внутрішніми для тіла, переводяться в розряд зовнішніх для кожної з частин тіла, що утворились в наслідок уявно проведеного перерізу.

В результаті складання та розв'язку рівнянь статичної рівноваги для внутрішніх зусиль, що діють на залишену, після уявного проведення перерізу, частину тіла, що знаходиться також в положенні статичної рівноваги, визначаємо величини цих внутрішніх зусиль ($N, Q_x, Q_y, M_z, M_x, M_y$) (рис. 1.6), що замінюють дію відкинутої частини тіла: N - поздовжня сила; Q_x, Q_y - поперечні (що перерізають) сили; M_z - крутний момент; M_x, M_y - згинальні моменти.

Ведучи мову про визначення внутрішніх сил за допомогою методу перерізів, мають на увазі лише визначення статичного еквіваленту (головного вектора сил і головного моменту або в окремих випадках рівнодіючої) системи внутрішніх сил, що виникають в заданому перерізі.

Для визначення величини внутрішніх зусиль стержня, що знаходиться в положенні статичної рівноваги, в точці необхідного перерізу потрібно (рис. 1.6):

1) уявно стержень розсікти площиною;

2) відкинути одну частину;

3) прикласти до перерізу частини, що залишилась зусилля, які здатні зрівноважити зовнішні сили внутрішніми зусиллями, що діють на цю частину;

4) знайти значення внутрішніх зусиль з рівнянь рівноваги, складених для частини, що залишилась.

1.5. Загальні поняття про напруження

Напруження - це інтенсивність розподілених внутрішніх сил, що припадають на одиницю площі поперечного перерізу. Величина повного напруження P в заданій точці перерізу визначається як границя відношення елементарної внутрішньої сили ΔF до площі ΔA , виділеної в поперечному перерізі (рис. 1.7), при наближенні останньої до нуля (стягуванні цієї площі в точку)

$$P = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta F}{\Delta A} \right). \quad (1.2)$$

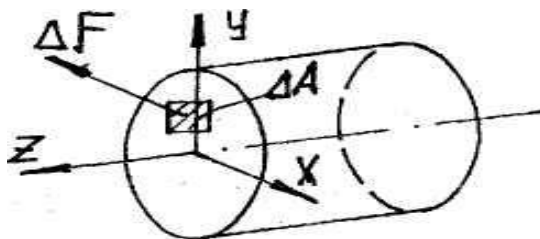


Рис. 1.7

Повне напруження p можна розкласти на дві складові: по нормалі до перерізу - *нормальне напруження* σ і складову, що лежить в площині перерізу, - *дотичне напруження* τ (рис. 1.8).

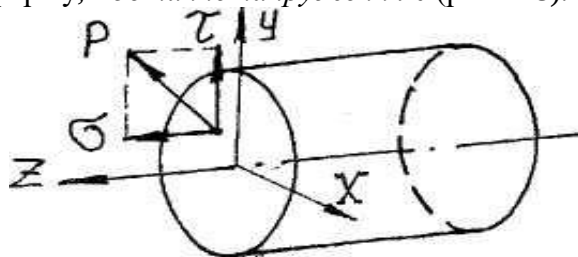


Рис. 1.8

Граничне напруження $\sigma_{\text{гран}}$ визначають дослідним шляхом при механічних випробуваннях матеріалів в умовах лінійного напруженого стану.

Допустиме напруження $[\sigma]$ призначається як деяка доля від відповідного граничного напруження для цього матеріалу.

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{гран}}}{[n]}, \quad (1.3)$$

де $[n]$ - потрібний коефіцієнт запасу міцності.

2. РОЗТЯГ І СТИСК ПРЯМОГО СИМЕТРИЧНОГО БРУСА

2.1. Розрахунок на розтяг і стиск статично визначних стержнів

Розтяг або стиск бруса здійснюється зрівноваженими зовнішніми силами, що діють вздовж його осі. Під дією цих сил у поперечних перерізах бруса (стержня) виникає лише одне внутрішнє зусилля – поздовжня нормальна сила – N . Її величина дорівнює алгебраїчній сумі всіх зовнішніх осьових сил, що діють на стержень по одну сторону перерізу. Сили, направлені від перерізу, записують зі знаком «плюс», до перерізу – зі знаком «мінус». Додатна сила N відповідає деформаціям *розтягу*, від'ємна – *стиску*.

2.1.1. Побудова епюр внутрішніх зусиль

Під *внутрішніми зусиллями* (внутрішніми силовими факторами) розуміють не ті зусилля, з якими частинки твердого тіла взаємодіють один з одним, а їх змінення в результаті прикладання зовнішніх зусиль.

Епюри- графіки, що показують змінення внутрішніх силових факторів, що діють у поперечному перерізі бруса, вздовж його поздовжньої осі.

Основні правила побудови епюр

1. Вісь епюри проводять паралельно поздовжній осі бруса. Якщо вісь бруса криволінійна, то криволінійна і вісь епюри.
2. Значення внутрішнього силового фактору, який діє в даному поперечному перерізі бруса, відкладають у масштабі по нормалі до осі епюри, в точці осі епюри, що відповідає цьому поперечному перерізу.
3. Епюра повинна мати назву внутрішнього силового фактору, одиницю вимірювання, знаки, цифрові значення в характерних точках.

Перед побудовою епюр брус необхідно розбити на ділянки, на яких значення внутрішніх силових факторів можна подати у вигляді нерозривних функцій.

Межами ділянок є перерізи,

- 1) в яких прикладено зосереджені зовнішні зусилля (в тому числі й опорні реакції);
- 2) що є межами дії розподіленого навантаження;
- 3) в яких змінюються площа або форма поперечного перерізу бруса;
- 4) в яких змінюється матеріал бруса.

Номери ділянок позначають римськими цифрами. Порядок нумерації ділянок приймають з урахуванням зручності їхнього послідовного розгляду.

Крім того, на кожній ділянці необхідно показати напрямок її обходу. Для цього на відстані x від початку ділянки показують контрольний переріз. У такому перерізі встановлюють значення внутрішнього силового фактора з розгляду зовнішніх зусиль в частині бруса, що знаходиться перед контрольним перерізом.

ПОРЯДОК ПОБУДОВИ ЕПЮРУ

Розглянемо порядок побудови епюри N_x (рис. 2.1), причому інформацію, що стосується даного прикладу, наведемо курсивом.

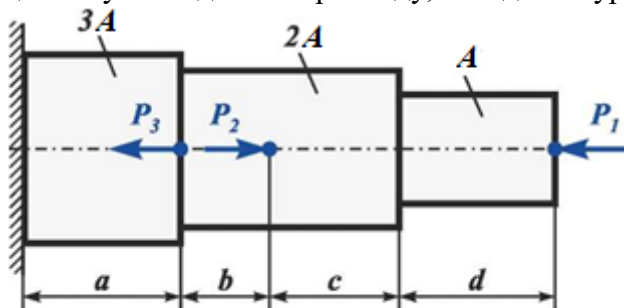


Рис. 2.1

1. Розіб'ємо брус на ділянки:

- за наявності опори покажемо на схемі опорну реакцію;
- на осі стержня встановимо характерні точки, які є межами ділянок.

У наведеному прикладі (рис. 2.2) точки A , C , D , E є місцями прикладання зосереджених зусиль (включаючи опорну реакцію), а точка B відповідає перерізу, в якому стрибкоподібно змінюється площа поперечного перерізу стержня.

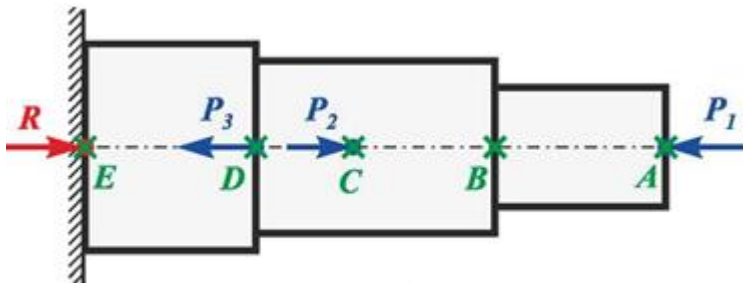


Рис. 2.2

в) пронумеруємо ділянки (переважно послідовно від вільного краю бруса до опори) (рис. 2.3).

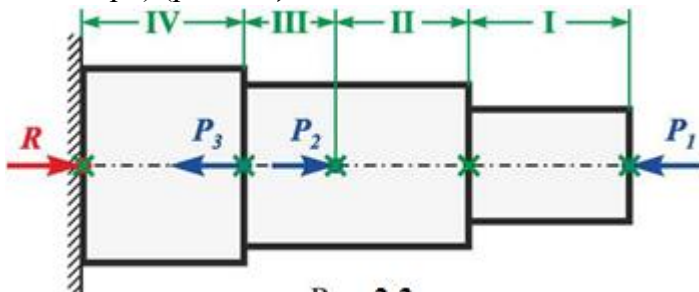


Рис. 2.3

г) покажемо напрямок обходу ділянок, встановлюючи контрольні перерізи на відстані x від початку кожної ділянки (рис. 2.4).

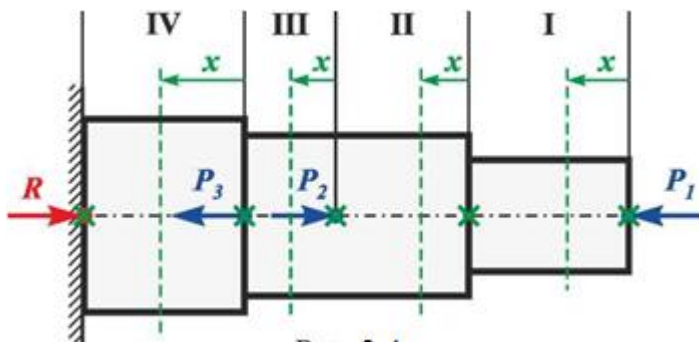


Рис. 2.4

Пунктирною лінією показано контрольні перерізи бруса площиною, перпендикулярною до його осі, що необхідно для застосування методу перерізів.

2. Встановимо значення функції на кожній ділянці, використавши метод перерізів. Для цього уявно проведемо січну, що збігається з контрольним перерізом, і за умови рівноваги розглядуваної частини бруса, використавши наведене вище визначення знаку поздовжньої сили N_x , підрахуємо її величину.

Розглянемо першу ділянку, де x змінюється від 0 до d .

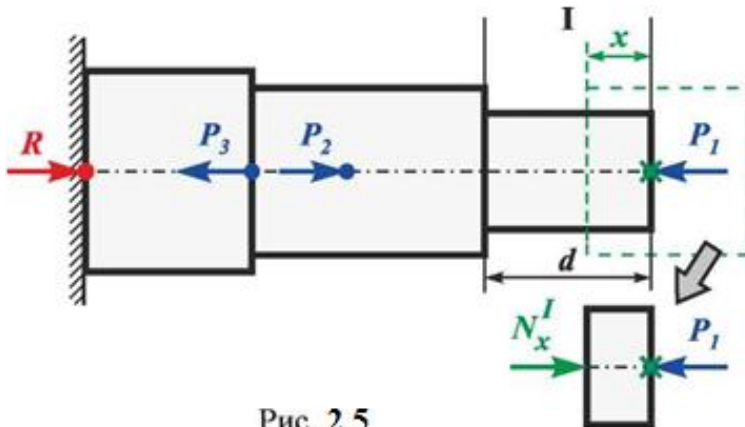


Рис. 2.5

На рис. 2.5 пунктирним прямокутником виділено частину бруса, що розглядається. Очевидно, що на цій ділянці $N_x^I = -P_1$.

Перейдемо до вивчення другої ділянки, де x змінюється від 0 до c .

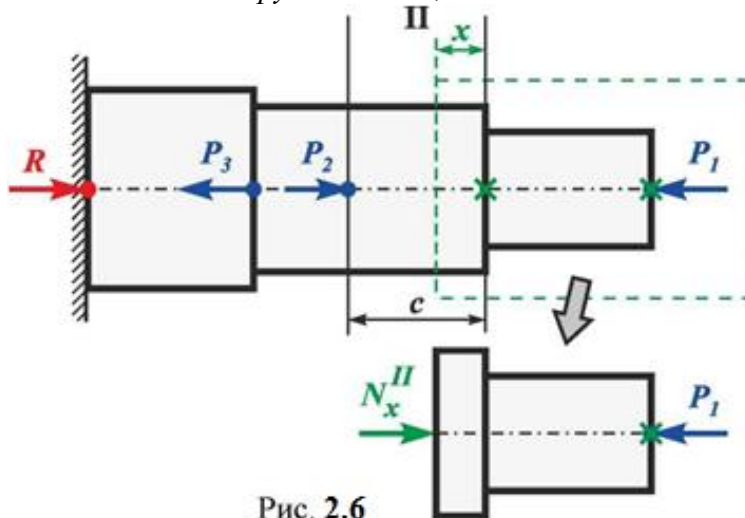


Рис. 2.6

З рис. 2.6 видно, що значення поздовжньої сили на другій ділянці збігається з її величиною на першій ділянці, оскільки нових сил у частині бруса, що розглядається, не виявлено (сила P_1 діяла і на першій ділянці). Очевидно, що на цій ділянці $N_x^{II} = -P_1$.

Дослідимо третю ділянку, на якій x змінюється від 0 до b .

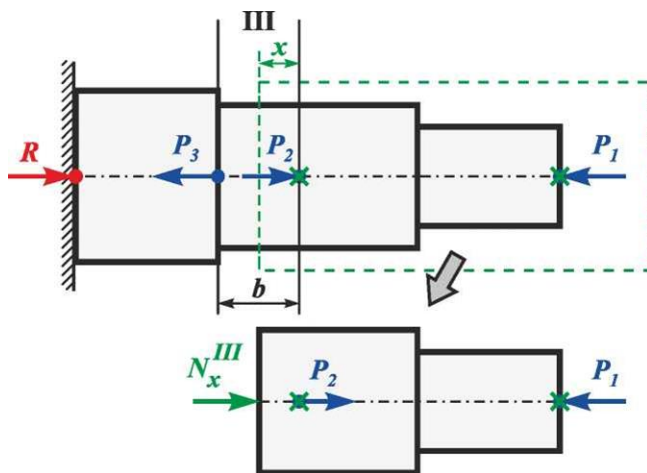


Рис. 2.7

На цій ділянці січна площина перетинає зображення сили P_2 . Однак точку прикладання цієї сили виявлено в частині бруса, що розглядається, (тому на рис. 2.7 зображення сили P_2 на розглядуваній частині бруса перенесено вправо від точки її прикладання) і враховано у величині поздовжньої сили $N_x^{\text{II}} = -P_1 + P_2$.

Остання ділянка - четверта, де x змінюється від 0 до a (рис. 2.8).

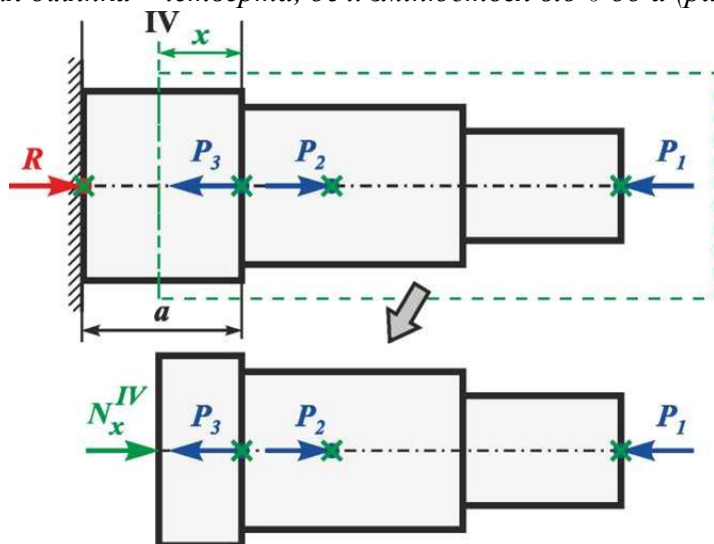


Рис. 2.8

На цій ділянці значення поздовжньої сили $N_x^{III} = -P_1 + P_2 + P_3$.

Зауважимо, що N_x у цьому прикладі - константи, але в загальному випадку це функції $N_x(x)$.

3. Побудуємо епюру, використавши отримані функції $N_x(x)$. Спочатку встановимо масштаб епюри на основі максимального розходження значень $N_x(x)$ за абсолютною величиною і за наявності вільного місця для побудови зображення. З урахуванням масштабу проведемо вісь епюри паралельно осі бруса і перпендикулярно до осі ординат. Позначимо побудовані осі.

Нехай в розглянутому прикладі $P_1 = 12$ кН; $P_2 = 26$ кН; $P_3 = 20$ кН.

Тоді $N_x^I = -P_1 = -12$ кН; $N_x^{II} = -P_1 = -12$ кН ;

$N_x^{III} = -P_1 + P_2 = 14$ кН; $N_x^{IV} = -P_1 + P_2 - P_3 = -6$ кН.

Діапазон зміни дорівнюватиме від -12 до 14 кН, тобто всього $-12 + 14 = 26$ кН. За наявності на кресленні (рис. 9) вільного поля розміром по вертикалі приблизно 60 мм зручно прийняти масштаб 1 мм — 0,5 кН.

Вільне поле поділимо віссю x приблизно у співвідношенні 14:12, наприклад, провівши цю вісь на відстані 25 мм від нижньої межі вільного поля.

Позначимо проведену вісь. Проведемо вісь ординат від нижньої до верхньої межі вільного поля. Позначимо вісь епюри x . Найменування епюри і розмірність величини поздовжньої сили розмістимо так, як показано на рис. 2.9.

Проведемо лінії проекційного зв'язку від точок на осі бруса відповідних меж ділянок до осі епюри x . Перетином цих ліній з віссю епюри x одержимо точки на межах ділянок. На початку і наприкінці кожної ділянки відкладемо ординати - значення поздовжньої сили $N_x(x)$ в прийнятому масштабі - додатні вгору, а від'ємні вниз. Покажемо числове значення ординати з відповідним знаком (рис. 2.10).

Варто зазначити, що якщо на сусідніх ділянках величина внутрішнього силового фактора є сталою і однаковою, то числове значення можна не вказувати.

Отримані ординати на початку і кінці ділянки з'єднуємо лініями.

У наведеному прикладі ці лінії - прямі, оскільки на всіх ділянках залежність $N_x(x) = \text{const}$.

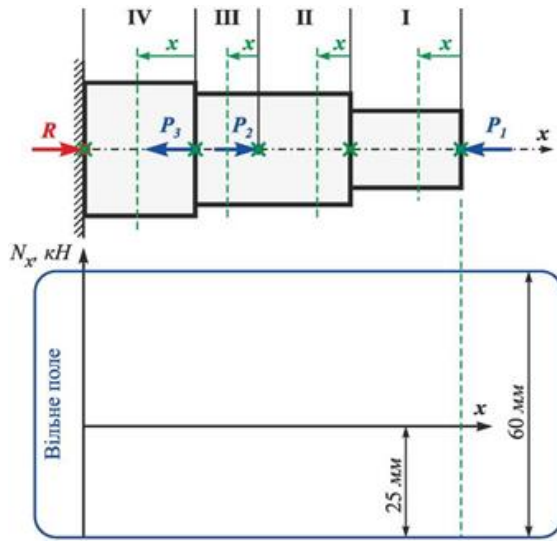


Рис. 2.9

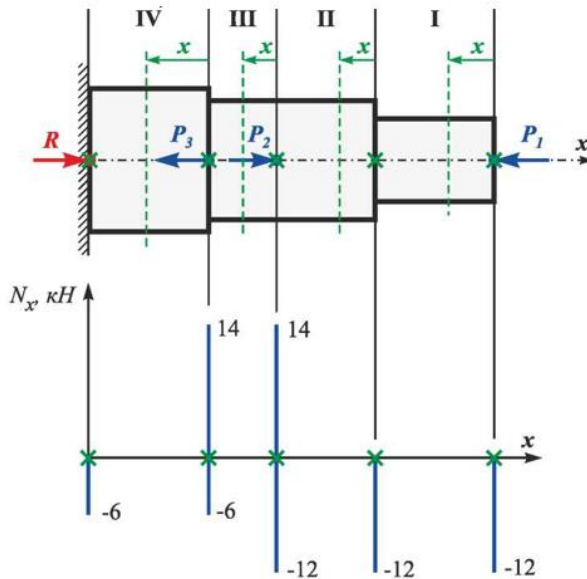


Рис. 2.10

Нанесемо штриховку (у вигляді ліній, перпендикулярних осі епюри) між отриманими лініями і віссю епюри. У заштриховані області вище і нижче осі епюри помістимо обведений кругом знак внутрішнього силового фактору (рис. 2.11).

Після побудови епюр слід виконати перевірку, суть якої полягає в зіставленні абсолютної величини стрибка (ΔN_x) значень функції $N_x(x)$ на цій епюрі з величиною зосередженого зусилля, прикладеного в перерізі, де спостерігається стрибок.

Крім того, можна перевірити правильність призначення знаків поздовжньої сили і побудови епюри. Якщо при розгляді зони стрибка, який виникає зліва направо або справа наліво на епюрі, виявляється, що величина поздовжньої сили алгебраїчно зменшилася, то напрям зусилля на схемі навантаження має збігатися з напрямом спостереження.

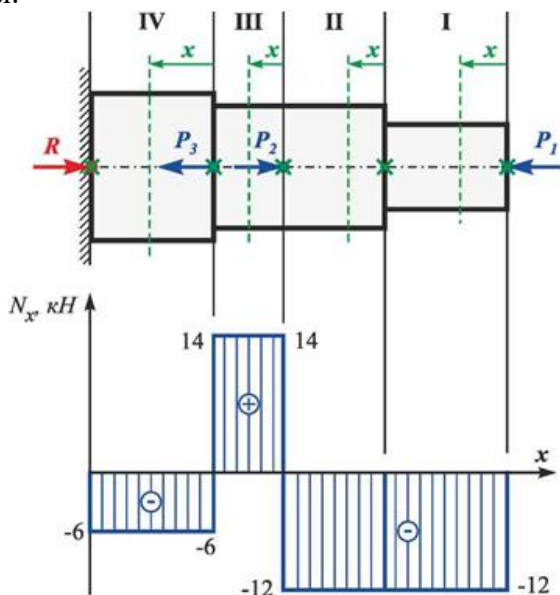


Рис. 2.11

Після побудови епюр слід виконати перевірку, суть якої полягає в зіставленні абсолютної величини стрибка (ΔN_x) значень функції $N_x(x)$ на цій епюрі з величиною зосередженого зусилля, прикладеного в перерізі, де спостерігається стрибок.

Крім того, можна перевірити правильність призначення знаків поздовжньої сили і побудови епюри. Якщо при розгляді зони стрибка, який виникає зліва направо або справа наліво на епюрі, виявляється, що величина поздовжньої сили алгебраїчно зменшилася, то напрям зусилля на схемі навантаження має збігатися з напрямом спостереження.

У прикладі (рис. 2.12) стрибки на епюрі відповідають прикладеним зусиллям.

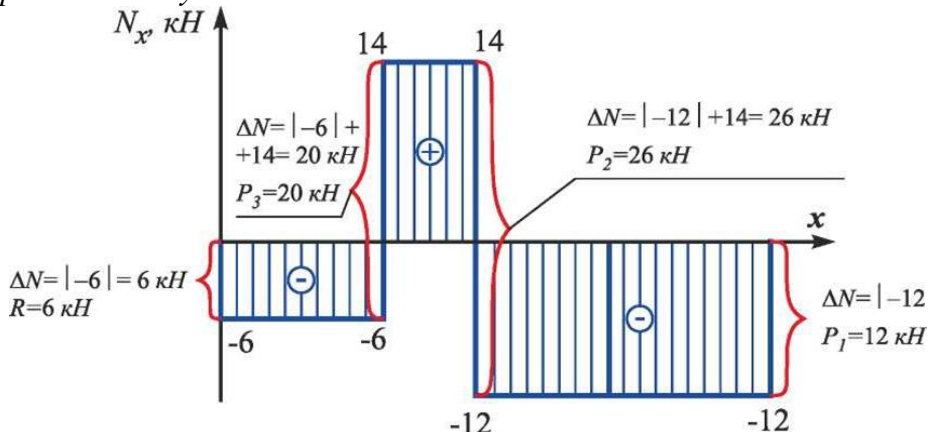


Рис. 2.12

4. Визначимо величину опорної реакції з рівняння рівноваги для бруса в цілому. Порівняємо величину отриманої реакції і значення стрибка на епюрі в перерізі, де прикладено цю реакцію.

У цьому прикладі:

$$\sum P_x = 0;$$

$$R - P_3 + P_2 - P_1 = 0;$$

$$R = P_3 - P_2 + P_1 = 20 - 26 + 12 = 6 \text{ кН}.$$

ОСОБЛИВОСТІ ЕПЮРУ ПОЗДОВЖНІХ СИЛ

Епюр N на окремих ділянках навантажень обмежується прямими лініями.

У місці прикладання зосередженої сили на епюрі є стрибок (розрив) на величину цієї сили.

Величина поздовжньої сили на ділянці є постійною ($N=\text{const}$) за винятком випадків врахування власної ваги вертикальних елементів конструкції. При врахуванні власної ваги границями ділянок додатково є перерізи, де змінюється площа перерізу або питома вага матеріалу.

2.1.2. Напруження в поперечних перерізах бруса

Для визначення нормальних напружень скористаємось гіпотезою плоских перерізів Бернуллі: *перерізи плоскі і нормальні до осі бруса до деформації залишаються плоскими і нормальними до цієї осі і після деформації.*

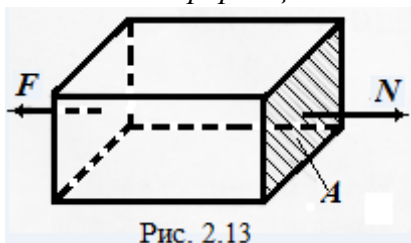


Рис. 2.13

За гіпотезою плоских перерізів поздовжня сила N буде рівномірно розподілена по перерізу, викликаючи тільки нормальні напруження.

$$\sigma = \frac{N}{A}, \quad (2.1)$$

де A - площа поперечного перерізу бруса (рис. 2.13), м^2 ; N - поздовжня

сила в перерізі, Н .

Знак σ відповідає знаку N (при розтягу - «+», при стиску - «-»).

Розмірність напруження - Па (паскаль), $1\text{Па} = \text{Н}/\text{м}^2$; МПа (мегапаскаль), $1\text{МПа} = \text{МН}/\text{м}^2$; кПа (кілопаскаль), $1\text{кПа} = \text{кН}/\text{м}^2$; $1\text{кгс}/\text{см}^2$. $1\text{МПа} = 10^3\text{кПа} = 10^6\text{Па} = 1\text{Н}/\text{мм}^2 = 10^{-1}\text{кН}/\text{см}^2$.

2.1.3. Побудова епюру нормальних напружень (епюру σ)

Епюр σ - це графік зміни нормальних напружень σ у поперечних перерізах бруса уздовж його осі. Епюр σ найчастіше використовують для визначення небезпечних перерізів, у яких виникає найбільше напруження.

План побудови епюру

1. Визначають границі ділянок напружень. *Ділянка* напружень - частина бруса, уздовж якої поздовжня сила N і площа A поперечного перерізу постійні або змінюються за одними і тими ж законами. *Границями ділянок* є торцеві перерізи і перерізи, де змінюється хоча б один з виразів для N або A .

2. Записують для кожної ділянки вираз σ як функцію абсциси перерізу і обчислюють значення напруження на межах ділянки.

3. Будують епюр σ за аналогією побудови епюру N . Стрибки на епюрі σ виникають у точках прикладання зосереджених сил, а також у місцях, де ступінчасто змінюється площа поперечного перерізу.

В нашому випадку для визначення напруження ділянки стержня необхідно знайти величину площі поперечного перерізу з умови

міцності при розтягу і стиску на ділянці ВА (рис. 2.1), якщо $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} \leq [\sigma]; \rightarrow A \geq \frac{N}{[\sigma]}$$

$$A_{BA} = \frac{N_1}{[\sigma]} = \frac{160 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 10 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Тоді, згідно умови (рис. 2.1), площа поперечного перерізу на ділянках $A_{CB} = A_{DC} = 2A_{BA} = 20 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ і $A_{ED} = 3A_{BA} = 30 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$.

Тоді, згідно (2.1), будемо мати:

$$\sigma_x^I = \frac{N_x^I}{A_{BA}} = -\frac{12}{10 \cdot 10^{-4}} = -12000 \text{ кПа} = -12 \text{ МПа};$$

$$\sigma_x^{II} = \frac{N_x^{II}}{A_{CB}} = -\frac{12}{20 \cdot 10^{-4}} = -6000 \text{ кПа} = -6 \text{ МПа};$$

$$\sigma_x^{III} = \frac{N_x^{III}}{A_{DC}} = \frac{14}{20 \cdot 10^{-4}} = 7000 \text{ кПа} = 7 \text{ МПа};$$

$$\sigma_x^{IV} = \frac{N_x^{IV}}{A_{ED}} = -\frac{6}{30 \cdot 10^{-4}} = -2000 \text{ кПа} = -2 \text{ МПа}.$$

Діапазон зміни дорівнюватиме від -12 до 7 МПа , тобто всього $-12 + 7 = 19 \text{ МПа}$. За наявності на кресленні (рис. 2.9) вільного поля розміром по вертикалі приблизно 60 мм зручно прийняти масштаб $1 \text{ мм} — 0,5 \text{ кН}$.

Вільне поле поділимо віссю x приблизно у співвідношенні $14:12$, наприклад, провівши цю вісь на відстані 25 мм від нижньої межі вільного поля.

Позначимо проведену вісь. Проведемо вісь ординат від нижньої до верхньої меж і вільного поля. Позначимо вісь епюри x . Найменування епюри і розмірність величини поздовжньої сили розмістимо так, як показано на рис. 2.9.

Проведемо лінії проєкційного зв'язку від точок на осі бруса відповідних меж ділянок до осі епюру x . Перетином цих ліній з віссю епюру x одержимо точки на межах ділянок. На початку і наприкінці кожної ділянки відкладемо ординати - значення нормального напруження $\sigma_x(x)$ в прийнятому масштабі - додатні вгору, а від'ємні вниз. Покажемо числове значення ординати з відповідним знаком (рис. 2.10).

Варто зазначити, що якщо на сусідніх ділянках величина внутрішнього силового фактора є сталою і однаковою, то числове значення можна не вказувати.

Отримані ординати на початку і кінці ділянки з'єднуємо лініями.

У наведеному прикладі ці лінії - прямі, оскільки на всіх ділянках залежність $\sigma_x(x) = \text{const}$.

Нанесемо штриховку (у вигляді ліній, перпендикулярних осі епюри) між отриманими лініями і віссю епюри. У заштриховані області вище і нижче осі епюри помістимо обведений кругом знак внутрішнього силового фактору (рис. 2.14).

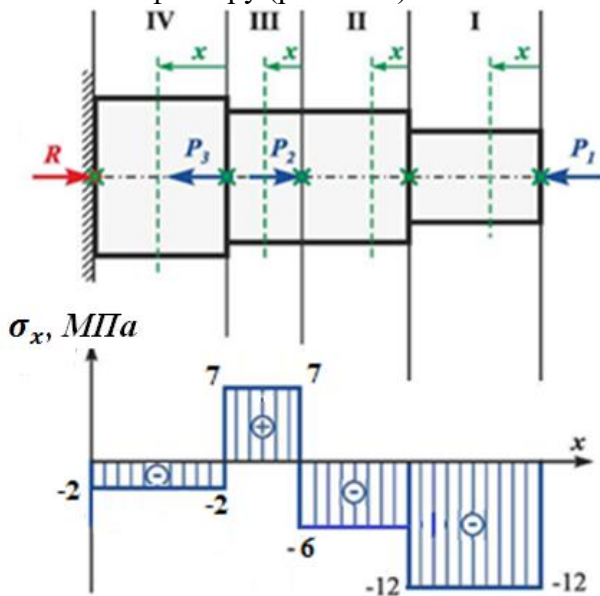


Рис. 2.14

Знаки нормальних напружень σ відповідають знакам поздовжньої сили N на відповідних ділянках бруса.

2.1.4. Співвідношення для обчислення деформацій бруса і переміщень його перерізів

Абсолютну деформацію ділянки – видовження при розтягу (рис. 2.15, а) і скорочення при стиску (рис. 2.15, б) – в межах пружності обчислюють за законом Гука:

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A}, \quad (2.2)$$

де l – довжина ділянки до деформації (рис. 2.14, а, б); E – модуль пружності (модуль Юнга), одна з пружних характеристик матеріалу.

Добуток EA називається *жорсткістю перерізу при розтягу (стиску)*.

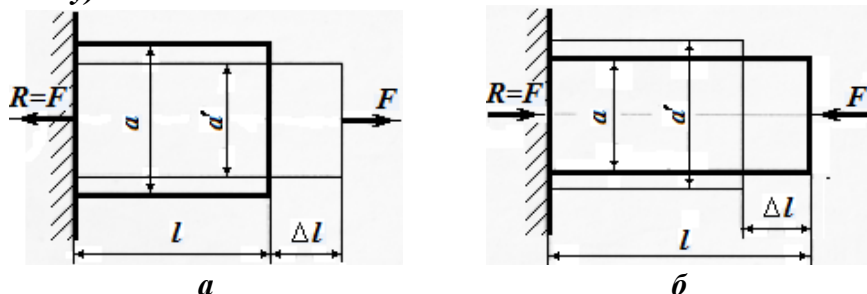


Рис. 2.15

Ділянкою деформації є частина бруса, в межах якої величини N , A і E є постійними або змінюються за одними і тими ж законами. Границями ділянок є торцеві перерізи і перерізи, де змінюється хоча б одна з цих величин.

Якщо брус має декілька ділянок (n ділянок), то його абсолютна деформація буде визначатись як алгебраїчна сума деформацій всіх його ділянок:

$$\Delta l = \sum_{i=1}^n \frac{N_i \cdot l_i}{E_i \cdot A_i}. \quad (2.3)$$

Переміщення δ одного перерізу відносно другого дорівнює деформації ділянки бруса між цими перерізами.

Відносну поздовжню деформацію ділянки визначають за формулою:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}. \quad (2.4)$$

Відносну поперечну деформацію визначають за формулою:

$$\varepsilon' = -\frac{\Delta a}{a}, \quad (2.5)$$

де $\Delta a = a - a'$ - зміна поперечного розміру (рис. 2.15, а, б).

Залежність між відносними поперечною і поздовжньою деформаціями:

$$\varepsilon' = -\mu \cdot \varepsilon. \quad (2.6)$$

Коефіцієнт μ називається коефіцієнтом Пуассона і визначається по величині:

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|.$$

Для ізотропних матеріалів величина коефіцієнта Пуассона змінюється в межах $0 \leq \mu \leq 0,5$, яка характеризує пружні властивості матеріалу.

Англійський вчений філософ – природник Р. Гук сформулював закон: *відносна лінійна деформація прямо пропорційна прикладеному нормальному напруженні σ і оберненопропорційна модулю пружності першого роду E (н/м²).*

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad \text{або} \quad \sigma = \varepsilon \cdot E. \quad (2.7)$$

2.1.5. Врахування власної ваги бруса

У випадку вертикального розташування бруса (рис. 2.16, а) поздовжню силу, нормальне напруження в перерізі z і переміщення цього перерізу, спричинені власною вагою, обчислюють за формулами:

$$N_z = \gamma \cdot A \cdot z; \quad (2.8)$$

$$\sigma_z = \gamma \cdot z; \quad (2.9)$$

$$\delta_z = \frac{\gamma}{2E} (l^2 - z^2), \quad (2.10)$$

де γ – питома вага матеріалу.

Епюри N , σ і δ показано на рис. 2.16, б, в, г.

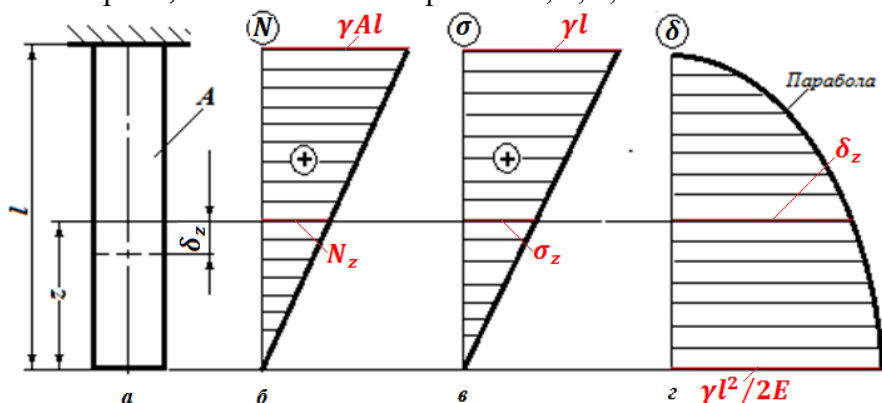


Рис. 2.16

В розрахунках на міцність власну вагу металічних стержнів (тросів, висотних опор і т.п.) враховують при довжині останніх у кілька десятків метрів, будівельних конструкцій з цегли, каменю тощо – в кілька метрів.

2.1.6. Побудова епюру переміщень перерізів бруса (епюру δ)

В нашому випадку для визначення абсолютних деформацій ділянок стержня використаємо залежність (2.2), якщо $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $l_{BA} = l_{CB} = l_{DC} = l_{ED} = 1$ м (рис. 2.1).

Деформація 1-ої ділянки ВА:

$$\Delta l_{BA} = \frac{N_x^I \cdot l_{BA}}{A_{BA} \cdot E} = -\frac{12 \cdot 1}{10 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^8} = -0,6 \cdot 10^{-4} \text{ м};$$

Деформація 2-ої ділянки СВ:

$$\Delta l_{CB} = \frac{N_x^{II} \cdot l_{CB}}{E \cdot A_{BA}} = \frac{-12 \cdot 1}{2 \cdot 10^8 \cdot 20 \cdot 10^{-4}} = -0,3 \cdot 10^{-4} \text{ м};$$

Деформація 3-ої ділянки ВС:

$$\Delta l_{DC} = \frac{N_x^{III} \cdot l_{DC}}{E \cdot A_{DC}} = \frac{14 \cdot 1}{2 \cdot 10^8 \cdot 20 \cdot 10^{-4}} = 0,35 \cdot 10^{-4} \text{ м};$$

Деформація 4-ої ділянки ВС:

$$\Delta l_{ED} = \frac{N_x^{IV} \cdot l_{ED}}{E \cdot A_{ED}} = \frac{-6 \cdot 1}{2 \cdot 10^8 \cdot 30 \cdot 10^{-4}} = -0,1 \cdot 10^{-4} \text{ м}$$

Для визначення переміщень граничних точок ділянок і побудови епюру почнемо їх визначати послідовно зі сторони закріплення (переріз Е), причому переміщення точки заробки дорівнює нулю.

$$\delta_E = 0;$$

$$\delta_D = \Delta l_{ED} = -0,1 \cdot 10^{-4} \text{ м};$$

$$\delta_C = \delta_D + \Delta l_{DC} = -0,1 \cdot 10^{-4} + 0,35 \cdot 10^{-4} = 0,25 \cdot 10^{-4} \text{ м};$$

$$\delta_B = \delta_C + \Delta l_{CB} = 0,25 \cdot 10^{-4} + (-0,3 \cdot 10^{-4}) = -0,05 \cdot 10^{-4} \text{ м};$$

$$\delta_A = \delta_B + \Delta l_{BA} = -0,05 \cdot 10^{-4} + (-0,6 \cdot 10^{-4}) = -0,65 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

Сумарна деформація стержня буде визначатись як алгебраїчна сума деформацій всіх ділянок стержня:

$$\begin{aligned} \Delta l &= \Delta l_{BA} + \Delta l_{CB} + \Delta l_{DC} + \Delta l_{ED} \\ &= -0,6 \cdot 10^{-4} + (-0,3 \cdot 10^{-4}) + 0,35 \cdot 10^{-4} \\ &\quad + (-0,1 \cdot 10^{-4}) = -0,65 \cdot 10^{-4} \text{ м}. \end{aligned}$$

План побудови епюру.

1. Визначають ділянки деформацій і їх межі.
2. Обчислюють величину абсолютної деформації кожної з ділянок за формулами (2.2), (2.10).
3. Обчислюють переміщення характерних (граничних) перерізів відносно нерухомого перерізу, шляхом послідовного алгебраїчного додавання деформацій ділянок, починаючи від нерухомого перерізу.
4. Будують епюру.

Побудова епюру переміщень (рис. 2.17) відбувається аналогічно побудові епюру поздовжніх сил: *проведемо вісь епюру паралельно осі стержня і відкладемо в масштабі значення величин визначених точок.*

Далі ці точки з'єднуються прямою лінією, оскільки в формулі визначення деформації змінна величина – довжина стержня в першій степені.

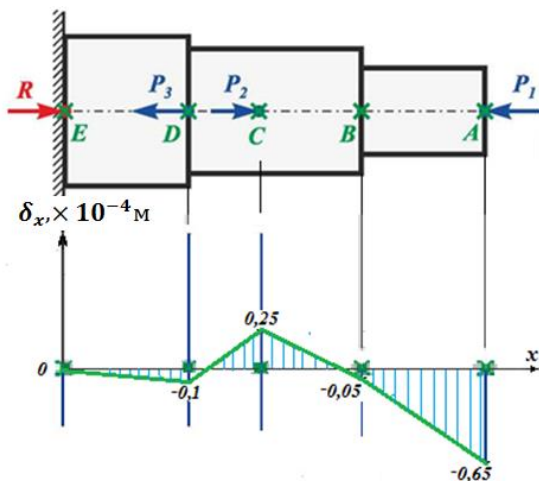


Рис. 2.17

Слід пам'ятати, що на епюрі δ не може бути стрибків (розривів).

Кожна ордината епюру в прийнятому масштабі дорівнює переміщенню відповідного ординаті перерізу відносно нерухомого перерізу.

2.1.7. Розрахунки на міцність

1. Умова міцності:

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} \leq [\sigma], \quad (2.11)$$

де N – поздовжня сила на ділянці з найбільшими нормальними напруженнями; A – площа перерізу на цій ділянці; $[\sigma]$ – допустиме напруження для матеріалу.

Для пластичного матеріалу допустимі напруження на розтяг і стиск однакові, $[\sigma_p] = [\sigma_c] = [\sigma]$.

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{[n_T]}, \quad (2.12)$$

де σ_T – межа текучості матеріалу; $[n_T]$ – нормативний коефіцієнт запасу міцності для пластичних матеріалів. У більшості випадків $[n_T] = 1,4 \dots 1,6$.

Для крихкого матеріалу $[\sigma_p] \neq [\sigma_c]$. Тому записують умови міцності для розтягнутої і стиснутої частини стержня окремо:

$$\begin{cases} \sigma_P^{max} = \frac{N}{A} \leq [\sigma_p], \\ \sigma_C^{max} = \frac{N}{A} \leq [\sigma_c], \end{cases} \quad (2.13)$$

$$\begin{cases} [\sigma_p] = \frac{\sigma_{мр}}{[n_m]} \\ [\sigma_c] = \frac{\sigma_{мс}}{[n_m]}, \end{cases} \quad (2.14)$$

де $\sigma_{мр}$ і $\sigma_{мс}$ – границі міцності матеріалу, відповідно, при розтягу і стиску;

$[n_m]$ – коефіцієнт запасу міцності для крихких матеріалів. Зазвичай, $[n_m] = 2,5 \dots 3,0$.

2. *Нормативний і дійсний коефіцієнти запасу.* Коефіцієнти $[n_T]$ і $[n_m]$ вибирають з норм проектування або призначають. Вони називаються *нормативними*. *Дійсний* коефіцієнт запасу – це відношення граничного напруження для матеріалу до найбільшого робочого, що сприймає елемент,

$$n = \frac{\sigma_{гр}}{\sigma_{max}}. \quad (2.15)$$

Для пластичних матеріалів $\sigma_{гр} = \sigma_T$, для крихких $\sigma_{гр} = \sigma_B$.

3. *Три типи задач*, що розв'язуються за допомогою умов міцності.

I. Перевірка міцності. Обчислюють σ_{max} і порівнюють з $[\sigma]$:

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} \leftrightarrow [\sigma]. \quad (2.16)$$

Якщо $\sigma_{max} \leq [\sigma]$, міцність елемента забезпечена.

II. Визначення вантажопідйомності бруса:

а) обчислюють допустиму величину поздовжньої сили:

$$[N] = A[\sigma]; \quad (2.17)$$

б) встановлюють залежність між величинами поздовжньої і зовнішніх сил і з цієї залежності визначають допустиму величину останніх ($[F]$ або $[q]$).

III. Підбір поперечного перерізу. Потрібний розмір площі перерізу:

$$A \geq \frac{N}{[\sigma]}. \quad (2.18)$$

При визначенні розмірів геометрично подібного перерізу виражають площу A через один з його розмірів. Прокатні профілі підбирають за таблицями сортаменту.

2.1.8. Розрахунки на жорсткість

В розрахунках використовують умову жорсткості:

$$\Delta \leq [\Delta]. \quad (2.19)$$

де Δ - дійсна деформація стержня або переміщення в конструкції;

$[\Delta]$ - допустима їх величина, що призначається з умов нормальної експлуатації конструкції.

2.2. Практичні заняття

2.2.1. Контрольні запитання

1. Коли виникає деформація розтягу або стиску?
2. Як обчислити величину поздовжньої сили в довільному перерізі бруса?
3. Які знаки має поздовжня сила при розтягу і стиску?
4. Що таке епюр внутрішнього зусилля?
5. Як будують епюр внутрішнього зусилля?
6. Що є межею ділянки навантаження?
7. Як обчислити величину нормального напруження?
8. Як будують епюр нормальних напружень?
9. Що таке межа ділянки напружень?
10. Як обчислюється абсолютна деформація ділянки в межах пружності?
11. Яка залежність існує в межах пружності між нормальним напруженням і відносною поздовжньою деформацією?
12. Яка залежність між відносними поперечною і поздовжньою деформаціями?
13. Які значення може набувати коефіцієнт Пуассона для ізотропних матеріалів?
14. Як визначити переміщення довільного перерізу стержня відносно іншого перерізу?
15. Як будують епюр переміщень перерізів?
16. Що є межею ділянки переміщень?
17. Як записують умови міцності і жорсткості?
18. Що таке нормативний і дійсний коефіцієнти запасу міцності?
19. Що є граничним напруженням для пластичного і крихкого матеріалів?
20. Які три типи задач можна розв'язати, використовуючи умови міцності?

2.2.2. Приклади розрахунків на розтяг і стиск

Приклад 2.1. Побудувати епюр поздовжніх сил (епюр N) і перевірити міцність сталевго стержня, розрахункова схема якого показана на рис. 2.18, а. $F_1 = 1 \text{ кН}$; $F_3 = 2 \text{ кН}$; $A = 26 \text{ мм}^2$. Допустиме напруження $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

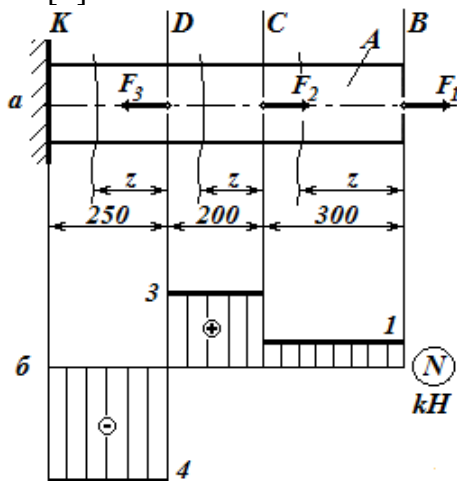


Рис. 2.18

Розв'язок.

I. Побудова епюру N (див. 2.1.1.).

1. Опорні реакції не визначаємо: стержень закріплений лише в лівому торцевому перерізі, тому зусилля будемо визначати через відомі «праві» сили, $N = \sum F_{\text{пр}}$.

2. Визначаємо кількість ділянок. Їх три: I – BC, II – CD, III – DK.

3. Визначаємо поздовжні сили N для кожної ділянки:

I. $0 \leq z \leq 300 \text{ мм}$,

$$N_I = F_1 = 1 \text{ кН};$$

II. $0 \leq z \leq 200 \text{ мм}$,

$$N_{II} = F_1 + F_2 = 1 + 2 = 3 \text{ кН};$$

III. $0 \leq z \leq 250 \text{ мм}$,

$$N_{III} = F_1 + F_2 - F_3 = 1 + 2 - 7 = -4 \text{ кН};$$

Отже, на ділянках I і II брус розтягнутий, а на III – стиснутий.

4. Будуємо епюр N (рис. 2.18, б).

II. Перевірка міцності бруса.

Матеріал бруса пластичний. Тому обчислюємо σ_{max} за абсолютною величиною:

$$\sigma_{\max} = \frac{|N_{III}|}{A} = \frac{4}{26 \cdot 10^{-2}} = 15,38 \text{ кН/см}^2 = 153,8 \text{ МПа.}$$

$$\sigma_{\max} = 153,8 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа.}$$

Отже, умова міцності $\sigma_{\max} \leq [\sigma]$ виконується, міцність бруса забезпечується.

Приклад 2.2. Визначити допустиму величину сили F , що сприймає конструкція (рис. 2.19, а), з умови міцності сталевго стержня EC . Площа поперечного перерізу стержня $A = 200 \text{ мм}^2$, допустиме напруження матеріалу $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

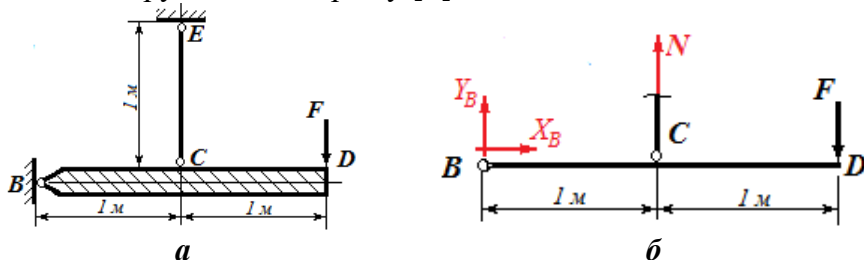


Рис. 2.19

Розв'язок.

1. Визначаємо допустиму величину розтвуючої поздовжньої сили для стержня EC :

$$[N] = A \cdot [\sigma] = 200 \cdot 160 = 32 \text{ кН.}$$

2. Встановлюємо залежність між N і F . Для цього розглянемо рівновагу бруса BD (рис. 2.19, б) і складемо рівняння статки:

$$\sum m_B = 0 \rightarrow N \cdot 1 - F \cdot 2 = 0 \rightarrow F = \frac{N}{2}.$$

$$\text{Отже, } [F] = \frac{[N]}{2} = \frac{32}{2} \text{ кН.}$$

Розмірність: $A - \text{мм}^2$; $[\sigma] - \text{МПа} = \text{МН/м}^2 = \text{Н/мм}^2$.

Приклад 2.3. Підібрати переріз сталевих стержнів конструкції, що зображена на рис. 2.20, а. Стержні 1 і 2 – круглого перерізу, а стержень 3 складається з двох рівнобоких прокатних кутників; $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

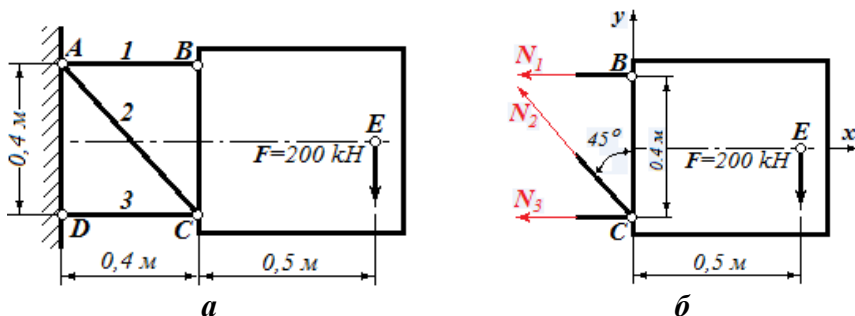


Рис. 2.20

Розв'язок.

Всі стержні мають шарнірні з'єднання. Зовнішні сили між шарнірами відсутні. Тому стержні працюють на розтяг або стиск.

Підбір необхідної площі поперечного перерізу це третій тип задачі (див. 2.1.6, п. 3, III).

Для визначення поздовжніх сил N використаємо метод перерізів: уявно розріжемо стержні вертикальною площиною і розглянемо рівновагу правої частини конструкції (рис. 2.20, б).

$$\sum m_B = 0 \rightarrow N_1 \cdot 0,4 - F \cdot 0,5 = 0 \rightarrow N_1 = \frac{F \cdot 0,5}{0,4} = 250 \text{ кН}.$$

$$\sum Y = 0 \rightarrow N_2 \cdot \cos 45^\circ - F = 0 \rightarrow N_2 = \frac{F}{\cos 45^\circ} = \frac{200}{0,707} = 283 \text{ кН}.$$

$$\begin{aligned} \sum X = 0 \rightarrow -N_1 - N_2 \cos 45^\circ - N_3 = 0 \rightarrow N_3 = -N_1 - N_2 \cos 45^\circ = \\ = -250 - \frac{200}{\cos 45^\circ} \cdot \cos 45^\circ = -450 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Отже, стержні 1 і 2 розтягнуті, а стержень 3 стиснутий.

Потрібні площі перерізів стержнів:

$$A_1 \geq \frac{N_1}{[\sigma]} = \frac{250}{16} = 15,7 \text{ см}^2;$$

$$A_2 \geq \frac{N_2}{[\sigma]} = \frac{283}{16} = 17,7 \text{ см}^2;$$

$$A_3 \geq \frac{N_3}{[\sigma]} = \frac{450}{16} = 28,1 \text{ см}^2.$$

Розмірність: $N - \text{кН}$; $[\sigma] - \text{кН/см}^2$.

Підбір перерізів полягає у визначенні необхідних діаметрів круглих стержнів 1 і 2 і двох рівнобоких кутників для стержня 3.

$$\text{Стержень 1. } A_1 = \frac{\pi d_1^2}{4} \rightarrow d_1 = \sqrt{\frac{4 \cdot A_1}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 15,7}{3,14}} = 4,47 \text{ см.}$$

Приймаємо $d_1 = 45 \text{ мм.}$

$$\text{Фактична площа } A_1 = \frac{\pi \cdot 4,5^2}{4} = 15,9 \text{ см}^2 > 15,7 \text{ см}^2.$$

$$\text{Стержень 2. } A_2 = \frac{\pi d_2^2}{4} \rightarrow d_2 = \sqrt{\frac{4 \cdot A_2}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 17,7}{3,14}} = 4,75 \text{ см.}$$

Приймаємо $d_2 = 48 \text{ мм.}$

$$\text{Фактична площа } A_2 = \frac{\pi \cdot 4,8^2}{4} = 18,09 \text{ см}^2 > 17,7 \text{ см}^2.$$

Стержень 3. Площа поперечного перерізу одного кутника:

$$A^L = \frac{A_3}{2} = \frac{28,1}{2} = 14,05 \text{ см}^2.$$

За таблицю сортаменту (ГОСТ 8509-72) вибираємо кутник $90 \times 90 \times 8$. Його площа поперечного перерізу $A = 13,9 \text{ см}^2$.

Приймаємо два кутники $90 \times 90 \times 8$, $A_3 = 13,9 \cdot 2 = 27,8 \text{ см}^2$.

Фактична площа дещо менша за необхідну.

Нормальні напруження в стержні 3:

$$|\sigma_{(3)}| = \frac{|N_3|}{A_3} = \frac{450}{27,8} = 16,19 \text{ кН/см}^2 = 161,9 \text{ МПа} > [\sigma] = 160 \text{ МПа.}$$

Перенапруження складає $\frac{161,9-160}{160} \cdot 100\% = 1,19\%$, що є допустимим.
(Допускається перенапруження до 5%).

Приклад 2.4. Для стержня ВМ (рис. 2.21, а) нижня частина якого довжиною 0,9 м мідна, а інша – сталева, побудувати епюри поздовжніх сил (епюр N), нормальних напружень (епюр σ) і переміщень (епюр δ). Прийняти для сталі $E_{\text{ст.}} = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, для міді $E_{\text{м}} = 1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

Розв'язок.

I. Побудова епюру N (див. 2.1.1.).

1. Опорні реакції не визначаємо: стержень закріплений лише в лівому торцевому перерізі, тому зусилля будемо визначати через відомі «праві» сили, $N = \sum F_{\text{пр.}}$.

2. Брус має дві ділянки: ВК і КМ.

3. Знаходимо значення N для кожної ділянки:

а) $0 \leq z \leq 1,9 \text{ м}; N_{BK} = F_1 = 30 \text{ кН};$

б) $0 \leq z \leq 0,5 \text{ м}; N_{KM} = F_1 + F_2 = 30 + 50 = 80 \text{ кН};$

4. Будуємо епюр N (рис. 2.21, б).

II. Побудова епюру σ (див. 2.1.3.).

1. Брус має три ділянки: BD, DK і KM.

2. Визначаємо σ на кожній ділянці.

а) $0 \leq z \leq 1,9 \text{ м}; \sigma_{BD} = \frac{N_{BK}}{A_1} = \frac{30 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 10^{-4}} = 60 \text{ МПа};$

б) $0 \leq z \leq 0,4 \text{ м}; \sigma_{BK} = \frac{N_{BK}}{A_2} = \frac{30 \cdot 10^{-3}}{8 \cdot 10^{-4}} = 37,5 \text{ МПа};$

в) $0 \leq z \leq 0,5 \text{ м}; \sigma_{KM} = \frac{N_{KM}}{A_2} = \frac{80 \cdot 10^{-3}}{8 \cdot 10^{-4}} = 100 \text{ МПа}.$

3. Будуємо епюр σ (рис. 2.21, в).

III. Побудова епюру δ (див. 2.1.6.).

1. Брус має чотири ділянки: BC, CD, DK і KM.

2. Обчислюємо деформації ділянок:

$$\Delta l_{BC} = \frac{N_{BK} \cdot l_{BC}}{E_M \cdot A_1} = \frac{30 \cdot 0,9}{1 \cdot 10^4 \cdot 5} = 5,4 \cdot 10^{-4} \text{ м};$$

$$\Delta l_{CD} = \frac{N_{BK} \cdot l_{CD}}{E_C \cdot A_1} = \frac{30 \cdot 0,6}{2 \cdot 10^4 \cdot 5} = 1,8 \cdot 10^{-4} \text{ м};$$

$$\Delta l_{DK} = \frac{N_{BK} \cdot l_{DK}}{E_C \cdot A_2} = \frac{30 \cdot 0,4}{2 \cdot 10^4 \cdot 8} = 0,75 \cdot 10^{-4} \text{ м};$$

$$\Delta l_{KM} = \frac{N_{KM} \cdot l_{KM}}{E_C \cdot A_2} = \frac{30 \cdot 0,5}{2 \cdot 10^4 \cdot 8} = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

Розмірність: $A - \text{см}^2; l - \text{м}; N - \text{кН}; E - \text{кН/см}^2.$

3. Обчислюємо переміщення граничних перерізів:

$$\delta_M = 0;$$

$$\delta_K = \delta_M + \Delta l_{KM} = 0 + 2,5 \cdot 10^{-4} = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ м};$$

$$\delta_D = \delta_K + \Delta l_{DK} = (2,5 + 0,75) \cdot 10^{-4} = 3,25 \cdot 10^{-4} \text{ м};$$

$$\delta_C = \delta_D + \Delta l_{CD} = (3,25 + 1,8) \cdot 10^{-4} = 5,05 \cdot 10^{-4} \text{ м};$$

$$\delta_B = \delta_C + \Delta l_{BC} = (5,05 + 5,4) \cdot 10^{-4} = 10,45 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

4. Будуємо епюр δ (рис. 2.21, г).

Переміщення перерізу В дорівнює абсолютній деформації всього стержня $\delta_B = \Delta l = 10,45 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$

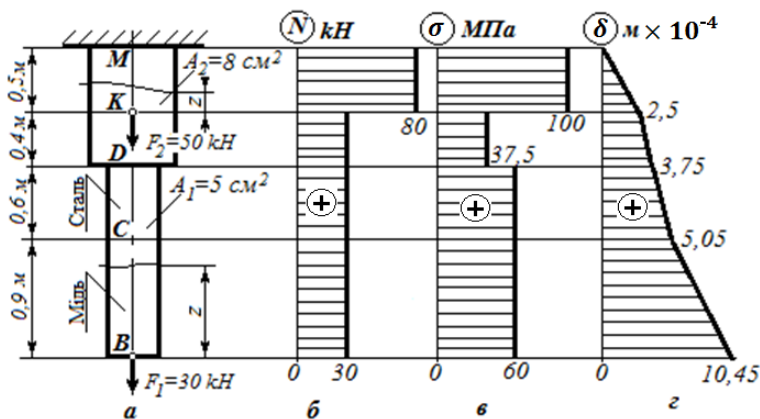


Рис. 2.21

Приклад 2.5. Визначити нормальні напруження в сталевій штанзі, її відносне і абсолютне видовження під дією розтягуючої сили $F = 30 \text{ kH}$. Довжина штанги $l = 2 \text{ м}$, площа поперечного перерізу $A = 4 \text{ см}^2$, межа пропорційності матеріалу $\sigma_{\text{пц}} = 250 \text{ МПа}$, модуль пружності $E_{\text{ст.}} = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

Розв'язок.

Нормальне напруження визначаємо за формулою (2.1):

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{F}{A} = \frac{30 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 10^{-4}} = 75 \text{ МПа.}$$

Розмірність: $A - \text{м}^2$; $F - \text{МН}$.

$$\sigma = 75 \text{ МПа} < \sigma_{\text{пц}} = 250 \text{ МПа.}$$

За законом Гука деформація в межах пружності є пропорційною до напружень тому, скориставшись формулою (2.7) визначимо відносне видовження:

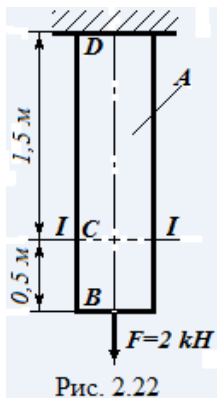
$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{75}{2 \cdot 10^5} = 3,75 \cdot 10^{-4}$$

Для визначення абсолютного видовження використовуємо формулу (2.4):

$$\Delta l = \varepsilon \cdot l = 3,75 \cdot 10^{-4} \cdot 2 = 7,5 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

Приклад 2.6. Переміщення перерізу I – I сталевого стержня BD (рис. 2.22) не повинно перевищувати 1 мм. Визначити площу

перерізу. Модуль пружності прийняти $E_{\text{ст.}} = 2 \cdot 10^5$ МПа, допустиме напруження $[\sigma] = 160$ МПа.



Розв'язок.

Записуємо умову жорсткості (2.19):

$$\Delta \leq [\Delta].$$

В даному випадку Δ – переміщення перерізу I–I сталевго стержня,

$[\Delta] = 1$ мм – допустима величина цього переміщення.

$$\Delta = \Delta l_{CD} = \frac{N_{CD} \cdot l_{CD}}{E \cdot A} = \frac{F \cdot l_{CD}}{E \cdot A}.$$

Тоді

$$\frac{F \cdot l_{CD}}{E \cdot A} \leq [\Delta] \Rightarrow A \geq \frac{F \cdot l_{CD}}{E \cdot [\Delta]} = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 1,5}{2 \cdot 10^{11} \cdot 1 \cdot 10^{-3}} = 15 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 = 15 \text{ мм}^2.$$

Розмірність: l_{CD} , $[\Delta]$ – м; F – Н; E – Н/м².

Перевірка міцності $\sigma = \frac{N}{A} = \frac{2 \cdot 10^3}{15} = 133,3 \text{ Н/мм}^2 = 133,3 \text{ МПа}$.

$\sigma = 133,3 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}$. Міцність забезпечена.

Відповідь: $A = 15 \text{ мм}^2$.

Приклад 2.7. Вертикальне переміщення перерізу В абсолютно жорсткого бруса ВD (рис. 2.23) не повинно перевищувати 2 мм. Визначити площу перерізу сталевго стержня КС, що забезпечує виконання умов міцності і жорсткості. Модуль пружності матеріалу $E_{\text{ст.}} = 2 \cdot 10^5$ МПа, допустиме напруження $[\sigma] = 160$ МПа.

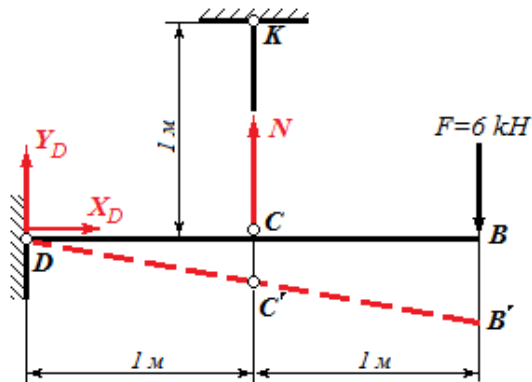


Рис. 2.23

Розв'язок.

Переміщення перерізу В від деформації стержня КС, що прцює на розтяг. Після деформації брус займе положення DB' .

Записуємо умову жорсткості: $\Delta \leq [\Delta]$.

В данному випадку $\Delta = \Delta_B$ – переміщення перерізу В, а $[\Delta] = 2$ мм – допустима його величина.

З подібності трикутників DBB' і CDC' встановлюємо, що

$$BB' = 2CC' \Rightarrow \Delta_B = 2\Delta_C = 2\Delta_{KC} = 2 \frac{N \cdot l_{KC}}{E \cdot A}.$$

Для обчислення поздовжньої сили N , що виникає в перерізі стержня КС, розглянемо рівновагу бруса ВD. Складемо рівняння статки:

$$\sum M_D = 0; -F \cdot 2 + N \cdot 1 = 0 \Rightarrow N = 2F = 2 \cdot 6 = 12 \text{ kH}.$$

Тоді

$$2 \frac{N \cdot l_{KC}}{E \cdot A} \leq [\Delta] \Rightarrow A \geq 2 \frac{N \cdot l_{KC}}{E \cdot [\Delta]} = \frac{2 \cdot 12 \cdot 10^3 \cdot 1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 10^{-3}} = 60 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 = 60 \text{ мм}^2.$$

Розмірність: $N - \text{H}$; $l_{KC}, [\Delta] - \text{м}$; $E - \text{H/мм}^2$.

Перевірка міцності: $\sigma = \frac{N}{A} = \frac{12 \cdot 10^3}{60} = 200 \text{ Н/мм}^2 = 200 \text{ МПа}.$

$\sigma = 200 \text{ МПа} > [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$ Умова міцності $\sigma \leq [\sigma]$ не виконується. Тому визначаємо переріз A з умов міцності:

$$A \geq \frac{N}{[\sigma]} = \frac{12 \cdot 10^3}{160} = 75 \text{ мм}^2.$$

Розмірність: $N - \text{H}$; $[\sigma] - \text{H/мм}^2$.

Відповідь: $A = 75 \text{ мм}^2$.

2.2.3. Задачі для самостійного розв'язання

3.1. Побудувати епюри поздовжніх сил і нормальних напружень, перевірити міцність сталевго стержня (рис. 2.24). Допустиме напруження $[\sigma] = 200 \text{ МПа}$.

Відповідь: $|\sigma_{\max}| = 200 \text{ МПа}$. Міцність забезпечена.

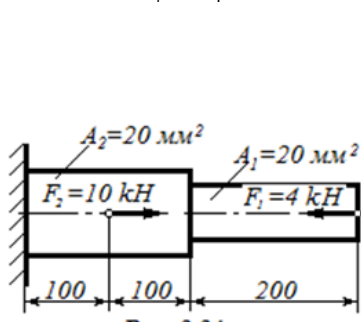


Рис. 2.24

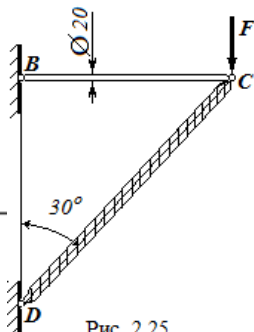


Рис. 2.25

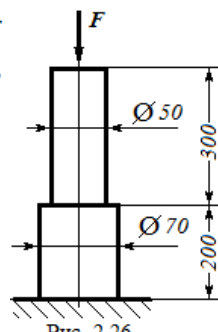


Рис. 2.26

3.2. Перевірити міцність троса, що складається з 60 сталевих дротинок діаметром 1 мм. За його допомогою піднімають вантаж 10 кН. Допустиме напруження $[\sigma] = 220 \text{ МПа}$.

Відповідь: $|\sigma_{\max}| = 212 \text{ МПа}$. Міцність забезпечена.

3.3. Визначити допустиму величину сили F з умови міцності сталевго елемента BC (рис. 2.25). Допустиме напруження $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

Відповідь: 87,06 кН.

3.4. Мідна трубка розтягується осьовими силами, прикладеними в торцевих перерізах. Визначити допустиму величину сили, якщо зовнішній і внутрішній діаметри перерізу відповідно дорівнюють 10 і 8 мм. Допустиме напруження $[\sigma] = 100 \text{ МПа}$.

Відповідь: 2,83 кН.

3.5. Чавунна підставка (рис. 2.26) сприймає осьові сили F . Визначити допустиму величину сили, якщо $[\sigma] = 200 \text{ МПа}$.

Відповідь: 384,8 кН.

3.6. З умови міцності визначити допустиму величину стискувальної сили для дерев'яного стояка квадратного перерізу. Сторона квадрата 12 см, допустиме напруження $[\sigma] = 10 \text{ МПа}$.

Відповідь: 144 кН.

3.7. До двох стержнів однакового поперечного перерізу $A = 5 \text{ см}^2$ підвішено вантаж P (рис. 2.27). Визначити допустиму величину вантажу, якщо допустиме напруження для матеріалу стержнів $[\sigma] = 100 \text{ МПа}$.

Відповідь: 86,6 кН.

3.8. Для стержня, розрахункова схема якого показана на рис. 2.28, потрібно побудувати епюри поздовжніх сил та нормальних напружень і підібрати площу перерізу A . Допустиме напруження $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

Відповідь: $1,25 \text{ см}^2$.

3.9. Показаний на рис. 2.29 сталевий стержень має в нижній частині суцільний переріз діаметром D , а у верхній — кільцевий переріз з внутрішнім діаметром $d = 20 \text{ мм}$. Визначити діаметр D , якщо $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

Відповідь: 25,3 мм.

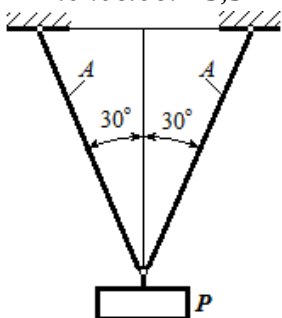


Рис. 2.27

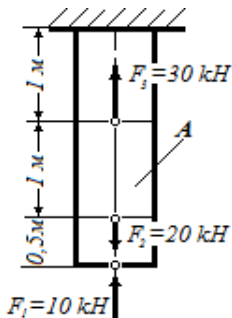


Рис. 2.28

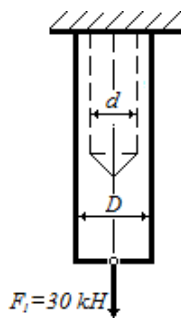


Рис. 2.29

3.10. Підібрати з умов міцності квадратні поперечні перерізи частин колони, показаної на рис. 2.30, якщо $F = 1000 \text{ кН}$, а допустимі напруження на стиск для сталі $[\sigma_c]_c = 140 \text{ МПа}$, чавуну $[\sigma_c]_ч = 100 \text{ МПа}$, граніту $[\sigma_c]_г = 4 \text{ МПа}$, бутової кладки $[\sigma_c]_б = 1,5 \text{ МПа}$, ґрунту (піску) $[\sigma_c]_гп = 0,5 \text{ МПа}$. Власну вагу не враховувати.

Відповідь: Розміри перерізів: сталі $10 \times 10 \text{ см}$, чавуну $50 \times 50 \text{ см}$, граніту $82 \times 82 \text{ см}$, бутового фундаменту $142 \times 142 \text{ см}$.

3.11. Підібрати з умов міцності квадратні поперечні перерізи ступінчастого бетонного стовпа (рис. 2.31). Навантаження на стовп $F = 300 \text{ кН}$. Допустиме напруження для бетону прийняти $[\sigma] = 2 \text{ МПа}$. Об'ємна вага бетону 25 кН/м^3 . Побудувати епюри поздовжніх сил і нормальних напружень.

Відповідь: $a_1 = 40 \text{ см}$, $a_2 = 41,3 \text{ см}$, $a_3 = 42,7 \text{ см}$

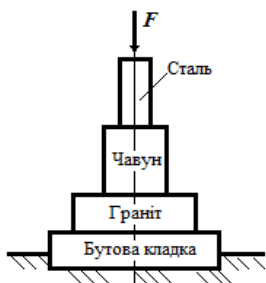


РИС. 2.30

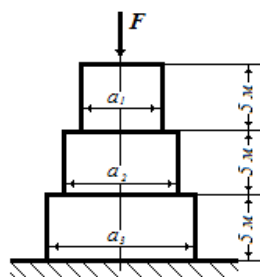


Рис. 2.31

3.12. Жорстка конструкція $ABCO$ підтримується стояками 1,2 і розкосом 3, з'єднаними шарнірно (рис. 2.32). Конструкція важить 800 кН і навантажена боковою силою 200 кН . Підібрати перерізи стояків і розкосу з чотирьох рівнобоких кутиків кожен, якщо $[\sigma] = 100 \text{ МПа}$.

Відповідь: стояк 1—4 кутики $32 \times 32 \times 4$ (перенавантаження 2,9%), стояк 2—4 кутики $80 \times 80 \times 8$ (перенавантаження 1,63%) і розкіс 3—4 кутики $63 \times 63 \times 6$ (ГОСТ 8509-72).

3.13. Жорсткий брус OC шарнірно закріплений у точках O і B і навантажений рівномірно розподіленим навантаженням q (рис. 2.33). З умови міцності підібрати площу перерізу стержня AB , якщо розмір $OA = 1,5 \text{ м}$, $OC = 4 \text{ м}$, $q = 12 \text{ кН/м}$; $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

Відповідь: $4,62 \text{ см}^2$.

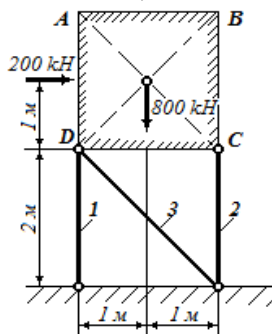


Рис. 2.32

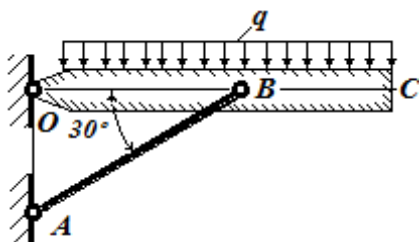


Рис. 2.33

3.14. Сталева штаба прямокутного перерізу розтягується осьовими силами F - 200 кН (рис. 2.34). Штаба ослаблена круглим отвором діаметром 30 мм . Визначити з умови міцності в небезпечному перерізі ширину штаби b , якщо її товщина 10 мм ; $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

Відповідь: 155 мм .

3.15. Вантаж P (рис. 2.35) утримується двома однаковими стержнями $A = 5 \text{ см}^2$, з'єднаними за допомогою шарніра B . Визначити допустиму величину вантажу і переміщення вузла B . Прийняти $[\sigma] = 100 \text{ МПа}$, $E = 2 \times 10^5 \text{ МПа}$.

Відповідь: 50 кН; 4,62 мм.

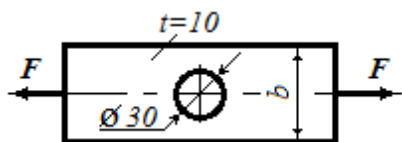


Рис. 2.34

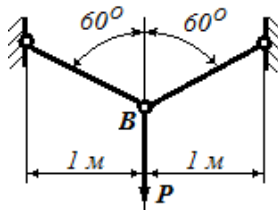


РИС. 2.35

3.16. Сталевий болт довжиною 160 мм при затягуванні видовжився на 0,12 мм. Модуль пружності матеріалу $E = 2 \times 10^5 \text{ МПа}$. Визначити напруження в болті.

Відповідь: 150 МПа.

3.17. Круглий стержень діаметром $d = 20 \text{ мм}$ і довжиною $l = 2 \text{ м}$ при розтягу силою $F = 8 \text{ кН}$ видовжився на 0,5 мм. Визначити модуль пружності E матеріалу, якщо відомо, що напруження в стержні не перевищувало границі пропорційності.

Відповідь: $1,02 \times 10^5 \text{ МПа}$.

3.18. Два круглих сталевих стержні, суцільний і порожнистий, під дією однакових осьових сил видовжуються на однакову величину. Яким повинен бути зовнішній діаметр d , порожнистого стержня (рис. 2.36, б), якщо його внутрішній діаметр і діаметр суцільного стержня (рис. 2.36, а) однакові? Напруження в стержнях не перевищують границі пропорційності.

Відповідь: 1,41 d .

3.19. Циліндричний сталевий стержень довжиною $l = 200 \text{ мм}$ під дією стискувальної сили скоротився на 0,2 мм. Стержень порожнистий. Зовнішній діаметр $d_z = 40 \text{ мм}$; внутрішній $d_{вн} = 30 \text{ мм}$. Визначити стискувальну силу і напруження в стержні.

Відповідь: 110 кН; 200 МПа.

3.20. Визначити повне переміщення шарніра B (рис. 2.37), якщо $E = 2 \times 10^5 \text{ МПа}$.

Відповідь: 3,45 мм.

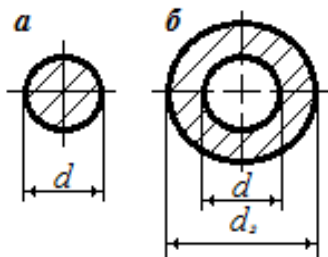


Рис. 2.36

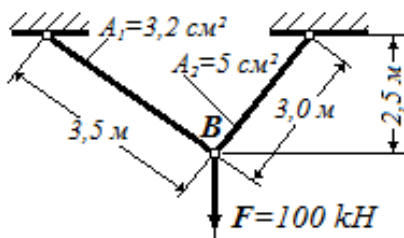


Рис. 2.37

3.21. Абсолютні пружні деформації мідного і сталевго дротів однакового діаметра під дією сили F рівні за величиною. Яку довжину повинен мати сталевий дріт, якщо довжина мідного $0,5 \text{ м}$? Модулі пружності сталі $E = 2 \times 10^5 \text{ МПа}$, міді $E_m = 1 \times 10^5 \text{ МПа}$.

Відповідь: $1,0 \text{ м}$.

3.22. Деформація сталевго стержня (рис. 2.38) складає $0,2 \text{ мм}$. Визначити величину сили F . Модуль пружності $E = 2 \times 10^5 \text{ МПа}$.

Відповідь: 40 кН .

3.23. Сталевий стержень квадратного поперечного перерізу з стороною $a = 20 \text{ мм}$ розтягнутий силами $F = 40 \text{ кН}$, що прикладені до його торців. Визначити поперечні розміри стержня після деформації, якщо $E = 2 \times 10^6 \text{ МПа}$ і коефіцієнт Пуассона $\mu = 0,25$.

Відповідь: $a = 19,9975 \text{ мм}$.

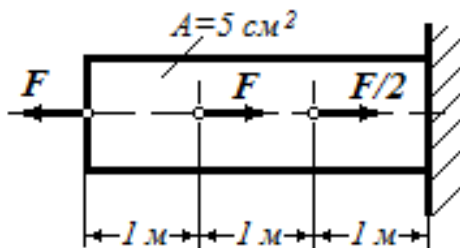


Рис. 2.38

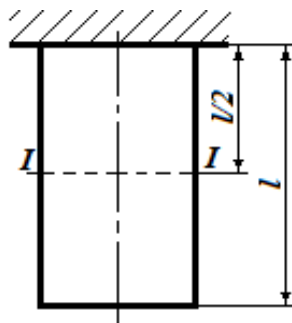


Рис. 2.39

3.24. Сталевий стержень закріплений верхнім кінцем і перебуває під дією власної ваги (рис. 2.39). Обчислити довжину стержня, при якій переміщення його нижнього кінця становить 5 мм . $E = 2 \cdot 10^6 \text{ МПа}$, $\gamma = 78 \text{ кН/ж}^3$. Визначити переміщення перерізу 1-1.

Відповідь: 160 м ; $3,74 \text{ мм}$.

2.3. Розрахунково-проектувальна робота «розрахунки на міцність і жорсткість бруса при розтягу (стиску)»

Вертикальний стержень довжиною $l = 4$ м защемлений одним кінцем і перебуває під дією осьових сил:

Форма перерізу круг або кільце, $D/d = 0,6$. Потрібно:

- 1) побудувати епюр поздовжніх сил;
- 2) визначити розміри перерізів стержня на всіх ділянках, виходячи з розрахунків на міцність;
- 3) визначити розміри перерізу частини стержня довжиною a , виходячи з умови жорсткості: $|\Delta l_a| \leq [\Delta l_a] = \frac{a}{2000}$; порівняти з розмірами, отриманими при виконанні п. 2, і прийняти більше значення;
- 4) побудувати епюри напружень і переміщень перерізів.

Власну вагу не враховувати

Дані для розрахунку взяти з таблиць 2.1 і 2.2.

Коефіцієнти запасу міцності прийняти для пластичних матеріалів $[n_T] = 1,5$, для крихких матеріалів $[n_M] = 2,8$.

ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ РПР

(варіант 300)

Вихідні дані: рядок №3, схема 00:

$F_1 = 40 \text{ кН}$; $F_2 = -20 \text{ кН}$; $F_3 = 30 \text{ кН}$; $a = 2,0 \text{ м}$; $b = 1,4 \text{ м}$;
матеріал – сталь 10, $\sigma_T = 210 \text{ МПа}$ (додаток).

Розв'язок.

1. Викреслюємо розрахункову схему в масштабі (рис. 2.40, а). оскільки сила F_2 відємна, то її напрям протилежний показаному в табл. 2.2.

2. Будуємо епюр поздовжніх сил (див. 2.1.1):

а) опорні реакції не визначаємо – стержень закріплений лише в нижньому торцевому перерізі;

б) кількість ділянок – три: I – DC, II – CB, III – BK. Вони збігаються з ділянками епюр напружень і переміщень перерізів;

в) обчислюємо поздовжню силу N для кожної ділянки:

I – DC: $0 \leq z \leq 1,4 \text{ м}$; $N_1 = -F_1 = -40 \text{ кН}$;

II – CB: $0 \leq z \leq 0,6 \text{ м}$; $N_2 = -F_1 - F_2 = -40 - 20 = -60 \text{ кН}$;

III – BK: $0 \leq z \leq 2,0 \text{ м}$; $N_3 = -F_1 - F_2 + F_3 = -60 + 30 = -30 \text{ кН}$;

г) будемо епюр N (рис. 2.40, б).

3. Визначаємо розміри стержня на кожній ділянці, виходячи з умови міцності:

$$A = \frac{N}{[\sigma]}.$$

Сталь 10 пластичний матеріал, тому для визначення допустимого напруження використовуємо формулу (2.12):

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{[n_T]} = \frac{210}{1,5} = 140 \text{ МПа}.$$

Виходячи з умови міцності знаходимо площі поперечних перерізів і діаметри стержня:

$$A_1 = \frac{N_1}{[\sigma]} = \frac{40 \cdot 10^3}{140} = 286 \text{ мм}^2,$$

$$A_1 = \frac{\pi d_1^2}{4} \Rightarrow d_1 = \sqrt{\frac{4 \cdot A_1}{\pi}} \Rightarrow d_1 \geq \sqrt{\frac{4 \cdot 286}{3,14}} = 19,1 \text{ мм},$$

$$A_2 = \frac{N_2}{[\sigma]} = \frac{60 \cdot 10^3}{140} = 429 \text{ мм}^2, d_2 \geq \sqrt{\frac{4 \cdot 429}{3,14}} = 23,4 \text{ мм},$$

$$A_3 = \frac{N_3}{[\sigma]} = \frac{30 \cdot 10^3}{140} = 214 \text{ мм}^2, d_3 \geq \sqrt{\frac{4 \cdot 214}{3,14}} = 16,5 \text{ мм}.$$

Розмірність: N – Н; $[\sigma]$ – Н/мм².

Приймаємо $d_1 = 20 \text{ мм}$, $d_2 = 24 \text{ мм}$.

Площі перерізів ділянок I і II: $A_1 = 3,14 \text{ мм}^2$; $A_2 = 452 \text{ мм}^2$.

4. Визначаємо розмір поперечного перерізу частини стержня довжиною a , виходячи з умови жорсткості. Ця частина збігається з ділянкою III. Записуємо умову жорсткості: $\Delta \leq [\Delta]$.

В нашому випадку Δ - абсолютна величина деформації ділянки III.

$$\Delta \leq [\Delta l_3] = \frac{|N_3| \cdot l_a}{E \cdot A_3} \cdot [\Delta] - \text{допустима величина цієї деформації}.$$

$$\text{За умовою задачі } [\Delta] = \frac{a}{2000} = \frac{2}{2000} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Тоді

$$\frac{|N_3| \cdot l_a}{E \cdot A_3} \leq [\Delta] \Rightarrow A_3 \geq \frac{|N_3| \cdot l_a}{E \cdot [\Delta]} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 2}{2 \cdot 10^5 \cdot 1 \cdot 10^{-3}} = 300 \text{ мм}^2.$$

Розмірність: N – Н; E – Н/мм²; l_a , $[\Delta]$ – м.

$$d_3 = \sqrt{\frac{4 \cdot A_3}{\pi}} \geq \sqrt{\frac{4 \cdot 300}{3,14}} = 19,5 \text{ мм}.$$

Величина d_3 , обчислена за умовою міцності, є меншою ($16,5 < 19,5$).
Приймаємо $d_3 = 20 \text{ мм}$.

Площа поперечного перерізу ділянки III, $A_3 = 314 \text{ мм}^2$.

5. Викреслюємо стержень. Масштаби і діаметр різні (рис. 2.40, в).

6. Будуємо епюр нормальних напружень (див. 2.1.3):

а) стержень має три ділянки: I – DC, II – CB, III – BK;

б) обчислюємо величину нормального напруження для кожної ділянки:

I – DC:

$$0 \leq z \leq 1,4 \text{ м: } \sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{-40 \cdot 10^3}{314} = -127,4 \text{ Н/мм}^2 = -127,4 \text{ МПа}$$

II – CB:

$$0 \leq z \leq 0,6 \text{ м: } \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{-60 \cdot 10^3}{452} = -132,7 \text{ Н/мм}^2 = -132,7 \text{ МПа}$$

III – BK:

$$0 \leq z \leq 2,0 \text{ м: } \sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = \frac{-30 \cdot 10^3}{314} = -95,5 \text{ Н/мм}^2 = -95,5 \text{ МПа}$$

Розмірність: N – Н; A – мм^2 ;

в) будуємо епюр σ (рис. 2.40, з).

7. Будуємо епюр переміщень перерізів « δ » (див. 2.1.5):

а) ділянки та їх межі ті ж самі, що й для епюр « N » і « σ »;

б) за формулою (2.2) обчислюємо деформацію кожної ділянки:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot A_1} = \frac{-40 \cdot 10^3 \cdot 1,4}{2 \cdot 10^5 \cdot 314} = -0,89 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot A_2} = \frac{-60 \cdot 10^3 \cdot 0,6}{2 \cdot 10^5 \cdot 452} = -0,40 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 \cdot l_3}{E \cdot A_3} = \frac{-30 \cdot 10^3 \cdot 2,0}{2 \cdot 10^5 \cdot 314} = -0,96 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

в) обчислюємо переміщення перерізів, що знаходяться на межах ділянок, відносно нерухомого перерізу (К):

$$\delta_K = 0; \delta_B = \delta_K + \Delta l_3 = -0,96 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$\delta_C = \delta_B + \Delta l_2 = (-0,96 - 0,4) \cdot 10^{-3} = -1,36 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$\delta_D = \delta_C + \Delta l_1 = (-1,36 - 0,89) \cdot 10^{-3} = -2,25 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

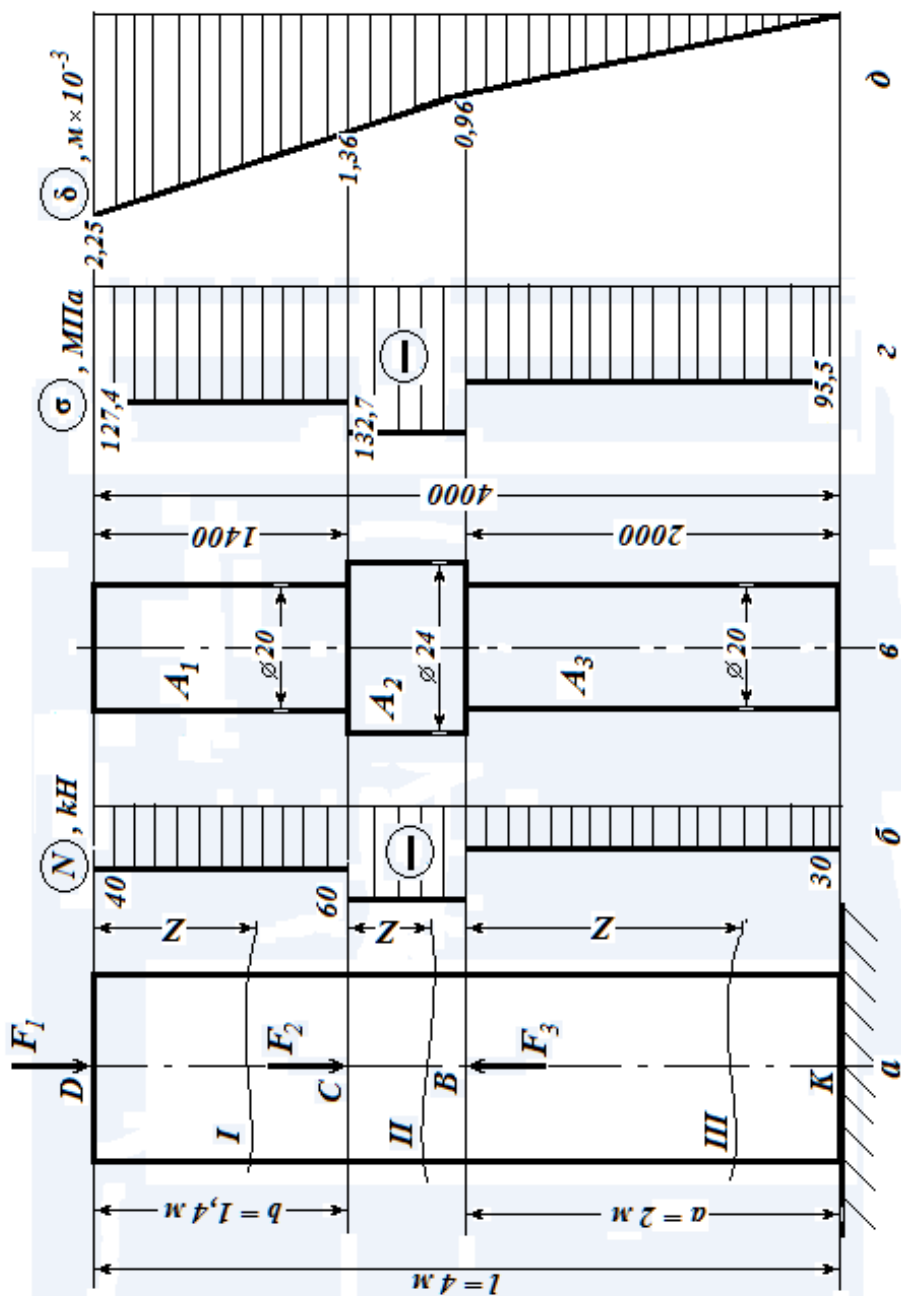
г) будуємо епюр « δ » (рис. 2.40, д).

Переміщення перерізу D дорівнює деформації всього бруса:

$$\delta_D = \Delta l = -2,25 \text{ мм}.$$

Варіанти завдань до РПП 2.3

№ п/п	F_1, kH	F_2, kH	F_3, kH	$a, м$	$b, м$	Матеріал
0	70	20	40	1,4	0,6	40Х
1	50	25	10	1,8	1,3	сталь 20
2	60	30	-20	1,6	0,5	СЧ 18
3	40	-20	30	2,0	1,4	сталь 10
4	80	35	50	1,2	1,0	20Х
5	-30	50	60	1,0	1,4	сталь 30
6	20	30	70	0,8	1,2	СЧ 38
7	10	40	-80	1,1	0,9	50ХН
8	45	-20	65	1,3	0,7	СЧ 24
9	65	10	45	1,5	0,8	сталь 45



Варіанти розрахункових схем до РПР 2.3

0		5	
1		6	
2		7	
3		8	
4		9	

3. ДОСЛІДНЕ ВИВЧЕННЯ МЕХАНІЧНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ МАТЕРІАЛІВ

3.1. Діаграма розтягу маловуглецевої сталі

Основна мета – отримати граничні, для конструкційних матеріалів напруження, при яких відбуваються їх втрата міцності та використати отримані значення для порівняння з максимальними розрахунковими напруженнями. Це є необхідним для висновків про міцність конструктивних елементів, що виготовляються із заданих конструкційних матеріалів.

Основним видом дослідних випробувань є випробування матеріалів на розтяг – стиск. Для проведення таких випробувань використовують спеціальне обладнання – розривні машини (рис. 3.1).



Рис. 3.1. Сучасна розривна машина

Зразки для проведення досліджень міцності матеріалів на розтяг – стиск стандартизовані і використовуються двох типів: циліндричні та плоскі (рис. 3.2)

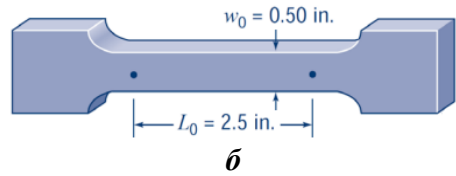
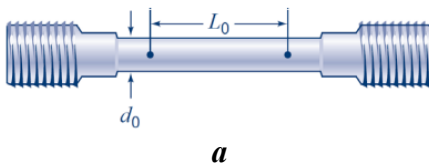


Рис. 3.2

Циліндричні зразки бувають двох видів: 1) нормальні $L_0 = 10d_0 = 11,3\sqrt{A_0}$ і 2) укорочені $L_0 = 5d_0 = 5,65\sqrt{A_0}$. Опис циліндричного зразка представлено на рис. 3.3.

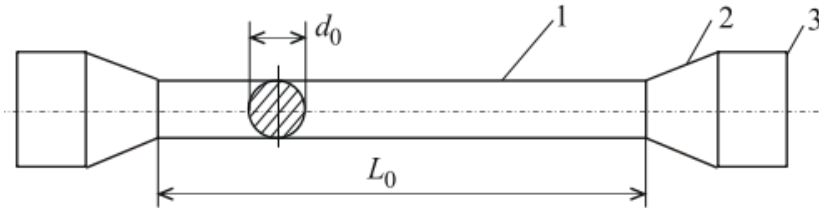


Рис. 3.3. Циліндричний зразок (1 – робоча частина; 2 – перехідна частина; 3 – захвати; L_0 – розрахункова довжина (база); d_0 – діаметр бази)

Плоскі зразки також бувають двох видів: 1) нормальні, якщо $L_0 = 11,3\sqrt{A_0} = 11,3\sqrt{b_0h_0}$ і 2) укорочені $L_0 = 5,65\sqrt{A_0} = 5,65\sqrt{b_0h_0}$. Форма плоского зразка представлена на рис. 3.4.

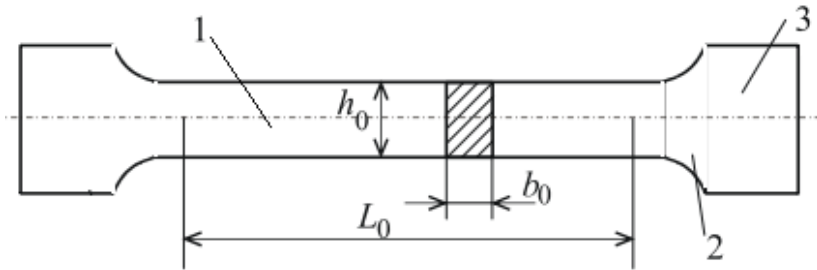


Рис. 3.4. Плоский зразок

Машинна діаграма розтягу. Установивши зразок в захватах розривної машини і розтягуючи його гідравлічним чи механічним зусиллям, можна побудувати діаграму розтягу в координатах «зусилля – видовження» (рис. 3.5). Видовження бази зразка вимірюється за допомогою механічних тензометрів (рис. 3.6).

Слід відмітити, що пластичні матеріали мають явно виражену площадку текучості, коли видовження зростає при практично постійному зусиллі. Це явище найбільш наглядно проявляється на

прикладі випробовування зразків із мало вуглецевої сталі. Машинна діаграма викреслюється в координатах $F, \Delta l$. На кривій діаграми розтягу можна виділити чотири ділянки.

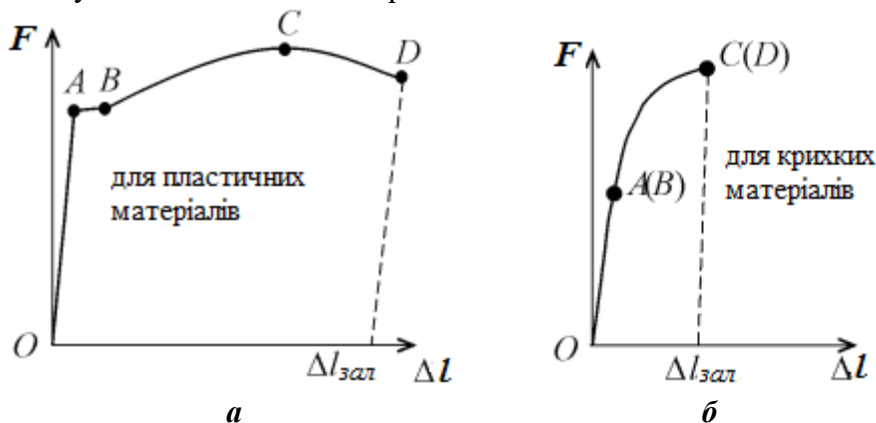


Рис. 3.5

Ділянка OA носить назву зони пружності. Тут матеріал підпорядковується закону Гука і деформації визначаються за формулою $\Delta l = Fl/EA$. На рис. 3.5, а ця ділянка показана з відступом від масштабу. Видовження на ділянці OA дуже малі, і пряма OA , будучи викресленою в масштабі, співпала би в межах ширини лінії з віссю ординат. Значення сили, для якої справедливий закон Гука, буде залежати від розмірів зразка і механічних властивостей матеріалу, тому при подальшому розгляді діаграми розтягу її представляють в координатах σ і ϵ .

Зону AB називають зоною загальної текучості, а ділянку AB – площадкою текучості. Тут відбуваються суттєві зміни довжини зразка без помітного збільшення навантажень. Не всі матеріали мають площадку текучості. У крихких матеріалів площадка текучості не виявляється (рис. 3.5, б).

Зону BC називають зоною зміцнення. В цій зоні видовження зразка супроводжується зростанням навантажень. На цій стадії деформування на зразку намічується місце руйнування (розриву) та починає утворюватись так звана шийка – місцеве звуження зразка. При подальшому

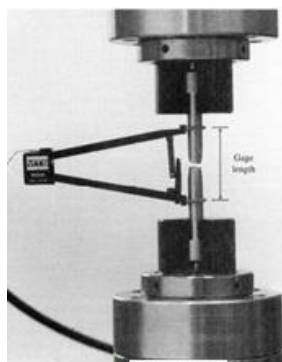


Рис. 3.6

навантаженні зразка шийка швидко прогресує. Починаючи з точки *C* видовження зразка відбувається зі зменшенням сили його навантаження, але середнє напруження в поперечному перерізі шийки зростає. Видовження зразка носить в цьому випадку місцевий характер, тому ділянку *CD* називають *зоною місцевої текучості*. Точка *D* відповідає руйнуванню зразка.

Зразок із пластичного матеріалу (мало вуглецева сталь) в процесі деформування в зоні місцевої текучості (рис. 3.7, а) та в момент руйнування показано на рис. 3.7, б а зразок із крихкого матеріалу, що зруйнувався без суттєвих пластичних деформацій – на рис. 3.8.



Рис. 3.7



Рис. 3.8.

Очевидно, що машинна діаграма розтягу характеризує властивості зразка, а не матеріалу, тому її параметри не можуть бути використаними для оцінки міцності матеріалу.

Умовна діаграма розтягу. Ця діаграма будується на базі машинної діаграми розтягу з метою кількісного визначення механічних властивостей матеріалу.

Перебудова машинної діаграми в умовну відбувається шляхом:

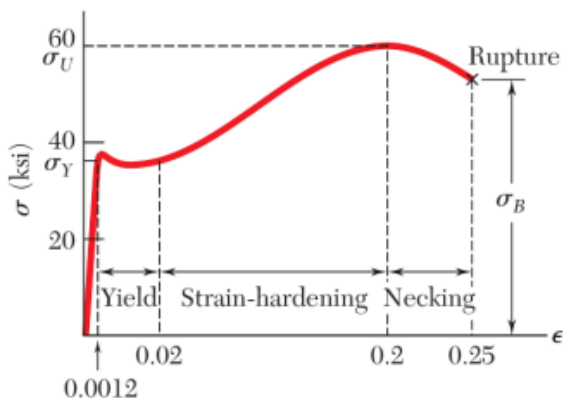
1) діленням показів осі абсцис на L_0 , тобто введенням **відносних лінійних деформацій**

$$\varepsilon_i = \Delta L_i / L_0, \quad (3.1)$$

де ε_i – масив відносних деформацій бази зразка

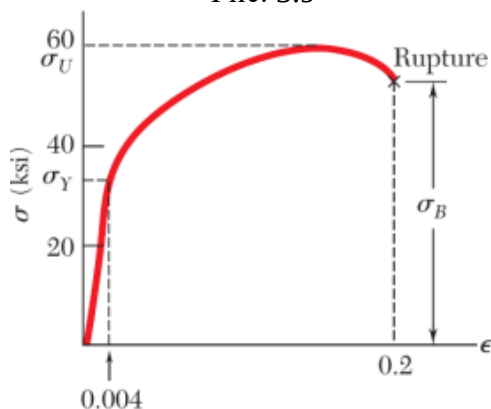
2) діленням показів осі ординат на A_0 , тобто введенням **умовних напружень**

$$\sigma_i = F_i / A_0, \quad (3.2)$$



(a) Low-carbon steel

Рис. 3.9



(b) Aluminum alloy

Рис. 3.10

де A_0 – вихідна площа поперечного перерізу зразка, σ – умовне напруження. Його умовність полягає в тому, що не враховується зміна площі поперечного перерізу зразка в процесі його деформування. Зразок умовної діаграми розтягу для маловуглецевих сталей показаний на рис. 3.9. На рис. 3.10 представлений зразок умовної діаграми розтягу для алюмінієвого сплаву.

Відносна поперечна деформація. При розтязі (стисканні) прямого брусу крім поздовжньої деформації ϵ відбувається зміна поперечних розмірів брусу (рис. 3.11). Ширина брусу при розтязі зменшується на деяку величину Δb . Якщо величину Δb віднести до вихідної величини b , то отримаємо вираз для визначення відносної поперечної деформації ϵ_1 :

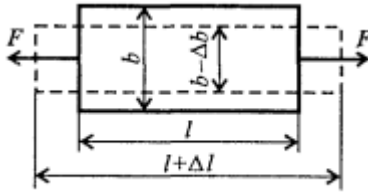


Рис. 3.11

$$\varepsilon_1 = \Delta b / b. \quad (3.3)$$

Відношення відносної поперечної деформації до відносної поздовжньої деформації називають коефіцієнтом Пуассона і позначають літерою грецького алфавіту μ :

$$\mu = \varepsilon_1 / \varepsilon. \quad (3.4)$$

Коефіцієнт Пуассона μ , на ряду з модулем пружності E , характеризують механічні властивості матеріалу; його значення коливається для металів - $\mu = 0,25 \dots 0,35$. Для всіх ізотропних матеріалів коефіцієнт Пуассона знаходиться в межах: $0 \leq \mu \leq 0,5$. Значення коефіцієнту μ для деяких матеріалів наведені в табл. 2.1.

3.2. Основні механічні характеристики матеріалів

Механічні властивості матеріалів встановлюють дослідним шляхом при випробуванні матеріалів на розтяг-стиск. Їх величини визначають із умовних діаграм розтягу (див. рис. 3.12). Як видно із рис. 3.12, представлена діаграма має такий же вигляд, як і в координатах $F, \Delta l$ (див. рис. 3.5), але ця крива буде характеризувати вже не властивості зразка, а властивості матеріалу. Відмітимо на цій діаграмі характерні точки.

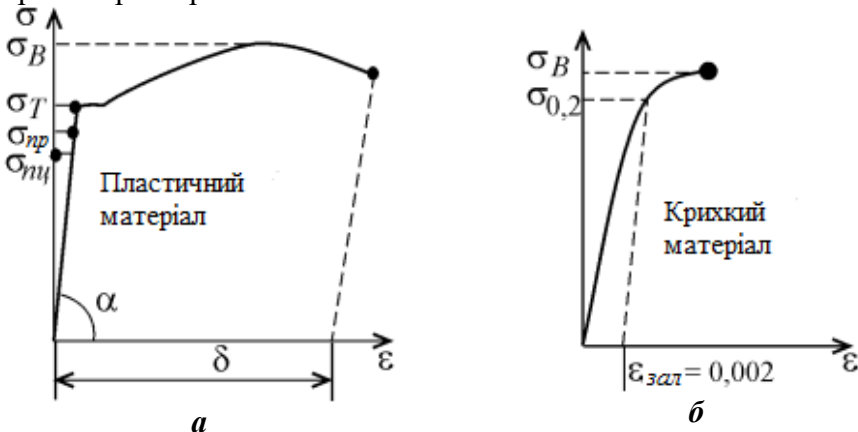


Рис. 3.12 (тут δ – відносне видовження в момент руйнування)

1) **Межа пропорційності** ($\sigma_{\text{пц}}$) – найбільше напруження, при якому є справедливим закон Гука

$$\sigma = E\varepsilon. \quad (3.5)$$

Напомнимо, що коефіцієнт пропорційності $E = \text{tg} \alpha$ має розмірність напруження, називається модулем поздовжньої пружності та встановлюється дослідним шляхом:

Сталі	$E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па},$
Алюмінієві сплави	$E = 0,7 \cdot 10^{11} \text{ Па},$
Титанові сплави	$E = 1,1 \cdot 10^{11} \text{ Па},$
Латуні	$E = 1,1 \cdot 10^{11} \text{ Па}.$

2) **Межа пружності** ($\sigma_{\text{пр}}$) – найбільші напруження, до яких в матеріалі зразка не виникають залишкові деформації. Належить відмітити, що $\sigma_{\text{пр}} > \sigma_{\text{пц}}$.

3) **Межа текучості** ($\sigma_{\text{Т}}$) – напруження при якому розвиток деформацій відбувається без помітного зростання напружень.

Для крихких матеріалів, що не мають площадки текучості, вводять поняття *умовної межі текучості*, при якій залишкова деформація бази зразка складе $\varepsilon_{\text{зал}} = 0,002$. Цю межу називають $\sigma_{0,2}$.

4) **Межа міцності (тимчасовий опір)** $\sigma_{\text{В}}$ – відношення максимального навантаження до вихідної площадки поперечного перерізу бази зразка.

5) **Відносне видовження зразка в момент руйнування**

$$\varepsilon = \Delta l_{\text{зал}} / l_0 \cdot (100\%).$$

6) **Відносне поперечне звуження зразка в момент руйнування**

$\psi = \frac{A_0 - A_{\text{Шmin}}}{A_0} \cdot (100\%)$, де $A_{\text{Шmin}}$ – площа поперечного перерізу шийки зразка в момент руйнування.

Істинна діаграма розтягу. Діаграму розтягу, побудовану з врахуванням зменшення площі поперечного перерізу, називають **істинною діаграмою розтягу**. Її будують в координатах ($\sigma_{\text{іст}}$, $\varepsilon_{\text{іст}}$):

$\sigma_{\text{іст}} = \frac{F}{A}$, де A – поточне значення площі поперечного перерізу зразка.

Максимальне істинне напруження:

$\sigma_{\text{іст}} = \frac{F_D}{A_{\text{Шmin}}}$, де $A_{\text{Шmin}}$ – площа поперечного перерізу зразка після руйнування, F_D – зусилля в момент руйнування.

Величина ε_{ict} визначається із умови рівності об'ємів матеріалу до і після випробувань, виділених поблизу шийки (рис. 3.13)

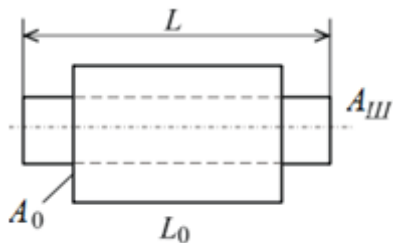


Рис. 3.13

$$A_0 L_0 = A_{III} L, \quad L = L_0 + \Delta L,$$

$$A_0 L_0 = A_{III} L_0 + A_{III} \cdot \Delta L.$$

Поділимо на L_0 :

$$A_0 = A_{III} + A_{III} \cdot \varepsilon_{ict},$$

$$A_0 = A_{III}(1 + \varepsilon_{ict}) \rightarrow \varepsilon_{ict} = \frac{A_0}{A_{III}} - 1.$$

В порівнянні з умовною істинна діаграма має вигляд, представлений на рис. 3.14:

$$\sigma_{ictmax} = \frac{F_D}{A_{IIImin}}, \quad \varepsilon_{ictmax} = \frac{A_0}{A_{IIImin}} - 1.$$

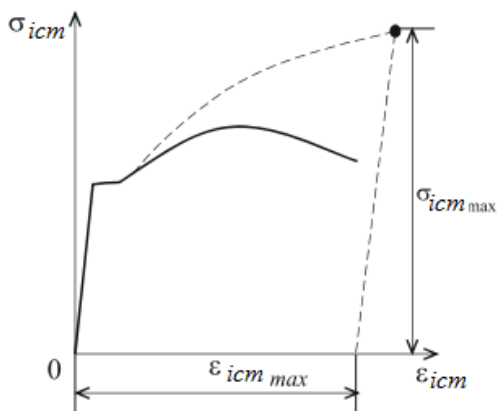


Рис. 3.14

Розвантаження і повторне навантаження. Явище наклепу (нагартування). Наклепом називають явище підвищення пружних властивостей матеріалу в результаті попереднього пластичного деформування. Розглянемо перше і повторне навантаження (рис. 3.15)

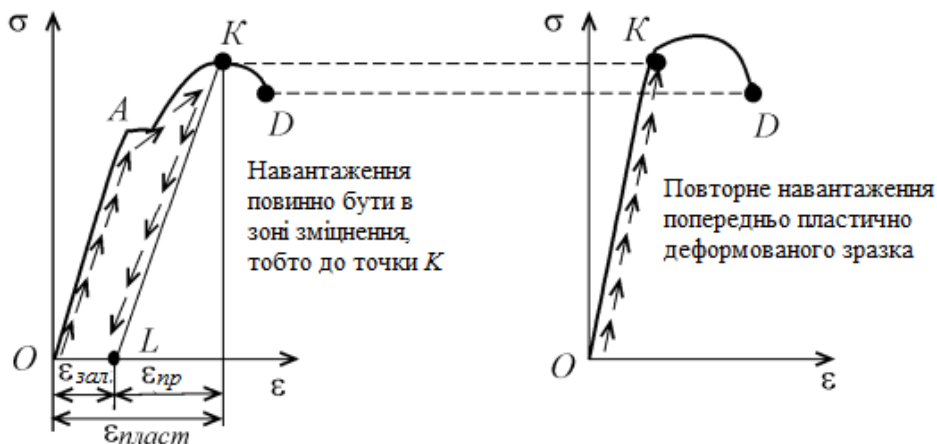


Рис. 3.15

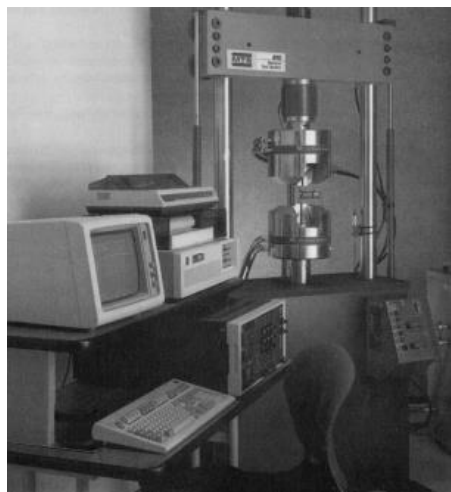
KL – пряма розвантаження. Як показує дослід, ця пряма є паралельною лінії навантаження – прямій OA .

$\epsilon_{пл} = \epsilon_{зал} + \epsilon_{пр}$, де $\epsilon_{пр}$ – пружна складова повної деформації, $\epsilon_{зал}$ – залишкова деформація, $\epsilon_{пл}$ – повна пластична деформація.

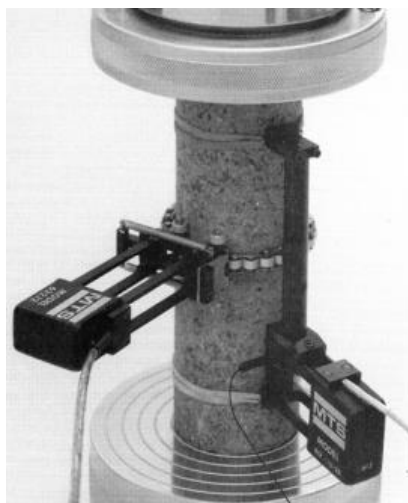
Якщо зразок навантажити в межах $\sigma < \sigma_{пр}$, то $\epsilon_{зал} = 0$, розвантаження буде відбуватись по лінії AO і властивості залишаться незмінними.

Якщо навантажити в межах $\sigma_{пр} < \sigma < \sigma_{в}$ (не доводячи до руйнування!), то розвантаження буде відбуватись по лінії KL . При повторному навантаженні цього зразка його діаграма розтягу зміниться. Особливо важливим є збільшення межі пружності, тобто матеріал набуває здатність сприймати більші навантаження без розвитку залишкових деформацій.

Випробовування на стиск. Для випробування на стиск використовують універсальні випробувальні машини з реверсом зусиль навантаження, що здатні як розтягувати так і стискати зразки (рис. 3.16, а). для визначення деформацій використовують також механічні тензометри (рис. 3.16, б).



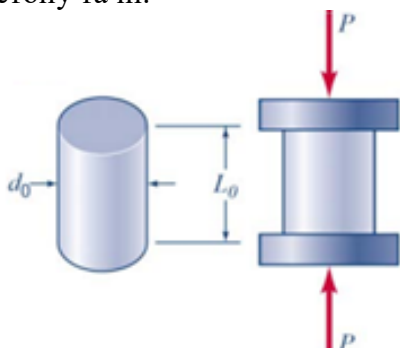
а



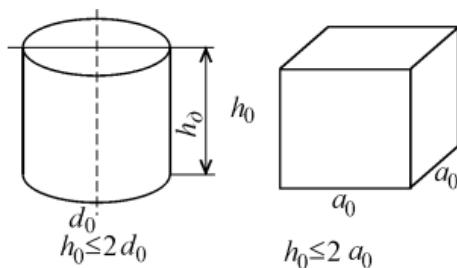
б

Рис. 3.16

Зразки для випробувань. Для випробувань за схемою представленою на рис. 3.17, а використовують циліндричні та призматичні зразки (рис. 3.17, б). Подібним випробуванням піддають не тільки зразки із металевих матеріалів, але і зразки із кераміки, бетону та ін.



а



б

Рис. 3.17

Діаграма стиску. Для пластичних матеріалів (маловуглецеві сталі) на початковому етапі діаграма є аналогічною діаграмі розтягу. При подальшому стисканні сила стиску зростає, оскільки зразок розплющується і його площа поперечного перерізу збільшується. Внаслідок тертя на торцях зразок на початку пластичних деформацій набуває бочкоподібної форми (barreling), а потім перетворюється в

диск. Зазвичай випробування завершують, якщо висота зразка уменшилась на 1/3. Для пластичних матеріалів діаграма має вигляд, як показано на рис. 3.18, а, де представлено діаграму стискання міді.

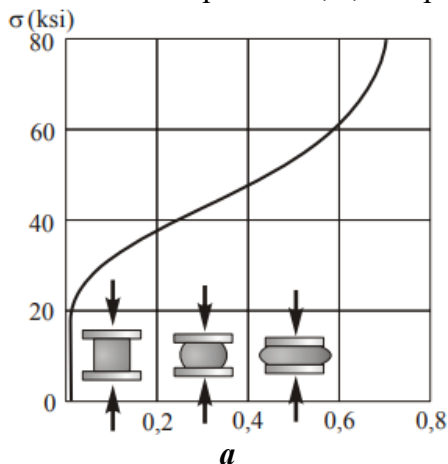


Рис. 3.18

Для крихких матеріалів вид діаграми якісно не відрізняється від діаграми розтягу крихких матеріалів. Тим не менше крихкі матеріали краще чинять опір деформаціям стиску, крива значно вище на діаграмі (рис. 3.18, б).

Порівняння результатів випробувань на розтяг і стиск. Для пластичних матеріалів порівняння проводять по межах текучості. Прийнято рахувати, що

$$\sigma_{Tp} \approx \sigma_{Tc}.$$

Для крихких матеріалів порівняння проводять по межах міцності

$$k = \sigma_{Bp} / \sigma_{Bc}.$$

Для чавуну $k = 0,2 \dots 0,4$.

Для кераміки $k = 0,1 \dots 0,2$.

Поняття про граничні та допустимі напруження.

В якості **граничних напружень** при розрахунках на міцність прийнято рахувати:

а) для пластичних матеріалів межу текучості

$$\sigma_{гран} = \sigma_T, \quad (3.6)$$

б) для крихких матеріалів межу міцності

$$\sigma_{гран} = \sigma_B. \quad (3.7)$$

Допустимим напруженням, що складає праву частину умови міцності, називають величину

$$[\sigma] = \sigma_{\text{гран}}/n.$$

а) для пластичних матеріалів $[\sigma] = \sigma_T/n$,

б) для крихких матеріалів $[\sigma] = \sigma_B/n$, де n – коефіцієнт запасу міцності.

Вплив різних факторів на механічні властивості матеріалів.

На властивості матеріалів і сплавів суттєвий вплив здійснюють хімічний склад, технологія отримання, термічна та механічна обробки, умови експлуатації – температура, характер навантажень та ін..

Таблиця 3.1

Механічні характеристики деяких матеріалів

Матеріал	Напруження, МПа				E, Мпа $\times 10^5$	$\delta\%$ $l_0 = 5d$	μ
	σ_{Tp}	σ_{Tc}	σ_{Br}	σ_{Bc}			
Сталь маловуглецева	250	250	390		2,0	42	0,25...0,35
Сталь 30 не гартована	330	330	530		2,0	28	
Сталь 30 нагартована	1030	900	1100		2,0	11	
Сталь 45 не гартована	370	370	620		2,0	24	
Сталь 45 нагартована	1040	970	1080		2,0	13	
Сталь У8 не гартована	250	430	630		2,0	25	
Сталь У8 нагартована	700	700	1100		2,0	16	
Сталь 30ХГС нагартована	1400	1400	1620		2,0	10	
Сталь 40ХНВ нагартована	1720	2100	2050		2,0	10	0,26...0,36
Чавун сірий СЧ28	140	310	150	640	0,7	0,6	
Титан технічний	520	520	600		1,1	23	
Мідь відпалена	55	55	220		1,1	46	
Мідь пруткова	250	250	320		1,1	15	
Латунь	330	330	450		1,2	17	
Бронза	110	110	136		1,2	7,5	
Алюміній	50	50	84		0,7	35	
Дюралюміній	340	340	540		0,75	13	
Текстоліт	75	115	127	168	0,03	1,5	

Запитання для самоконтролю:

1. Для чого потрібна діаграма розтягу матеріалів і в яких координатах вона будується?
2. Що характеризує діаграма розтягу, побудована в координатах $F - \Delta l$?
3. Які ділянки має діаграма розтягу? Опишіть їх.
4. Що розуміють під границею пропорційності, границею пружності, границею текучості і границею міцності?
5. Які характеристики міцності матеріалів вам відомі?
6. Які характеристики пластичності вам відомі?
7. Що називають наклепом? Як змінюються механічні властивості матеріалу після наклепу?
8. Коли появляється шийка в зразку?
9. Що характеризує питома робота руйнування і як її визначають?

4. ЗРІЗ І ЗМИНАННЯ

Зріз – розчленування елемента на частини шляхом зсуву у вузькій (рис. 4.1, а) під дією дотичних напружень.

Зминання – необоротна деформація приповерхневого шару елемента під дією нормальних контактних напружень (рис. 4.1, б).

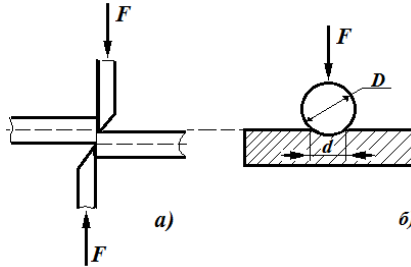


Рис. 4.1

На зріз і зминання розраховують, в основному, з'єднання деталей: болтові, заклепкові, шпонкові, зварні, паяні, дерев'яні врубки тощо.

Міцність, надійність і довговічність окремих вузлів і конструкцій часто визначаються характеристиками з'єднань. Тому їх конструюванню, розрахунку і виготовленню завжди приділяють належну увагу.

4.1. Основні теоретичні відомості

Практичні розрахунки на зріз і зминання базуються на наступній низці припущень:

1. В перерізі елемента, що працює на зріз, виникають лише дотичні напруження.
2. Дотичні напруження в перерізі і зминальні нормальні напруження по площі зминання розподіляються рівномірно.
3. Всі однотипні елементи з'єднання сприймають однакові зусилля.

Умова міцності при зрізі:

$$\tau \leq [\tau_{зр}], \quad (4.1)$$

де τ – розрахункове дотичне напруження в елементі; $[\tau_{зр}]$ – допустиме напруження на зріз матеріалу елемента з'єднання.

$$\tau = \frac{F}{A_{зр}}, \quad (4.2)$$

де F – сила, що сприймається з'єднанням; $A_{зр}$ – сумарна площа зрізу всіх елементів.

Умова міцності при зминанні:

$$\sigma_{зм} \leq [\sigma_{зм}], \quad (4.3)$$

де $\sigma_{зм}$ – розрахункове напруження; $[\sigma_{зм}]$ – допустиме напруження на зминання менш міцного матеріалу.

$$\sigma_{зм} = \frac{F}{A_{зм}}, \quad (4.4)$$

де F сила, що сприймається з'єднанням; $A_{зм}$ – сумарна розрахункова площа поверхні, що зминається. У випадку циліндричної або кульової поверхні $A_{зм}$ дорівнює проекції цієї поверхні на площину, нормальну до напрямку дії сили F . Наприклад, якщо кулька втиснута в деталь (рис. 4.1, б), то $A_{зм}$ дорівнює площі круга діаметром ямки d .

4.1.1. Розрахунок болтових і заклепкових з'єднань

I. Розрахунок на зріз.

Площа зрізу:

$$A_{зр} = nk \frac{\pi d^2}{4}, \quad (4.5)$$

де n – число елементів (болтів, заклепок); d – діаметр перерізу елемента; k – число зрізів одного елемента (k дорівнює числу пар поверхонь з'єднуваних деталей, взаємному переміщенню протидіє елемент).

Тоді умова міцності (5.1) набере вигляду:

$$\tau = \frac{4F}{nk\pi d^2} \leq [\tau_{зр}]. \quad (4.6)$$

Допустиме напруження на зріз при статичних навантаженнях $[\tau_{зр}] = (0,6 \dots 0,8)[\sigma_p]$, де $[\sigma_p]$ – допустиме нормальне напруження на розтяг для того ж матеріалу. Інколи $[\tau_{зр}]$ задають у залежності від границі текучості матеріалу $[\tau_{зр}] = (0,25 \dots 0,35)\sigma_T$.

II. Розрахунок на зминання.

Розрахункова площа зминання:

$$A_{зм} = ntd, \quad (4.7)$$

де n – число елементів; t – товщина деталі; d – діаметр елемента.

Якщо товщини з'єднуваних деталей різні, то у формулу (4.7) підставляють t_{min} .

Тоді умова міцності (4.3) буде мати вигляд:

$$\sigma_{зм} = \frac{F}{nt_{min}d} \leq [\sigma_{зм}]. \quad (4.8)$$

Допустиме напруження на зминання $[\sigma_{зм}] = (1,7 \dots 2,2)[\sigma_c]$, де $[\sigma_c]$ – допустиме напруження на стиск для того ж матеріалу.

В результаті розрахунку повинні задовольнятися обидві умови міцності, (4.6) і (4.8).

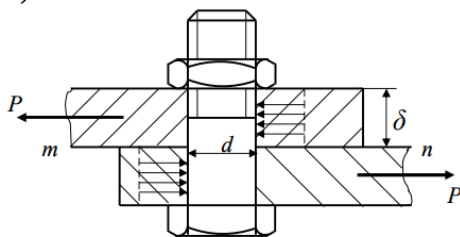


Рис. 4.2

4.2. Приклади розрахунків на зріз і зминання

Приклад 4.1. Розрахувати болтове з'єднання (рис.4.2), якщо $P = 8$ кН. Товщина листів, що скріплюються $\delta = 8$ мм $[\tau] = 60$ МПа, $[\sigma]_{зм} = 200$ МПа.

Розв'язок.

Сила $P = 8$ кН прагне зрізати з'єднання за перерізом mn .

Умова міцності при зрізі (4.7)

$$\tau = \frac{P}{A} \leq [\tau] \Rightarrow A \geq \frac{P}{[\tau]} \Rightarrow d \geq \sqrt{\frac{4 \cdot P}{\pi \cdot [\tau]}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 8 \cdot 10^{-3}}{3,14 \cdot 60}} \cdot 100 = 1,3 \text{ см} = 13 \text{ мм}.$$

Перевіримо стінки отворів деталей на зминання. Для спрощення розрахунків заведено вважати, що тиск рівномірно розподіляється за проекцією напівциліндрової поверхні стінки заввишки δ . Тоді площа зминання

$$A_{зм} = \delta d$$

Звідки, за умовою міцності (4.8)

$$\sigma_{зм} = \frac{P}{\delta d} = \frac{8 \cdot 10^{-3}}{8 \cdot 10^{-3} \cdot 1,3 \cdot 10^{-2}} = 76,8 \text{ (МПа)} \leq [\sigma]_{зм} = 200 \text{ МПа}.$$

Приклад 4.2. Перевірити міцність заклепкового з'єднання (рис. 4.3). Розтягувальна сила $F = 125$ кН, товщина штаб $t_1 = 10$ мм, товщина накладок $t_2 = 6$ мм, ширина $b = 100$ мм, діаметр заклепок $d = 20$ мм, допустимі напруження $[\sigma_p] = 160$ МПа, $[\tau_{зр}] = 100$ МПа, $[\sigma_{зм}] = 300$ МПа.

Розв'язок.

1. Перевіримо міцність штаб на розтяг ($t_1 < 2t_2$). Обчислимо нормальні напруження в ослаблених перерізах 1 – 1 і 2 – 2. На кожній стороні стику розміщені по 3 заклепки. Тому кожна заклепка

сприймає зусилля $N_{\text{закл}} = F/3$. Поздовжнє зусилля в перерізі 1 – 1 $N_{1-1} = F$. В перерізі 2 – 2 воно зменшується на величину зусилля $N_{\text{закл}}$, яке сприймається першою заклепкою, $N_{2-2} = \frac{2}{3}F$.

$$\sigma_{1-1} = \frac{N_{1-1}}{A_{1-1}} = \frac{F}{t_1(b-d)} = \frac{125 \cdot 10^3}{10(100-20)} = 156,3 \frac{H}{\text{мм}^2} = 156,3 \text{ МПа}.$$

Розмірність $F - H$; $t_1, b, d - \text{мм}$.

Умова міцності виконується: $\sigma_{1-1} \leq [\sigma_p]$ ($156,3 < 160$).

$$\sigma_{2-2} = \frac{N_{2-2}}{A_{2-2}} = \frac{2F/3}{t_1(b-2d)} = \frac{2 \cdot 125 \cdot 10^3}{3 \cdot 10(100-2 \cdot 20)} = 138,9 \frac{H}{\text{мм}^2} = 138,9 \text{ МПа}.$$

$$\sigma_{2-2} \leq [\sigma_p].$$

Отже, міцність штаб і накладок забезпечена.

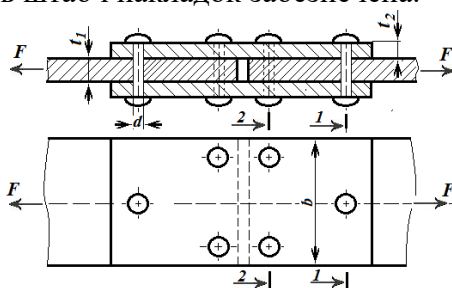


Рис. 4.3

2. Перевіримо міцність заклепок на зріз. На кожній стороні стику по три заклепки ($n=3$); кожна із заклепок зрізується з двох сторін ($k=2$). За формулою (4.6):

$$\tau = \frac{4F}{nkp\pi d^2} = \frac{4 \cdot 125 \cdot 10^3}{3 \cdot 2 \cdot 3,14 \cdot 20^2} = 66,3 \frac{H}{\text{мм}^2} = 66,3 \text{ МПа}.$$

$$\tau \leq [\tau_{зр}] \quad (66,3 < 100).$$

3. Перевіримо міцність з'єднання на зминання. За формулою (4.8):

$$\sigma_{\text{зм}} = \frac{F}{nt_{\min}d} = \frac{F}{nt_1d} = \frac{125 \cdot 10^3}{3 \cdot 10 \cdot 20} = 208,3 \frac{H}{\text{мм}^2} = 208,3 \text{ МПа}.$$

$$\sigma_{\text{зм}} \leq [\sigma_{\text{зм}}] \quad (208,3 < 300).$$

Висновок: міцність з'єднання забезпечена.

Приклад 4.3. Стержень I і труба II з'єднані штифтом III. З'єднання навантажено розтягуючими силами $F = 30 \text{ кН}$ (рис. 4.4). Визначити розміри $d, D, d_{\text{шт}}, c, e$ з'єднання, якщо $[\sigma] = 120 \text{ МПа}$, $[\tau_{зр}] = 80 \text{ МПа}$, $[\sigma_{\text{зм}}] = 240 \text{ МПа}$.

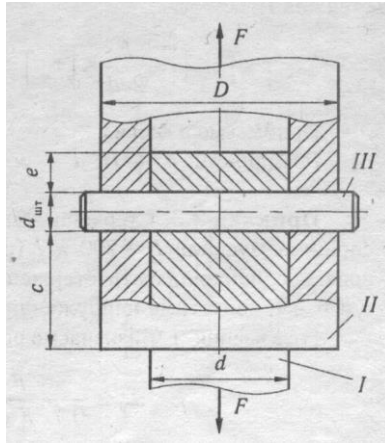


Рис. 4.4

Розв'язання.

1. Визначаємо діаметр штифта з умови міцності на зріз (4.1)

$$\tau = \frac{4 \cdot F}{n k \pi (d_{\text{шт}})^2} \leq [\tau_{\text{зр}}],$$

де $d_{\text{шт}}$ – діаметр штифта ; $n = 1$ (штифт I); $k = 2$ (зріз може відбутись по двох перерізах).

Тоді

$$d_{\text{шт}} \geq \sqrt{\frac{4F}{1 \cdot 2 \cdot \pi \cdot [\tau_{\text{зр}}]}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 30 \cdot 10^3}{2 \cdot 3,14 \cdot 80}} = 15,5 \text{ мм.}$$

Приймаємо $d_{\text{шт}} = 16 \text{ мм.}$

2. Визначаємо діаметр d стержня I з умови міцності на розтяг по ослабленому штифтом перерізу (рис.4.11):

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma] \rightarrow \frac{F}{\pi d^2 / 4 - d_{\text{шт}} \cdot d} \leq [\sigma] \rightarrow 94,2d^2 - 1920d - 30 \cdot 10^3 \geq 0 \rightarrow d \geq 30,8 \text{ мм.}$$

Приймаємо $d = 31 \text{ мм.}$

Розмірність $F - \text{Н}$; $[\sigma] - \text{Н/мм}^2$; $d, d_{\text{шт}} - \text{мм.}$

3. Визначаємо зовнішній діаметр D труби II з умови міцності на розтяг. Небезпечним є переріз, ослаблений двома отворами для штифта (рис. 4.11).

$$\sigma = \frac{F}{\pi D^2 / 4 - \pi d^2 / 4 - d_{\text{шт}}(D - d)} \leq [\sigma] \rightarrow 94,2D^2 - 192D - 61 \cdot 10^3 \geq 0 \rightarrow D \geq 37,7 \text{ мм.}$$

Приймаємо $D = 38 \text{ мм.}$

Розмірність $F - \text{Н}$; $[\sigma] - \text{Н/мм}^2$; $d, d_{\text{шт}} - \text{мм.}$

4. Перевіряємо достатність розміру D з умови міцності при зминанні (4.12).

$$\sigma_{зм} = \frac{F}{ntd} = \frac{F}{1 \cdot (D-d)d_{шт}} = \frac{30 \cdot 10^3}{(38-31) \cdot 16} = 268 \text{ Н/мм}^2 = 268 \text{ МПа.}$$

$\sigma_{зм} > [\sigma]$ ($268 > 240$). Умова міцності не виконується.

Визначаємо діаметр D з умови міцності при зминанні (4.12):

$$\sigma_{зм} = \frac{F}{d_{шт}(D-d)} \leq [\sigma_{зм}] \rightarrow D \geq \frac{F+d \cdot d_{шт}[\sigma_{зм}]}{d_{шт}[\sigma_{зм}]} = \frac{30 \cdot 10^3 + 31 \cdot 16 \cdot 240}{16 \cdot 240} = 38,8 \text{ мм.}$$

Остаточню приймемо $D = 39$ мм.

Розмірність $F - \text{Н}$; $[\sigma_{зм}] - \text{Н/мм}^2$; $d, d_{шт} - \text{мм}$.

5. Визначаємо розмір c з умови міцності на зріз нижньої частини труби II:

$$\tau \leq [\tau_{зр}] \rightarrow \frac{F}{A_{зр}} \leq [\tau_{зр}] \rightarrow \frac{F}{2c(D-d)} \leq [\tau_{зр}] \rightarrow c \geq \frac{F}{2(D-d)[\tau_{зр}]} = \frac{30 \cdot 10^3}{2(39-31) \cdot 80} = 23,4 \text{ мм.}$$

Приймаємо $c = 24$ мм.

Розмірність $F - \text{Н}$; $[\tau_{зр}] - \text{Н/мм}^2$; $d - \text{мм}$.

6. Визначаємо розмір e з умови міцності на зріз верхньої частини стержня I:

$$\tau \leq [\tau_{зр}] \rightarrow \frac{F}{2ed} \leq [\tau_{зр}] \rightarrow e \geq \frac{F}{2 \cdot d \cdot [\tau_{зр}]} = \frac{30 \cdot 10^3}{2 \cdot 31 \cdot 80} = 6,05 \text{ мм.}$$

Приймаємо $e = 6$ мм.

Розмірність $F - \text{Н}$; $[\tau_{зр}] - \text{Н/мм}^2$; $d - \text{мм}$.

4.3. Розрахунок зварних з'єднань

На зріз також прийнято (умовно) розраховувати і зварні з'єднання. Найбільш поширені стикові з'єднання і з'єднання за допомогою кутових швів. З'єднання в стиск застосовуються, коли листи, що сполучаються, знаходяться в одній площині (рис.4.5, а, б).

З'єднання за допомогою кутових швів виконуються, коли листи, що сполучаються, паралельні або перпендикулярні (див. рис.4.5, в). Якщо напрям кутового шва перпендикулярний до дії сили, то шов називається лобовим (див. рис.4.5, г). Шви, паралельні зусиллю, називаються фланговими (див. рис.4.5, д). Якщо не враховувати напливи, то в розрізі кутовий шов має форму рівнобедреного прямокутного трикутника (рис.4.6).

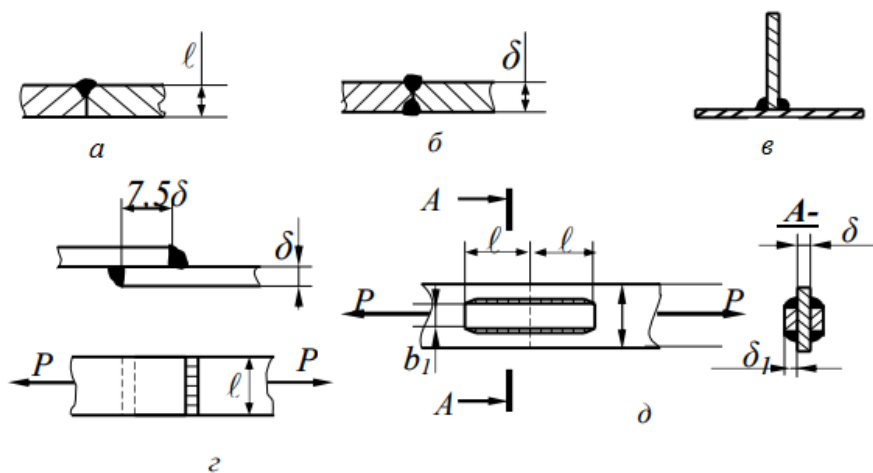


Рис. 4.5

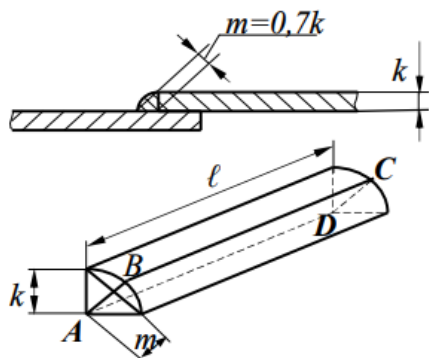


Рис. 4.6

Руйнування шва відбуватиметься за його мінімальним перерізом $ABCD$. За розрахунковий розмір шва, окрім його довжини, беруть висоту m трикутника, яка дорівнює:

$$m = k \cos 45^\circ = 0,7k, \quad (4.8)$$

де k – висота катета зварного шва.

Розрахункова площа перерізу шва складе

$$A = ml = 0,7k l, \quad (4.9)$$

де l – розрахункова довжина шва.

Фактичну довжину кожного шва приймають на 10% більшою розрахунковою у зв'язку з можливим не проваром:

$$l_{\phi} = l_p + 0,1l_p. \quad (4.10)$$

Розрахунок зварних з'єднань, як і заклепувальних, умовно ведеться в припущенні рівномірного розподілу напружень за перерізом шва.

Розглянемо розрахунок флангових і лобових швів, тобто швів, що чинять опір дії дотичних напружень. Враховуючи, що опір сталі зрізу нижче, ніж розтягання, складовою нормальних напружень в будь-якому шві нехтують і розрахунок швів умовно проводять на зріз, припускаючи, що дотичне напруження рівномірно розподіляється за перерізом.

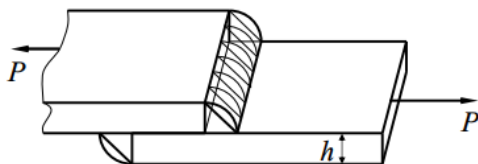


Рис. 4.7

При розрахунку лобових швів з'єднаних внапусток (рис.4.7) враховують обидва шви з площею перерізу. Запишемо умову міцності зварного шва при з'єднанні внапусток:

$$\tau = \frac{P}{A} = \frac{P}{1,4k \cdot l} \leq [\tau]_e. \quad (4.11)$$

Індекс “е” означає, що вироби зварюються електричною дугою. Допустиме напруження металу шва $[\tau]_e$ залежить від електродів і властивостей металу зварних деталей.

4.3.1. Приклади розрахунків зварних з'єднань

Приклад 4.4. Визначити розміри флангових швів, що сполучають смуги (рис.4.8). Розтягуюча сила $P = 14 \text{ кН}$, а допустимі напруження для металу шва на зріз $[\tau]_e = 110 \text{ МПа}$. Визначити розрахункову довжину зварного шва l_ϕ .

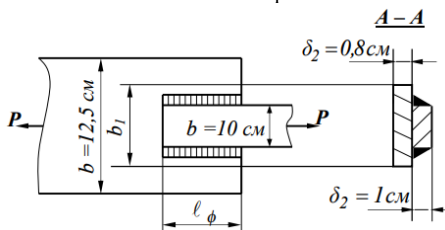


Рис. 4.8

Розв'язання.

З умови міцності шва $\tau = \frac{P}{A} \leq [\tau]_e$

Площа небезпечного перерізу

$$A_e = 2ml = 2l\delta_2 \cdot \cos 45^\circ = 1,4l\delta_2.$$

Тоді розрахункова довжина зварного шва буде дорівнювати:

$$l_p = \frac{P}{1,4 \cdot \delta_2 \cdot [\tau]_e} = \frac{140 \cdot 10^{-3}}{1,4 \cdot 1 \cdot 10^{-2} \cdot 110} \cdot 110 = 0,091 \text{ м} = 9,1 \text{ см}.$$

Використавши (4.10) обчислюємо довжину зварного шва:

$$l_\phi = l_p + 0,1l_p = 9,1 + 0,1 \cdot 9,1 \approx 10 \text{ (см)}.$$

Приклад 4.5. Розтягнутий стержень складається з двох кутників розміром $125 \times 125 \times 12$ мм (рис. 4.9). Вони приварені до фасонного листа фланговими швами, як показано на рисунку. Визначити довжину швів l_1 і l_2 , якщо допустимі напруження на розтяг в кутниках $[\sigma] = 160$ МПа, а допустиме напруження для зварного шва на зріз $[\tau_{зр}] = 110$ МПа. Висота швів $h_{шв}$ дорівнює товщині полки кутників.

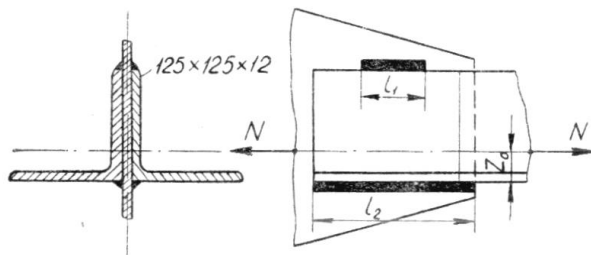


Рис. 4.9.

Розв'язання.

Із сортаменту для кутника $125 \times 125 \times 12$ мм вибираємо $F = 28,9 \text{ см}^2$ і $Z_0 = 3,53$ см. Зусилля в кутнику буде дорівнювати:

$$N = F[\sigma] = 28,9 \cdot 10^{-4} \cdot 160 \cdot 10^6 = 462400 \text{ Н}$$

Загальна довжина флангових швів кожного кутника при висоті шва $h_{шв} = 12$ мм:

$$l_{шв} = \frac{N}{0,7h_{шв}[\tau]} = \frac{462400}{0,7 \cdot 0,012 \cdot 110 \cdot 10^6} = 0,5 \text{ м}.$$

Зусилля N в кутнику не проходить по середині полки, що приварюється. Тому воно розподіляється між швами зворотно пропорційно відстаням від цих швів до лінії дії зусилля, тобто зворотно пропорційно величинам Z_0 і $b - Z_0$ (де b – ширина полки, Z_0 – координата центру ваги перерізу кутника). Звідси, для визначення довжин швів l_1 і l_2 , будемо мати наступні формули:

$$l_1 = l_{шв} \frac{Z_0}{b}; \quad l_2 = l_{шв} \frac{b - Z_0}{b}.$$

Підставивши числові значення, отримуємо:

$$l_1 = 50 \cdot \frac{3,53}{12,5} = 14,1 \text{ см};$$

$$l_2 = 50 \cdot \frac{12,50 - 3,53}{12,5} = 35,9 \approx 36 \text{ см}.$$

Округлюємо отримані розміри і приймаємо, додавши по 1 см на не провар на початку і в кінці шва: $l_1 = 150 \text{ мм}$, $l_2 = 370 \text{ мм}$.

4.4. Розрахунок з'єднань дерев'яних деталей

Розрахунок полягає у визначенні розмірів з'єднання (наприклад **a, b, c** – рис. 4.10), що забезпечують його міцність. У розрахунках використовують формули (4.1) та (4.3).

Особливість розрахунків визначається анізотропією матеріалу.

Найбільші граничні напруження (нормальні і дотичні) відповідають перерізам, що перпендикулярні до волокон, тобто поперечним, найменші – перерізам, що паралельні волокнам. Це стосується і відповідних допустимих напружень. В інших перерізах вони мають проміжне значення

Величину допустимого нормального напруження для довільного похилого перерізу наближено можна визначити за емпіричною формулою:

$$[\sigma_\alpha] = \frac{[\sigma]}{1 + ([\sigma]/[\sigma_{90^\circ}] - 1) \sin^3 \alpha}, \quad (4.12)$$

де $[\sigma]$ і $[\sigma_{90^\circ}]$ – допустимі напруження для поперечного **A** і поздовжнього **A_{90°}** перерізів відповідно; α – кут між поперечними **A** і похилими **A_α** перерізами.

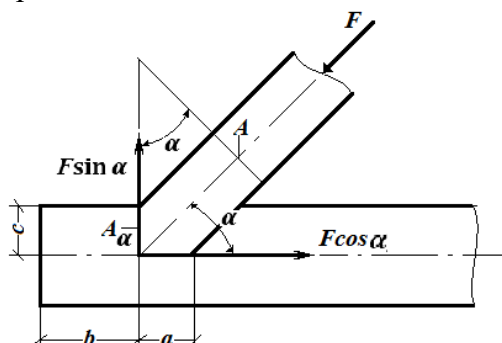


Рис. 4.10

Приклад 4.5. Визначити розміри a , f , c і s (рис. 4.11) дерев'яного вузла. Кроква сприймає силу $F = 70 \text{ kH}$, кут нахилу покрівлі $\alpha = 30^\circ$, розміри перерізу бруса $b = 15 \text{ см}$, $h = 20 \text{ см}$. Допустимі напруження на зминання уздовж волокон $[\sigma_{зм}] = 8 \text{ МПа}$, на зминання поперек волокон $[\sigma_{90^\circ}] = 2,5 \text{ МПа}$ і на сколювання уздовж волокон $[\tau] = 1 \text{ МПа}$.

Розв'язок. 1. Розкладемо силу F на складові F_1 і F_2 . Ці сили врівноважуються реакцією опори $R = F_1$ і розтягувальним зусиллям в затяжці $N = F_2$.

2. Визначимо розмір s зумови міцності при зминанні затяжки силою R по площі sb :

$$[\sigma_{зм}] = \frac{R}{sb} \leq [\sigma_{90^\circ}] \rightarrow s \geq \frac{R}{b[\sigma_{90^\circ}]} = \frac{35 \cdot 10^3}{150 \cdot 2.5} = 93.3 \text{ мм.}$$

Розмірність: R – Н; b – мм; $[\sigma_{90^\circ}]$ – Н/мм².

Приймаємо $s = 10 \text{ см}$.

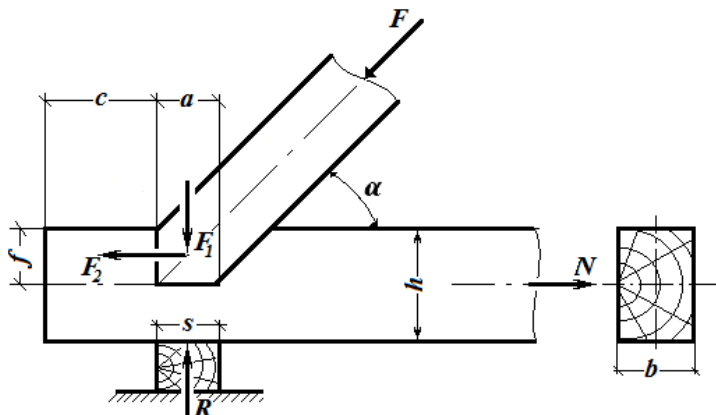


Рис. 4.11

3. Розмір a , з умови рівномірності дорівнює s ($R = F_1$). Конструктивно він приймається більшим.

4. Розмір f визначимо з умови міцності при зминанні по площі fb у місці контакту торця крокви із затяжкою. Волокна крокви зминаються під кутом $\alpha = 30^\circ$, затяжки – уздовж волокон. З умови міцності на зминання крокви маємо:

$$\sigma_{зм} = \frac{F_2}{f \cdot b} \leq [\sigma_{30^\circ}] \rightarrow f \geq \frac{F_2}{b \cdot [\sigma_{30^\circ}]}.$$

За формулою (4.12) :

$$[\sigma_{30}] = \frac{[\sigma]}{1 + ([\sigma]/[\sigma_{90^\circ}] - 1) \sin^3 30^\circ} = \frac{8}{1 + (8/2.5 - 1) \cdot 0.5^3} = 6.27 \text{ МПа.}$$

Тоді

$$f \geq \frac{60.62 \cdot 10^3}{150 \cdot 6.27} = 64.45 \text{ мм.}$$

Розмірність: F_2 – Н; b – мм; $[\sigma_{30^\circ}]$ – Н/мм².

Приймаємо $f = 7$ см.

5. Розмір кінця затяжки визначаємо з умови міцності при сколюванні уздовж волокон по площі **cb** :

$$\tau = \frac{F_2}{c \cdot b} \leq [\tau] \rightarrow c \geq \frac{F_2}{b \cdot [\tau]} = \frac{60.62 \cdot 10^3}{150 \cdot 1} = 404 \text{ мм.}$$

Розмірність: F_2 – Н; b – мм; $[\tau]$ – Н/мм².

Приймаємо $c = 41$ см.

Запитання для самоконтролю:

1. Що таке зріз і зминання?
2. Які ви можете навести приклади деталей та з'єднань, що розраховуються на зріз і зминання?
3. Які допущення роблять при розрахунках на зріз і зминання?
4. Як записують умови міцності при зрізі і зминанні?
5. Як обчислюється сумарна площа зрізу при розрахунках болтових і заклепкових з'єднань?
6. Як обчислити розрахункову площу при зминанні у випадку циліндричної або кульової поверхні?
7. Як визначають необхідну кількість елементів у болтових і заклепкових з'єднаннях?
8. Як записують умову міцності для зварного з'єднання з кутовими швами?
9. Як визначається розрахункова довжина зварного шва?
10. Чому потрібно уникати лобових швів?
11. Чим визначається особливість розрахунку дерев'яних деталей?
12. Як обчислити величину допустимого напруження для похилого перерізу дерев'яного бруса, якщо величини допустимих напружень для поперечного і поздовжнього перерізів відомі?

4.5. Задачі для самостійного розв'язання

4.1. Перевірити міцність заклепкового з'єднання, якщо діаметр заклепки $d = 20$ мм (рис. 4.12), $[\sigma] = 160$ МПа, $[\tau_{зр}] = 110$ МПа, $[\sigma_{зм}] = 320$ МПа.

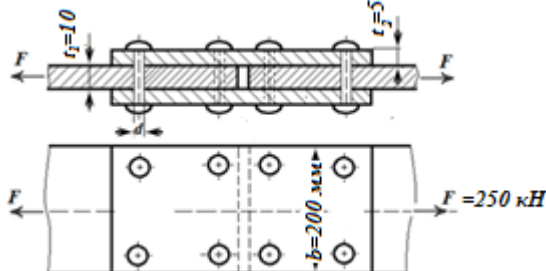


Рис. 4.12

Відповідь: $\sigma = 156,3$ МПа; $\tau_{зр} = 99,5$ МПа; $\sigma_{зм} = 312,5$ МПа.

Міцність з'єднання забезпечена.

4.2. З умов рівномірності визначити розміри головки D і h стержня, показаного на рис. 4.13 при допустимих напруженнях: $[\sigma] = 140$ МПа, $[\tau_{зр}] = 100$ МПа, $[\sigma_{зм}] = 250$ МПа

Відповідь: $D = 42$ мм; $h = 11$ мм.

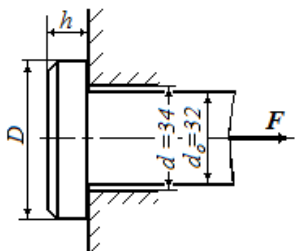


Рис. 4.13

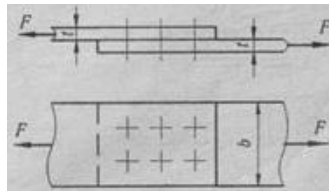


Рис. 4.14

4.3. Дві штаби товщиною $t = 10$ мм з'єднані нахлестом шістьма болтами діаметром $d = 20$ мм (рис. 4.14). Визначити допустиму величину сил F і необхідну ширину листа b при допустимих напруженнях: $[\sigma] = 120$ МПа; $[\tau_{зр}] = 72$ МПа; $[\sigma_{зм}] = 320$ МПа.

Відповідь: $[F] = 135,7$ кН; $b = 153$ мм.

4.4. В сталевому листі товщиною 10 мм (рис. 4.15) потрібно продавити отвір діаметром 18 мм. Визначити, яку необхідно прикласти силу до пуансона, якщо границя міцності матеріалу листа на зріз $\tau_m = 350$ МПа.

Відповідь: 198 кН.

4.5. Перевірити міцність штаби (рис. 4.16) і визначити необхідну кількість заклепок діаметром 10 мм, за допомогою яких штаба

кріпиться до косинки, якщо $F = 30 \text{ кН}$, $b = 50 \text{ мм}$, $t = 5 \text{ мм}$. Допустимі напруження $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$, $[\tau_{зр}] = 100 \text{ МПа}$, $[\sigma_{зм}] = 280 \text{ МПа}$.

Відповідь: $\sigma = 150 \text{ МПа} < [\sigma]$; 4 шт.

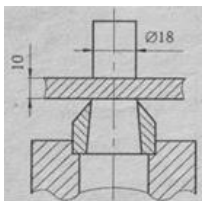


Рис.4.15

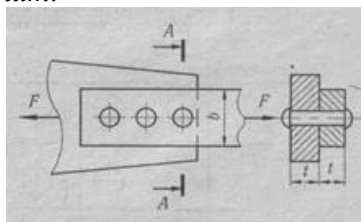


Рис. 4.16

4.6. Визначити контактні напруження, що виникають між головкою стержня і штабою (рис. 4.17), якщо нормальні напруження в перерізі стержня 100 МПа . Діаметр стержня $d = 10 \text{ мм}$, діаметр головки $D = 36 \text{ мм}$

Відповідь: $44,6 \text{ МПа}$.

4.7. Стержень з двох рівнобоких кутиків розтягується силою $F = 300 \text{ кН}$. Він прикріплений до фасонки (рис. 4.18) товщиною 12 мм заклепками діаметром 20 мм . Підібрати .профіль кутиків і визначити необхідну кількість заклепок, я к що $[\sigma] = 140 \text{ МПа}$, $[\tau_{зр}] = 100 \text{ МПа}$, $[\sigma_{зм}] = 280 \text{ МПа}$.

Відповідь: 2 кутики $80 \times 80 \times 8$ (ГОСТ 8509-72), 5 шт.

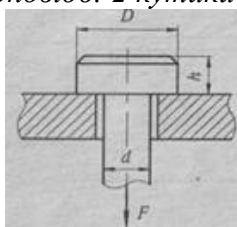


Рис. 4.17

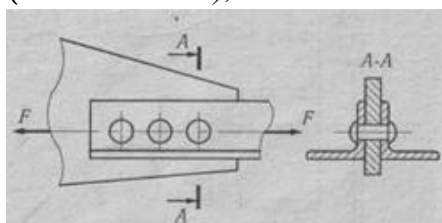


Рис. 4.18

4.8. Вал передає обертовий момент $T = 300 \text{ Н м}$. Визначити напруження зрізу в шпонці і напруження зминання між шпонкою і маточиною колеса (рис. 4.19).

Відповідь: $\tau = 20,8 \text{ МПа}$; $\sigma_{зм} = 62,5 \text{ МПа}$.

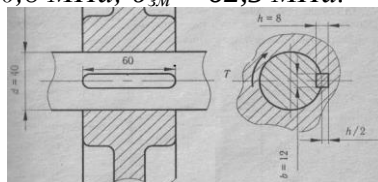


Рис. 4.19

4.9. Стояк ферми, що складається з двох швелерів № 12, сприймає зусилля $F = 420 \text{ кН}$ (рис. 4.20). Визначити необхідні розрахункову і фактичну (проектну) довжини флангових швів l , якщо катет шва $K = 10 \text{ мм}$; допустиме напруження на зріз металу шва $[\tau_{\text{шв}}] = 100 \text{ МПа}$.

Відповідь: $l = 15 \text{ см}$; $l = 16 \text{ см}$.

4.10. З умови рівномірності зварного з'єднання визначити довжину флангових швів l (рис. 4.21), якщо $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$, $[\tau_{\text{шв}}] = 110 \text{ МПа}$. Катет шва прийняти рівним товщині штаби, $K = t$.

Відповідь: $11,4 \text{ см}$.

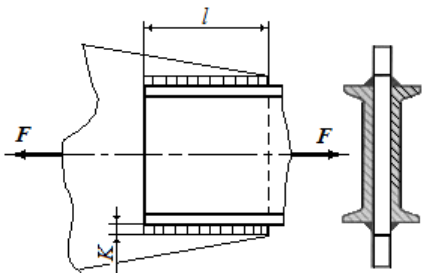


Рис. 4.20

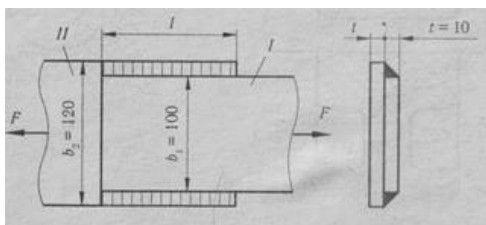


Рис. 4.21

4.11. Визначити проектну довжину флангових швів l_1 і l_2 , що прикріплюють нерівнобокий кутик 100х63х8 (ГОСТ 8510- 72) до фасонки (рис. 4.22). Розтягувальні напруження в стержні 140 МПа . Катет шва прийняти $K = 8 \text{ мм}$, допустиме напруження на зріз для металу шва $[\tau_{\text{шв}}] = 110 \text{ МПа}$.

Відповідь: $l_1 = 20,1 \text{ см}$; $l_2 = 10,5 \text{ см}$.

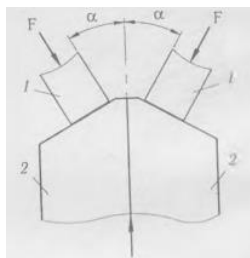


Рис. 4.22

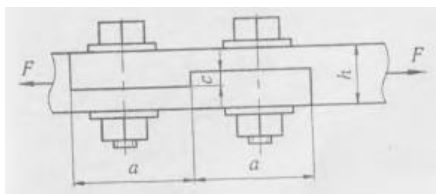


Рис. 4.23

4.12. Соснові підкоси 1 (рис. 4.22) торцевими поперечними перерізами опираються на дубові подушки 2. Яким повинен бути кут, щоб виконувалась умова рівномірності по напруженнях зминання? Допустимі напруження на зминання прийняти: для дуба уздовж волокон $[\sigma_{\text{зм}}]_{\text{д}} = 15 \text{ МПа}$, поперек волокон $[\sigma_{90^\circ}] = 4,8 \text{ МПа}$, для сосни уздовж волокон $[\sigma_{\text{зм}}]_{\text{с}} = 15 \text{ МПа}$.

Відповідь: $\approx 30^\circ$.

4.13. Два бруси прямокутного перерізу розмірами b - 12 см і $h = 18 \text{ см}$ з'єднані прямим зубом глибиною $c = h/4$ (рис. 4.23).

Визначити величину допустимої розтягуювальної сили T^7 і розмір a при допустимих напруженнях: на розтяг $[\sigma] = 10 \text{ МПа}$; на сколювання уздовж волокон $[\tau] = 1 \text{ МПа}$ і зминання уздовж волокон $[\sigma_{зм}] = 8 \text{ МПа}$. Ниливом стягувальних врубку болтів нехтувати.

Відповідь: $[F] = 43,2 \text{ кН}$; $a = 36 \text{ см}$.

4.14. Трубчастий палець 1 (рис. 4.24) з'єднує деталі 2 і 3, до яких прикладені сили F . Визначити з умови міцності пальця на зріз допустиме значення сили F . При знайденій силі визначити необхідні значення розмірів B і b , якщо допустиме напруження на зминання між деталями 1 і 2 дорівнює $[\sigma_{зм}]_2$, а між деталями 1 і 3 - $[\sigma_{зм}]_3$. Дані взяти з таблиці 4.1.

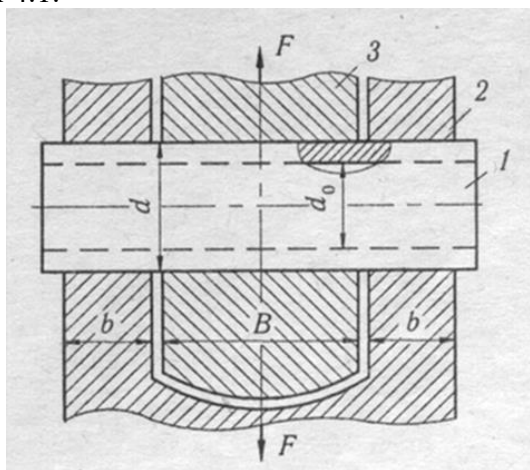


Рис. 4.24

Таблиця 4.1

Варіанти завдань до РПР 4.3.

Варіант	Задані величини				
	d	d_0	$[\sigma_{зм}]_2$	$[\sigma_{зм}]_3$	$[\tau_{зр}]$
	мм		МПа		
1	40	32	165	185	85
2	42	32	160	180	90
3	44	34	165	175	95
4	46	36	160	170	90
5	48	36	150	180	80
6	50	36	140	175	75
7	48	32	155	185	75
8	46	34	160	190	70
9	42	34	165	185	65
0	44	30	170	190	80

5. ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ПЕРЕРІЗІВ

При проведенні розрахунків на міцність, жорсткість і стійкість конструктивних елементів типу бруса (стержня) виникає потреба використання деяких геометричних характеристик (властивостей) плоских поперечних перерізів бруса (плоских фігур), тобто належить знати площу перерізу, положення її центру ваги, статичні моменти, осьові, полярний і відцентровий моменти інерції, осьові і полярний моменти опору.

Ці характеристики внаслідок свого вузького прикладного зачення в загальному курсі геометрії не вивчаються, але вони тісно пов'язані з механікою матеріалів і конструкцій, тому завжди входять в курс механіки матеріалів і конструкцій в якості невід'ємної частини.

В подальшому будемо ототожнювати поняття «*плоска фігура*» і «*переріз*», розуміючи «*плоский поперечний переріз бруса*».

В цьому розділі розглянуті не всі геометричні характеристики плоских перерізів, що використовуються в курсі «Механіка матеріалів і конструкцій». Деякі з них використовують тільки при розрахунку брусів на міцність при крученні та згині, а також в розрахунках на стійкість.

5.1. Статичний момент площі

Статичним моментом площі плоскої фігури відносно осі, що лежить у тій самій площині, називають взяту по всій площі суму добутків площ елементарних площадок на відстані їх від цієї осі (рис.5.1). Статичний момент площі відносно осей Ox і Oy буде:

$$S_X = \int_A y dA; \quad S_Y = \int_A x dA \quad (5.1)$$

Статичний момент можна визначити також наступними формулами:

$$S_X = \sum A_i y_i; \quad S_Y = \sum A_i x_i, \quad (5.2)$$

де A_i , y_i , x_i – відповідно площа i -тої частини фігури й координати центра ваги її.

У теоретичній механіці було виведено формули для визначення координат центра ваги площі фігури:

$$X_C = \frac{\sum A_i x_i}{A}, \quad Y_C = \frac{\sum A_i y_i}{A},$$

де $A = \sum A_i$ – площа всієї фігури.

Вирази, які стоять у чисельниках правих частин цих формул, є статичними моментами площі фігури відносно осей y і x . Отже,

$$S_X = \int_A y dA = Y_C A; \quad S_Y = \int_A x dA = X_C A.$$

Статичний момент площі фігури відносно осі, що лежить у тій самій площині, дорівнює добутку площі фігури на відстань її центра ваги від цієї осі. Одиниця вимірювання статичного моменту площі – $[S] = \text{м} \cdot \text{м}^2 = \text{м}^3$.

Статичний момент площі фігури може бути величиною додатною, від'ємною і дорівнювати нулю. Очевидно, що статичний момент площі відносно осі, яка проходить через центр ваги площі фігури (центральної осі), у тому числі відносно осі симетрії фігури, *дорівнює нулю*.

У теоретичній механіці встановлено також, що в формулах для визначення координат центра ваги площі можна розуміти площі кінцевих частин фігури, а під x_i і y_i — координати центрів ваги цих частин (тобто застосовувати метод розбиття і т. ін.). Звідси випливає, що для визначення статичного моменту площі складної фігури також можна застосовувати ті ж методи, тобто *визначати статичний момент* всієї фігури як *алгебраїчну суму* статичних моментів окремих її частин.

Поняття про статичний момент площі буде потрібне для визначення положення центрів ваги перерізів і для визначення дотичних напружень згину.

5.2. Центральні вісі і центр ваги перерізу

Оскільки рівнодіюча внутрішніх зусиль проходить через «центр ваги» перерізу, то визначення положення центру ваги є важливою задачею. Розглянемо зміну статичного моменту перерізу при паралельному перенесенні координатних осей.

Дано: A, S_x, S_y, a, b (рис.

5.2). **Потрібно** визначити S_{x_1}, S_{y_1} , тобто належить встановити, яким чином змінюються статичні моменти при паралельному перенесенні осей.

За визначенням (5.1)

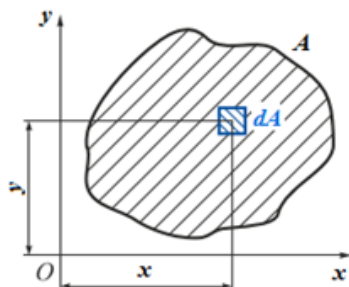


Рис. 5.1

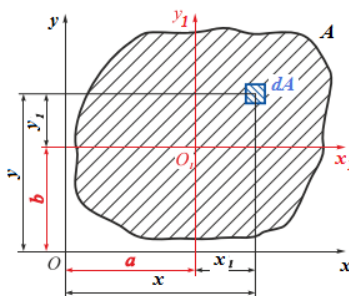


Рис. 5.2

$$\begin{cases} S_{x_1} = \int_A y_1 dA, \\ S_{y_1} = \int_A x_1 dA. \end{cases} \quad (5.3)$$

З рис. 5.2 бачимо, що

$$\begin{cases} x_1 = x - a, \\ y_1 = y - b. \end{cases} \quad (5.4)$$

Підставивши значення x_1 і y_1 з (5.4) в (5.3), отримуємо:

$$\begin{cases} S_{x_1} = \int_A (y - b) dA, \\ S_{y_1} = \int_A (x - a) dA. \end{cases} \quad (5.5)$$

У виразах (5.5)

$$\int_A y dA = S_x; \quad \int_A x dA = S_y; \quad \int dA = A.$$

Всі ці величини є заданими, тому остаточно будемо мати

$$\begin{cases} S_{x_1} = S_x - bA, \\ S_{y_1} = S_y - aA. \end{cases} \quad (5.6)$$

Оскільки a і b – дійсні числа, то існує таке *єдине* значення b , при якому $S_{x_1} = 0$, і таке ж *єдине* значення a , при якому $S_{y_1} = 0$. Ці значення a і b є координатами центру ваги перерізу, їх позначають x_C і y_C відповідно, тобто, якщо $a = x_C$ і $b = y_C$, то

$$\begin{cases} 0 = S_x - y_C \cdot A, \\ 0 = S_y - x_C \cdot A. \end{cases} \quad (5.7)$$

Осі, відносно яких статичний момент перерізу дорівнює нулю, називають *центральною осями* цього *перерізу*.

Точку перетину центральних осей перерізу називають його *центром ваги (ЦВ)*.

Система рівнянь (5.7) дозволяє розв'язувати важливі задачі двох типів:

1. Визначення статичних елементів перерізів:

а) найпростішого, якщо відомі значення A , y_C і x_C , за співвідношеннями

$$\begin{cases} S_x = y_C \cdot A, \\ S_y = x_C \cdot A. \end{cases} \quad (5.8)$$

б) складного, якщо відомі значення A_i , y_{Ci} і x_{Ci} , за виразами

$$\begin{cases} S_x = \sum_{i=1}^n y_{c_i} \cdot A_i, \\ S_y = \sum_{i=1}^n x_{c_i} \cdot A_i, \end{cases} \quad (5.9)$$

де n – кількість простих частин складного перерізу.

Співвідношення (5.8) і (5.9) є більш простою формою реалізації системи (5.2), оскільки виключають операцію інтегрування, якщо відома площа перерізу і відстань від його центру ваги до осі, відносно якої обчислюють статичний момент перерізу.

2. Визначення координат центру ваги перерізу:

а) найпростішого, якщо відомі значення A, S_x і S_y , за відношеннями

$$\begin{cases} x_c = \frac{S_y}{A}, \\ y_c = \frac{S_x}{A}; \end{cases} \quad (5.10)$$

б) складного, якщо відомі значення A_i, S_{x_i} і S_{y_i} , за виразами

$$\begin{cases} x_c = \frac{\sum_{i=1}^n S_{y_i}}{\sum_{i=1}^n A_i}, \\ y_c = \frac{\sum_{i=1}^n S_{x_i}}{\sum_{i=1}^n A_i}; \end{cases} \quad (5.11)$$

де n – кількість простих частин складного перерізу

Правило симетрії. Якщо *переріз має вісь симетрії*, то статичний момент перерізу відносно цієї осі *тотожно дорівнює нулю*. Як наслідок:

а) вісь симетрії завжди є центральною віссю симетрії;

б) центр ваги перерізу завжди лежить на осі симетрії, якщо вона існує;

в) якщо в перерізі існує дві осі симетрії, то центр ваги (геометричний центр) цього перерізу буде знаходитись в точці перетину обох осей симетрії.

Достовірність правила симетрії є очевидною з рис. 5.3, кожна площадка dA , розташована вище осі x , для якої $y dA > 0$, має відповідну, розташовану нижче осі x , для якої $y dA < 0$. Тому

$$S_x = \int_A y dA = 0.$$

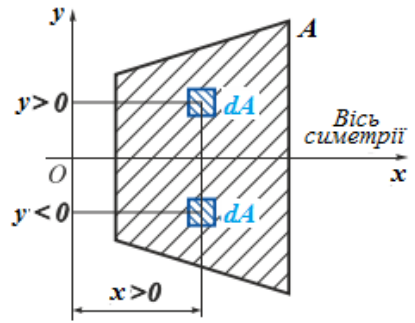


Рис. 5.3

Приклади визначення координат центру ваги найпростіших перерізів

Приклад 5.1. Визначити координати центру ваги прямокутника з основою b і висотою h в системі координатних осей xOy (рис. 5.4).

Дано: b, h .

Необхідно визначити x_c, y_c .

Розв'язок.

Скористаємось виразом (5.10), запишемо

$$x_c = \frac{S_y}{A}, \text{ де } A = bh, S_y = \int_A x dA.$$

З урахуванням того, що $dA = bdy$, перейдемо до інтегралу по координаті y :

$$S_y = b \int_0^h y dy = \frac{bh^2}{2}.$$

$$\text{Тоді } y_c = \frac{bh^2}{2bh} = +\frac{h}{2}; \text{ аналогічно } x_c = +\frac{b}{2}.$$

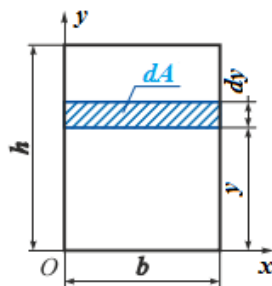


Рис. 5.4

Приклад 5.2. Визначити на якій відстані від основи b розташовується центр ваги трикутника (рис.5.5).

Дано: b, h .

Необхідно визначити y_c .

Розв'язок.

Для розв'язку скористаємось співвідношенням (5.10):

$$y_c = \frac{S_x}{A}, \text{ де } A = \frac{bh}{2}, S_x = \int_A y dA.$$

В останньому виразі $dA = b(x)dx$.

Із подібності трикутників

$$\frac{b(x)}{b} = \frac{h-y}{h} \Rightarrow b(x) = b \left(1 - \frac{y}{h}\right),$$

$$\text{тоді } dA = b \left(1 - \frac{y}{h}\right) dy.$$

Підставимо dA у вираз

$$S_x = \int_0^h b \left(1 - \frac{y}{h}\right) dy = b \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3h}\right) = \frac{bh^2}{6}.$$

$$\text{Кінцево } y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{bh^2}{6} \cdot \frac{2}{bh} = \frac{h}{3}.$$

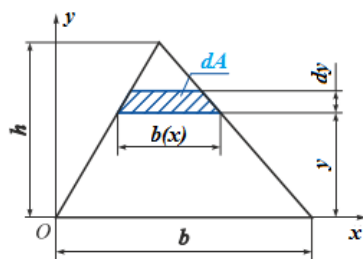


Рис. 5.5

Приклад 5.3. Визначити координати центру ваги трикутника з основою b і висотою h в системі координатних осей xOy (рис. 5.6).

Дано: b, h .

Необхідно визначити x_c, y_c .

Розв'язок.

Розбиваємо трикутник ABC на два прямокутних трикутники, опустивши з вершини B на його основу AC перпендикуляр BD.

Позначимо на рис. 5.6 центри ваги трикутників ABD і BCD, які знаходяться на відстані $1/3$ від катетів (O_1 і O_2).

Складемо суму статичних моментів цих трикутників відносно осі Oy:

$$S_y = \sum_{i=1}^2 S_{y_i} = \frac{b_a h}{2} \cdot \frac{2}{3} b_a + \frac{b_c h}{2} \left(b_a + \frac{b_c}{3} \right) = \frac{2b_a^2 h + b_c(3b_a + b_c)}{6}.$$

Поділивши цю величину на площу трикутника ABC, отримаємо шукану абсцису x_c центру ваги O трикутника:

$$x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{2b_a^2 h + b_c h(3b_a + b)}{6 \frac{bh}{2}} = \frac{2b_a^2 + b_c(3b_a + b_c)}{3b}.$$

Спростимо цей вираз, підставивши значення $b_a + b_c = b$:

$$x_c = \frac{2b_a^2 + b_c(2b_a + b)}{3b} = \frac{2b_a(b_a + b_c) + b_c b}{3b} = \frac{2b_a + b_c}{3} = \frac{b + b_a}{3}.$$

Центри ваги O_1 і O_2 прямокутних трикутників ABD і BCD розташовуються на прямій $O_1 O_2$, паралельній основі трикутника AC і знаходяться на відстані, що дорівнює третині висоти. На цій же лінії буде знаходитись і центр ваги O_c трикутника ABC.

Таким чином ордината центру ваги трикутника ABC

$$y_c = \frac{h}{3}.$$

Приклад 5.3. Визначити положення центру ваги півкругу радіусом r відносно осі x (рис. 5.7).

Дано: r .

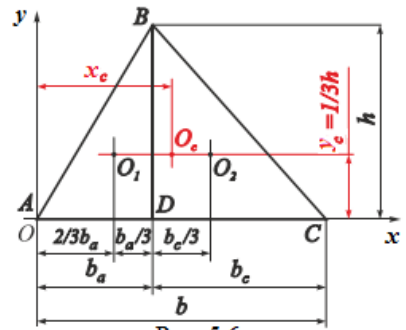
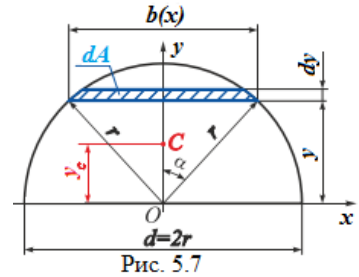
Необхідно визначити y_c .

Розв'язок.

Оскільки переріз є симетричним відносно осі y, то центр ваги C півкругу розташовується на цій осі. Тому необхідно визначити тільки ординату y_c центру ваги.

Виділимо в півкругу на відстані y від осі x елементарну площадку шириною $b(x)$ і висотою dy . Площа цієї площадки

$$dA = b(x)dy.$$



Як видно із рис. 5.7, $b(x) = 2r \sin \alpha$ і $y = r \cos \alpha$, як наслідок,
 $dy = (-r \sin \alpha) d\alpha$.

Тоді статичний момент відносно осі x

$$S_x = \int_A y dA = \int_0^r y \cdot 2r \sin \alpha \cdot dy = \\ \int_{\frac{\pi}{2}}^0 r \cos \alpha \cdot 2r \sin \alpha (-r \sin \alpha) d\alpha = -2r^3 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2 \alpha \cos \alpha d\alpha = \\ -2r^3 \left(\frac{\sin^3 \alpha}{3} \right) = \frac{2}{3} r^3.$$

Для знаходження положення координати центру ваги y_C скористаємося співвідношенням (5.10)

$$y_C = \frac{S_x}{A} = \frac{\frac{2}{3} r^3}{\frac{\pi r^2}{2}} = \frac{4r}{3\pi} = 0,4244r.$$

Приклад 5.4. Визначити координати центру ваги складного перерізу і показати систему центральних осей x і y (рис. 5.8)

Дано: $h = 5$ см, $b = 8$ см, $d = 2$ см, $t = 1$ см.

Необхідно визначити x_C , y_C .

Розв'язок.

1. Виконуємо креслення складного перерізу в масштабі (рис. 5.9).
2. Розібемо переріз на найпростіші частини і присвоїмо цим частинам номери (1 і 2).
3. В центрі кожної із найпростіших частин перерізу розташовуємо центральні системи координат $x_i O_i y_i$ (в нашому випадку $x_1 O_1 y_1$ і $x_2 O_2 y_2$).
4. Вибираємо робочу (базову) систему координат, в якій будуть визначені координати центру ваги всього перерізу. Прийнемо в якості робочої систему осей $x_1 O_1 y_1$.

Примітка. Задачу можна розв'язати в будь-якій системі координат, але для мінімізації та спрощення обчислень доцільно вибрати в якості робочої (базової) центральну систему осей одного із елементів складного перерізу.

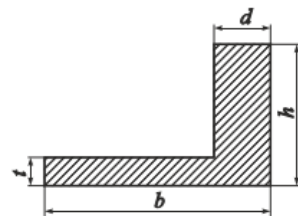


Рис. 5.8

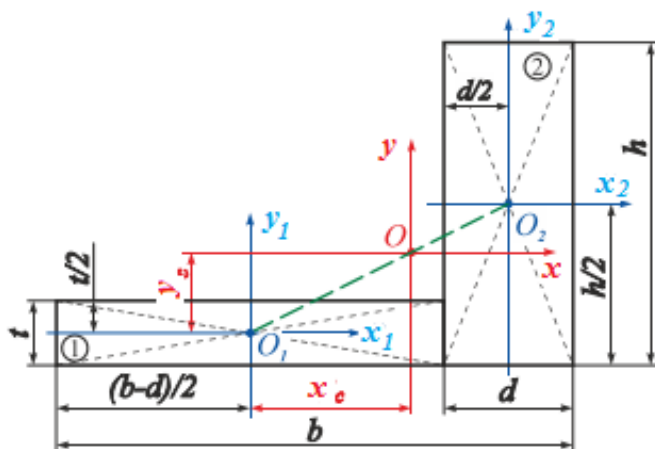


Рис. 5.9

5. Запишемо формули для визначення координат центру ваги складного перерізу:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^2 S_{y_i}}{\sum_{i=1}^2 A_i}; \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^2 S_{x_i}}{\sum_{i=1}^2 A_i}.$$

6. Обчислюємо площу складного перерізу:

$$\sum_{i=1}^2 A_i = A_1 + A_2 = (b-d)t + hd = (8-2) \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 6 + 10 = 16 \text{ см}^2.$$

7. Визначаємо статичні моменти складного перерізу відносно осей x_1 і y_1 :

$$S_{y_1} = \sum_{i=1}^2 S_{y_1}^{(i)} = S_{y_1}^{(1)} + S_{y_1}^{(2)} = A_1 \cdot 0 + A_2 \left(\frac{b-d}{2} + \frac{d}{2} \right) = 10 \cdot 4 = 40 \text{ см}^3;$$

$$S_{x_1} = \sum_{i=1}^2 S_{x_1}^{(i)} = S_{x_1}^{(1)} + S_{x_1}^{(2)} = A_1 \cdot 0 + A_2 \left(\frac{h}{2} - \frac{d}{2} \right) = 10 \cdot 2 = 20 \text{ см}^3$$

8. Підставимо отримані результати в співвідношення (див. п. 5) і визначимо координати центру ваги складного перерізу в системі координатних осей $x_1 O_1 y_1$:

$$y_c = \frac{S_{y_1}}{A} = \frac{20}{16} = 1,25 \text{ см}; \quad x_c = \frac{S_{x_1}}{A} = \frac{40}{16} = 2,5 \text{ см}.$$

9. У відповідності з результатами обчислень покажемо на рис. 5.9 систему центральних координатних осей xOy і центр ваги складного перерізу – точку O .

Перевірка правильності розв'язку. Центр ваги складного перерізу, що складається з двох простих частин, *завжди лежить на лінії, що з'єднує центри ваги простих частин*. При цьому точка O ділить відрізок O_1O_2 на частини, зворотно пропорційні площам простих частин перерізу, тобто

$$\frac{|OO_1|}{|OO_2|} = \frac{A_2}{A_1};$$

$$\frac{|OO_1|}{|OO_2|} = \frac{\sqrt{x_c^2 + y_c^2}}{\sqrt{\left(\frac{b}{2} - x_c\right)^2 + \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} - y_c\right)^2}} = \frac{2,795}{1,677} = 1,667; \quad \frac{A_2}{A_1} = \frac{10}{6} = 1,667.$$

5.3. Осьові, полярний і відцентровий моменти інерції перерізу

По аналогії з поняттям моменту інерції маси тіла відносно довільної осі введемо поняття моментів інерції площі.

Осьовим (екваторіальним) **моментом інерції** перерізу відносно будь-якої осі називають суму добутків елементарних площадок dA на квадрати відстаней від їх центрів ваги до цієї осі (рис. 5.10):

$$\begin{cases} I_x = \int_A y^2 dA; \\ I_y = \int_A x^2 dA. \end{cases} \quad (5.12)$$

Відцентровим моментом інерції перерізу називають суму добутків елементарних площадок dA на координати центрів ваги цих площадок відносно двох ортогональних координатних осей, розташованих в площині фігури, що розглядається:

$$I_{xy} = \int_A xy dA. \quad (5.13)$$

Полярним моментом інерції перерізу називають суму добутків елементарних площадок dA на квадрат відстані від їх центрів ваги до будь-якого полюсу, причому в якості полюсу зазвичай вибирають початок координат (точка O на рис. 5.10):

$$I_\rho = \int_A \rho^2 dA, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (5.14)$$

Моменти інерції вимірюють в одиницях довжини в четвертій степені (наприклад, см^4).

Із співвідношень (5.12) – (5.14) витікає, що при $A > 0$:

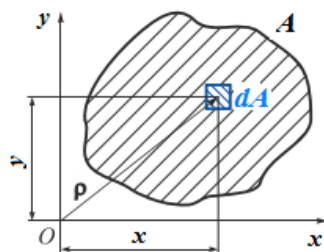


Рис. 5.10

1) *осьові і полярний* моменти завжди *більші від нуля*:

$$I_x > 0; I_y > 0; I_\rho > 0;$$

2) величина *відцентрового моменту* інерції I_{xy} може бути *додатною, від'ємною або дорівнювати нулю*.

Правило симетрії

Якщо переріз має вісь симетрії, то в системі координат, що включають цю вісь, відцентровий момент інерції тотожно дорівнює нулю. Справедливість цього правила є очевидною із рис. 5.3.

Пару ортогональних осей, відносно яких $I_{xy} = 0$, називають головними осями інерції перерізу.

Таким чином, якщо одна із двох осей є віссю симетрії, то вона і будь-яка перпендикулярна до неї вісь будуть головними осями інерції, оскільки відносно цих осей відцентровий момент інерції дорівнює нулю.

Примітка. Момент інерції складного перерізу, що складається із n простих частин, дорівнює сумі моментів інерції його простих складових частин відносно тієї ж осі:

$$I_x = \sum_{i=1}^n I_{x_i}; I_y = \sum_{i=1}^n I_{y_i}; I_{xy} = \sum_{i=1}^n I_{xy_i},$$

де $I_{x_i}, I_{y_i}, I_{xy_i}$ – моменти інерції n – ої простої складової частини перерізу;

n – кількість складових частин всього перерізу.

5.4. Зв'язок між величинами I_ρ, I_x і I_y

За визначенням (5.14)

$$I_\rho = \int_A \rho^2 dA.$$

Якщо полюс O співпадає з початком координат системи осей xOy , то

$$\rho^2 = x^2 + y^2$$

і тому

$$I_\rho = \int_A \rho^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA = I_x + I_y. \quad (5.15)$$

Таким чином, сума осьових моментів інерції перерізу відносно *ортогональних* осей x і y дорівнює полярному моменту інерції перерізу відносно початку координат і інваріантна при повороті системи координат.

Приклади визначення моментів інерції найпростіших геометричних фігур

Приклад 5.5. Визначити моменти інерції прямокутного перерізу, показаного на рис. 5.11, відносно осей x і y , які є осями симетрії перерізу.

Дано: h, b, O – центр ваги перерізу.

Необхідно визначити I_x, I_y, I_{xy}, I_p .

Розв'язок.

1. Визначимо момент інерції відносно осі x .

Виділим в прямокутнику на відстані y від осі x елементарну площадку шириною b і висотою dy . Площа цієї площадки

$$dA = b dy.$$

Підставимо значення dA в формулу (5.12) для визначення осьового моменту інерції

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} b y^2 dy = b \frac{y^3}{3} = \frac{b}{3} \left(\frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{8} \right) = \frac{bh^3}{12}.$$

2. Визначаємо момент інерції відносно осі y .

Виконавши викладки, аналогічні попереднім, отримаємо

$$I_y = \frac{hb^3}{12}.$$

3. Оскільки вісі x і y – вісі симетрії перерізу, то вони є головними центральними осями перерізу. Як наслідок, відцентровий момент інерції перерізу відносно системи осей xOy дорівнює нулю:

$$I_{xy} = 0.$$

4. Визначимо полярний момент інерції:

$$I_p = I_x + I_y = \frac{bh}{12} (h^2 + b^2) = \frac{A}{12} (h^2 + b^2).$$

Приклад 5.7. Визначити моменти інерції перерізу коробчастого типу при умові, що осі x і y – осі симетрії перерізу (рис. 5.12).

Дано: B, H, b, h .

Необхідно визначити I_x, I_y, I_{xy}, I_p

Розв'язок.

1. Оскільки осі x і y – осі симетрії перерізу, то вони є головними центральними вісями цього перерізу, тому положення центру ваги цього перерізу, є визначеним – точка перетину осей x і y

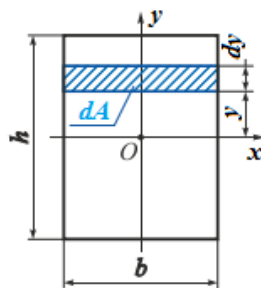


Рис. 5.11

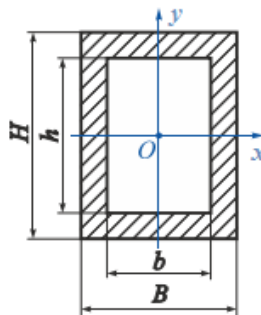


Рис. 5.12

(точка O), тоді

$$I_{xy} = 0.$$

2. Знайдемо I_x . Інтеграл суми дорівнює сумі інтегралів, тому

$$I_x = \frac{bH^3}{12} - \frac{bh^3}{12}.$$

3. За аналогією визначаємо

$$I_y = \frac{bH^3}{12} - \frac{bh^3}{12}.$$

Приклад 5.8. Визначити моменти інерції круглого перерізу (рис. 5.13) відносно центральних осей x і y .

Дано: d .

Необхідно визначити I_x, I_y, I_{xy}, I_ρ .

Розв'язок.

1. Визначимо полярний момент інерції I_ρ .

Виділимо в круглому перерізі елементарну кільцеву площадку товщиною $d\rho$ і радіусом ρ . Площа цієї площадки $dA = 2\pi\rho d\rho$.

Підставимо значення dA в формулу (5.14):

$$I_\rho = \int_A \rho^2 dA = \int_0^{\frac{d}{2}} 2\pi\rho^3 d\rho = 2\pi \frac{\rho^4}{4} = \frac{2\pi d^4}{4 \cdot 16} = \frac{\pi d^4}{32}.$$

2. Визначимо осьові моменти I_x і I_y .

Осьові моменти інерції круглого перерізу відносно всіх осей, що проходять через центр ваги, мають однакові значення, тобто $I_x = I_y$.

Тоді

$$I_\rho = I_x + I_y = 2I_x = 2I_y.$$

Звідси

$$I_x = I_y = \frac{I_\rho}{2} = \frac{\pi d^4}{64}.$$

3. Оскільки осі x і y – осі симетрії перерізу, то вони є головними центральними вісями цього перерізу, то як наслідок, відцентровий момент інерції цього перерізу відносно системи осей xOy дорівнює нулю:

$$I_{xy} = 0.$$

Приклад 5.9. Визначити моменти інерції кільцевого перерізу відносно центральних осей x і y (рис. 5.14).

Дано: $D, d, \alpha = d/D$.

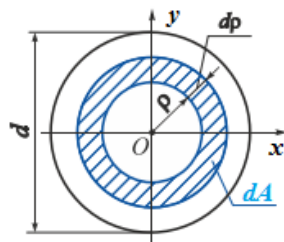


Рис. 5.13

Необхідно визначити I_x, I_y, I_{xy} .

Розв'язок.

1. Оскільки осі x і y – осі симетрії перерізу, то вони є головними центральними вісями цього перерізу, тому положення центру ваги цього перерізу і точка O – є центр ваги

$$I_{xy} = 0.$$

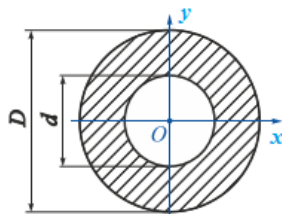


Рис. 5.14

2. Визначимо полярний момент інерції перерізу

$$I_p = \frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32} = \{ \text{з врахуванням } \alpha = d/D \} = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4).$$

3. Знайдемо осьові моменти перерізу відносно осей x і y .

Осьові моменти інерції кільцевого перерізу відносно всіх осей, що проходять через центр ваги, мають однакове значення, тобто $I_x = I_y$.

Тоді

$$I_x = I_y = \frac{\pi D^4}{64} - \frac{\pi d^4}{64} = \{ \text{з врахуванням } d = \alpha D \} = \frac{\pi D^4}{64} (1 - \alpha^4).$$

Приклад 5.10. Визначити моменти інерції прямокутного трикутника відносно осей, що співпадають з катетами (рис. 5.15).

Дано: b, h .

Необхідно визначити $I_{x_1}, I_{y_1}, I_{x_1y_1}$.

Розв'язок.

1. Знайдемо осьовий момент інерції відносно осі x_1 .

Виділяємо в прямокутному трикутнику на відстані y_1 від осі x_1 елементарну площадку шириною $b(x_1)$ і висотою dy_1 . Площа цієї площадки

$$dA = b(x_1)dy_1.$$

Із подібності трикутників визначаємо $b(x_1)$:

$$\frac{b(x_1)}{b} = \frac{h - y_1}{h} \Rightarrow b(x_1) = b \left(1 - \frac{y_1}{h} \right).$$

Тоді

$$I_{x_1} = \int_A y_1^2 dA = \int_0^h b y_1^2 \left(1 - \frac{y_1}{h} \right)^2 dy_1 = b \left(\frac{y_1^3}{3} - \frac{y_1^4}{4h} \right) = \frac{bh^3}{12}.$$

2. За аналогією знайдемо осьовий момент інерції відносно осі y_1

$$I_{y_1} = \frac{hb^3}{12}.$$

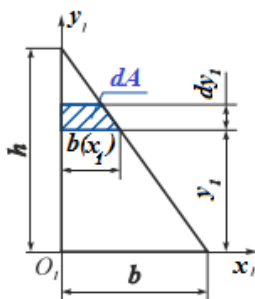


Рис. 5.15

3. Обчислюємо відцентровий момент інерції відносно осей x_1 і y_1

$$I_{x_1 y_1} = \int_0^h x_1 y_1 dA = \int_0^h y_1 \left(\int_0^{b(x_1)} x_1 dx_1 \right) dy_1 = \int_0^h y_1 \frac{b^2(x_1)}{2} dy_1.$$

Після підстановки $b(x_1)$ отримаємо

$$I_{x_1 y_1} = \int_0^h \frac{b^3}{2} y_1 \left(1 - \frac{y_1}{h} \right)^2 dy_1 = \frac{b^2}{2} \left(\frac{y_1^2}{2} - \frac{2}{3} \frac{y_1^3}{h} + \frac{y_1^4}{4h} \right) = \frac{b^2 h^2}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) = + \frac{b^2 h^2}{24}.$$

5.5. Зміна осевих і відцентрових моментів інерції при паралельному перенесенні осей

В розрахунках на міцність інженерних конструкцій і споруд досить часто виникає необхідність визначення осевих та відцентрових моментів інерції складних перерізів відносно осей, **довільно** розташованих по відношенню до **центральных**. Такі осеві і відцентрові моменти інерції можуть бути знайденими шляхом виконання двох операцій – паралельного перенесення і повороту відносно початку координат.

Розглянемо обчислення осевих і відцентрових моментів інерції при переході до осей, які є паралельними до центральних (рис. 5.16).

Дано: $A, a, b, I_x, I_y, I_{xy}$; осі x і y є центральними осями перерізу A , тобто

$$S_x = \int_A y dA = 0,$$

$$S_y = \int_A x dA = 0.$$

Необхідно визначити $I_{x_1}, I_{y_1}, I_{x_1 y_1}$.

За визначеннями (5.12), (5.13)

$$\begin{cases} I_{x_1} = \int_A y_1^2 dA, \\ I_{y_1} = \int_A x_1^2 dA, \\ I_{x_1 y_1} = \int_A x_1 y_1 dA. \end{cases} \quad (5.16)$$

Із рис. 5.16 видно, що

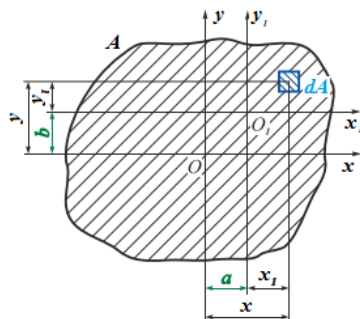


Рис. 5.16

$$\begin{cases} y_1 = y - b, \\ x_1 = x - a. \end{cases} \quad (5.17)$$

Підставивши значення y_1 і x_1 із рівнянь (5.17) в співвідношення (5.16), отримаємо:

$$\begin{aligned} I_{x_1} &= \int_A (y - b)^2 dA = \int_A y^2 dA - 2b \int_A y dA + b^2 \int_A dA; \\ I_{y_1} &= \int_A (x - a)^2 dA = \int_A x^2 dA - 2a \int_A x dA + a^2 \int_A dA; \\ I_{x_1 y_1} &= \int_A (y - b)(x - a) dA = \int_A xy dA - b \int_A x dA - a \int_A y dA + \\ &\quad ab \int_A dA. \end{aligned}$$

В правих частинах цих співвідношень

$$\begin{aligned} \int_A y^2 dA &= I_x; \quad \int_A x^2 dA = I_y; \quad \int_A xy dA = I_{xy}; \quad \int_A dA = A; \\ \int_A y dA &= S_x = 0; \quad \int_A x dA = S_y = 0, \end{aligned}$$

і всі ці величини є заданими, тому в кінцевому випадку отримуємо:

$$\begin{cases} I_{x_1} = I_x + b^2 A; \\ I_{y_1} = I_y + a^2 A; \\ I_{x_1 y_1} = I_{xy} + abA. \end{cases} \quad (5.18)$$

Таким чином осьовий момент інерції плоского перерізу вісно деякої осі, що лежить в площині перерізу фігури і є паралельною центральній осі, дорівнює осьовому моменту інерції цієї фігури відносно центральної осі плюс добуток площі перерізу фігури на квадрат відстані заданої осі від центральної.

Відцентровий момент інерції перерізу відносно пари ортогональних осей, що лежать в площині перерізу і паралельних центральним, дорівнює відцентровому моменту інерції перерізу відносно пари ортогональних центральних осей плюс добуток площі перерізу на координати центру ваги перерізу в новій системі координат. При визначенні **відцентрового моменту інерції** обов'язково **враховують знаки координат** відносно заданих осей.

Примітка. З перших двох співвідношень системи (5.18) витікає, що із всієї множини осей, паралельних будь-якому координатному напрямку, центральна вісь відрізняється тим, що осьовий момент інерції відносно цієї осі має мінімальне значення.

5.6. Зміна осьових і відцентрових моментів інерції перерізу при повороті координатних осей

Дано: $A, I_x, I_y, I_{xy}, \alpha$. Система $x_1 O y_1$ отримана із вихідної шляхом повороту її на кут α відносно початку координат (показаний на рис. 5.17 напрямок повороту – проти годинникової стрілки – будемо вважати додатним).

Необхідно визначити $I_{x_1}, I_{y_1}, I_{x_1 y_1}$.

За визначеннями (5.12), (5.13)

$$\begin{cases} I_{x_1} = \int_A y_1^2 dA, \\ I_{y_1} = \int_A x_1^2 dA, \\ I_{x_1 y_1} = \int_A x_1 y_1 dA. \end{cases} \quad (5.19)$$

Із рис. 5.17 бачимо, що

$$\begin{cases} y_1 = y \cos \alpha - x \sin \alpha; \\ x_1 = x \cos \alpha + y \sin \alpha. \end{cases} \quad (5.20)$$

Підставимо значення x_1 і y_1 у вираз системи (5.19):

$$\begin{aligned} I_{x_1} &= \int_A (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 dA = \\ &= \cos^2 \alpha \int_A y^2 dA - 2 \sin \alpha \cos \alpha \int_A xy dA + \sin^2 \alpha \int_A x^2 dA; \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned} I_{y_1} &= \int_A (x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2 dA = \cos^2 \alpha \int_A x^2 dA + 2 \sin \alpha \cos \alpha \int_A xy dA + \\ &+ \sin^2 \alpha \int_A y^2 dA; \end{aligned} \quad (5.22)$$

З врахуванням того, що у виразах (5.21) і (5.22)

$\int_A y^2 dA = I_x$; $\int_A x^2 dA = I_y$; $\int_A xy dA = I_{xy}$; $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$, і всі ці величини є заданими, отримуємо в кінцевому виразі для визначення осьових моментів інерції перерізу при повороті осей:

$$\begin{cases} I_{x_1} = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha; \\ I_{y_1} = I_y \cos^2 \alpha + I_x \sin^2 \alpha + I_{xy} \sin 2\alpha; \\ I_{x_1 y_1} = I_{xy} \cos 2\alpha + \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha. \end{cases} \quad (5.23)$$

Перейдемо до знаходження відцентрового

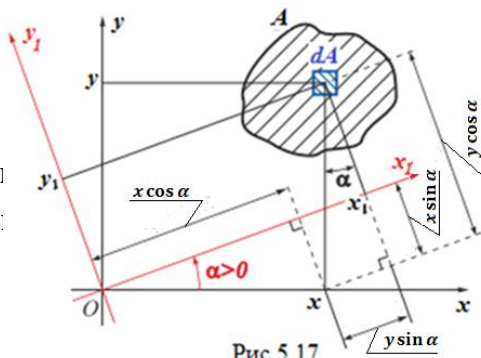


Рис. 5.17

моменту інерції перерізу:

$$I_{x_1y_1} = (y \cos \alpha + x \sin \alpha)(x \cos \alpha + y \sin \alpha)dA = \\ \cos^2 \alpha \int_A xy dA - \sin \alpha \cos \alpha \int_A x^2 dA + \sin \alpha \cos \alpha \int_A y^2 dA - \\ \sin^2 \alpha \int_A xy dA = \\ (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \int_A xy dA + 2 \sin \alpha \cos \alpha \frac{1}{2} \left(\int_A y^2 dA - \int_A x^2 dA \right).$$

З врахуванням того, що в цьому виразі

$$\int_A x^2 dA = I_y; \quad \int_A y^2 dA = I_x; \quad \int_A xy dA = I_{xy}; \\ \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha; \quad 2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha,$$

і всі ці величини є заданими, отримуємо в кінцевому виразі

$$I_{x_1y_1} = I_{xy} \cos 2\alpha + \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha. \quad (5.24)$$

Примітка.

1. У формулах (5.23), (5.24) вихідні осі – довільні (не обов'язково центральні).
2. Вирази (5.23), (5.24) є періодичними функціями з найменшим періодом π і залежить від α .
3. При повороті осей на $\pi/2$ відцентровий момент інерції змінює свій знак, а осьові моменти інерції завжди залишаються додатними (при будь-якому значенні α).

5.7. Інваріантність суми осьових моментів інерції перерізу відносно повороту осей

Знайдемо суму осьових моментів інерції із рівнянь (5.23):

$$I_{x_1} + I_{y_1} = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha + I_y \cos^2 \alpha + I_x \sin^2 \alpha + \\ I_{xy} \sin 2\alpha = I_x (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + I_y (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha).$$

Звідси з врахуванням того, що $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, отримаємо

$$I_{x_1} + I_{y_1} = I_x + I_y = I_\rho = \text{const.} \quad (5.25)$$

Це положення, по суті, було доведено раніше. Було показано (див. рівняння (5.15)), що

$$I_\rho = I_x + I_y.$$

Таким чином, при фіксованому положенні полюсу величина I_ρ не змінюється або, іншими словами, **сума двох осьових моментів інерції** відносно будь-якої пари ортогональних осей, що виходять із однієї точки, є **величиною постійною**.

5.8. Головні осі і головні моменти інерції перерізу

Із співвідношень (5.23) видно, що функції $I_{x_1} = f_1(\alpha)$ і $I_{y_1} = f_2(\alpha)$ є безперервними і періодичними з найменшим періодом π . Крім цього, як витікає з рівняння (5.25), сума цих функцій – є величиною постійною і для перерізу визначених розмірів – величина визначена. Графічно це представлено на рис. 5.18.

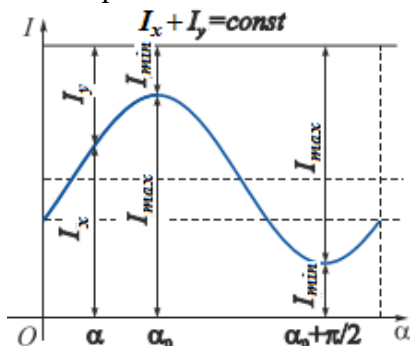


Рис. 5.18

Із цього рисунка видно, що в межах періоду існує таке значення $\alpha = \alpha_0$ (а також $\alpha = \alpha_0 + \pi/2$), при якому осьові моменти інерції перерізу набувають *одночасно* екстремальних значень.

Для визначення величини α_0 придиференціюємо одне із співвідношень (5.23) (наприклад перше) по α і прирівняємо його до нуля:

$$\frac{dI_{x_1}}{d\alpha} = I_x 2 \cos \alpha_0 (-\sin \alpha_0) + I_y 2 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 - 2I_{xy} \cos 2\alpha_0 = 0.$$

Звідси

$$(I_y - I_x) \sin 2\alpha_0 = 2I_{xy} \cos 2\alpha_0 \quad (5.26)$$

і в кінцевому результаті

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{2I_{xy}}{(I_y - I_x)}. \quad (5.27)$$

Визначимо величину відцентрового моменту інерції перерізу при $\alpha = \alpha_0$. Перепишемо вираз (5.26) у вигляді:

$$I_{xy} \cos 2\alpha_0 = \frac{I_y - I_x}{2} \sin 2\alpha_0 \quad (5.28)$$

і підставимо в рівняння (5.24) значення першої складової правої частини за формулою (5.28)

$$I_{x_1 y_1} = \frac{I_y - I_x}{2} \sin 2\alpha_0 + \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha_0 \equiv 0. \quad (5.29)$$

Таким чином, при $\alpha = \alpha_0$:

1) осьові моменти інерції перерізу набувають одночасно екстремальні значення;

2) відцентровий момент інерції перерізу стає рівним нулю.

На основі отриманих результатів можна сформулювати наступні визначення:

Осі, відносно яких осьові моменти інерції набувають одночасно екстремальних значень, а відцентровий момент інерції перерізу стає рівним нулю називаються головними осями інерції перерізу.

Якщо головні осі інерції перерізу проходять через його центр ваги, то вони називаються головними центральними осями інерції.

Осьові моменти інерції перерізу відносно його головних осей називаються головними моментами інерції перерізу.

Положення головних осей інерції знаходять за формулою (5.27).

Для визначення величин головних моментів інерції перерізу перепишемо співвідношення (5.23), використавши тригонометричні співвідношення (при $\alpha = \alpha_0$)

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}; \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

у вигляді

$$I_{x_1} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\alpha_0 - I_{xy} \sin 2\alpha_0;$$

$$I_{y_1} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_y - I_x}{2} \cos 2\alpha_0 + I_{xy} \sin 2\alpha_0;$$

або

$$I_{\frac{max}{min}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \left(\frac{I_y - I_x}{2} \cos 2\alpha_0 + I_{xy} \sin 2\alpha_0 \right). \quad (5.30)$$

Виключимо із відомих тригонометричних співвідношень

$$\sin 2\alpha_0 = \frac{\tan 2\alpha_0}{\sqrt{1 + \tan^2 2\alpha_0}}; \quad \cos 2\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 2\alpha_0}}$$

α_0 за допомогою виразу (5.27) та отримаємо

$$\sin 2\alpha_0 = \frac{2I_{xy}}{\sqrt{(I_y - I_x)^2 + 4I_{xy}^2}}; \quad \cos 2\alpha_0 = \frac{I_y - I_x}{\sqrt{(I_y - I_x)^2 + 4I_{xy}^2}}.$$

Тоді співвідношення (5.30) можна записати у вигляді:

$$I_{\frac{max}{min}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \left(\frac{I_y - I_x}{2} \frac{I_y - I_x}{\sqrt{(I_y - I_x)^2 + 4I_{xy}^2}} + I_{xy} \frac{2I_{xy}}{\sqrt{(I_y - I_x)^2 + 4I_{xy}^2}} \right).$$

Після перетворень остаточно отримуємо:

$$\frac{I_{\max}}{I_{\min}} = \frac{I_U}{I_V} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_x}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_y - I_x)^2 + 4I_{xy}^2}. \quad (5.31)$$

Зауваження

1. Отриманий за допомогою виразу (5.27) кут α_0 належить відкладати проти годинникової стрілки, якщо $\alpha_0 > 0$, і за годинниковою стрілкою, якщо $\alpha_0 < 0$.
2. Вісь, відносно якої головний момент інерції перерізу має максимальне значення, знаходиться на найкоротшій кутовій відстані від тієї центральної осі перерізу (x чи y), відносно якої осьовий момент інерції є більшим.
3. Із розглянутого раніше правила симетрії витікає, що якщо хоча б одна із осей є віссю симетрії перерізу, то ця система взаємно перпендикулярних осей є системою головних осей інерції перерізу.

Розглянемо деякі приватні випадки.

1. Якщо $I_x = I_y$ і $I_{xy} = 0$, то із формули (5.24)

$$I_{x_1y_1} = I_{xy} \cos 2\alpha + \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha$$

витікає, що значення відцентрового моменту інерції відносно будь-якої взаємно перпендикулярних осей $I_{x_1y_1}$, дорівнює нулю. Як наслідок, будь-які осі, отримані шляхом повороту системи координат xOy , є головними осями інерції (як і осі x і y). Таким чином,

$$I_x = I_y = I_{\max} = I_{\min} = \text{const.}$$

2. Якщо фігура має більше двох осей симетрії, то її осьові моменти інерції.

Направимо одну із осей (x або y) по одній із осей симетрії, а другу – перпендикулярно до неї. Відносно цих осей відцентровий момент інерції $I_{xy} = 0$. Якщо фігура має більше двох осей симетрії, то будь-яка із них складає гострий кут з віссю y . Позначимо таку вісь y_1 , а перпендикулярну до неї вісь - x_1 .

Відцентровий момент інерції $I_{x_1y_1} = 0$, оскільки вісь y_1 є віссю симетрії. За формулою (5.24)

$$I_{x_1y_1} = I_{xy} \cos 2\alpha + \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha,$$

але поскільки

$$I_{xy} = 0,$$

то

$$I_x = I_y.$$

Тоді у відповідності з пунктом 1 моент інерції відносно будь-якої осі має одне і те ж значення, і будь-які осі, отримані шляхом повороту системи координат xOy , є головними осями інерції.

Із цього витікає, що **для всіх правильних фігур** (квадрату, круга, рівностороннього трикутника і т.п.) **моменти інерції відносно всіх центральних осей є рівними між собою, і всі ці осі є головними осями інерції.**

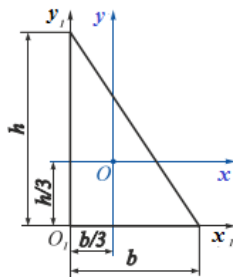


Рис. 5.19

3. Якщо $I_x = I_y$ і $I_{xy} \neq 0$, то із формули (5.27)

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{2I_{xy}}{(I_y - I_x)}$$

$$\tan 2\alpha_0 = \infty; 2\alpha_0 = 90^\circ; \alpha_0 = 45^\circ.$$

В цьому випадку головні осі інерції нахилені до вихідних осей x і y під кутом 45° .

Приклади розв'язку задач

Приклад 5.11. Визначити моменти інерції прямокутного трикутника відносно центральних осей, паралельних катетам, використавши формули паралельного перенесення (рис. 5.19).

Дано: b, h .

Необхідно визначити I_x, I_y, I_{xy} .

Розв'язок.

Для розв'язку цієї задачі скористаємось результатами прикладу 5.10 і співвідношеннями (5.18) паралельного перенесення осей. Але при цьому необхідно врахувати, що перехід здійснюється від нецентральных осей x_1, y_1 до центральних x, y , тому формули паралельного перенесення набудуть вигляду:

$$I_x = I_{x_1} - b_1^2 A, I_y = I_{y_1} - a^2 A, I_{xy} = I_{x_1 y_1} - xy A,$$

де

$$b_1 = \frac{h}{3}; a = \frac{b}{3}; A = \frac{bh}{2}; I_{x_1} = \frac{bh^3}{12}; I_{y_1} = \frac{hb^3}{12}; I_{x_1 y_1} = \frac{b^2 h^2}{24}.$$

Визначимо осьові та відцентровий моменти інерції:

$$I_x = \frac{bh^3}{12} - \frac{h^2}{9} \frac{bh}{2} = \frac{bh^3}{36};$$

$$I_y = \frac{hb^3}{12} - \frac{b^2 bh}{9 \cdot 2} = \frac{hb^3}{36};$$

$$I_{xy} = \frac{b^2 h^2}{24} - \frac{bh bh}{9 \cdot 2} = -\frac{b^2 h^2}{72}.$$

Розглянутий варіант знаходження моментів інерції прямокутного трикутника відносно центральних осей, паралельних катетам, є менш трудомістким в порівнянні з варіантом безпосереднього інтегрування за формулами (5.12), (5.13).

Приклад 5.12. Визначити моменти інерції рівнобедреного трикутника відносно центральних осей xOy (рис. 5.20).

Дано: b, h .

Необхідно визначити I_x, I_y, I_{xy} .

Розв'язок.

1. Розібе́мо рівнобедрений трикутник ABC на два прямокутних трикутники ABD і BCD .

2. Визначимо I_x .

Момент інерції рівнобедреного трикутника ABC відносно осі x буде дорівнювати сумі осьових моментів трикутників ABD і BCD відносно осі x :

$$I_x = I_x^{(ABD)} + I_x^{(BCD)} = 2I_x^{(ABD)} = 2I_x^{(BCD)} = 2 \cdot \frac{bh^3}{36} = \frac{bh^3}{18}.$$

Зуваження Момент інерції будь-якого трикутника відносно центральної осі x , паралельній основі,

$$I_x = \frac{bh^3}{36}.$$

3. Знайдемо I_y .

Момент інерції рівнобедреного трикутника ABC відносно осі y буде дорівнювати сумі осьових моментів трикутників ABD і BCD відносно осі y :

$$I_y = I_y^{(ABD)} + I_y^{(BCD)} = 2I_y^{(ABD)} = 2I_y^{(BCD)} = 2 \cdot \frac{h(\frac{b}{2})^3}{12} = \frac{hb^3}{48}.$$

4. Визначимо I_{xy} .

Оскільки вісь y є віссю симетрії перерізу, то вона і перпендикулярна їй вісь x є головними центральними осями інерції перерізу. Як наслідок, відцентровий момент інерції перерізу відносно системи осей xOy дорівнює нулю:

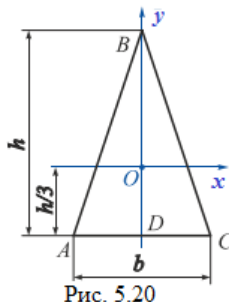


Рис. 5.20

$$I_{xy} = 0.$$

Приклад 5.13. Визначити головні центральні моменти інерції таврового перерізу (y – вісь симетрії) (рис. 5.21).

Дано: $b = 10$ см, $h = 16$ см, $t = 4$ см, $d = 2$ см.

Необхідно визначити I_x, I_y .

Розв'язок.

1. Оскільки вісь y – вісь симетрії перерізу, то центр ваги лежить на осі y , тобто $y_c = 0$ і $I_{xy} = 0$ (x – будь-яка вісь, перпендикулярна осі y).

Знайдемо другу координату центру ваги перерізу. Розіб'ємо переріз на два прямокутники і розташуємо в центрі ваги кожного із них другу центральну вісь x_1 і x_2 . Приймаємо в якості робочої систему координат $x_1 O_1 y$.

Тоді

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^2 S x_{i1}}{\sum_{i=1}^2 A_i} = \frac{S_{x_1}^1 + S_{x_1}^2}{A_1 + A_2} = \frac{0 + bt \left(\frac{h-t}{2} + \frac{t}{2} \right)}{(h-t)d + bt} = \frac{10 \cdot 4 \cdot \frac{16}{2}}{12 \cdot 2 + 10 \cdot 4} = \frac{320}{64} = 5 \text{ см.}$$

2. Визначаємо момент інерції відносно осі y :

$$I_y = I_y^{(1)} + I_y^{(2)} = \frac{(h-t)d^3}{12} + \frac{tb^3}{12} = \frac{(16-4)2^3}{12} + \frac{4 \cdot 10^3}{12} = 341,333 \text{ см}^4.$$

3. Обчислимо момент інерції відносно осі x :

$$I_x = I_x^{(1)} + I_x^{(2)} = 888 + 413,333 = 1301,333 \text{ см}^4;$$

$$I_x^{(1)} = I_{x_1}^{(1)} + y_c^2 A_1 = \frac{d(h-t)^3}{12} + y_c^2 (h-t)d = \frac{2(16-4)^3}{12} + 5^2 (16-4) \cdot 2 = 888 \text{ см}^4;$$

$$I_x^{(2)} = I_{x_2}^{(2)} + \left(\frac{h}{2} - y_c \right)^2 A_2 = \frac{bt^3}{12} + \left(\frac{h}{2} - y_c \right)^2 bt = \frac{10 \cdot 4^3}{12} + \left(\frac{16}{2} - 5 \right)^2 10 \cdot 4 = 413,333 \text{ см}^4.$$

Приклад 5.14. Визначити положення головних центральних осей інерції заданого перерізу і значення головних моментів інерції в системі цих осей (рис. 5.22).

Дано: $b = 8$ см, $h = 5$ см, $t = 1$ см, $d = 2$ см.

Необхідно визначити $I_U, I_V, \alpha_0, x_c, y_c$.

Розв'язок.

1. Виконаємо креслення складного перерізу в масштабі.

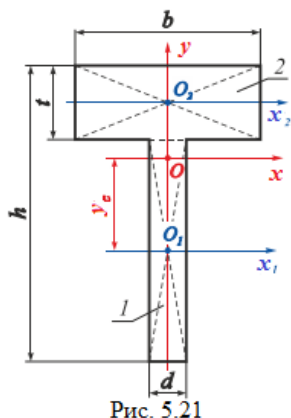


Рис. 5.21

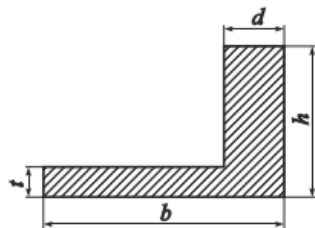


Рис. 5.22

2. Розібємо переріз на найпростіші частини (прямокутник розміром $b \times h$ з вирізом $(b - d) \times (h - t)$ і присвоїмо цим частинам номери 1 і 2 (рис. 5.23).

3. В центрі ваги кожної із найпростіших частин перерізу роташуємо центральні системи координат $x_i O_i y_i$ (в нашому випадку $x_1 O_1 y_1$ і $x_2 O_2 y_2$).

4. Знайдемо координати центру ваги складного перерізу.

Вибираємо робочу (базову) систему координат, в якій будуть визначені координати центру ваги всього перерізу. Прийmemo в якості робочої систему осей $x_1 O_1 y_1$.

Тоді формули для обчислення координат центру ваги набудуть вигляду:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^2 S y_i^i}{\sum_{i=1}^2 A_i}; \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^2 S x_i^i}{\sum_{i=1}^2 A_i},$$

де площа поперечного перерізу

$$A_1 = bh = 8 \cdot 5 = 40 \text{ см}^2; \quad A_2 = (b - d)(h - t) = (8 - 2)(5 - 1) = 24 \text{ см}^2;$$

$$\sum_{i=1}^2 A_i = A_1 - A_2 = 40 - 24 = 16 \text{ см}^2;$$

статичний момент відносно осі y_1

$$S_{y_1} = \sum_{i=1}^2 S y_i^i = S_{y_1}^1 - S_{y_1}^2 = A_1 \cdot 0 - A_2 \left(-\frac{d}{2}\right) = 0 - 24 \cdot (-1) = 24 \text{ см}^3;$$

статичний момент відносно осі x_1

$$S_{x_1} = \sum_{i=1}^2 S x_i^i = S_{x_1}^1 - S_{x_1}^2 = A_1 \cdot 0 - A_2 \left(\frac{t}{2}\right) = 0 - 24 \cdot \frac{1}{2} = 12 \text{ см}^3.$$

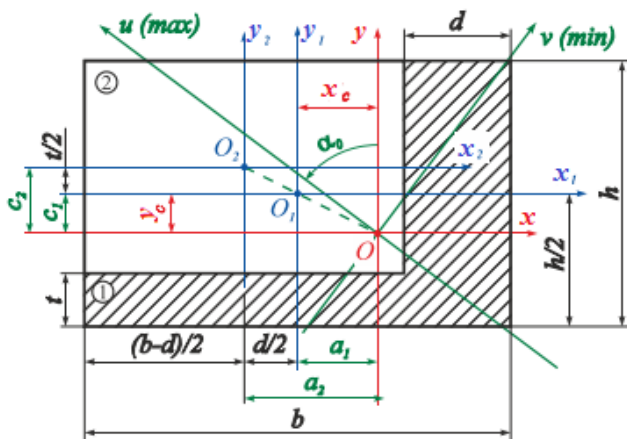


Рис. 5.23

Зауваження

1. При обчисленні статичних моментів необхідно враховувати знаки координат центрів ваги складових частин перерізу в робочій (базовій) системі координат.

2. Якщо в складному перерізі є виріз (отвір), то геометричні характеристики цього вирізу (площа, статичні моменти, моменти інерції) належить віднімати.

Обчислимо координати центру ваги **O** складного перерізу в системі $x_1 O_1 y_1$:

$$x_c = \frac{S_{y_1}}{A} = \frac{24}{16} = 1,5 \text{ см}; \quad y_c = \frac{S_{x_1}}{A} = -\frac{12}{16} = -0,75 \text{ см}.$$

У відповідності з результатами обчислень покажемо на рис. 5.23 систему центральних осей **xOy** і центр ваги складного перерізу – точку **O**.

Визначимо координати центрів ваги основних частин перерізу (точок O_1 і O_2) в системі центральних осей **xOy**:

$$a_1 = -x_c = -1,5 \text{ см}; \quad c_1 = |y_c| = 0,75 \text{ см};$$

$$a_2 = -\left(y_c + \frac{d}{2}\right) = -2,5 \text{ см}; \quad c_2 = |y_c| + \frac{t}{2} = 1,25 \text{ см}.$$

Перевірка правильності визначення центру ваги;

а) графічна перевірка

Для перевірки правильності знаходження центру ваги зєднаємо пунктиром точки O_1 і O_2 . Точка **O** повинна лежати на цій лінії.

Зауваження

Центр ваги складного перерізу, що складається із двох простих частин, завжди лежить на лінії, що з'єднує центри ваги простих частин, і відношення відстаней від центру ваги всієї фігури до центрів ваги складових частин зворотно пропорційне відношенню площ складових частин.

В нашому випадку

$$\frac{|OO_1|}{|OO_2|} = \frac{A_2}{A_1};$$

$$|OO_1| = \sqrt{a_1^2 + c_1^2} = 1,677 \text{ см}; \quad |OO_2| = \sqrt{a_2^2 + c_2^2} = 2,795 \text{ см};$$

$$\frac{|OO_1|}{|OO_2|} = \frac{1,677}{2,795} = 0,6; \quad \frac{A_2}{A_1} = \frac{24}{40} = 0,6; \quad 0,6 = 0,6;$$

б) аналітична перевірка

Скористаємось властивістю центральних осей, згідно якої статичний момент складного перерізу відносно центральних осей дорівнює нулю:

$$S_x = \sum_{i=1}^2 S_x^{(i)} = S_x^{(1)} - S_x^{(2)} = bh c_1 - (b-d)(h-t)c_2 = 60 - 60 = 0 \text{ см}^3;$$

$$S_y = \sum_{i=1}^2 S_y^{(i)} = S_y^{(1)} - S_y^{(2)} = bha_1 - (b-d)(h-t)a_2 = 30 - 30 = 0 \text{ см}^3.$$

Таким чином, положення центру ваги складного перерізу визначене вірно.

5. Знайдемо моменти інерції складного перерізу в системі центральних осей **хОу**.

Визначимо осьові і відцентровий моменти інерції складових частин перерізу:

для першого прямокутника

$$I_{x_1} = \frac{bh^3}{12} = \frac{8 \cdot 5^3}{12} = 83,333 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_1} = \frac{hb^3}{12} = \frac{5 \cdot 8^3}{12} = 213,333 \text{ см}^4; I_{x_1 y_1} = 0;$$

для другого прямокутника

$$I_{x_2} = \frac{(b-d)(h-t)^3}{12} = \frac{6 \cdot 4^3}{12} = 32 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_2} = \frac{(h-t)(b-d)^3}{12} = \frac{4 \cdot 6^3}{12} = 72 \text{ см}^4; I_{x_2 y_2} = 0$$

Зведемо попередньо отримані результати в табл. 5.1.

Таблиця 5.1

Частина перерізу	Геометричні характеристики					
	$A_i, \text{ см}^2$	$I_{x_i}, \text{ см}^4$	$I_{y_i}, \text{ см}^4$	$I_{x_i y_i}, \text{ см}^4$	$a_i, \text{ см}$	$c_i, \text{ см}$
1	40	83,333	213,333	0	-1,5	0,75
2	24	32	72	0	-2,5	1,25

Зауваження *Всі подальші обчислення необхідно виконувати в системі **центральних осей хОу** складного перерізу.*

Знайдемо осьові і відцентровий моменти інерції складного перерізу в системі центральних осей **хОу**, використавши формули паралельного перенесення сей:

$$I_x = I_x^{(1)} - I_x^{(2)} = 105,833 - 69,5 = 36,333 \text{ см}^4;$$

$$\begin{aligned}
I_x^{(1)} &= I_{x_1} + c_1^2 A_1 = 83,333 + 0,75^2 \cdot 40 = 105,833 \text{ см}^4; \\
I_x^{(2)} &= I_{x_2} + c_2^2 A_2 = 32 + 1,25^2 \cdot 24 = 69,5 \text{ см}^4; \\
I_y &= I_y^{(1)} - I_y^{(2)} = 303,333 - 222,0 = 81,333 \text{ см}^4; \\
I_y^{(1)} &= I_{y_1} + a_1^2 A_1 = 213,333 + (-1,5)^2 \cdot 40 = 303,333 \text{ см}^4; \\
I_y^{(2)} &= I_{y_2} + a_2^2 A_2 = 72 + (-2,5)^2 \cdot 24 = 222,0 \text{ см}^4; \\
I_{xy} &= I_{xy}^{(1)} - I_{xy}^{(2)} = -45,0 - (-75,0) = 30,0 \text{ см}^4; \\
I_{xy}^{(1)} &= I_{x_1 y_1} + a_1 c_1 A_1 = 0 + (-1,5) \cdot 0,75 \cdot 40 = -45,0 \text{ см}^4; \\
I_{xy}^{(2)} &= I_{x_2 y_2} + a_2 c_2 A_2 = 0 + (-2,5) \cdot 1,25 \cdot 24 = -75,0 \text{ см}^4.
\end{aligned}$$

Зауваження

1. Величини осьових моментів інерції відносно центральних осей повинні бути додатними, що витікає із визначення осьового моменту інерції.

2. Якщо велика площа складного перерізу знаходиться в першій і третій четвертях, то відцентровий момент буде додатним, якщо в другій і четвертій – від'ємним.

6. Обчислюємо положення головних осей інерції перерізу:

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x} = \frac{2 \cdot 30}{81,333 - 36,333} = 1,333;$$

$$2\alpha_0 = 53,123^\circ; \alpha_0 = 26,5615^\circ = 26^\circ 34'.$$

Оскільки $\alpha_0 > 0$, то обертання осей x і y на цей кут необхідно виконувати проти годинникової стрілки у відповідності з прийнятим правилом знаків. Отримані в результаті цього обертання осі і будуть головними центральними осями інерції складного перерізу.

7. Визначаємо величини головних моментів інерції перерізу:

$$\begin{aligned}
I_{\min}^{max} &= I_U = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_x}{2}\right)^2 + I_{x_0 y_0}^2} = \\
&= \frac{36,333 + 81,333}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{81,333 - 36,333}{2}\right)^2 + 30,0^2} = 58,833 \pm 37,5 \text{ см}^4.
\end{aligned}$$

Звідси

$$I_{max} = I_U = 96,333 \text{ см}^4;$$

$$I_{min} = I_V = 21,333 \text{ см}^4$$

Зауваження

Величини головних центральних моментів інерції повинні бути додатними, що витікає із визначення осьового моменту інерції.

За результатами проведеного розрахунку покажемо на рис. 5.23 головні центральні осі інерції складного перерізу – осі **u** і **v**.

Оскільки $I_y > I_x$, то максимальне значення осьовий момент інерції перерізу має відносно осі, знаходиться на мінімальній кутовій відстані від осі **y**.

8.Перевіримо вірність розв'язку задачі:

а) перевіримо виконання співвідношення

$$I_{max} > I_y > I_x > I_{min} \text{ (якщо } I_y > I_x) \text{ або } I_{max} > I_x > I_y > I_{min} \text{ (якщо } I_x > I_y)$$

В нашому випадку

$$96,333 > 81,333 > 36,333 > 21,333;$$

б) перевіримо постійність суми величин осьових моментів при обертанні осей:

$$I_{max} + I_{min} = I_y + I_x$$

$$96,333 + 21,333 = 117,666; \quad 81,333 + 36,333 = 117,666;$$
$$117,666 = 117,666;$$

в) обчислюємо відцентровий момент інерції відносно головних центральних осей, який свідомо дорівнює нулю:

$$I_{UV} = I_{xy} \cos 2\alpha_0 + \frac{I_x + I_y}{2} \sin 2\alpha_0 = 30,0 \cdot \cos(2 \cdot 26,5615^\circ) + \frac{36,333 - 81,333}{2} \cdot \sin(2 \cdot 26,5615^\circ) = 30,0 \cdot 0,6001 + (-22,5) \cdot 0,7999 = 18,003 - 17,9978 = 0,0052 \text{ м}^4.$$

Похибка обчислень

$$\Delta\% = \frac{0,0052}{18,003} \cdot 100\% = 0,0289\% \leq 1\%.$$

Зауваження

1. Цю задачу можна розв'язувати, використовуючи різні варіанти розбивання перерізу на складові частини.
2. Розбивання необхідно виконувати так, щоб мінімізувати об'єм обчислювальної роботи.
3. Остаточний результат розв'язку при всіх варіантах розбиття повинен бути однаковим.
4. Якщо складний переріз складається із двох однакових частин, повернутих на 90° відносно одна одної, то центр ваги всього перерізу буде лежати на середині лінії, що з'єднує центри ваги складових частин, одна із головних центральних осей перерізу буде співпадати з цією лінією, а друга буде перпендикулярною до неї (рис. 5.24).

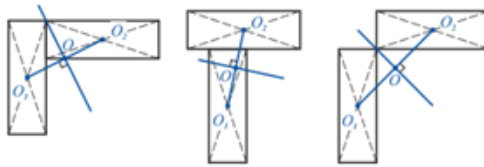


Рис. 5.24

Приклад 5.15. Знайти відцентровий момент інерції кутика № 7,5/5 відносно центральних осей, паралельних полкам (рис. 5.25), якщо відомі положення головних центральних осей інерції перерізу і величини головних моментів інерції в системі цих осей.

Дано: кутик № 7, 5/5.

Необхідно визначити I_{xy} .

Розв'язок.

В деяких довідниках не наводяться дані для відцентрового моменту інерції кутиків (наприклад ГОСТ 8510-72). З цього ГОСТу вибираємо:

$$I_{min} = 7,24 \text{ см}^4; I_x = 34,81 \text{ см}^4;$$

$$I_y = 12,47 \text{ см}^4; \tan \alpha = 0,436.$$

Для знаходження відцентрового моменту інерції I_{xy} скористаємось формулою зміни відцентрового моменту інерції перерізу при обертанні осей (перехід від головних осей до осей xOy):

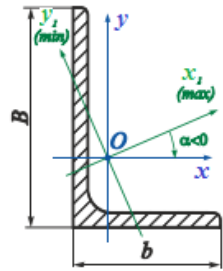


Рис. 5.25

$$I_{xy} = I_{x_1y_1} \cdot \cos 2\alpha + \frac{I_{max} - I_{min}}{2} \sin 2\alpha.$$

Значення I_{max} обчислимо виходячи з умови інваріантності суми осьових моментів інерції відносно повороту осей, тобто із співвідношення

$$I_{max} + I_{min} = I_x + I_y;$$

$$I_{max} + 7,24 = 34,81 + 12,47 \Rightarrow I_{max} = 40,04 \text{ см}^4.$$

Відцентровий момент кутика відносно головних центральних осей тотожно дорівнює нулю ($I_{x_1y_1} \equiv 0$).

Кут нахилу головних центральних осей

$$\alpha = \arctg 0,436 = -23,557^\circ.$$

Кут в цьому випадку є від'ємним, оскільки найкоротше суміщення осі максимального моменту інерції з віссю y відбувається за годинниковою стрілкою.

Таким чином, відцентровий момент кутика (див. приклад 5.16, табл. 5.2):

$$I_{xy} = 0 + \frac{40,04 - 7,24}{2} \sin(2 \cdot (-23,557^\circ)) = 16,402 \cdot (-0,7327) = -12,01 \text{ см}^4.$$

Зуваження

1. Вісь максимального моменту інерції кутика з рівними полками є віссю симетрії перерізу, як наслідок, $\alpha = 45^\circ$.
2. Відцентровий момент інерції кутика з нерівними полками простіше обчислити за формулою:

$$I_{xy} = \frac{\tan 2\alpha(I_y - I_x)}{2}.$$

3. В таблицях сортаменту відцентровий момент інерції наводиться за модулем.

Приклад 5.16. Визначити положення головних центральних осей інерції заданого складного перерізу і величини головних моментів інерції в системі цих осей (рис. 5.26).

Дано: швелер №12 і кутик № 7, 5/5.

Необхідно визначити $x_c, y_c, \alpha_0, I_U, I_V$.

Розв'язок.

1. Виконуємо креслення складного перерізу в масштабі.
2. Розбиваємо переріз на найпростіші частини (швелер і кутик) і присвоюємо цим частинам номери відповідно 1 і 2.
3. В центрі ваги кожної із найпростіших частин перерізу розташовуємо центральні системи координат $x_i O_i y_i$ (в нашому випадку $x_1 O_1 y_1$ і $x_2 O_2 y_2$).
4. Із таблиць сортаменту випишемо геометричні характеристики швелера №12 і кутика №7,5/5, необхідні для розв'язку задачі та зведемо їх в табл.5.2.

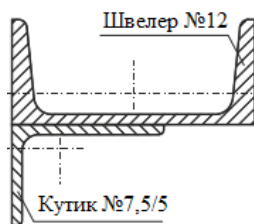


Рис. 5.26

Таблиця 5.2

Частина перерізу	Геометричні характеристики							
	$h_i, \text{см}$	$b_i, \text{см}$	$A_i, \text{см}^2$	$I_{x_i}, \text{см}^4$	$I_{y_i}, \text{см}^4$	$I_{x_i y_i}, \text{см}^4$	$x_{0_i}, \text{см}$	$y_{0_i}, \text{см}$
1 (швелер)	12,0	5,2	13,3	31,2	304,0	0	-	1,54
2 (кутик)	5,0	7,5	6,11	12,47	34,81	12,0	2,39	1,17

Зауваження

1. Якщо в складний переріз входять як прості частини рокатні профілі, то їх геометричні характеристики вибирають із таблиць сортаменту. При цьому належить враховувати розташування цих частин відносно власних центральних осей.
 2. Оскільки вісь x_1 є віссю симетрії швелера, то відцентровий момент інерції швелера $I_{x_1 y_1} = 0$.
 3. Знак відцентрового моменту кутика визначається його взаєморозташуванням відносно власних центральних осей.
5. Знайдемо координати центру ваги складного перерізу.

Вибираємо роботу (базову) систему координат, в якій будуть визначені координати центру ваги в'ього перерізу. Прийmemo в якості робочої систему центральних осей швелера $x_1 O_1 y_1$.

Тоді формули для визначення координат центру ваги набувають вигляду:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^2 S_{y_1}^{(i)}}{\sum_{i=1}^2 A_i}; \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^2 S_{x_1}^{(i)}}{\sum_{i=1}^2 A_i},$$

де

$$\sum_{i=1}^2 A_i = A_1 + A_2 = 13,3 + 6,11 = 19,41 \text{ см}^2;$$

$$S_{y_1} = \sum_{i=1}^2 S_{y_1}^{(i)} = S_{y_1}^{(1)} + S_{y_1}^{(2)} = A_1 \cdot 0 + A_2 \left(- \left(\frac{h_1}{2} - y_{O_2} \right) \right) = 13,3 \cdot 0 + 6,11 \cdot \left(- \left(\frac{12}{2} - 2,39 \right) \right) = -22,057 \text{ см}^3;$$

$$S_{x_1} = \sum_{i=1}^2 S_{x_1}^{(i)} = S_{x_1}^{(1)} + S_{x_1}^{(2)} = A_1 \cdot 0 + A_2 \left(- (y_{O_1} - y_{O_2}) \right) = 13,3 \cdot 0 + 6,11 \cdot \left(- (1,54 + 1,17) \right) = -16,558 \text{ см}^3.$$

Обчислимо координати центру ваги **O** складного перерізу в системі координатних осей $x_1 O_1 y_1$:

$$x_c = \frac{S_{y_1}}{A} = \frac{-22,057}{19,41} = -1,136 \text{ см}; \quad y_c = \frac{S_{x_1}}{A} = \frac{-16,558}{19,41} = 0,853 \text{ см}.$$

У відповідності з результатами обчислень покажемо на рис. 5.27 систему центральних координатних осей **xOy** і центр ваги складного перерізу – точку **O**.

Визначимо координати центрів ваги складових частин перерізу (точок O_1 і O_2) в системі центральних координатних осей xOy :

$$a_1 = |x_c| = 1,136 \text{ см};$$

$$a_2 = -\left(\frac{h_1}{2} - y_{O_2} - |y_c|\right) = -\left(\frac{12}{2} - 2,39 - 1,136\right) = -2,474 \text{ см};$$

$$c_1 = |y_c| = 0,853 \text{ см};$$

$$c_2 = -(y_{O_1} + y_{O_2} - |y_c|) = -(1,54 + 1,17 - 0,853) = -1,857 \text{ см}.$$

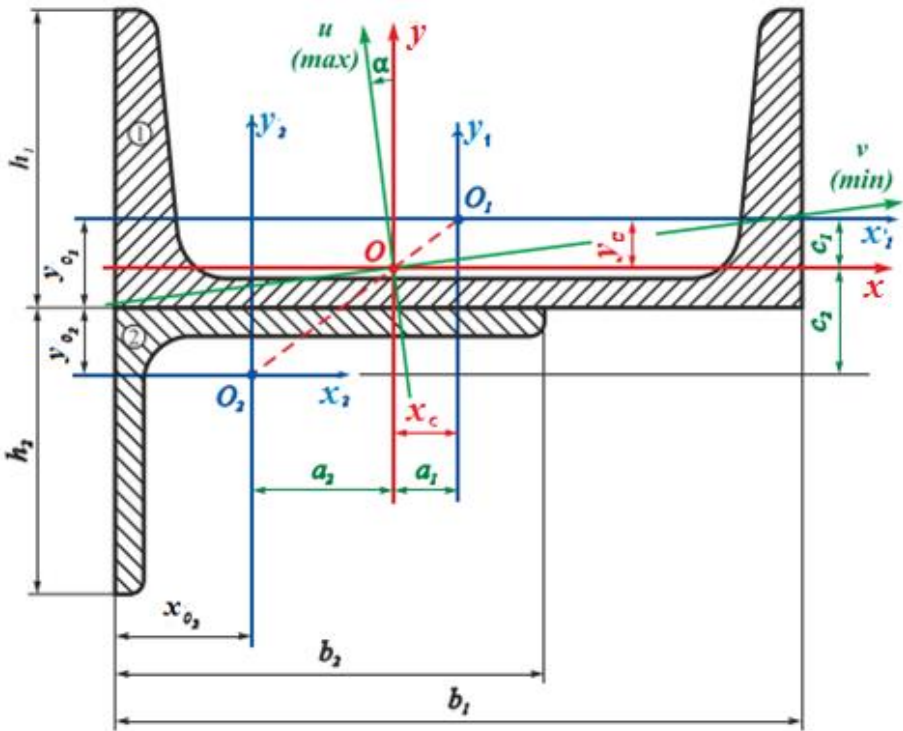


Рис. 5.27

Перевірка правильності визначення центру ваги перерізу:

а) графічний метод

Для перевірки правильності знаходження центру ваги з'єднаємо пунктиром точки O_1 і O_2 . Точка O повинна лежати на цій лінії.

Зауваження

Центр ваги складного перерізу, що складається з двох простих частин, завжди лежить на лінії, що з'єднує центри ваги простих частин. При цьому точка O ділить

відрізок O_1O_2 на частини, зворотно пропорційні площам простих частин перерізу:

$$\frac{|OO_1|}{|OO_2|} = \frac{A_2}{A_1};$$

$$|OO_1| = \sqrt{a_1^2 + c_1^2} = 1,421 \text{ см}; \quad |OO_2| = \sqrt{a_2^2 + c_2^2} = 3,094 \text{ см};$$

$$\frac{|OO_1|}{|OO_2|} = \frac{1,421}{3,094} = 0,4593; \quad \frac{A_2}{A_1} = \frac{6,11}{13,3} = 0,4994; \quad 0,4593 \approx 0,4994;$$

б) аналітичний метод

Скористаємось властивістю центральних осей, згідно якій статичний момент складного перерізу відносно центральних осей дорівнює нулю:

$$S_x = \sum_{i=1}^2 S_x^{(i)} = S_x^{(1)} + S_x^{(2)} = A_1 \cdot c_1 + A_2 \cdot c_2 = 13,3 \cdot 0,853 + 6,11 \cdot (-1,857) = 11,3449 - 11,3463 = -0,0014 \text{ см}^3.$$

Відносна похибка

$$\Delta\% = \left| \frac{-0,0014}{11,3449} \right| \cdot 100\% = 0,01234\% < 1\%; \quad |\Delta\%| \leq 1\%;$$

$$S_y = \sum_{i=1}^2 S_y^{(i)} = S_y^{(1)} + S_y^{(2)} = A_1 \cdot a_1 + A_2 \cdot a_2 = 13,3 \cdot 1,136 + 6,11 \cdot (-2,474) = 15,1088 - 15,1161 = -0,0073 \text{ см}^3.$$

Відносна похибка

$$\Delta\% = \left| \frac{-0,0073}{15,1088} \right| \cdot 100\% = 0,00483\% < 1\%; \quad |\Delta\%| \leq 1\%;$$

Таким чином, положення центру ваги складного перерізу визначено вірно.

6. Знайдемо осьові і відцентровий моменти інерції складного перерізу в системі центральних координатних осей xOy , використавши формули паралельного перенесення осей:

$$I_x = I_x^{(1)} + I_x^{(2)} = 40,977 + 33,540 = 74,517 \text{ см}^4;$$

$$I_x^{(1)} = I_{x_1} + c_1^2 A_1 = 31,3 + 0,853^2 \cdot 13,3 = 40,977 \text{ см}^4;$$

$$I_x^{(2)} = I_{x_2} + c_2^2 A_2 = 12,47 + (-1,857)^2 \cdot 6,11 = 33,540 \text{ см}^4;$$

$$I_y = I_y^{(1)} + I_y^{(2)} = 321,164 + 72,207 = 393,371 \text{ см}^4;$$

$$I_y^{(1)} = I_{y_1} + a_1^2 A_1 = 304,0 + 1,136^2 \cdot 13,3 = 321,164 \text{ см}^4;$$

$$I_y^{(2)} = I_{y_2} + a_2^2 A_2 = 34,81 + (-2,474)^2 \cdot 6,11 = 72,207 \text{ см}^4;$$

$$I_{xy} = I_{xy}^{(1)} + I_{xy}^{(2)} = 12,888 + 28,071 = 40,959 \text{ см}^4;$$

$$I_{xy}^{(1)} = I_{x_1 y_1} + a_1 c_1 A_1 = 0 + 1,136 \cdot 0,853 \cdot 13,3 = 12,858 \text{ см}^4;$$

$$I_{xy}^{(2)} = I_{x_2 y_2} + a_2 c_2 A_2 = 0 + (-2,474) \cdot (-1,857) \cdot 6,11 = 28,071 \text{ см}^4;$$

Завваження

1. Величини осьових моментів інерції відносно центральних осей повинні бути додатними, що витікає із визначення осевого моменту інерції.

2. Якщо велика площа складного перерізу знаходиться в першій та третій четвертях, то відцентровий момент інерції перерізу буде додатним, якщо в другій і четвертій – від'ємним.

7. Визначимо положення головних центральних осей інерції перерізу:

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x} = \frac{2 \cdot 40,959}{393,371 - 74,517} = 0,257;$$

$$2\alpha_0 = 14,413^\circ; \alpha_0 = 7,2065^\circ = 7^\circ 12' 23''.$$

Оскільки $\alpha_0 > 0$, то обертання осей x і y на цей кут необхідно виконувати проти годинникової стрілки у відповідності з прийнятим правилом знаків. Отримані в результаті цього повороту осі будуть головним центральними осями інерції складного перерізу.

8. Визначимо величини головних моментів інерції перерізу:

$$I_{\min}^{\max} = I_U = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_x}{2}\right)^2 + I_{x_0 y_0}^2} =$$

$$\frac{74,517 + 393,371}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{393,371 - 74,517}{2}\right)^2 + (40,959)^2} = 233,944 \pm$$

$$164,604 \text{ см}^4.$$

Звідси

$$I_{\max} = I_u = 398,548 \text{ см}^4;$$

$$I_{min} = I_v = 69,34 \text{ см}^4.$$

Зауваження Величини головних центральних моментів інерції повинні бути додатними, що впливає із визначення осьового моменту інерції.

За результатами проведеного розрахунку покажемо на рис. 5.27 головні центральні осі інерції складного перерізу – осі u і v .

Оскільки $I_y > I_x$, то максимальне значення осьовий момент інерції перерізу набуває відносно осі, що знаходиться на мінімальній кутовій відстані від осі y .

9. Перевіряємо правильність розв'язку задачі:

а) перевіримо виконання співвідношення

$$I_{max} > I_y > I_x > I_{min} \text{ (якщо } I_y > I_x) \text{ або } I_{max} > I_x > I_y >$$

$$I_{min} \text{ (якщо } I_x > I_y)$$

В нашому випадку

$$398,548 > 393,371 > 74,517 > 69,34;$$

б) перевіримо постійність суми величин осьових моментів при обертанні осей:

$$I_{max} + I_{min} = I_y + I_x$$

$$398,548 + 69,34 = 467,888; \quad 393,371 + 74,517 = 467,888;$$

$$467,888 = 467,888;$$

в) обчислюємо відцентровий момент інерції відносно головних центральних осей, який свідомо дорівнює нулю:

$$I_{UV} = I_{xy} \cos 2\alpha_0 + \frac{I_x + I_y}{2} \sin 2\alpha_0 = 40,959 \cdot \cos(2 \cdot 7,2065^\circ) + \frac{74,517 - 81,333}{2} \cdot \sin(2 \cdot 7,2065^\circ) = 40,959 \cdot 0,9685 + (-159,427) \cdot$$

$$0,2489 = 39,6699 - 39,6829 = -0,013 \text{ м}^4.$$

Похибка обчислень

$$\Delta\% = \frac{-0,013}{39,6699} \cdot 100\% = 0,033\% \leq 1\%.$$

Це значить, що задача розв'язана вірно.

Запитання для самоконтролю:

1. Назвіть основні геометричні характеристики поперечних перерізів.
2. Для чого необхідні характеристики плоских перерізів?
3. Що таке статичний момент плоскої фігури відносно осі?
4. Яку розмірність має статичний момент?
5. Чому дорівнює статичний момент відносно осі, що проходить через центр ваги перерізу?
6. Як визначити координати центру ваги простого і складного перерізів?
7. Які вісі називають центральними вісями?
8. Що називають осьовим, полярним та відцентровим моментами інерції перерізу?
9. Яку розмірність мають моменти інерції перерізу?
10. Чому осьові і полярні моменти інерції площі перерізів не можуть бути від'ємними?
11. Відносно якої із паралельних осей осьовий момент інерції буде найменшим?
12. Який вигляд мають формули переходу для обчислення моментів інерції при паралельному перенесенні осей?
13. За допомогою яких виразів визначають величини головних моментів інерції і положення головних осей?
14. Які осі називають головними осями інерції?
15. Які осі називають головними центральними осями інерції?
16. Які властивості мають головні центральні моменти перерізів?
17. Чому дорівнює відцентровий момент інерції відносно головних центральних осей?
18. Положення головних осей яких перерізів можна вказати без обчислення?
19. Чи зміниться сума осьових моментів інерції відносно двох ортогональних осей при їх обертанні?
20. Чому дорівнюють осьові моменти інерції круга і кільця відносно осей, що проходять через їх центри ваги?
21. Чому дорівнюють осьові моменти інерції прямокутника і прямокутного трикутника відносно осей, що проходять через їх центри ваги?

5.9. Розрахунково-проектувальна робота «дослідження геометричних характеристик плоского складного перерізу»

Для заданого перерізу визначити положення головних центральних осей і величини головних центральних моментів інерції. Дані для розрахунку взяти з табл. 5.3 і табл. 5.4.

В якості прикладу виконання використати *приклад 5.16.*

Порядок виконання завдання і варіанти

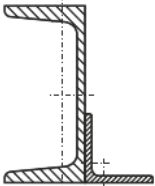
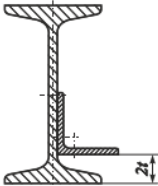
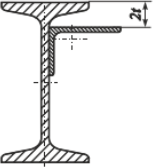
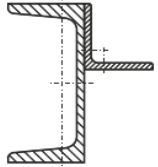
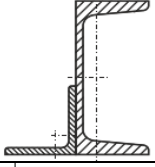
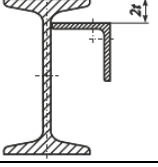
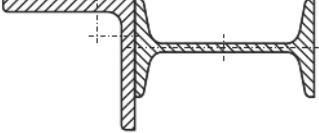
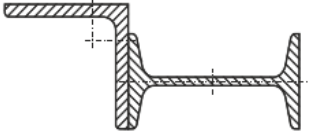
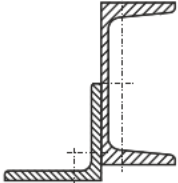
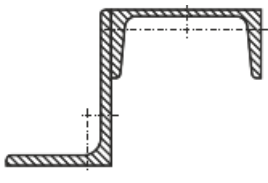
1. Виконати креслення складного перерізу в масштабі.
2. Розбити переріз на найпростіші частини.
3. В центрі ваги кожної із найпростіших частин перерізу розмістити центральні системи координат $x_i O_i y_i$.
4. Із таблиць сортаменту вибрати геометричні характеристики прокатних профілів.
5. Знайти координати центру ваги складного перерізу.
6. Визначити осьові та відцентровий моменти інерції складного перерізу в системі центральних осей xOy .
7. Визначити положення головних центральних осей інерції перерізу, тобто, кут, на який необхідно повернути центральні осі, щоб вони стали головними.
8. Визначити головні центральні моменти інерції перерізу.
9. Перевірити правильність розв'язку.

Таблиця 5.3

Варіанти завдань до РПР

№, п/п	Елементи перерізу	
	Двотавр (швелер)	Кутик рівнобокий (нерівнобокий)
0	16	100×100×10
1	12	70×70×8
2	14	80×80×8
3	20	110×110×8
4	18	56×56×5
5	30	63×40×8
6	27	70×45×5
7	10	80×50×6
8	22	40×25×4
9	24	50×32×4

Види перерізів для РПП

№, п/п	Вигляд перерізу	№, п/п	Вигляд перерізу
0		5	
1		6	
2		7	
3		8	
4		9	

6. КРУЧЕННЯ

На кручення працює багато елементів машин і механізмів: вали, рами автомобілів, окремі частини станин металорізальних верстатів, фрези свердла тощо.

6.1. Короткі теоретичні відомості

6.1.1. Загальні поняття

При деформації кручення в поперечному перерізі бруса виникає одне з внутрішніх зусиль — крутний момент $M_{кр}$.

Величина $M_{кр}$ у довільному перерізі бруса дорівнює алгебраїчній сумі скручувальних моментів, прикладених по одну сторону перерізу. Скручувальний момент, що діє за ходом годинникової стрілки (якщо дивитись з торця бруса), записують зі знаком «+», проти — зі знаком «-».

Дільниця навантаження при крученні — частина бруса, на якій $M_{кр}$ змінюється за одним і тим же законом. Як правило, на дільниці величина $M_{кр}$ постійна ($M_{кр} = \text{const}$). Границями дільниць є торцеві перерізи і перерізи, де прикладені скручувальні моменти.

При розрахунках часто використовують залежності між величиною скручувального моменту T , потужністю P і кутовою швидкістю (ω або n):

$$T = \frac{P}{\omega} [H \cdot m], \quad (6.1)$$

де P — число ват; ω — кутова швидкість в s^{-1} ;

$$T = 9551 \frac{P}{n} [H \cdot m], \quad (6.2)$$

де P — число кіловат; n — число обертів за хвилину;

$$T = 7026 \frac{P}{n} [H \cdot m], \quad (6.3)$$

де P — число кінських сил; n — число обертів за хвилину

У більшості випадків бруси, що працюють на кручення, мають круглий переріз, суцільний або кільцевий.

6.1.2. Основні залежності при крученні круглих брусів

У поперечних перерізах при крученні бруса круглого перерізу виникають тільки дотичні напруження.

Величина дотичного напруження прямо пропорційна віддалі ρ від центра ваги перерізу (рис. 6.1) і обчислюється за формулою:

$$\tau_{\rho} = \frac{M_{кр} \cdot \rho}{J_p}, \quad (6.4)$$

де J_p — полярний момент інерції перерізу.

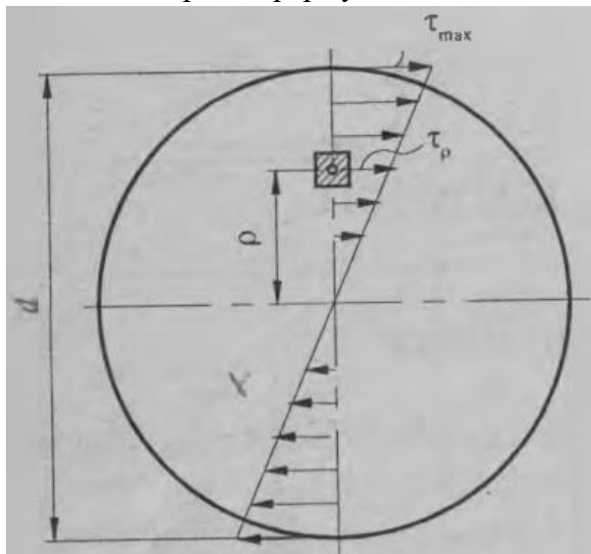


Рис. 6.1

Для круглого суцільного перерізу:

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0,1d^4. \quad (6.5)$$

Для кільцевого перерізу:

$$J_p = \frac{\pi D^4}{32} (1 - C^4) \approx 0,1D^4 (1 - C^4). \quad (6.6)$$

Тут

$$C = \frac{d}{D}, \quad (6.7)$$

де D і d , відповідно, зовнішній і внутрішній діаметри кільця.

Умова міцності:

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр}}{W_p} \leq [\tau], \quad (6.8)$$

де τ_{max} — найбільше дотичне напруження, що виникає в небезпечному перерізі бруса; $M_{кр}$ — крутний момент у небезпечному перерізі бруса, $M_{кр} = |M_{кр}^{max}|$; W_p — полярний момент опору перерізу; $[\tau]$ — допустиме напруження при крученні.

$$[\tau] = 0,5 \dots 0,6[\sigma_p]$$

Для суцільного перерізу;

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2d^3. \quad (6.9)$$

Для кільцевого перерізу:

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16} (1 - C^4) \approx 0,2D^3(1 - C^4). \quad (6.10)$$

Дільниця максимальних напружень — частина бруса, де величина τ_{max} змінюється за одним і тим же законом. Як правило, на дільниці $\tau_{max} = const$. Границями дільниць є торцеві перерізи і перерізи, де прикладені скручувальні моменти або змінюються розміри чи форма перерізу.

Взаємний кут повороту торцевих перерізів дільниці деформації називається її *кутом закручування*. *Дільниця деформації* — це частина бруса, де величина $M_{кр}$ і розміри перерізу (полярний момент інерції перерізу J_p) змінюються за одними і тими ж законами, а матеріал бруса (модуль зсуву G) один і той же. Границями дільниць є торцеві перерізи і перерізи, не прикладені скручувальні моменти або змінюються розміри чи форма перерізу, а також межі різних матеріалів. Кут закручування дільниці визначають за формулою:

$$\varphi = \int_0^l \frac{M_{кр} dz}{G J_p} \text{ [радіан]}, \quad (6.11)$$

де l — довжина дільниці.

Добуток $G J_p$ називається жорсткістю перерізу при крученні.

При $M_{кр} = const$ і $J_p = const$ кут закручування дільниці обчислюють за формулою:

$$\varphi = \frac{M_{кр} \cdot l}{G J_p}. \quad (6.12)$$

Кут закручування частини бруса, що знаходиться між двома перерізами, дорівнює алгебраїчній сумі кутів закручування дільниць, що знаходяться між цими перерізами.

Відносний кут закручування $\theta = \frac{d\varphi}{dz}$.

Для дільниці з постійними крутним моментом і жорсткістю

$$\theta = \frac{\varphi}{l} = \frac{M_{кр}}{G J_p} \text{ [рад/м]}. \quad (6.13)$$

Умова жорсткості:

$$\theta_{max} = \frac{M_{кр}}{G J_p} \leq [\theta]. \quad (6.14)$$

де $M_{кр}$ — максимальна величина крутного моменту.

6.1.3. Кручення брусів некруглого перерізу

При крученні брусів некруглого перерізу максимальне дотичне напруження і відносний кут закручування обчислюють за формулами:

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр}}{W_k}; \quad (6.15)$$

$$\theta = \frac{M_{кр}}{GJ_k}. \quad (6.16)$$

Тут W_k — момент опору перерізу при крученні, має розмірність $[L^3]$;

J_k — момент інерції перерізу при крученні, має розмірність $[L^4]$.

Нижче наведено значення W_k і J_k для деяких перерізів.

1. Еліптичний переріз (рис. 6.2):

$$W_k = \frac{1}{2} \pi a b^2 (a > b); \quad (6.17)$$

$$J_k = \pi \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2}. \quad (6.18)$$

Вподовж довільного радіуса напруження розподіляються за лінійним законом і паралельні дотичній до контуру в точці перетину радіуса з контуром. Максимальні дотичні напруження $\tau_{max} = \tau_m$ діють на кінцях малої осі.

Напруження на кінцях великої осі:

$$\tau_n = \frac{2M_{кр}}{\pi b a^2}. \quad (6.19)$$

2. Прямокутний переріз (рис. 6.3):

$$W_k = \alpha h b^2 \quad (6.20)$$

$$J_k = \beta h b^3. \quad (6.21)$$

Тут h — розмір більшої, а b — меншої сторони прямокутника. Максимальні напруження τ_{max} діють посередині більших сторін. Дотичні напруження посередині меншої сторони прямокутника:

$$\tau_n = \gamma \cdot \tau_{max}. \quad (6.22)$$

Коефіцієнти α , β і γ залежать від співвідношення сторін h і b і наведені в табл. 6.1.

При $h/b > 10$ приймають $\alpha = \beta = 1/3$ і $W_k = 1/3 h b^2$; $J_k = 1/3 h b^3$.

Таблиця 6.1

h/b	1,0	1,5	1,75	2,0	2,5	3,0	4,0	6,0	8,0	10,0	∞
α	0,208	0,231	0,239	0,246	0,256	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313	0,333
β	0,141	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333
γ	1,00	0,859	0,795	0,766	0,753	0,745	0,743	0,742	0,742	0,742	0,742

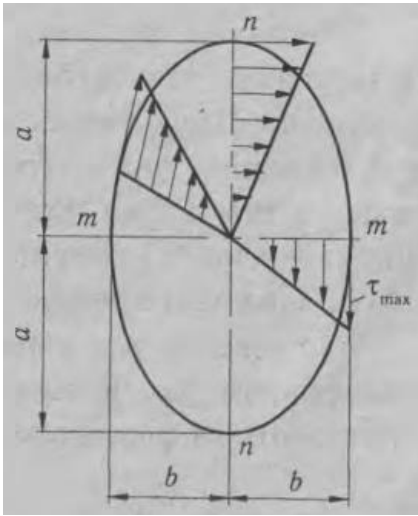


Рис. 6.2

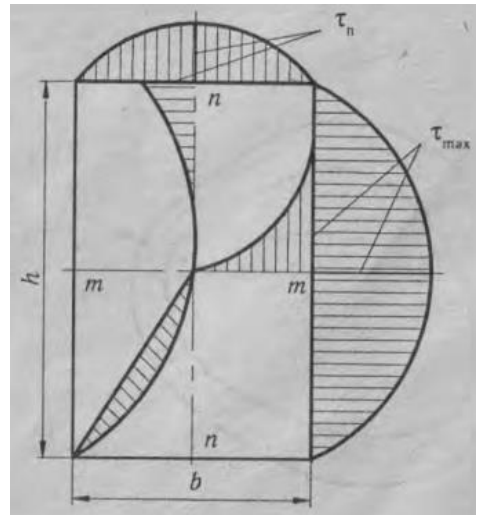


Рис. 6.4

3. Рівносторонній трикутник (а — його сторона):

$$W_k = \frac{a^3}{20}, \quad (6.23)$$

$$J_k = \frac{a^4}{46,2}. \quad (6.24)$$

6.1.4. Кручення тонкостінних профілів

У практиці знаходять широке застосування тонкостінні профілі: прокатні профілі (кутик, двотавр, швелер), тонкостінні труби, гнуті та зварні профілі різної форми. Вони можуть бути замкненими і відкритими.

А. Замкнені профілі (рис. 6.4). Напруження в довільній точці тонкостінного замкнутого профілю обчислюють за формулою Бредта:

$$\tau = \frac{M_{кр}}{2\omega\delta}, \quad (6.25)$$

де ω — площа, обмежена середньою лінією профілю; δ — товщина стінки в місці визначення τ . — площа, обмежена середньою лінією профілю; 5 — товщина стінки в місці визначення τ .

Максимальні дотичні напруження виникають в місцях, де стінка профілю має мінімальну товщину:

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр}}{2\omega\delta_{min}}, \quad (6.26)$$

де δ_{min} — найменша товщина стінки.

$$W_k = 2\omega\delta_{min}. \quad (6.27)$$

Відносний кут закручування обчислюють за формулою:

$$\theta = \frac{M_{кр}}{4G\omega^2} \int_S \frac{ds}{\delta}, \quad (6.28)$$

де ds — елемент середньої лінії профілю. Інтегрування виконується всій довжині S середньої лінії профілю:

$$J_k = \frac{4\omega^2}{\int_S \frac{ds}{\delta}}. \quad (6.29)$$

Якщо $\delta = \text{const}$, то

$$\theta = \frac{M_{кр} \cdot S}{4G\omega^2 \delta}, \quad (6.30)$$

$$J_k = \frac{4\omega^2 \delta}{S}. \quad (6.31)$$

Для тонкостінного круглого кільця (при відношенні товщини стінки до середнього діаметра D_c кільця $\frac{\delta}{D_c} \leq 0,1$):

$$\omega = \frac{\pi D_c^2}{4}, \quad (6.32)$$

$$S = \pi D_c. \quad (6.33)$$

Б. Відкриті профілі.

Довільний відкритий профіль можна представити як суму вузьких прямокутників (рис. 6.5).

Відповідно:

$$J_k = \sum \beta_i \cdot S_i \cdot \delta_i^3, \quad (6.34)$$

де S_i і δ_i — більша і менша сторони прямокутника; β_i — коефіцієнт, що визначається за табл. 6.1;

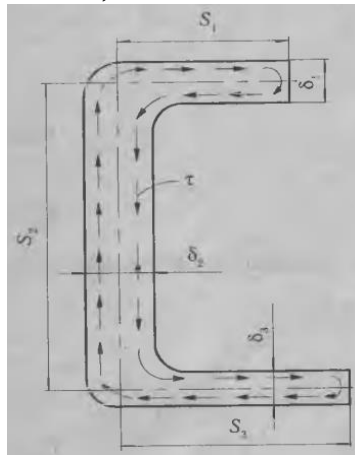


Рис. 6.5

$$W_k = \frac{J_k}{\left(\frac{\beta_i \delta_i}{\alpha_i}\right)_{\max}}, \quad (6.35)$$

де β_i і α_i — коефіцієнти, визначені за табл. 6.1.

Якщо S_i/δ_i і $\delta = \text{const}$, то $\alpha = \beta = 1/3$ і

$$\tau_{\max} = \frac{3M_{\text{кр}}}{S \cdot \delta^2}; \quad W_k = \frac{S \cdot \delta^2}{3}; \quad (6.36)$$

$$\theta = \frac{3M_{\text{кр}}}{G \cdot S \cdot \delta^3}; \quad J_k = \frac{S \cdot \delta^3}{3} \quad (6.37)$$

де S — довжина середньої лінії відкритого профілю.

Для профільного прокату:

$$J_k = \eta \frac{1}{3} \sum S_i \delta_i^3. \quad (6.38)$$

Коефіцієнт η дорівнює: 1,00 — для кутикового перерізу; 1,20 — для двотаврового перерізу; 1,15 — для таврового перерізу; 1,12 — для швелерного перерізу.

$$W_k = \frac{J_k}{\delta_{\max}}, \quad (6.39)$$

де δ — найбільша з товщин прямокутників, що утворюють переріз.

6.1.5. Розрахунки на кручення прямих брусів

Круглі бруси, що сприймають обертові або скручувальні моменти, завжди розраховують на міцність і часто — на жорсткість. Зустрічаються три типи задач.

I. Перевірний розрахунок. За відомими крутним моментом, розмірами перерізу бруса і механічними характеристиками матеріалу обчислюють максимальні дотичне напруження та відносний кут закручування і порівнюють їх з допустимими значеннями, $\tau_{\max} \leftrightarrow [\tau]$, $\theta_{\max} \leftrightarrow [\theta]$ (приклад 6.1).

II. Визначення вантажопідйомності бруса. Переріз відомий. З умов $\tau_{\max} = [\tau]$ і $\theta_{\max} = [\theta]$ обчислюють допустиме значення крутного моменту $[M_{\text{кр}}]$ (приклад 6.4). Допустима величина скручувального моменту $[T] = [M_{\text{кр}}]$ і є вантажопідйомністю.

III. Проектувальний розрахунок. З умов міцності і жорсткості визначають необхідні розміри перерізу. Остаточню приймають більші розміри, що задовільняють обидві умови (приклад 6.2).

При крученні брусів некруглого і тонкостінного профілів зустрічаються, в основному, задачі типу I і II.

6.1.6. Розрахунки циліндричних гвинтових пружин з малим кроком

Умова міцності пружини з дроту круглого перерізу при розтягу або стиску:

$$\tau_{max} = K \frac{8FD}{\pi d^3} \leq [\tau], \quad (6.40)$$

де F — навантаження, що діє по осі пружини; D — середній діаметр пружини; d — діаметр дроту; K — коефіцієнт, що враховує вплив нахилу та кривизни витків і поперечної сили, залежить від відношення D/d .

Для пружини з прутка квадратного перерізу:

$$\tau_{max} = K_1 \frac{FD}{2\alpha b^3} \leq [\tau], \quad (6.41)$$

де K_1 — коефіцієнт, що залежить від відношення середнього діаметра D пружини до сторони b перерізу витка.

Значення коефіцієнтів K і K_1 наведені в таблиці 4.2.

Таблиця 6.2

$\frac{D}{d} \frac{D}{d' b}$	4	5	6	8	10	12
K	1,37	1,29	1,24	1,17	1,14	1,11
K_1	1,33	1,26	1,21	1,16	1,13	1,10

Коефіцієнт $\alpha = 0,208$ (табл. 6.1).

Зміну довжини пружини (видовження при розтягу або осадку при стиску) з круглого дроту обчислюють за формулою:

$$\lambda = \frac{8FD^3 n}{Gd^4}, \quad (6.42)$$

де n — робоче число витків пружини; G — модуль зсуву.

Для пружини з квадратного дроту:

$$\lambda = \frac{FD^3 \pi n}{4G\beta b^4}, \quad (6.43)$$

де $\beta = 0,141$ (табл. 6.1).

Осадку пружини повинна бути такою, щоб не було закриття зазорів між витками.

Потенціальна енергія деформації пружини:

$$U = \frac{1}{2} F \lambda = \frac{4F^2 D^3 n}{Gd^4}. \quad (6.44)$$

Об'єм пружини V , необхідний для поглинання заданої енергії $T = U$, при умові, що $\tau_{max} = [\tau]$:

$$V = \frac{4GT}{[\tau]^2}.$$

Жорсткість пружини:

$$C = \frac{F}{\lambda} = \frac{Gd^4}{8FD^3n} \left(\frac{4G\beta b^4}{\pi D^3n} \right), \quad (6.45)$$

де d – діаметр круглого дроту; b – сторона квадратного перерізу; $\beta = 0,141$.

6.2. Практичні заняття

6.2.1. Контрольні запитання Кручення стержнів різних перерізів, розрахунок циліндричних гвинтових пружин з малим кроком

1. Коли виникає деформація кручення?
2. Як визначити величину крутного моменту в довільному перерізі?
3. Які залежності між величиною скручувального (обертового) моменту, потужністю і кутовою швидкістю?

Кручення круглих стержнів

4. Як обчислити дотичні напруження в довільній точці перерізу? Який вигляд має епюра розподілу дотичних напружень по діаметру перерізу?
5. Як обчислити полярні моменти інерції перерізу і полярні моменти опору круглих суцільного і кільцевого перерізів?
6. Як записують умову міцності?
7. Як обчислити абсолютний і відносний кути закручування? Які їх розмірності?
8. Як записують умову жорсткості?
9. Що таке дільниці навантаження, максимальних дотичних напружень і деформацій? Що є їх границями?
10. Як обчислити кут повороту частини бруса між двома перерізами?
11. Які перерізи є характерними?

Кручення брусів некруглого перерізу

12. Як обчислити максимальне дотичне напруження?
13. Як обчислити моменти опору при крученні еліптичного і прямокутного перерізів?
14. Як обчислити відносний і абсолютний кути закручування?
15. Як обчислити моменти інерції при крученні еліптичного і прямокутного перерізів?
16. Як обчислити момент опору і момент інерції при крученні перерізу у вигляді рівностороннього трикутника?

Замкнені профілі

17. Який вигляд має формула Бредта? Який фізичний зміст величин, що входять у формулу?
18. Як обчислити максимальні дотичні напруження в поперечному перерізі тонкостінного замкненого профілю?
19. Як обчислити відносний кут закручування стержня, що має тонкостінний замкнений профіль? Який зміст величин, що входять у формулу?
20. Який вигляд має формула для обчислення відносного кута закручування стержня при постійній товщині стінки профілю?

Відкриті профілі

21. Як обчислити момент інерції перерізу при крученні тонкостінного відкритого профілю?
22. Де виникають максимальні дотичні напруження?
23. Як обчислити максимальні дотичні напруження?
24. Як обчислити відносний кут закручування?
25. Як обчислити момент інерції і момент опору перерізу тонкостінного відкритого профілю при крученні?

Розрахунок циліндричних гвинтових пружин з малим кроком

26. Як обчислити максимальне дотичне напруження в перерізі витка пружини з круглого дроту?
27. Як обчислити максимальне дотичне напруження в перерізі витка пружини з квадратного дроту?
28. Як обчислити видовження або осадку пружини з круглого дроту?
29. Як обчислити видовження або осадку пружини з квадратного дроту?
30. Як обчислити потенціальну енергію деформації пружини?
31. Як обчислити об'єм пружини, необхідний для поглинання заданої величини енергії?
32. Що таке жорсткість пружини? Як її обчислити?

6.2.2. Приклади розв'язання задач

Приклад 6.1. До сталевого бруса, розрахункова схема якого показана на (рис. 6.6), а, прикладено скручувальні моменти T_1, T_2, T_3 .

Побудувати епюри крутних моментів $M_{кр}$ і кутів повороту φ перерізів, перевірити міцність і жорсткість бруса, якщо діаметр

$d = 70$ мм, модуль зсуву $G = 8 \cdot 10^4$ МПа, допустиме напруження $[\tau] = 70$ МПа, допустимий відносний кут повороту $[\theta] = 1,5$ град/м.

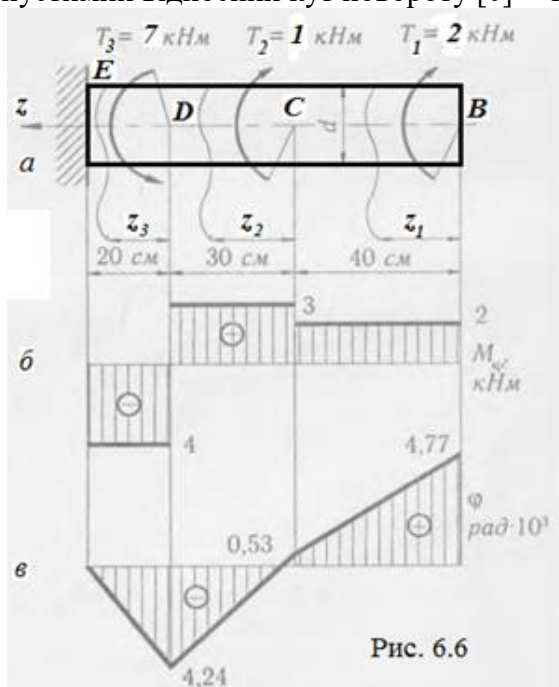


Рис. 6.6

Розв'язок.

1. Побудова епюри крутних моментів. а) Визначаємо дільниці. Їх три: I—BC, II—CD, III—DE.

б) Обчислюємо величину крутного моменту для кожної дільниці:

I—BC: $0 \leq z_1 \leq 40$ см.

$$M_{кр}^I = T_1 = 2 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

II—CD: $0 \leq z_2 \leq 30$ см.

$$M_{кр}^{II} = T_1 + T_2 = 2 + 1 = 3 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

III—DE: $0 \leq z_3 \leq 20$ см.

$$M_{кр}^{III} = T_1 + T_2 - T_3 = 2 + 1 - 7 = -4 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

в) Будуємо епюру $M_{кр}$ (рис. 6.6, б).

2. Побудова епюри кутів закручування.

Обчислюємо кути повороту характерних перерізів D, C, B відносно нерухомого перерізу E.

Кут закручування дільниці обчислюємо за формулою (6.12):

$$\varphi = \frac{M_{кр} \cdot l}{G J_p}.$$

Жорсткість GJ_p по всій довжині вала постійна. Тому дільниці дефор мацій збігаються з дільницями навантаження.

Полярний момент інерції $J_p = \frac{\pi d^4}{32}$.

Тоді

$$GJ_p = G \cdot \frac{\pi d^4}{32} = 8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot \frac{\pi}{32} \times 70^4 \cdot 10^{-12} = 188574 \text{ Н} \cdot \text{м}^2.$$

$$\varphi_D = \varphi_E + \varphi_{D(E)} = 0 + \frac{M_{kp}^{III} \cdot l_3}{GJ_p} = -\frac{4 \cdot 10^3 \cdot 20 \cdot 10^{-2}}{188574} = -4,24 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

$$\varphi_C = \varphi_D + \varphi_{C(D)} = -4,24 \cdot 10^{-3} + \frac{M_{kp}^{II} \cdot l_2}{GJ_p} = -4,24 \cdot 10^{-3} + \frac{3 \cdot 10^3 \cdot 30 \cdot 10^{-2}}{188574} = 0,53 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

$$\varphi_B = \varphi_C + \varphi_{B(C)} = 0,53 \cdot 10^{-3} + \frac{M_{kp}^I \cdot l_1}{GJ_p} = 0,53 \cdot 10^{-3} + \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 40 \cdot 10^{-2}}{188574} = 4,77 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

Розмірність: G — Н/м²; M_{kp} — Н×м; d, l — м.

За отриманими даними будуємо епюру φ (рис. 6.6, в).

3. Обчислюємо τ_{max} і θ_{max} за формулами (6.8), (6.14) і перевіряємо виконану мов міцності і жорсткості.

$$\tau_{max} = \frac{|M_{kp}^{max}|}{W_p} = \frac{|M_{kp}^{max}|}{\pi d^3 / 16} = \frac{16 \cdot 4 \cdot 10^3}{\pi (70 \cdot 10^{-3})^3} = 59,4 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2 = 59,4 \text{ МПа.}$$

$$\tau_{max} = 59,4 \text{ МПа} < [\tau] = 70 \text{ МПа. Умова міцності виконується.}$$

$$\theta_{max} = \frac{|M_{kp}^{max}|}{GJ_p} = \frac{4 \cdot 10^3}{188574} = 2,12 \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-1} = 2,12 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{180}{\pi} =$$

$$1,22 \text{ град/м.}$$

$$\theta_{max} = 1,22 \text{ град/м} < [\theta] = 1,5 \text{ град/м. Умова жорсткості виконується.}$$

Розмірність: GJ_p — Н/м²; M_{kp} — Н×м; d , — м.

Приклад 6.2. Сталевий вал передає потужність $P = 70$ к.с. при кутовій швидкості $n = 1000$ об/хв. Визначити діаметр вала, якщо допустиме дотичне напруження для матеріалу вала $[\tau] = 80$ МПа. а допустимий відносний кут закручування $[\theta] = 1$ град/ м, $G = 8 \times 10^4$ Мпа.

Розв'язок.

1. Визначення діаметра вала з умови міцності (6.8):

$$\tau_{max} = \frac{|M_{kp}^{max}|}{W_p} \leq [\tau] \cdot |M_{kp}^{max}| = T = 7026 \frac{P}{n} H \cdot m; W_p = \frac{\pi d^3}{16}.$$

Тоді

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 7026 \cdot P}{\pi [\tau] n}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 7026 \cdot 70}{\pi \cdot 80 \cdot 10^6 \cdot 1000}} = 3,15 \cdot 10^{-3} m.$$

2. Визначення діаметра вала з умови жорсткості (6.14):

$$\theta_{max} = \frac{|M_{kp}^{max}|}{G J_p} \leq [\theta] \cdot J_p = \frac{\pi d^4}{32}; [\theta] = 1 \text{ рад/м} = 1 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ рад/м}.$$

Тоді

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32 |M_{kp}^{max}|}{\pi G [\theta]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 7026 \cdot 70 \cdot 180}{\pi^2 \cdot 8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot 1000}} = 4,352 \cdot 10^{-2} m.$$

Приймаємо: $d = 44 \text{ мм}$.

Розмірність: $[\tau], G$ — Н/м².

Приклад 6.3. Порівняти вагу суцільного і пустотілого валів, спроектованих за умови, що вони сприймають однакові крутні моменти. Внутрішній діаметр пустотілого вала складає 0,8 від зовнішнього.

Розв'язок.

Відношення ваг валів дорівнює відношенню площ їх перерізів.

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{A_1}{A_2}; A_1 = \frac{\pi d^2}{4}; A_2 = \frac{\pi D^2}{4} (1 - C^2); C = \frac{d}{D} = 0,8.$$

Тоді

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{d^2}{D^2(1-C^2)}.$$

Співвідношення між діаметром d суцільного вала і зовнішнім діаметром D пустотілого вала визначимо з умови рівності максимальних дотичних напружень.

$$\tau_{max} = \tau'_{max} \rightarrow \frac{M_{кр}}{W_p} = \frac{M_{кр}}{W'_p} \rightarrow W_p = W'_p \rightarrow \frac{\pi d^3}{16} = \frac{\pi D^3}{16} (1 - C^4) \rightarrow d = D \sqrt[3]{1 - C^4}.$$

Тоді

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{(D \sqrt[3]{1 - C^4})^2}{D^2(1 - C^2)} = \sqrt[3]{\frac{(1 - C^2)^2(1 + C^2)^2}{(1 - C^2)^3}} = \sqrt[3]{\frac{(1 + C^2)^2}{1 - C^2}} = \sqrt[3]{\frac{(1 + 0,8^2)^2}{1 - 0,8^2}} = 1,95.$$

Відповідь: $\frac{Q_1}{Q_2} = 1,95$.

Приклад 6.4. Як зміниться кут закручування і вантажопідйомність бруса, якщо круглий поперечний переріз замінити квадратним? Квадрат вписаний в круг (рис. 6.7).

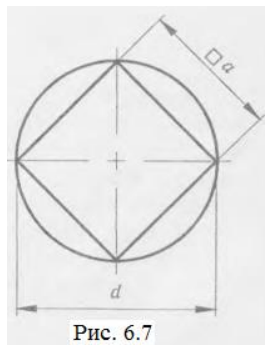


Рис. 6.7

Розв'язок.

1. Обчислення відношення кутів закручування перерізів квадратної $\varphi_{\text{кв}}$ і круглої $\varphi_{\text{кр}}$ форм:

$$\frac{\varphi_{\text{кв}}}{\varphi_{\text{кр}}} = \frac{M_{\text{кр}} \cdot l}{G J_k} : \frac{M_{\text{кр}} \cdot l}{G J_p} = \frac{J_p}{J_k}.$$

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32}; J_k = \beta h b^3 = 0,141 \cdot a^4 = 0,141 \cdot \frac{d^4}{4}.$$

Тоді

$$\frac{\varphi_{\text{кв}}}{\varphi_{\text{кр}}} = \frac{\pi d^4 \cdot 4}{32 \cdot 0,141 d^4} = 2,785.$$

2. Обчислення зміни вантажопідйомності бруса.

Вантажопідйомність бруса визначається допустимою величиною крутного моменту. Тому її зміна

$$\eta = \frac{[M_{\text{кр}}^{kp}] - [M_{\text{кр}}^{кв}]}{[M_{\text{кр}}^{kp}]} \cdot 100\%.$$

Максимальні дотичні напруження в обох випадках однакові і дорівнюють допустимому:

$$\tau_{\text{max}}^{kp} = \tau_{\text{max}}^{кв} = [\tau].$$

Тоді
$$\tau_{\text{max}}^{kp} = \frac{[M_{\text{кр}}^{kp}]}{W_p} = [\tau] \rightarrow [M_{\text{кр}}^{kp}] = W_p [\tau] = \frac{\pi d^3}{16} [\tau].$$

$$\tau_{\text{max}}^{кв} = \frac{[M_{\text{кр}}^{кв}]}{W_k} = [\tau] \rightarrow [M_{\text{кр}}^{кв}] = W_k [\tau] = \alpha h b^2 [\tau] = 0,208 a^3 [\tau] = 0,208 \left(\frac{d}{\sqrt{2}} \right)^3 [\tau].$$

$$\eta = \frac{\left[\frac{\pi d^3}{16} - 0,208 \left(\frac{d}{\sqrt{2}} \right)^3 \right] [\tau]}{\frac{\pi d^3}{16} [\tau]} \cdot 100\% = \frac{0,19635 - 0,07354}{0,19635} \cdot 100\% = 62,5\%$$

Відповідь: кут закручування збільшиться в 2,785 рази, а вантажопідйомність зменшиться на 62,5%.

Приклад 6.5. Середня лінія поперечного перерізу сталевого тонкостінного стержня є еліпс, осі якого 80 мм і 26 мм. Товщина стінки 8 = 1,5 мм. Визначити допустиму величину крутного моменту, якщо максимальні дотичні напруження і відносний кут закручування

не повинні перевищувати, відповідно, 100 МПа і 3 град/м; $G = 8 \times 10^4$ МПа.

Розв'язок.

1. Визначення $[M_{кр}]$ з умови міцності.

Максимальне дотичне напруження в брусі з тонкостінним замкненим профілем визначають за формулою (6.26):

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр}}{2\omega\delta_{min}}.$$

При $\tau_{max} = [\tau]$ крутний момент $M_{кр} = [M_{кр}]$. (I)

Із (6.26) і (I) випливає, що $[M_{кр}] = [\tau]2\omega\delta_{min}$.

Площа $\omega = \pi ab$, де a і b — півосі еліпса, $a = 80/2 = 40$ мм; $b = 26/2 = 13$ мм.

Тоді $\omega = \pi \times 40 \times 13 = 1633,6$ мм² і $[M_{кр}] = 100 \cdot 2 \cdot 1633,6 \cdot 1,5 = 490 \cdot 10^3$ Н · мм $\rightarrow [M_{кр}] = 490$ Н · м.

Розмірність: $[\tau]$ — Н/мм².

2. Визначення $[M_{кр}]$ з умови жорсткості.

Товщина стінки перерізу постійна. Тому відносний кут закручування можна обчислити за формулою (6.30):

$$\theta = \frac{M_{кр} \cdot S}{4G\omega^2\delta}.$$

При $\theta = [\theta]$

$$M_{кр} = [M_{кр}]. \quad (II)$$

Із (6.30) і (II) випливає, що $[M_{кр}] = [\theta] \cdot 4G\omega^2\delta/S$.

Довжина середньої лінії $S = \pi(1,5(a + b) - \sqrt{ab})$ — периметр еліпса.

Тоді $S = \pi(1,5(40 + 13) - \sqrt{40 \cdot 13}) = 178,1$ мм, і

$$[M_{кр}] = 3 \cdot \frac{\pi}{180 \cdot 10^3} \cdot \frac{4 \cdot 8 \cdot 10^4 \cdot 1633,6^2 \cdot 1,5}{178,1} = 377 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{мм} \rightarrow [M_{кр}] = 377 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Розмірність: $[\theta]$ — рад/мм; G — Н/мм².

Отже, допустима величина крутного моменту визначається жорсткістю стержня.

Відповідь: $[M_{кр}] = 377$ Н · м.

Приклад 6.6. Сталевий стержень довжиною 1,5 м, поперечний переріз якого є рівнобокий кутик 80х80х6 (ГОСТ 8509-72) (рис. 6.8), скручується двома моментами $T = 180$ Н·м, прикладеними в його торцевих перерізах. Визначити максимальні дотичні напруження, що

виникають у поперечному перерізі, і кут закручування стержня; $G = 8 \times 10^4$ МПа.

Розв'язок.

Максимальні дотичні напруження в тонкостінних відкритих профілях визначають за формулою (6.15):

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр}}{W_k}.$$

$$M_{кр} = T = 180 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Згідно з (6.38), (6.39),

$$J_k = \eta \frac{1}{3} \sum S_i \delta_i^3; \quad W_k = \frac{J_k}{\delta_{max}}.$$

Для кутового профілю $\eta = 1$, $\delta_{max} = \delta_i = \delta$.

Тоді

$$\tau_{max} = \frac{3M_{кр} \cdot \delta}{\eta \sum S_i \delta_i^3} = \frac{3 \cdot 180 \cdot 10^3 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot (80 - 3) \cdot 6^3} = 97,4 \text{ Н/мм}^2 = 97,4 \text{ МПа}.$$

Використовуючи формулу (6.16), обчислюємо кут закручування стержня:

$$\varphi = \theta \cdot l = \frac{M_{кр} \cdot l}{G J_k}.$$

Тоді

$$\varphi = \frac{3 \cdot 180 \cdot 10^3 \cdot 1,5 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 77 \cdot 6^3} = 0,304 \text{ рад} = 0,304 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 17,4^\circ.$$

Розмірність: $M_{кр}$ — Н×мм; S, l, d — мм; G — Н/мм².

Відповідь: 97,4 МПа; 17,4 град.

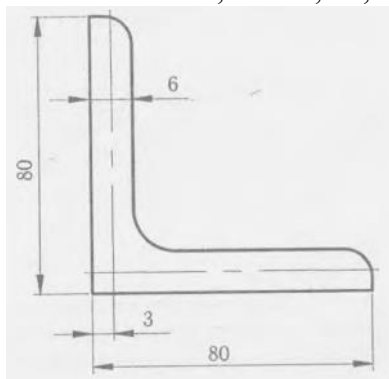


Рис. 6.8

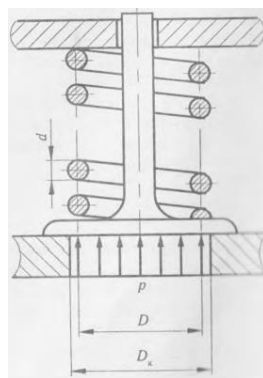


Рис. 6.9

Приклад 6.7. Запобіжний клапан закриває отвір діаметром $D_k = 75$ мм (рис. 6.9). Клапан повинен відкриватися при тиску пари $p = 0,6$ МПа. Діаметр сталевієї пружини $D = 60$ мм. діаметр дроту $d = 12$

мм. Крок пружини (віддаль між осями витків у вільному стані) $t = 17$ мм; $G = 8 \times 10^4$ МПа.

Потрібно: 1) знайти необхідне число витків пружини n , вважаючи, що запас пружини на стиск (від початку відкриття клапана до дотикання витків) $\lambda_2 = 35$ мм; 2) визначити початкову осадку пружини λ_1 ; 3) визначити напруження τ_{max} при повному відкритті клапана.

Розв'язок.

Повна осадка пружини:

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = (t - d) \cdot n. \quad (1)$$

Початковій осадці пружини λ_1 , відповідає сила F , що зрівноважує силу тиску пари на клапан:

$$F = c\lambda_1 = p \cdot \frac{\pi D_k^2}{4}.$$

Жорсткість пружини:

$$c = \frac{Gd^4}{8D^3n}.$$

Тоді:

$$\lambda_1 = p \cdot \frac{\pi D_k^2}{4} \cdot \frac{8D^3n}{Gd^4} = \frac{0,6 \cdot \pi \cdot 75^2 \cdot 8 \cdot 60^3}{4 \cdot 8 \cdot 10^4 \cdot 12^4} \cdot n = 2,76n \text{ мм}. \quad (2)$$

Розмірність: p, G — Н/мм²; D_k, D, d — мм.

З виразів (1) і (2) маємо:

$$2,76n + 35 = (17 - 12)n \rightarrow n = 16.$$

$$\lambda_1 = 2,76 \cdot 16 = 44 \text{ мм}.$$

$$D/d = 60/12 = 5 \rightarrow K = 1,29 \text{ (табл. 6.2).}$$

$$\tau_{max} = K \frac{F_{max} \cdot 8D}{\pi d^3}; \quad F_{max} = c\lambda = \frac{Gd^4}{8D^3n} = K \frac{Gd \cdot 79}{\pi D^2n} = 1,29 \cdot \frac{8 \cdot 10^4 \cdot 12 \cdot 79}{\pi \cdot 60^2 \cdot 16} = 541 \text{ МПа}.$$

$$\text{Відповідь: } n = 16; \lambda_1 = 44 \text{ мм; } \tau_{max} = 541 \text{ МПа}.$$

6.2.3. Задачі для самостійного розв'язання

6.1. Вал передає потужність $P = 40$ к.с. при 600 об/хв. Визначити діаметр вала, якщо допустиме напруження для матеріалу вала $[\tau] = 80$ МПа, а допустимий і.у і накручування $[\theta] = 0,6$ град/м; $G = 8 \cdot 10^4$ МПа. (Відповідь: 49 мм.)

6.2. На вал насаджені ведучий і два ведені шківи. Ведучий передає потужність 60 кВт, а ведені сприймають 36 кВт і 24 кВт при кутовій швидкості 300 об/хв. Визначити діаметр вала для двох варіантів розміщення шківів:

- 1) ведучий шків знаходиться між веденими;
- 2) ведучий шків є крайнім. Діаметр вала постійний по всій довжині; $[\tau] = 80 \text{ МПа}$.

(Відповідь: 42 мм; 50 мм).

6.3. Вал діаметром $d = 90 \text{ мм}$ передає потужність $P = 90 \text{ к.с.}$ Визначити допустиме число обертів вала, якщо $[\tau] = 60 \text{ МПа}$.

(Відповідь: не менше 74 об/хв.)

6.4. Як зміниться діаметр вала, якщо кутова швидкість збільшується у 20 разів? Всі інші параметри незмінні.

(Відповідь: зменшиться у 2,71 рази).

6.5. З умови рівномірності визначити катет K зварного шва, з допомогою якого приєднується фланець до труби, що передає обертовий момент (рис. 6.10). Допустимі дотичні напруження для матеріалу труби і допустим, напруження на зріз для матеріалу шва однакові.

(Відповідь: 3,4 мм).

6.6. Два вали однакової довжини, один з яких пустотілий, виготовлені з одного матеріалу. Визначити відношення кутів закручування цих валів при умові, що вони передають однакові крутні моменти $M_{кр}$ і мають однакові максимальні дотичні напруження τ_{max} .

(Відповідь: $\frac{\varphi_d}{\varphi_D} = \frac{D}{d}$).

6.7. Порівняти вантажопідйомність двох валів, площі поперечних перерізів яких рівновеликі (рис. 6.11). Внутрішній діаметр кільцевого перерізу дорівнює діаметру суцільного вала. Довжина валів і максимальні дотичні напруження в поперечних перерізах однакові.

(Відповідь: $\frac{M_{кр}^I}{M_{кр}^{II}} = 2,12$).

6.8. При випробуванні опорного ізолятора на кручення було встановлено, що порцеляна руйнується при $M_{кр} = 9103 \text{ Н} \times \text{м}$. Визначити границю міцності порцеляни при крученні, якщо зовнішній діаметр перерізу $D = 280 \text{ мм}$, а внутрішній $d = 210 \text{ мм}$. Вважати, що до моменту руйнування матеріал перебуває в пружному стані

(Відповідь: 3,05 МПа).

6.9. Сталевий вал вертикального гідрогенератора довжиною $L = 12 \text{ м}$ можна виготовити в двох варіантах: а) суцільним; б)

пустотілим з розмірами перерізу $D = 1000$ мм, $d = 400$ мм. Вважаючи міцність вала на кручення однаковою в обох випадках, визначити, вал якого варіанта легший і на скільки; $\gamma = 7,8 \cdot 10^4$ Н/м³.

(Відповідь: пустотілий вал легший на $10,5 \cdot 10^4$ Н.)

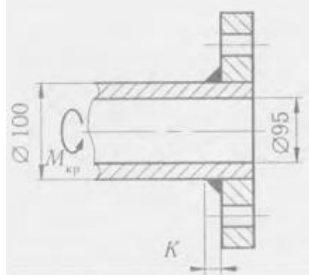


Рис. 6.10

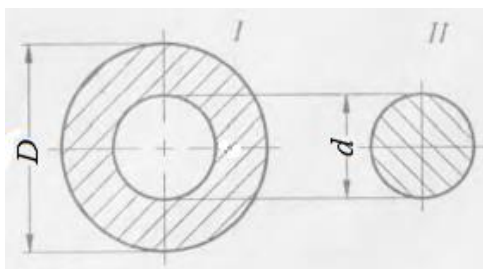


Рис. 6.11

6.10. Найбільші дотичні напруження в поперечному перерізі вала $\tau_{max} = 80$ МПа. Визначити величину дотичних напружень на відстані $R/4$ від поверхні вала.

(Відповідь: 60 МПа).

6.11. Як зміниться площа поперечного перерізу бруса, що передає скручувальний момент, якщо квадратний переріз замінити на прямокутний з відношенням сторін 2:1? Максимальні дотичні напруження в обох випадках однакові.

(Відповідь: збільшиться на 12,7 %).

6.12. Сталевий тонкостінний профіль має коробчастий профіль (рис. 6.12). чому дорівнює розмір h профілю, якщо скручувальний момент $M_{кр} = 1920$ Нм спричиняє в перерізі дотичні напруження $\tau = 80$ МПа?

(Відповідь: 60 мм).

6.13. Як зміниться площа поперечного перерізу вала, якщо замінити круглу форму на квадратну? Максимальні дотичні напруження і крутний момент в обох випадках однакові.

(Відповідь: збільшиться на 22,5%).

6.14. До торців сталеві тонкостінної труби з середнім діаметром перерізу $D_c = 97,5$ мм прикладені скручувальні моменти $M = 6 \cdot 10^3$ Н·м. якою повинна бути товщина стінки труби, щоб дотичні напруження в матеріалі труби не перевищували 80 МПа? Обчислити абсолютний кут закручування ϕ . Довжина труби 1 м; $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.

(Відповідь: 5 мм; 1,18 град).

6.15. Порівняти дотичні напруження і відносні кути закручування двох тонкостінних труб, що сприймають однакові скручувальні моменти. Відмінність між трубами: в одному випадку перерізом є замкнений профіль, а в другому — відкритий (рис. 6.13, а, б). $R = 50$ мм; $\delta = 2,5$ мм.

(Відповідь: $\frac{\tau_6}{\tau_a} = \frac{3R}{\delta} = 60$; $\frac{\theta_6}{\theta_a} = \frac{3R^2}{\delta^2} = 1200$).

6.16. Брус довжиною 2 м з двотавра № 20 (рис. 6.14) скручується двома моментами $T = 400$ Нм, прикладеними в його торцевих перерізах. Обчислити кут закручування бруса і максимальні дотичні напруження в поперечному перерізі; $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.

(Відповідь: 10,5 град; 72,3 МПа).

6.17. Визначити діаметр дроту d і число витків n пружини з середнім діаметром $D = 40$ мм, якщо стискувальна сила $F = 1000$ Н спричиняє максимальні дотичні напруження $\tau_{max} = 480$ МПа і осадку пружини $\lambda = 30$ мм. Модуль зсуву $G = 8 \cdot 10^4$ МПа, $K = 1,0$.

(Відповідь: 6 мм; 6).

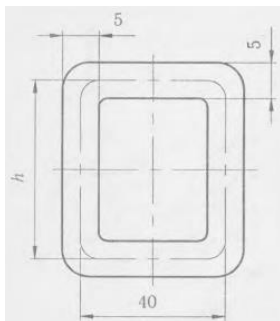


Рис. 6.12

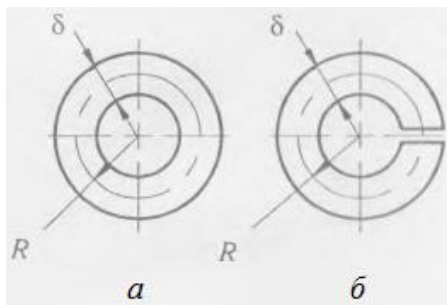


Рис. 6.13

6.18. В механізмі контактора на подолання сил опору руху контактів затрачується робота $W = 30$ Нм. Визначити хід L (рис. 6.15) каретки механізму швидкодії, при якому в трьох сталевих однакових пружинах накопичується енергія, що на 20% більша роботи сил опору; $d = 3,5$ мм; $D = 24,5$ мм; $n = 28$, $G = 8 \cdot 10^4$ МПа. Початкове зусилля в кожній пружині $F_n = 40$ Н.

(Відповідь: 71,5 мм).

6.19. Визначити кількість енергії T , що може поглинути буфер (рис. 6.16). Хід штока $I \lambda = 20$ мм, попередній стиск сталевієї пружини $\lambda_n = 28$ мм. Середній діаметр пружини $D = 34$ мм; діаметр дроту $d = 4$ мм, кількість витків $n = 10$; $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.

(Відповідь: 4,95 Нм).

6.20. До торців сталевго бруса довжиною 4 м прикладені скручувальні моменти $T = 600 \text{ Нм}$. Обчислити найбільше дотичне напруження і кут закручування бруса. Поперечний переріз руса зображено на рис. 6.17.

(Відповідь: 76,4 МПа; 11,7 град).

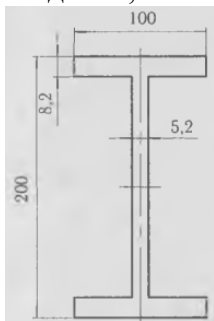


Рис. 6.14

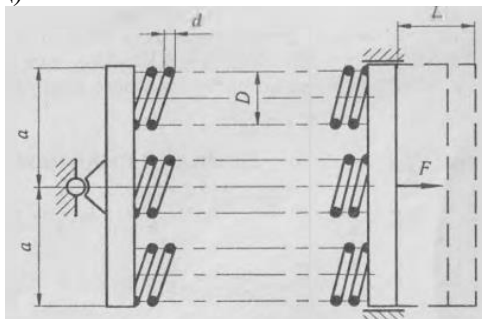


Рис. 6.15

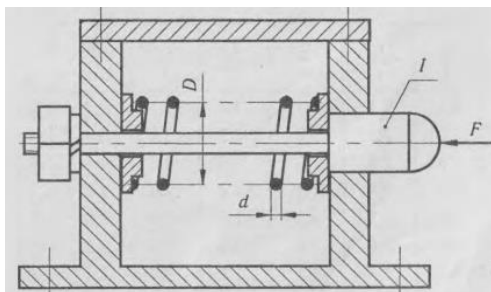


Рис. 6.16

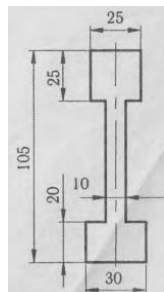


Рис. 6.17

6.3. Розрахунково-проектувальна робота «розрахунок валів на кручення»

Мета роботи:

- дослідити напружений стан бруса (вала) при крученні;
- визначити значення невідомого врівноважувального моменту T_0 ;
- визначити крутні моменти в перерізах бруса (вала), побудувати епюру крутних моментів в перерізах бруса;
- з умови міцності визначити необхідні діаметри бруса на всіх його ділянках;
- підібрати діаметри бруса з умови жорсткості;

- виконати аналіз раціонального підбору діаметрів бруса;
- визначити кути повороту поперечних перерізів ділянок бруса, побудувати епюру абсолютних та відносних кутів закручення перерізів бруса.

Методичні рекомендації до виконання роботи

Відомо, якщо в поперечних перерізах бруса, під дією зовнішнього моменту виникає тільки один силовий фактор – крутний момент сил пружності M_{κ} , то брус отримує деформацію кручення. Момент сил пружності та його напрям визначають в залежності від дії зовнішніх моментів за допомогою методу перерізів:

- крутний момент в довільному поперечному перерізі бруса чисельно дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх обертових моментів, які прикладені до бруса по один бік від дослідного перерізу;
- крутний момент перерізу вважається додатним, якщо при погляді на відсічену частину з боку зовнішньої нормалі до перерізу, рівнодійний момент зовнішніх обертових моментів направлений проти годинникової стрілки.

Для розрахунку бруса (вала) на міцність та жорсткість при крученні необхідно знати закон зміни крутних моментів по всій його довжині.

Графічне зображення зміни крутних моментів вздовж осі бруса називають *епюром крутних моментів*.

Умова міцності при крученні має вид:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\kappa}}{W_p} \leq [\tau];$$

де M_{κ} – крутний момент в небезпечному перерізі вала, Нм;

$[\tau]$, $\tau_{\max}$ – розрахункові та допустимі дотичні напруження при крученні, Па;

W_p – полярний момент опору перерізу, м³;

Знак дотичного напруження визначається знаком крутного моменту пружних сил M_{κ} .

Жорсткість бруса (вала) визначається кутом закручення перерізу. Кут повороту одного перерізу відносно іншого називається абсолютним кутом закручення. Абсолютний кут закручення довільної ділянки вала визначається по формулі:

$$\varphi_i = \frac{M_{\kappa i} \cdot l_i}{G_i \cdot J_{pi}};$$

де $M_{\kappa i}$ – крутний момент на довільній ділянці, Нм;

l_i – довжина цієї ділянки, м;

G_i – модуль пружності другого роду (модуль зсуву), Па;

J_{pi} – полярний момент інерції перерізу на ділянці вала, м⁴.

Відносний кут закручення довільної ділянки вала визначається по формулі:

$$\Theta = \frac{\varphi_i}{l_i} = \frac{M_i}{G_i \cdot J_{pi}};$$

Знаки абсолютних та відносних кутів закручення визначаються знаком крутного моменту.

По значенням відносних кутів закручення будується еюра кутів Θ_i . Тоді умова жорсткості при крученні буде мати вид:

$$\Theta = \frac{M_{\kappa \max}}{G \cdot J_p} \leq [\Theta];$$

де $[\Theta]$ – допустимий відносний кут закручення.

При визначенні необхідного діаметра вала круглого перерізу на кожній ділянці з обчислених двох значень приймається більше і приводиться у відповідність з СТ СЭВ 514-77 (додаток Б).

Знаючи обчислені кути закручення перерізи, які знаходяться на границях кожної з ділянок, можна побудувати еюру кутів закручення, яка представляє собою графічне зображення зміни кутів повороту перерізу вздовж осі відносно нерухомого (закріпленого) перерізу.

Приклад дослідження та розрахунку суцільного однорідного валу круглого перерізу на міцність та жорсткість при крученні.

Надано: Суцільний однорідний вал круглого перерізу з конструктивними розмірами $l_1 = 0,9\text{м}$, $l_2 = 1,4\text{м}$, $l_3 = 0,6\text{м}$, $l_4 = 0,7\text{м}$, навантажений зовнішніми обертовими моментами $T_1 = 570\text{Нм}$, $T_2 = 190\text{Нм}$, $T_3 = 640\text{Нм}$, $T_4 = 780\text{Нм}$ і врівноважувальним моментом T_0 (рис. 6.18). Матеріал бруса – вуглецева сталь; допустиме дотичне напруження $[\tau] = 80\text{МПа}$, допустимий відносний кут закручення $[\Theta] = 0,028\text{рад/м}$.

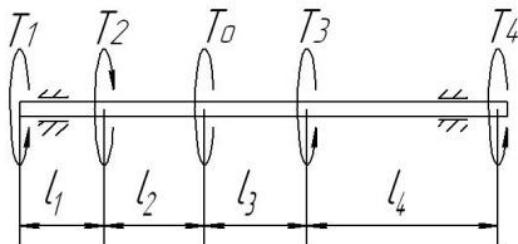


Рис. 6.18

1. Визначення врівноважувального моменту.

Під дією зовнішніх обертових моментів вал знаходиться в рівновазі.

Задамося напрямом дії врівноважу вального моменту T_0 (рис. 6.19, а).

Тоді з умов рівноваги можна визначити значення врівноважувального моменту та напрям його дії.

$$\sum M_{Az} = 0, \quad T_1 - T_2 - T_0 + T_3 + T_4 = 0$$

Звідси $T_0 = T_1 - T_2 + T_3 + T_4 = 570 - 1900 + 640 + 780 = 1800 \text{ Нм}$.

Додатне значення моменту T_0 свідчить про те, що попередньо обраний його напрям співпадає з дійсним напрямом.

2. Визначення крутних моментів, та побудова їх епюри.

Вал, який розглядається, має чотири ділянки. Для визначення внутрішніх силових факторів – крутних моментів скористуємось методом перерізів. Для цього подумки розсічемо вал на чотири ділянки. В місцях розрізу вкажемо крутні моменти, що виникають в перерізах (рис.6.19, б).

Для обчислення значенні крутних моментів будемо складати рівняння рівноваги.

Ділянка I: $0 \leq z_1 \leq l_1$ або $0 \leq z_1 \leq 0,9 \text{ м}$

$$\sum M_{Az} = 0, \quad T_1 - M_{\kappa}^I = 0, \quad M_{\kappa}^I = T_1 = 570 \text{ Нм};$$

Ділянка II: $0 \leq z_2 \leq l_1 + l_2$ або $0 \leq z_2 \leq 2,3 \text{ м}$

$$\sum M_{Az} = 0, \quad T_1 - T_2 - M_{\kappa}^{II} = 0, \quad M_{\kappa}^{II} = T_1 - T_2 = 570 - 190 = 380 \text{ Нм};$$

Ділянка III: $0 \leq z_3 \leq l_1 + l_2 + l_3$ або $0 \leq z_3 \leq 2,9 \text{ м}$

$$\sum M_{Az} = 0, \quad T_1 - T_2 - T_0 - M_{\kappa}^{III} = 0, \\ M_{\kappa}^{III} = T_1 - T_2 - T_0 = 570 - 190 - 1800 = -1420 \text{ Нм};$$

Ділянка IV: $0 \leq z_4 \leq l_1 + l_2 + l_3 + l_4$ або $0 \leq z_4 \leq 3,6 \text{ м}$

$$\sum M_{Az} = 0, \quad T_1 - T_2 - T_0 + T_3 - M_{\kappa}^{IV} = 0,$$

$$M_{\kappa}^{IV} = T_1 - T_2 - T_0 + T_3 = 570 - 190 - 1800 + 640 = -780 \text{ Нм}$$

За отриманими значеннями крутильних моментів M_{κ} будуємо їх епюру (рисунок 6.18, в).

3. Визначення діаметрів вала на кожній ділянці з умови міцності.

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\kappa}}{W_p} \leq [\tau].$$

Умова міцності при крученні має вид:

Для суцільного однорідного вала круглого перерізу полярний момент

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16}.$$

опору перерізу визначається по формулі:

Для заданого матеріалу вала – вуглецева сталь, допустиме дотичне напруження становить $[\tau] = 80 \text{ ГПа} = 80 \cdot 10^9 \text{ Па}$ (додаток А, табл. 1).

Тоді з врахуванням останнього, з умови міцності діаметр вала

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 M_{\kappa}}{\pi \cdot [\tau]}}.$$

обчислюємо по формулі:

Визначаємо потрібні діаметри вала на всіх ділянках.

$$\text{Ділянка I: } d_1 \geq \sqrt[3]{\frac{16 M_{\kappa}^I}{\pi \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 570}{3,14 \cdot 80 \cdot 10^9}} = 33,1 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$\text{Ділянка II: } d_2 \geq \sqrt[3]{\frac{16 M_{\kappa}^{II}}{\pi \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 380}{3,14 \cdot 80 \cdot 10^9}} = 28,9 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$\text{Ділянка III: } d_3 \geq \sqrt[3]{\frac{16 M_{\kappa}^{III}}{\pi \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1420}{3,14 \cdot 80 \cdot 10^9}} = 44,9 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$\text{Ділянка IV: } d_4 \geq \sqrt[3]{\frac{16 M_{\kappa}^{IV}}{\pi \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 780}{3,14 \cdot 80 \cdot 10^9}} = 36,8 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

4. Визначення діаметрів вала на кожній ділянці з умови жорсткості.

Умова жорсткості при крученні має вид:

$$\Theta = \frac{M_{\kappa}^{\max}}{G \cdot J_p} \leq [\Theta]$$

Полярний момент інерції перерізу J_{pi} на ділянці суцільного однорідного вала круглого перерізу визначається по формулі:

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32}.$$

Тоді з врахуванням останнього з умови жорсткості діаметр вала

обчислюємо по формулі:

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32M_\kappa}{\pi \cdot G \cdot [\Theta]}}.$$

Визначимо потрібні діаметри вала на всіх ділянках.

Ділянка I:

$$d_1 \geq \sqrt[4]{\frac{32M_\kappa^I}{\pi \cdot G \cdot [\Theta]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 570}{3,14 \cdot 80 \cdot 10^9 \cdot 0,028}} = 40,1 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

Ділянка II:

$$d_2 \geq \sqrt[4]{\frac{32M_\kappa^{II}}{\pi \cdot G \cdot [\Theta]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 380}{3,14 \cdot 80 \cdot 10^9 \cdot 0,028}} = 36,2 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

Ділянка III:

$$d_3 \geq \sqrt[4]{\frac{32M_\kappa^{III}}{\pi \cdot G \cdot [\Theta]}} = \sqrt[4]{\frac{16 \cdot 1420}{3,14 \cdot 80 \cdot 10^9 \cdot 0,028}} = 50,4 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

Ділянка IV:

$$d_4 \geq \sqrt[4]{\frac{32M_\kappa^{IV}}{\pi \cdot G \cdot [\Theta]}} = \sqrt[4]{\frac{16 \cdot 780}{3,14 \cdot 80 \cdot 10^9 \cdot 0,028}} = 43,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Потрібні діаметри вала на кожній ділянці, знайдені з умови жорсткості більші, ніж відповідні, що визначені з умови міцності при крученні. Приймаємо більші значення діаметрів вала.

Відповідно до СТ СЭВ 514-77 (ряд *Ra40*) необхідно прийняти стандартні значення діаметрів вала на ділянках (додаток Б, табл. 1) : $d_1 = 0,042 \text{ м} = 42 \text{ мм}$; $d_2 = 0,038 \text{ м} = 38 \text{ мм}$; $d_3 = 0,05 \text{ м} = 50 \text{ мм}$; $d_4 = 0,045 \text{ м} = 45 \text{ мм}$.

5. *Визначення абсолютних та відносних кутів повороту поперечних перерізів ділянок валу.*

При дослідженні вала на жорсткість при крученні визначають кути закручення перерізів вала. По формулам обчислимо абсолютні та відносні кути закручення перерізів на кожній ділянці вала.

Ділянка I:

$$\varphi_1 = \frac{M_\kappa^I \cdot l_1}{G \cdot J_{p1}} = \frac{M_\kappa^I \cdot l_1 \cdot 32}{G \cdot \pi \cdot d_1^4} = \frac{570 \cdot 0,9 \cdot 32}{80 \cdot 10^9 \cdot 3,14 \cdot 0,042^4} = 0,021 \text{ рад};$$

$$\Theta_1 = \frac{M_{\kappa}^I}{G \cdot J_{p1}} = \frac{M_{\kappa}^I \cdot 32}{G \cdot \pi \cdot d_1^4} = \frac{570 \cdot 32}{80 \cdot 10^9 \cdot 3,14 \cdot 0,042^4} = 0,023 \text{ рад/м.}$$

Ділянка II:

$$\varphi_2 = \frac{M_{\kappa}^{II} \cdot l_2}{G \cdot J_{p2}} = \frac{M_{\kappa}^{II} \cdot l_2 \cdot 32}{G \cdot \pi \cdot d_2^4} = \frac{380 \cdot 1,4 \cdot 32}{80 \cdot 10^9 \cdot 3,14 \cdot 0,038^4} = 0,033 \text{ рад;}$$

$$\Theta_2 = \frac{M_{\kappa}^{II}}{G \cdot J_{p2}} = \frac{M_{\kappa}^{II} \cdot 32}{G \cdot \pi \cdot d_2^4} = \frac{380 \cdot 32}{80 \cdot 10^9 \cdot 3,14 \cdot 0,038^4} = 0,024 \text{ рад/м.}$$

Ділянка III:

$$\varphi_3 = \frac{M_{\kappa}^{III} \cdot l_3}{G \cdot J_{p3}} = \frac{M_{\kappa}^{III} \cdot l_3 \cdot 32}{G \cdot \pi \cdot d_3^4} = \frac{-1420 \cdot 0,6 \cdot 32}{80 \cdot 10^9 \cdot 3,14 \cdot 0,050^4} = -0,014 \text{ рад;}$$

$$\Theta_3 = \frac{M_{\kappa}^{III}}{G \cdot J_{p3}} = \frac{M_{\kappa}^{III} \cdot 32}{G \cdot \pi \cdot d_3^4} = \frac{-1420 \cdot 32}{80 \cdot 10^9 \cdot 3,14 \cdot 0,050^4} = -0,023 \text{ рад/м.}$$

Ділянка IV:

$$\varphi_4 = \frac{M_{\kappa}^{IV} \cdot l_4}{G \cdot J_{p4}} = \frac{M_{\kappa}^{IV} \cdot l_4 \cdot 32}{G \cdot \pi \cdot d_4^4} = \frac{-780 \cdot 0,7 \cdot 32}{80 \cdot 10^9 \cdot 3,14 \cdot 0,045^4} = -0,017 \text{ рад;}$$

$$\Theta_4 = \frac{M_{\kappa}^{IV}}{G \cdot J_{p4}} = \frac{M_{\kappa}^{IV} \cdot 32}{G \cdot \pi \cdot d_4^4} = \frac{-780 \cdot 32}{80 \cdot 10^9 \cdot 3,14 \cdot 0,045^4} = -0,024 \text{ рад/м.}$$

Аналізуючи отримані значення відносних кутів закручення встановлюємо, що умова жорсткості вала виконується: $\Theta_{\max} \leq [\Theta]$ тобто $0,024 \text{ рад/м} \leq 0,028 \text{ рад/м}$.

Визначимо абсолютні кути повороту перерізів в граничних точках *B, C, D, E* відносно умовно нерухомого перерізу *A*:

$$\varphi_{B-A} = \varphi_1 = 0,021 \text{ рад;}$$

$$\varphi_{C-A} = \varphi_1 + \varphi_2 = 0,021 + 0,033 = 0,054 \text{ рад;}$$

$$\varphi_{D-A} = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 0,021 + 0,033 - 0,014 = 0,040 \text{ рад;}$$

$$\varphi_{E-A} = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = 0,021 + 0,033 - 0,014 - 0,017 = 0,023 \text{ рад.}$$

Отримані значення ординат відкладаються в обраному масштабі відповідно перерізів і їх кінцівки послідовно з'єднуються прямими лініями. Отримані графічні зображення є епюрами кутових переміщень (рис. 6.19, г) і відносних кутів закручення (рис. 6.19, д).

Отримані графічні зображення є епюрами кутових переміщень (рис. 6.19, д) і відносних кутів закручення (рис. 6.19, ж).

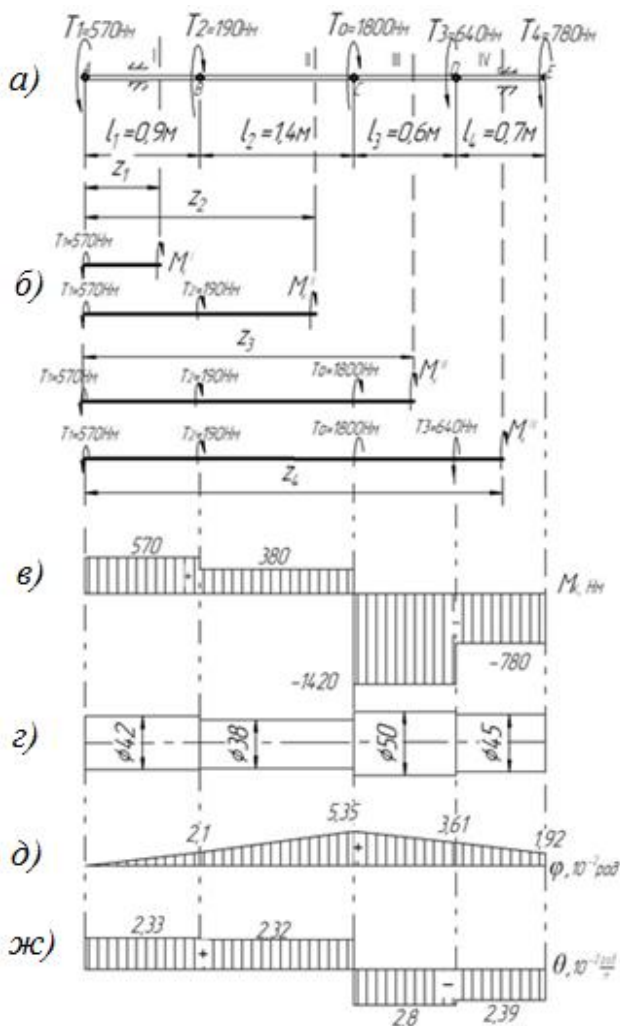


Рис. 6.19

Завдання до виконання роботи

Виконати дослідження та розрахунок суцільного валу круглого перерізу на міцність та жорсткість при крученні.

Вихідні дані до дослідження надані в таблицях 6.3 і 6.4.

План виконання роботи

1. Аналіз схеми навантаження вала.
2. Визначення чисельного значення та напрямку невідомого врівноважувального моменту T_0 .

3. Визначення крутних моментів в перерізах вала та побудування епюри крутних моментів M_k .

4. Визначення необхідних діаметрів вала на кожній ділянці з умови міцності при крученні.

5. Визначення необхідних діаметрів вала на кожній ділянці з умови жорсткості. Остаточний висновок про розміри діаметрів на ділянках валу.

6. Розрахунок абсолютних та відносних кутів закручення валу та побудова їх епюри.

7. Визначення переміщення перерізів валу.

Таблиця 6.3

Вихідні дані до розрахунку валу при крученні

Букви прізвища	Номер схеми	Зовнішні моменти, Нм				Розміри вала, м				[τ], МПа	[θ], рад/м
		T1	T2	T3	T4	l1	l2	l3	l4		
А, Б, В	1	100	100	110	210	0,4	0,5	0,1	0,7	10	0,02
Г, І, Д	2	200	200	120	220	0,5	0,6	0,2	0,8	20	0,022
Е, Ж, З,	3	300	300	130	230	0,6	0,7	0,3	0,9	30	0,024
І, Ї, К	4	400	400	140	240	0,7	0,8	0,4	1,0	40	0,025
Л, М, Н	5	500	500	150	250	0,8	0,9	0,5	0,4	50	0,028
О, П, Р	6	600	600	160	260	0,9	1,0	0,6	0,5	60	0,03
С, Т, У	7	700	700	170	270	1,0	1,1	0,7	0,6	70	0,032
Ф, Х, Ц	8	800	800	180	280	0,9	1,2	0,8	0,7	80	0,034
Ч, Ш, Щ,	9	900	900	190	290	0,8	1,3	0,9	0,8	90	0,035
Є, Ю, Я	0	1000	1000	200	300	0,7	1,4	1,0	0,9	100	0,025
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1

Примітка: При виборі варіанту слід пронумерувати букви прізвища і відповідно до номеру букви обирати дані з таблиці. Для всіх варіантів матеріал вала – вуглецева сталь.

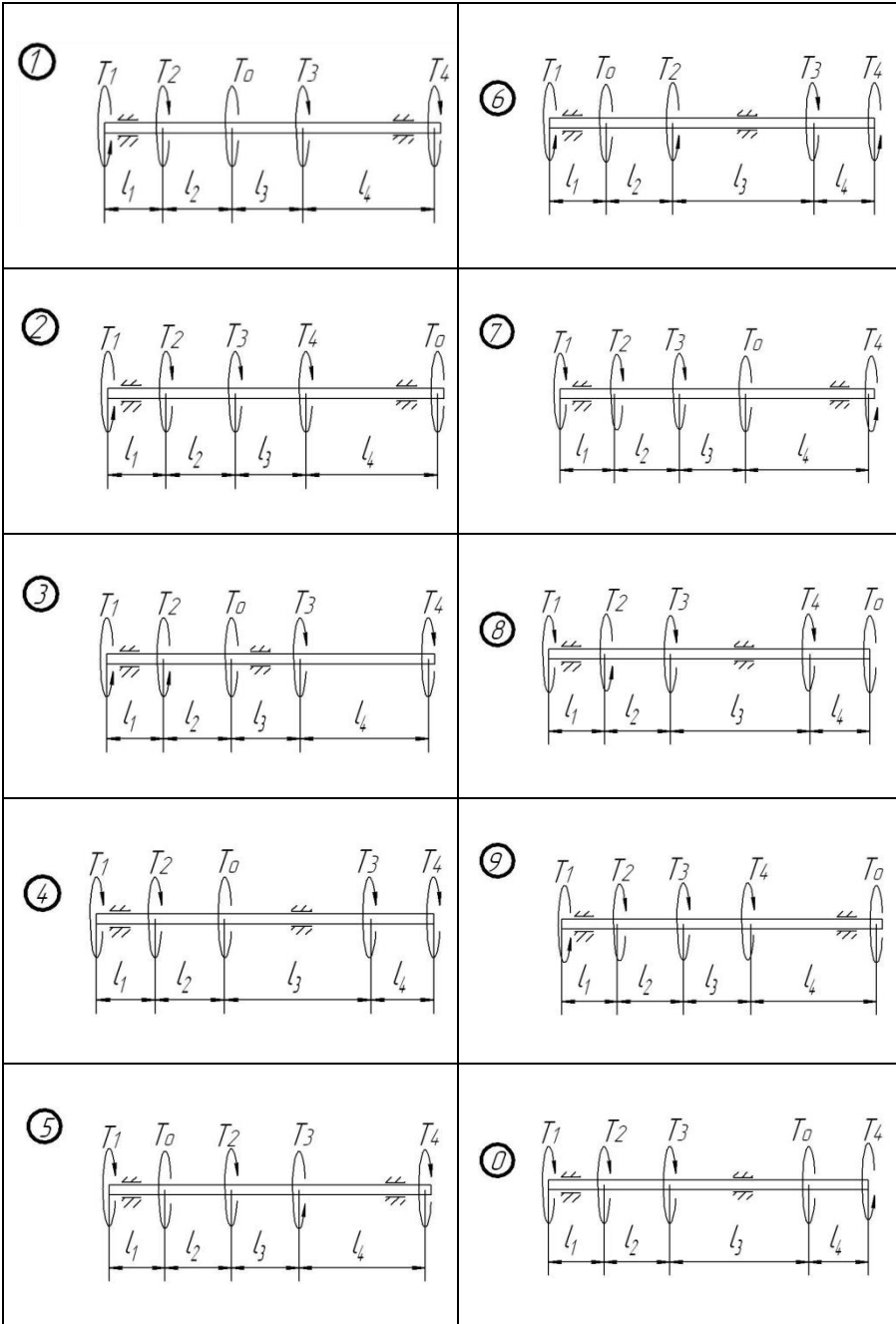
Наприклад: С Л Ю С А Р Е Н К О

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

З таблиці обираємо: схема 7, $T_1=500\text{Нм}$, $T_2=1000\text{Нм}$, $T_3=170\text{Нм}$, $T_4=210\text{Нм}$,

$l_1=0,9\text{м}$, $l_2=0,7\text{м}$, $l_3=0,5\text{м}$, $l_4=1,0\text{м}$, $[\tau]=60\text{МПа}$, $[\theta]=0,032\text{рад/м}$.

Схеми навантаження вала



Запитання для самоконтролю:

1. При якому навантаженні прямий брус отримує деформацію кручення?
2. Який випадок плоского напруженого стану називають чистим зсувом?
3. Що називають кутом зсуву? Що таке відносний зсув і чому він дорівнює?
4. Як записується закон Гука при зсуві?
5. Що розуміють під модулем зсуву?
6. Як визначають чисельне значення, напрям і знак крутильного моменту в довільному поперечному перерізі бруса?
7. Що представляє собою епюра крутильних моментів і як вона будується? Для чого вона потрібна?
8. Які напруження виникають в поперечних перерізах круглого бруса при крученні і як вони розподіляються по перерізу?
9. Як записується умова міцності при крученні?
10. Що називають полярним моментом інерції переріза? Чому дорівнює полярний момент інерції круглого переріза?
11. Що називають полярним моментом опору переріза? Чому дорівнює полярний момент опору круглого переріза?
12. Що представляє собою епюра напружень при крученні вала?
13. Чому вал кільцевого поперечного перерізу більш економічний ніж суцільний?
14. Що розуміють під жорсткістю вала при крученні?
15. Що розуміють під абсолютним та відносним кутом закручення вала?
16. Як записується умова жорсткості при крученні?
17. Що представляє собою епюра кутів закручення і як вона будується?
18. Що таке відносний кут закручення? Чи має сенс поняття сумарного відносного кутів закручення для ступінчатого вала?

7. ЗГИН

Згин — найбільш розповсюджений у природі і техніці вид деформації. Немає області діяльності інженера, де б не виникала потреба кількісно чи хоча б якісно оцінити міцність і жорсткість елементів, що працюють на згин. На згин працюють: олівець, яким ми креслимо; деталі столу, на який опираємось; балкони і плити перекриттів будинків; більшість деталей залізничних вагонів, матеріалооброблювальних верстатів, автомобілів, стовбури дерев, стебла рослин та багато інших природних об'єктів.

7.1. Основні теоретичні відомості

7.1.1. Загальні поняття

Деформація згину характеризується викривленням осі бруса. При цьому в поперечних перерізах бруса виникають згинальні моменти M .

При чистому згині в поперечних перерізах виникають лише згинальні моменти. В практиці частіше зустрічаються випадки поперечного згину, коли, крім моментів, діють і поперечні сили Q .

Найчастіше площина дії згинального моменту збігається з головною площиною інерції бруса, що утворюється однією з головних центральних осей поперечного перерізу і геометричною віссю бруса. Такий згин називають *прямим*. Інші випадки згину представляють як сукупність прямих згинів.

Поперечну силу знаходять як алгебраїчну суму зовнішніх сил, що діють ліворуч або праворуч вибраного перерізу перпендикулярно до осі бруса. «Ліві» сили, направлені вгору, вважаються додатними. Для «правих» сил знаки протилежні.

Згинальний момент визначають як алгебраїчну суму моментів зовнішніх сил, що діють по одну сторону перерізу відносно його центра ваги. Моменти «лівих» сил вважаються додатними, якщо вони направлені за годинниковою стрілкою. Для моментів «правих» сил знаки протилежні.

Розрахунки на згин повинні в першу чергу забезпечити міцність і жорсткість бруса. Для цього потрібно вміти будувати епюри поперечних сил Q і згинальних моментів M , обчислювати величину напружень і переміщень.

7.1.2. Побудова епюр поперечних сил і згинальних моментів

Епюри поперечних сил і згинальних моментів — це графіки зміни цих зусиль уздовж осі бруса.

Побудова епюр виконується, як правило, одним з трьох методів: аналітичним, за характерними точками, інтегральним.

В усіх випадках спочатку визначають реакції опор, які надалі враховують як зовнішні сили.

Методи відрізняються способом обчислення величин поперечних сил і згинальних моментів у характерних перерізах, якими є границі ділянок і перерізи, де поперечна сила змінює знак у межах ділянки. Останнє можливе при наявності розподіленого навантаження q .

Обчислення поперечних сил і згинальних моментів, а також контроль правильності побудови епюр виконується за допомогою нижченаведених співвідношень і закономірностей, що з них випливають.

Поперечні сили Q і згинальні моменти M в обраному перерізі знаходять згідно з їх визначенням за формулами:

$$Q = \sum F_{\text{л}} = \sum F_{\text{пр}}; \quad (7.1)$$

$$M = \sum m_{\text{л}} = \sum m_{\text{пр}}. \quad (7.2)$$

В сингулярних перерізах, де діють зосереджені навантаження, на епюрах виникають розриви (стрибки). Тому необхідно визначати зусилля ліворуч і праворуч від перерізу. При цьому зручно користуватись такими співвідношеннями:

— для перерізів, де діє зосереджена сила:

$$Q_{\text{пр}} = Q_{\text{л}} \pm F; \quad (7.3)$$

— для перерізів із зосередженим моментом:

$$M_{\text{пр}} = M_{\text{л}} \pm m. \quad (7.4)$$

У межах кожної ділянки функції Q і M не мають розривів, і зусилля Q_k і M_k в кінці ділянки можуть бути обчислені через зусилля Q_n , M_n на її початку за допомогою інтегральних залежностей:

$$Q_k = Q_n + A_q; \quad (7.5)$$

$$M_k = M_n + A_Q, \quad (7.6)$$

де A_q , A_Q — площі епюр розподіленого навантаження q і поперечної сили Q у межах ділянки.

Для полегшення побудови епюр Q і M і контролю їх правильності використовують зазначені нижче закономірності. Частина з них випливає з диференціальних залежностей Д. І. Журавського:

$$q = \frac{dQ}{dz}; \quad Q = \frac{dM}{dz}.$$

де z — абсциса перерізу.

1. У перерізі, де прикладена зосереджена сила, на епюрі Q виникає розрив (стрибок) на величину цієї сили. Епюра M у цьому місці має злом.

2. У перерізі, де діє зосереджений момент m , на епюрі M є розрив (стрибок) на величину m . На епюрі Q це не позначається.

3. На ділянках, де відсутнє розподілене навантаження q , поперечна сила постійна, а епюра M обмежена прямими лініями.

4. На ділянках, де діє рівномірно розподілене навантаження, Q змінюється за лінійним законом, епюра M обмежена параболою, випуклість якої направлена назустріч навантаженню q .

5. При додатній епюрі Q момент M зростає (зліва направо), при від'ємній — зменшується.

6. В перерізі, де Q в межах ділянки змінює знак з «плюса» на «мінус», на епюрі згинальних моментів — максимум, якщо знак змінюється з «мінуса» на «плюс» — мінімум.

Для побудови епюр аналітичним методом послідовно виконують такі операції.

Для кожної ділянки записують вирази $Q(z), M(z)$ як функції абсциси перерізу. Обчислюють величини Q і M у характерних перерізах, підставляючи у відповідні вирази значення абсцис цих перерізів. Будують епюри з врахуванням характеру функцій $Q(z), M(z)$ і наведених вище закономірностей. Якщо в межах ділянки сила Q змінює знак, то з рівняння $Q(z) = 0$ знаходять значення абсциси перерізу, де $Q = 0$, і обчислюють екстремальне значення моменту в цьому перерізі.

Більш детально аналітичний метод розглянуто в прикладі 7.1.

При побудові епюр за характерними точками обчислюють значення зусиль Q і M в характерних перерізах за формулами (7.1), (7.2) або (7.3)...(7.6) і будують епюри, враховуючи їх закономірності на кожній ділянці. У випадку, коли поперечна сила змінює знак в межах ділянки, віддаль a від початку ділянки до перерізу, де $Q = 0$, зручно обчислювати за формулою:

$$a = \frac{Q_n}{q},$$

де Q_n — значення поперечної сили на початку ділянки.

Розглянутий метод використано при побудові епюр у прикладі 7.2.

Техніка розрахунків за інтегральним методом зводиться до виконання найпростіших обчислень згідно з співвідношеннями (7.3)...(7.6).

Для побудови епюри Q проводять горизонтальну лінію розрахунків граничних значень Q і вертикальні лінії на границях ділянок. Над лінією розрахунків на початку кожної ділянки записують значення зосереджених сил $\pm F$ (знаки беруться, як для «лівих» сил), у кінці — значення площ під розподіленим навантаженням $A_q = ql$. Далі «стовпцем» виконуються додавання, а сума використовується як доданок для наступного підсумовування. Результати додавання записуються під лінією. Це і є значення, за якими будують епюру Q .

Аналогічні операції виконують для обчислення значень згинальних моментів. При цьому використовують величини A_q і m .

Для обчислення величини екстремального моменту після побудови епюри поперечних сил у перерізі, де $Q = 0$, проводять вертикальну лінію, яку розглядають як додаткову границю ділянки.

Детальніше інтегральний метод розглядається в прикладі 7.3.

7.1.3. Обчислення нормальних напружень

Величину нормальних напружень у випадку прямого згину обчислюють за формулою:

$$\sigma = \frac{M \cdot y}{J_x}, \quad (7.7)$$

де M — згинальний момент у перерізі; y — віддаль точки, де обчислюють напруження, до нейтральної осі перерізу (рис. 7.1); J_x — момент інерції перерізу відносно нейтральної осі.

Нейтральною віссю є головна центральна вісь перерізу, що перпендикулярна до площини дії згинального моменту. Вона ділить площу перерізу на розтягнену і стиснену частини. Нормальні напруження змінюються уздовж другої центральної головної осі перерізу за лінійним законом (рис. 5.1). Максимальні нормальні напруження в перерізі:

$$\sigma_{max} = \frac{M \cdot y_{max}}{J_x}. \quad (7.8)$$

Якщо нейтральна вісь є віссю симетрії, то найбільші розтягувальні і найбільші стискувальні напруження за величиною однакові: $\sigma_{max}^p = |\sigma_{max}^c|$. Для їх обчислення використовують осьовий момент опору перерізу:

$$W_x = \frac{J_x}{y_{max}}. \quad (7.9)$$

Тоді

$$\sigma_{max} = \frac{M}{W_x}. \quad (7.10)$$

Величини W_x і W_y для профільного прокату типу двотавр, швелер наводяться в таблицях сортаменту. Для прямокутного перерізу (рис. 7.1):

$$W_x = \frac{bh^3}{6}; \quad W_y = \frac{hb^3}{6}. \quad (7.11)$$

Для круглого перерізу:

$$W_x = W_y = W = \frac{\pi d^3}{32}. \quad (7.12)$$

де d — діаметр круга.

Для кільцевого перерізу:

$$W = \frac{\pi D^3}{32} (1 - C^4), \quad C = \frac{d}{D}, \quad (7.13)$$

де D — зовнішній діаметр кільця; d — внутрішній діаметр кільця.

Пластичні матеріали однаково опираються розтягу і стиску. Для них допустимі напруження на розтяг і стиск однакові, $[\sigma_p] = [\sigma_c] =$

$[\sigma]$. Тому раціональними для балок з пластичних матеріалів є симетричні відносно нейтральної осі перерізи.

Якщо нейтральна вісь не є віссю симетрії, то величини найбільших розтягувальних і найбільших стискувальних напружень різні (рис. 7.2).

Такі перерізи використовують для балок з крихких матеріалів (наприклад, чавуну), які краще опираються стиску, ніж розтягу $[\sigma_c] > [\sigma_p]$. Балку орієнтують таким чином, щоб у перерізі з найбільшим згинальним моментом виконувалась умова $\sigma_{max}^c > \sigma_{max}^p$. Величини цих напружень обчислюють за формулами:

$$\begin{cases} \sigma_{max}^p = \frac{M \cdot y_{max}^p}{J_x} \\ \sigma_{max}^c = \frac{M \cdot y_{max}^c}{J_x} \end{cases} \quad (7.14)$$

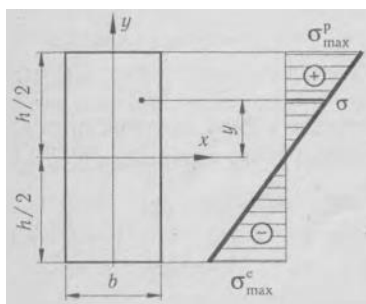


Рис. 7.1

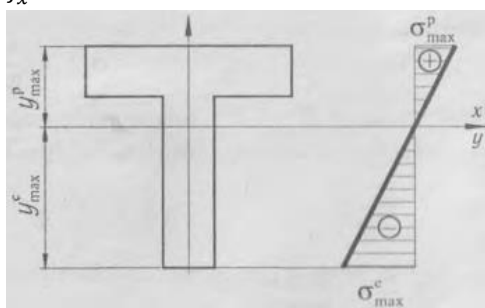


Рис. 7.2

7.1.4. Розрахунки на міцність

При розрахунках на міцність в абсолютній більшості випадків використовують умову міцності за нормальними напруженнями:

$$\sigma_{max} \leq [\sigma]. \quad (7.15)$$

Конкретну форму умови міцності записують у залежності від форми перерізу і матеріалу.

А. Переріз симетричний відносно нейтральної осі.

1 — пластичний матеріал:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_x} \leq [\sigma]. \quad (7.16)$$

2 — крихкий матеріал, $[\sigma_c] > [\sigma_p]$:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_x} \leq [\sigma_p]. \quad (7.17)$$

Б. Переріз несиметричний відносно нейтральної осі.

1 — пластичний матеріал:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max} \cdot y_{\delta}}{J_x} \leq [\sigma], \quad (7.18)$$

де y_{δ} — віддаль від нейтральної осі до найбільш віддаленої точки перерізу.

2 — крихкий матеріал:

$$\begin{cases} \sigma_{max}^p = \frac{M_{max} \cdot y_{max}^p}{J_x} \leq [\sigma_p] \\ \sigma_{max}^c = \frac{M_{max} \cdot y_{max}^c}{J_x} \leq [\sigma_c] \end{cases}, \quad (7.19)$$

де y_{max}^p , y_{max}^c — віддалі від нейтральної осі до найбільш віддалених точок у розтягнутій і стиснутій частинах перерізу.

M_{max} у формулах (7.16)...(7.19) — найбільша за абсолютним значенням величина M на епюрі згинальних моментів.

За допомогою умов міцності розв'язують три типи задач.

I. Перевірний розрахунок. Відомі матеріал, переріз і значення максимального моменту. Для перевірки міцності обчислюють σ_{max} і порівнюють його величину з допустимим напруженням, $\sigma_{max} \leftrightarrow [\sigma]$ (приклади 7.2; 7.3).

II. Визначення вантажопідйомності балки. Переріз відомий. Обчислюють допустиму величину згинального моменту $[M]$. При визначенні M_{max} виражають його через невідомі зовнішні сили. З рівності $M_{max} = [M]$ визначають допустиму величину зовнішніх сил (приклад 7.4).

III. Проектувальний розрахунок. Форма перерізу і зовнішні сили відомі. Обчислюють W або J . Далі за таблицями сортаменту вибирають необхідний номер прокатного профілю або визначають відповідні розміри перерізу (приклад 7.1).

Розрахунок на міцність балки при прямому поперечному згині за нормальними напруженнями проведемо на прикладі двотаврової балки.

Розглянемо двохопорну балку, навантажену зовнішніми силами : $q = 20$ кН/м; $F = 20$ кН; $M = 45$ кН·м; $l = 0,5$ м; допустиме нормальне напруження для сталі двотаврової балки $[\sigma] = 160$ МПа (рис. 7.7).

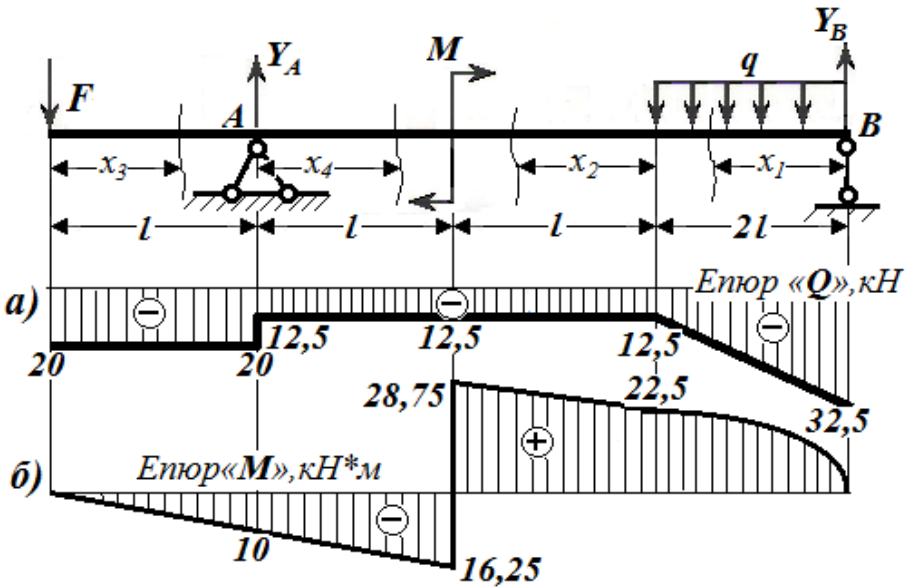


Рис. 7.3

1. Першим ділом з умови статичної рівноваги визначимо опорні реакції y_A і y_B , довільно направивши їх вверх:

$$\sum M_A = 0; \quad Fl - M - q \cdot 2l \cdot 3l + y_B \cdot 4l = 0;$$

$$y_B = \frac{M + q \cdot 2l \cdot 3l - Fl}{4l} = \frac{45 + 20 \cdot 2 \cdot 0,5 \cdot 3 - 20 \cdot 0,5}{4 \cdot 0,5} = 32,5 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0; \quad F \cdot 5 \cdot l - y_A \cdot 4l - M + q \cdot 2l \cdot l = 0;$$

$$y_A = \frac{F \cdot 5l - M + q \cdot 2l \cdot l}{4l} = \frac{20 \cdot 5 \cdot 0,5 - 45 + 20 \cdot 2 \cdot 0,5 \cdot 0,5}{4 \cdot 0,5} = 7,5 \text{ кН}.$$

Перевірка: $\sum y = 0; \quad -F + y_A - q \cdot 2l + y_B = 0; \rightarrow -20 + 7,5 - 20 + 32,5 = 40 - 40 = 0$. Отже, реакції опор визначені вірно.

2. Будуємо епюру поперечних сил Q (рис. 7.7, а), використовуючи метод поперечних перерізів:

1) Дільниця: $0 \leq x_1 \leq 2l$;

$$Q^1 = -y_B + q \cdot x_1; \rightarrow Q_{x_1=0}^1 = -32,5 + 0 = -32,5 \text{ кН}; \rightarrow Q_{x_1=2l}^1 = -32,5 + 20 = -12,5 \text{ кН}. \quad Q^1 = -y_B + qx_1;$$

2) Дільниця: $0 \leq x_2 \leq l$;

$$Q^2 = -y_B + q \cdot 2l = -32,5 + 20 \cdot 2 \cdot 0,5 = -12,5 \text{ кН}.$$

3) Дільниця: $0 \leq x_3 \leq l$;

$$Q^3 = -F = -20 \text{ кН}.$$

4) Дільниця: $0 \leq x_4 \leq l$;

$$Q^4 = -F + Y_A = -20 + 7.5 = -12.5 \text{ кН}.$$

3. Будемо епюру згинаючих моментів по дільницях, використовуючи метод перерізів (рис. 7.7, б):

1) Дільниця: $0 \leq x_1 \leq 2l$;

$$M^1 = Y_B \cdot x_1 - \frac{qx_1^2}{2}; \rightarrow M_{x_1=0}^1 = 0; M_{x_1=2l}^1 = Y_B \cdot 2l - \frac{q \cdot 2l^2}{2} = 22.5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

2) Дільниця: $0 \leq x_2 \leq l$; $M^2 = Y_B(2l + x_2) - q2l(2l/2 + x_2)$;

$$M^2 = Y_B \cdot (2l + x_2) - q \cdot 2l \cdot \left(\frac{2l}{2} + x_2\right); \rightarrow M_{x_2=0}^2 = 22.5 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\ \rightarrow M_{x_2=l}^2 = 28.75 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

3) Дільниця: $0 \leq x_3 \leq l$;

$$M^3 = -F \cdot x_3; \rightarrow M_{x_3=0}^3 = -20 \cdot 0 = 0; \rightarrow M_{x_3=l}^3 = -20 \cdot 0.5 = -10.0 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

4) Дільниця: $0 \leq x_4 \leq l$; $M^4 = -F(l + x_4) + Y_A \cdot x_4$;

$$M^4 = -F \cdot (l + x_4) + Y_A \cdot x_4; \rightarrow M_{x_4=0}^4 = -20 \cdot (0.5 + 0) + 7.5 \cdot 0 = -10 \text{ кН} \cdot \text{м}; \rightarrow M_{x_4=l}^4 = -20 \cdot (0.5 + 0.5) + 7.5 \cdot 0.5 = -16.25 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

4. З умови міцності визначаємо двотавровий переріз :

$$\sigma_{max} = \frac{M_{3r}^{max}}{W_x} \leq [\sigma]; \rightarrow W_x \geq \frac{M_{3r}^{max}}{[\sigma]} = \frac{28.75 \cdot 10^4}{1600} = 179.7 \text{ см}^3.$$

Із таблиць сортаменту (додаток) знаходимо:

$W_x = 184 \text{ см}^3$ відповідає двотавру № = 20, розміри перерізу якого дорівнюють: $h = 20 \text{ см}$; $b = 10 \text{ см}$; $d = 0,52 \text{ см}$; $t = 0,84 \text{ см}$;

$$J_x = 1840 \text{ см}^4; S_x = 104 \text{ см}^3.$$

Будуємо епюр нормальних напружень (рис. 7.4) в чотирьох точках отриманого перерізу.

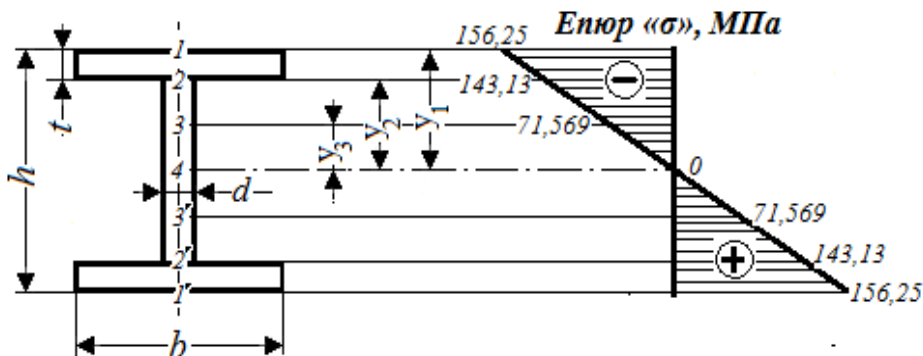


Рис. 7.4

$$\sigma^1 = \frac{M_{max} \cdot y_1}{J_X} = \frac{28.75 \cdot 10^4 \cdot 10}{1840} = \pm 1562.5 \text{ кг/см}^2 = \pm 156,25 \text{ МПа.}$$

$$y_1 = \frac{h}{2} = \frac{20}{2} = 10 \text{ см.}$$

$$\sigma^2 = \frac{M_{max} \cdot y_2}{J_X} = \frac{28.75 \cdot 10^4 \cdot 9,16}{1840} = \pm 1431,25 \text{ кг/см}^2 = \pm 143,125 \text{ МПа.}$$

$$y_2 = \frac{h}{2 - t} = \frac{20}{2 - 0.84} = 9.16 \text{ см.}$$

$$\sigma^3 = \frac{M_{max} \cdot y_3}{J_X} = \frac{28.75 \cdot 10^4 \cdot 4.58}{1840} = \pm 715.63 \text{ кг/см}^2 = \pm 71.56 \text{ МПа.}$$

$$y_3 = \frac{(h/2 - t)}{2} = \frac{9.16}{2} = 4.58 \text{ см.}$$

$$\sigma^4 = 0; y_4 = 0.$$

7.1.5. Розрахунки на жорсткість

Друга задача — оцінка жорсткості — зводиться до виконання умови жорсткості

$$\Delta \leq [\Delta]. \quad (7.20)$$

У цій умові Δ — лінійне чи кутове переміщення перерізу, яке для забезпечення нормальної експлуатації конструкції не повинно перевищувати допустимої величини $[\Delta]$.

Допустиме переміщення $[\Delta]$ в розрахунках вважається відомим. Величину ж дійсного переміщення A можна обчислити одним з відомих методів, наприклад, *методом початкових параметрів*.

Лінійне переміщення (прогин) за цим методом знаходять з універсального рівняння:

$$y(x) = y_0 + \theta_0 x + \frac{1}{EI} \left[\sum_i M_i \frac{(x-a_i)^2}{2!} + \sum_i F_i \frac{(x-b_i)^3}{3!} + \sum_i q_i \frac{(x-c_i)^4}{4!} - \sum_i q_i \frac{(x-d_i)^4}{4!} \right]; \quad (7.21)$$

кутове переміщення — з рівняння:

$$\theta(x) = \theta_0 + \frac{1}{EI} \left[\sum_i M_i \frac{(x-a_i)}{1!} + \sum_i F_i \frac{(x-b_i)^2}{2!} + \sum_i q_i \frac{(x-c_i)^3}{3!} - \sum_i q_i \frac{(x-d_i)^3}{3!} \right]. \quad (7.22)$$

Прогин вважається додатним, якщо переміщення збігається з напрямком осі y . Додатний кут повороту відповідає повороту перерізу проти годинникової стрілки.

В наведених виразах (рис. 7.5):

y_0, θ_0 — початкові параметри (прогин і кут повороту лівого торцевого перерізу балки);

M_i, F_i, q_i — зовнішні зосереджені моменти, сили і розподілене навантаження;

a_i, b_i, c_i, d_i — абсиси перерізів, де прикладено моменти, сили, починається і закінчується розподілене навантаження;

EI — жорсткість перерізу балки;

x — абсциса перерізу, де визначають переміщення.

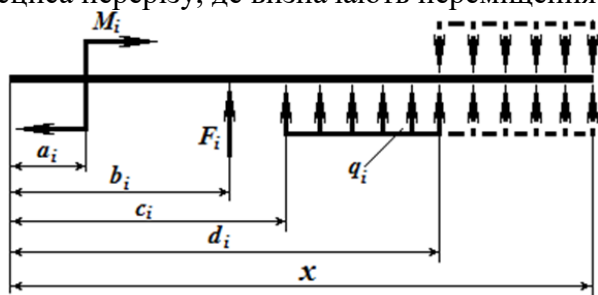


Рис. 7.5

Правила користування універсальними рівняннями

1. Початок координат вибирають у лівому кінці осі балки.
2. При обчисленні переміщень конкретного перерізу враховують тільки ті навантаження, що діють зліва від перерізу.

3. Знаки перед доданками приймають такі ж, як при обчисленні згинальних моментів «лівих» сил.

Для обчислення переміщень за формулами (7.21) і (7.22) необхідно попередньо визначити початкові параметри y_0 і θ_0 . Найпростіше вони визначаються для консольних балок. Балку орієнтують так, щоб защемлення було зліва. Тоді $y_0 = 0$, $\theta_0 = 0$. Для однопролітної шарнірно обіпERTOї по кінцях балки $y_0 = 0$. Значення θ_0 знаходять з універсального рівняння (7.21), використовуючи умову: при $x = 1$ (права опора) $y_1 = 0$. Для балки з двома консолями y_0 і θ_0 визначають з умови рівності нулю прогинів на обох опорах. Отримавши систему з двох рівнянь, розв'язують її відносно θ_0 і y_0 .

Приклад розрахунку балки на жорсткість:

Для балки на двох опорах (рис. 7.6) визначити прогин в перерізі $x = 5$. Поперечний переріз балки – двотавр №10, для якого $I_z = 198 \text{ см}^4$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

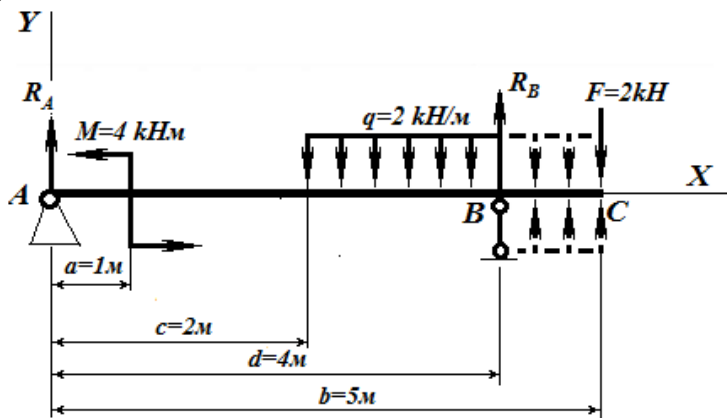


Рис. 7.6

Розв'язок

Визначимо реакції опор балки, для чого напишемо:

$$\sum M(A) = 0 \quad -M + q \cdot 2 \cdot 3 - R_B \cdot 4 + F \cdot 5 = 0; \text{ звідси}$$

$$R_B = \frac{-M + q \cdot 2 \cdot 3 + F \cdot 5}{4} = \frac{-4 + 2 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5}{4} = 4,5 \text{ kH}.$$

$$\sum M(B) = 0 \quad R_A \cdot 4 - M - q \cdot 2 \cdot 1 + F \cdot 1 = 0; \text{ звідси}$$

$$R_A = \frac{M + q \cdot 2 \cdot 1 - F \cdot 1}{4} = \frac{4 + 2 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1}{4} = 1,5 \text{ kH}.$$

Перевірка:

$$\sum Y_i = 0; R_A - q \cdot 2 + R_B - F = 0; 1,5 - 2 \cdot 2 + 4,5 - 2 = 0.$$

Отже, реакції знайдені правильно.

Записуємо рівняння методу початкових параметрів для визначення прогинів в довільному перерізі заданої балки.

$$y(x) = y_0 + \theta_0 x + \frac{1}{EI} \left[-\frac{M(x-1)^2}{2!} + \frac{R_A(x-0)^3}{3!} + \frac{R_B(x-4)^3}{3!} - \frac{q(x-2)^4}{4!} + \frac{q(x-4)^4}{4!} \right]$$

Оскільки в крайній лівій точці балки розташована опора, то прогин $y_0 = 0$, а кут повороту θ_0 визначаємо із умови відсутності прогину над опорою В:

$$y(4) = \theta_0 \cdot 4 + \frac{1}{EI} \left[-\frac{M(4-1)^2}{2!} + \frac{R_A(4-0)^3}{3!} + \frac{R_B(4-4)^3}{3!} - \frac{q(4-2)^4}{4!} + \frac{q(4-4)^4}{4!} \right] = 0$$

$$\theta_0 = \frac{1}{4 \cdot 2 \cdot 10^8 \cdot 198 \cdot 10^{-8}} \left[-\frac{4(4-1)^2}{2} + \frac{1,5 \cdot 4^3}{6} - \frac{2(4-2)^4}{24} \right] = 0,021 \text{ рад.}$$

Визначаємо прогин в точці С при $x=5$ м. Для цього підставляємо знайдене значення θ_0 в рівняння методу початкових параметрів заданої балки.

$$\begin{aligned} y(5) &= \theta_0 \cdot 5 + \frac{1}{EI} \left[-\frac{M(5-1)^2}{2!} + \frac{R_A(5-0)^3}{3!} + \frac{R_B(5-4)^3}{3!} - \frac{q(5-2)^4}{4!} + \right. \\ &\left. \frac{q(5-4)^4}{4!} \right] = 0,021 \cdot 5 + \frac{1}{4 \cdot 2 \cdot 10^8 \cdot 198 \cdot 10^{-8}} \left[-\frac{4(5-1)^2}{2} + \frac{1,5 \cdot (5-0)^3}{6} + \frac{4,5(5-4)^3}{6} - \right. \\ &\left. \frac{2(5-2)^4}{24} + \frac{2(5-4)^4}{24} \right] = -0,0063 \text{ м} = -6,3 \text{ мм.} \end{aligned}$$

Таким чином, переріз С опускається вниз на 6,3 мм.

7.2. Практичні заняття розрахунки на міцність і жорсткість при прямому згині бруса

7.2.1. Контрольні запитання

1. Що таке поперечний згин? Який згин називається прямим?
2. Як визначають поперечну силу і згинальний момент у заданому перерізі?
3. Які правила знаків для доданків, що входять у вирази поперечної сили і згинального моменту?
4. Які ви знаєте диференціальні залежності Д. І. Журавського?
5. Що таке епюри поперечних сил, згинальних моментів? Для чого будують епюри?
6. Які основні особливості епюр Q і M ?
7. Які операції виконують при побудові епюр аналітичним методом?
8. Які операції виконують при побудові епюр за характерними точками?
9. Як записують умову міцності при згині для пластичних матеріалів?
10. Як записують умову міцності при згині для крихких матеріалів?
11. Які форми перерізів є найбільш раціональними для балок, що виготовлені з пластичних і крихких матеріалів?
12. Які види переміщень перерізів виникають при згині?
13. Що таке початкові параметри? Як їх визначають для різних схем балок?
14. Як записують універсальне рівняння для знаходження прогинів?
15. Як записують універсальне рівняння для знаходження кутів повороту?

7.2.2. Приклади розв'язання задач

Приклад 7.1. Для балки, схема якої зображена на рис. 7.7, побудувати епюри Q і M аналітичним методом і визначити необхідний з умови міцності діаметр круглого поперечного перерізу, $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

Розв'язок.

1. Визначаємо реакції опор з умов рівноваги:

$$\sum m_B = 0; -R_A \cdot 4 + q \cdot 2 \cdot 3 - m = 0; R_A = \frac{3 \cdot 2 \cdot 3 - 4}{4} = 3,5 \text{ кН};$$

$$\sum m_A = 0; R_B \cdot 4 - m = q \cdot 2 \cdot 1 = 0; R_B = \frac{4 + 3 \cdot 2 \cdot 1}{4} = 2,5 \text{ кН}.$$

$$\text{Перевірка: } \sum Y = 0; 3,5 + 2,5 - 3 \cdot 2 = 0.$$

Реакції знайдено вірно.

2. Записуємо вирази функцій $Q(x)$, $M(x)$ для кожної ділянки і знаходимо значення функцій на границях ділянок.

Балка має три ділянки.

I. $0 \leq x \leq 2\text{м}$;

$$Q^I = R_A - qx = 3,5 - 3x - \text{рівняння прямої};$$

$$Q_{(x=0)} = 3,5 \text{ кН}; Q_{(x=2)} = 3,5 - 3 \cdot 2 = -2,5 \text{ кН}.$$

$$M^I = R_A \cdot x - q \frac{x^2}{2} = 3,5x - 1,5x^2 - \text{рівняння параболи}.$$

$$M_{(x=0)} = 0; M_{(x=2)} = 3,5 \cdot 2 - 1,5 \cdot 2^2 = 1 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

II. $2 \leq x \leq 3\text{м}$

$$Q^{II} = R_A - q \cdot 2 = 3,5 - 3 \cdot 2 = -2,5 \text{ кН} = \text{const}.$$

$$M^{II} = R_A \cdot x - q \cdot 2(x - 1) = 3,5x - 6(x - 1) - \text{рівняння прямої}.$$

$$M_{(x=2)} = 3,5 \cdot 2 - 6(2 - 1) = 1 \text{ кН} \cdot \text{м}; M_{(x=3)} = 3,5 \cdot 3 - 6(3 - 1) = -1,5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

III. $3 \leq x \leq 4\text{м}$

$$Q^{III} = -R_B = -2,5 \text{ кН} = \text{const}.$$

$$M^{III} = R_B(4 - x) = 2,5(4 - x) - \text{рівняння прямої}.$$

$$M_{(x=3)} = 2,5(4 - 3) = 2,5 \text{ кН} \cdot \text{м}; M_{(x=4)} = 0.$$

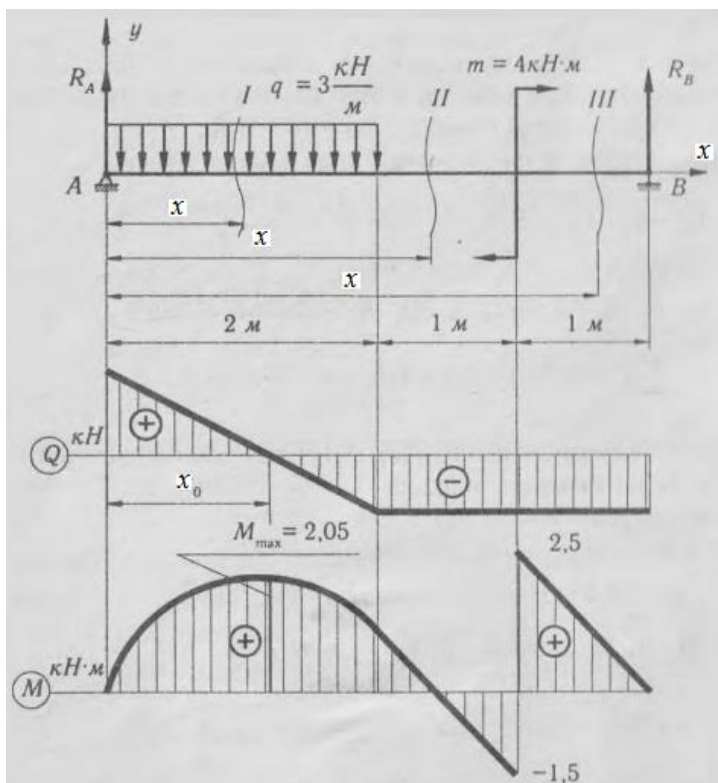


Рис. 7.7

3. За одержаними даними будемо епюри, враховуючи характер функцій $Q(x)$, $M(x)$ на кожній ділянці.

В перерізі x_0 , де $Q = 0$, епюра M має максимум.

Знайдемо абсцису x_0 з рівняння $Q^I = 0$;

$$3,5 - 3x_0 = 0 \rightarrow x_0 = 1,17 \text{ м.}$$

Знайдемо значення максимального моменту на першій ділянці

$$M_{\max} = M_{(x_0)}^I = 3,5 \cdot x_0 - 1,5 \cdot x_0^2 = 3,5 \cdot 1,17 - 1,5 \cdot 1,17^2 = 2,05 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

4. Підбираємо необхідний з умови міцності діаметр круглого перерізу. Небезпечним є переріз, де виникає найбільший за величиною момент $M_{\max} = 2,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} \leq [\sigma] \rightarrow W \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{2,5 \cdot 10^{-3}}{160} = 1,56 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3 = 15,6 \text{ см}^3.$$

$$W = \frac{\pi d^3}{32} \rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{32W}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 15,6}{\pi}} = 5,4 \text{ см.}$$

Розмірність: $M_{\max}$ — МНм; $[\sigma]$ — МПа.

Приймаємо балку діаметром $d = 54$ мм.

Приклад 7.2. Для балки, розрахункова схема якої зображена на рис. 7.8, побудувати епюри Q і M за характерними точками. Перевірити міцність двотаврової балки № 50, $[\sigma] = 160$ МПа.

Розв'язок.

1. Визначаємо реакції опор з умов рівноваги:

$$\sum M_B = 0;$$

$$-R_A \cdot l + q \cdot 6 \cdot 9 + P \cdot 3 - M = 0; \quad R_A = \frac{20 \cdot 6 \cdot 9 + 100 \cdot 3 - 40}{10} = 134 \text{ кН.}$$

$$\sum M_A = 0;$$

$$R_B \cdot l = P \cdot 7 - M - q \cdot 6 \cdot 1 = 0; \quad R_B = \frac{100 \cdot 7 + 40 + 20 \cdot 6 \cdot 1}{10} = 86 \text{ кН.}$$

$$\text{Перевірка: } \sum Y = 0; \quad 134 + 86 - 20 \cdot 6 - 100 = 0.$$

Реакції знайдено вірно.

2. Обчислимо значення Q і M у характерних перерізах, які збігаються з границями дільниць. Балка має чотири дільниці. В перерізах, де на епюрі розрив, визначаємо два значення зусиль (ліворуч і праворуч перерізу).

$$Q_{(x=0)} = 0; \quad M_{(x=0)} = 0;$$

$$Q_{(x=2)}^{\text{л}} = \sum F_{\text{л}} = -q \cdot 2 = -20 \cdot 2 = -40 \text{ кН};$$

$$Q_{(x=2)}^{\text{пр}} = Q_{(x=2)}^{\text{л}} + R_A = -40 + 134 = 94 \text{ кН};$$

$$M_{(x=2)} = M_{\text{л}} = -q \cdot \frac{2^2}{2} = -40 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

$$Q_{(x=6)} = \sum F_{\text{л}} = -q \cdot 6 + R_A = -20 \cdot 6 + 134 = 14 \text{ кН.}$$

$$M_{(x=6)} = \sum M_{\text{л}} = -q \cdot \frac{6^2}{2} + R_A \cdot 4 = -20 \cdot \frac{6^2}{2} + 134 \cdot 4 = 176 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

$$Q_{(x=9)}^{\text{л}} = Q_{(x=6)} = 14 \text{ кН}; \quad Q_{(x=9)}^{\text{пр}} = Q_{(x=9)}^{\text{л}} - P = 14 - 100 = -86 \text{ кН.}$$

$$M_{(x=9)} = \sum M_{\text{пр}} = -M + R_B \cdot 3 = -40 + 86 \cdot 3 = 218 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

$$Q_{(x=12)} = -R_B = -86 \text{ кН.}$$

$$M_{(x=12)} = -M = -40 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

3. Будуємо епюри Q і M , враховуючи, що на дільницях, де діє навантаження q , епюра M — парабола, орієнтована випуклістю проти навантаження. На інших дільницях епюра M обмежена прямими. Як видно з епюри, максимальний момент виникає в перерізі $x = 9$ м, $M = 218$ кН м.

4. Перевіряємо міцність балки двотаврового профілю. Для двотавра № 50 з таблиць сортamentу (ГОСТ 8239-72) знаходимо його момент опору $W = 1589 \text{ см}^3$.

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W} = \frac{218 \cdot 10^{-3}}{1589 \cdot 10^{-6}} = 137,2 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

Розмірність: M_{max} — МН×м; W — м³.

Міцність балки забезпечена.

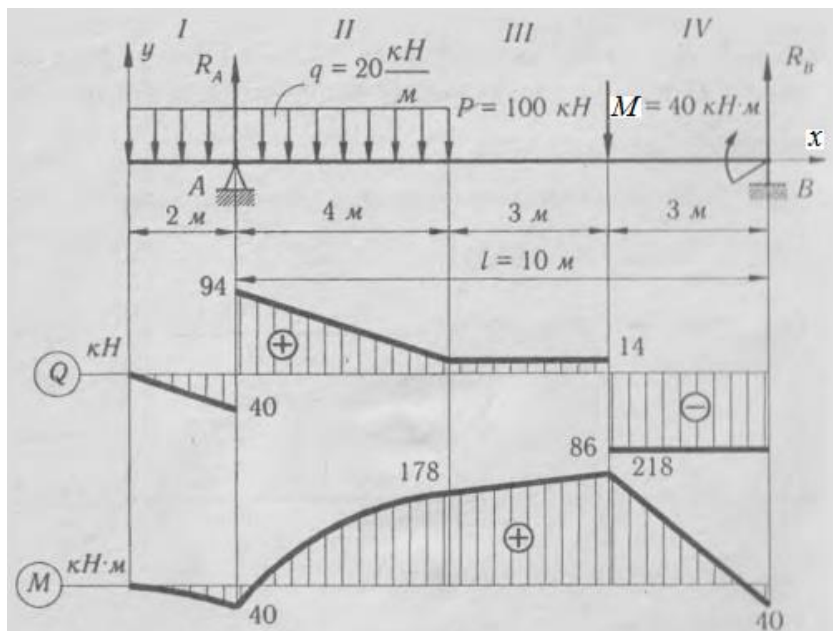


Рис. 7.8

Приклад 7.3. Для чавунної балки, розрахункова схема якої показана на рис. 7.9 і поперечний переріз на рис. 7.10, потрібно:

- 1) побудувати епюри Q і M інтегральним методом;
- 2) раціонально орієнтувати балку відносно навантаження;
- 3) перевірити її міцність, якщо $[\sigma_p] = 40 \text{ МПа}$, $[\sigma_c] = 80 \text{ МПа}$.

Розв'язок.

1. Визначаємо реакції опор:

$$\sum M_B = 0; -R_A \cdot 6 + q \cdot 2 \cdot 7 + F \cdot 4 - M = 0; R_A = \frac{3 \cdot 2 \cdot 7 + 3 \cdot 4 - 6}{6} = 8 \text{ кН};$$

$$\sum M_A = 0; R_B \cdot 6 - M - F \cdot 2 + q \cdot 2 \cdot 1 = 0; R_B = \frac{6 + 3 \cdot 2 - 3 \cdot 2 \cdot 1}{6} = 1 \text{ кН}.$$

$$\text{Перевірка: } \sum Y = 0; -3 \cdot 2 + 8 - 3 + 1 = 0.$$

Реакції знайдено вірно.

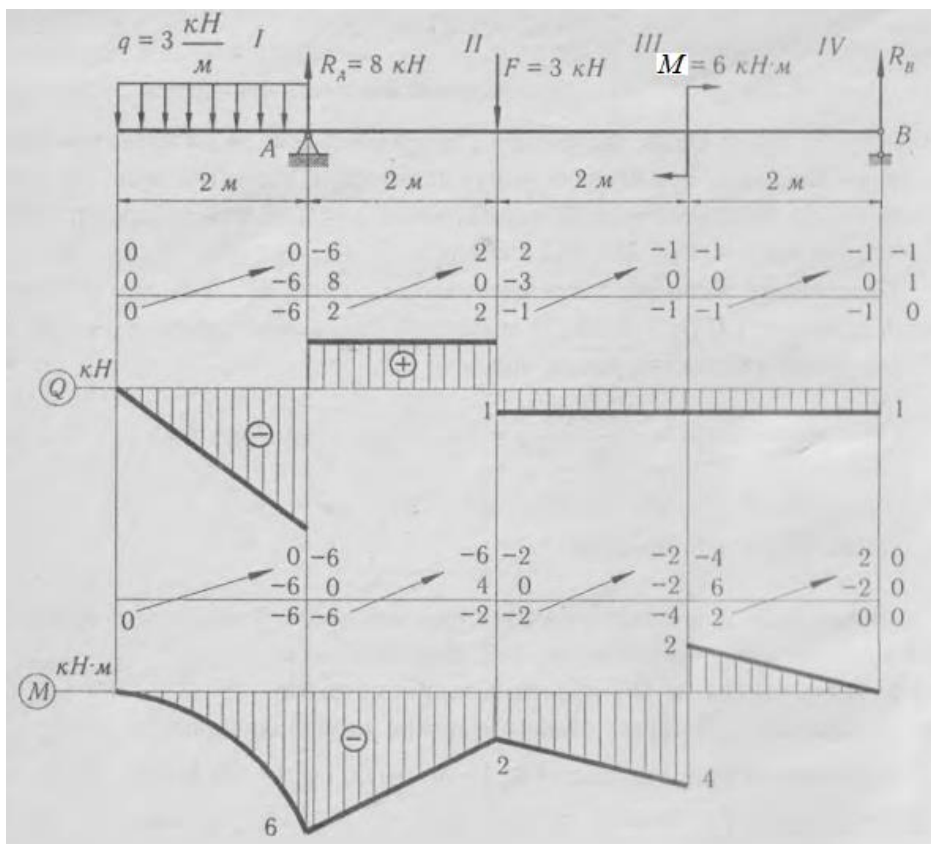


Рис. 7.9

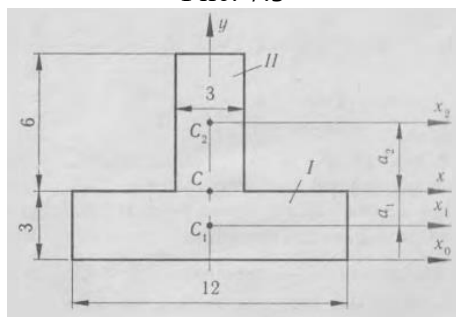


Рис. 7.10

1. Визначаємо зусилля Q і M на границях ділянок. Балка має чотири ділянки. Проводимо вертикальні лінії по їх границях.

Для обчислення значень Q проводимо горизонтальну лінію розрахунків. Над лінією на початку ділянок записуємо значення

зосереджених сил $F(0;8;-3;0)$, в кінці дільниць — значення $A_q(-6;0;0;0)$. Для дільниці I $A_q^I = -q \cdot 2 = -6 \text{ кН}$. На інших ділянках q відсутнє, тому для них $A_q = 0$. Далі виконуємо додавання відповідно до співвідношень (7.3) і (7.4):

$$Q_{\text{пр}} = Q_{\text{л}} \pm F;$$

$$Q_k = Q_{II} + A_q.$$

Для обчислення значень моментів повторюємо операції аналогічно попереднім, за винятком того, що зверху лінії розрахунків у кінці дільниць записують площі епюр Q , а на початку дільниць — значення зосереджених моментів, що прикладені на границях. Наприклад, у кінці першої дільниці перед вертикальною лінією записана площа трикутника на епюрі Q :

$$0,5(-6) \cdot 2 = -6 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

а на початку другої дільниці після вертикальної лінії — нуль, бо в перерізі A нема зосередженого моменту.

3. Будуємо епюри Q і M (рис. 7.9). Як видно з епюри M , максимальна величина додатних моментів $M = 2 \text{ кНм}$, від'ємних $M = -6 \text{ кНм}$.

4. Перевіряємо міцність чавунної балки таврового перерізу (рис. 7.10). Попередньо балку раціонально орієнтуємо.

Тавровий переріз несиметричний відносно нейтральної осі. Найбільші за модулем напруження виникають у найбільш віддалених від нейтральної осі крайніх волокнах стінки. Оскільки чавун краще працює на стиск ($|\sigma_c| > |\sigma_p|$), у цих волокнах повинні виникати стискувальні напруження. В найбільш навантаженому перерізі виникає від'ємний момент $M = -6 \text{ кНм}$, який викликає стиск нижніх волокон.

Отже, балку потрібно повернути на 180° навколо її осі. Тоді стінка буде знизу, і найбільші за модулем напруження будуть стискувальними.

Перевіряємо міцність раціонально зорієнтованої балки.

Записуємо умови міцності для розтягнутої і стиснутої зон перерізу:

$$\sigma_{\text{max}}^p = \frac{M \cdot y_{\text{max}}^p}{J_x} \leq [\sigma_p],$$

$$\sigma_{\text{max}}^c = \frac{M \cdot y_{\text{max}}^c}{J_x} \leq [\sigma_c].$$

Визначаємо геометричні характеристики перерізу (рис. 7.10).

Координата центра ваги (x_0 — початкова вісь):

$$y_c = \frac{S_{x_0}}{A} = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A_1 + A_2} = \frac{12 \cdot 3 \cdot 1,5 + 3 \cdot 6 \cdot 6}{12 \cdot 3 + 3 \cdot 6} = 3 \text{ см}$$

Через центр ваги C проводимо центральну вісь x і знаходимо момент інерції J_x перерізу:

$$J_x = J_{x_1}^I + a_1^2 A_1 + J_{x_2}^{II} + a_2^2 A_2 = \frac{12 \cdot 3^3}{12} + (-1,5)^2 \cdot 36 + \frac{3 \cdot 6^3}{12} + 3^2 \cdot 18 = 324 \text{ см}^4.$$

Тоді

$$\sigma_{max}^p = \frac{6 \cdot 10^{-3} \cdot 3 \cdot 10^{-2}}{324 \cdot 10^{-4}} = 35,5 \text{ МПа} < [\sigma_p] = 40 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{max}^c = \frac{6 \cdot 10^{-3} \cdot 6 \cdot 10^{-2}}{324 \cdot 10^{-4}} = 71 \text{ МПа} < [\sigma_c] = 80 \text{ МПа}.$$

Розмірність: M — $МНм$; y_{max}^p, y_{max}^c — $м$, J_x — $м^4$.

Отже, обидві умови міцності виконуються, міцність балки забезпечена.

Приклад 7.4. Знайти з умови міцності допустиму величину сили F , якою навантажена на вільному кінці консольна балка з двотавра № 24. Виліт консолі $l = 3 \text{ м}$, $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

Розв'язок.

Максимальний момент у защемленні $M_{max} = F \cdot l$, з цього виразу $F = M_{max}/l$.

Допустимий момент знаходиться з умови міцності (7.16) при $\sigma_{max} = [\sigma]$:

$$\sigma_{max} = \frac{[M]}{W} = [\sigma] \rightarrow [M] = [M] \cdot W$$

З таблиць сортаменту (ГОСТ 8239-72) для двотавра № 24 знаходимо момент опору $W_x = 289 \text{ см}^3$.

Допустимий момент:

$$[M] = 160 \cdot 289 \cdot 10^{-6} = 4,624 \cdot 10^{-2} \text{ МН} \cdot \text{м}.$$

Допустима сила:

$$[F] = [M]/l = 4,624 \cdot 10^{-2} / 3 = 1,54 \cdot 10^{-2} \text{ МН} = 15,4 \text{ кН}.$$

Розмірність: $[M]$ — $МН \cdot м$; $[\sigma]$ — $МПа$; l — $м$.

Приклад 7.5. Знайти максимальне відхилення (прогин) різця при обробці деталі на токарному верстаті. Величина сили різання, що діє перпендикулярно до осі різця, $F = 600 \text{ Н}$. Розміри різця вказані на рис. 7.11, а; $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$.

Розв'язок.

1. Складаємо розрахункову схему. Різець працює як консольна балка, що навантажена на вільному кінці зосередженою силою (рис. 7.11, б).

2. Визначаємо реакції (силу і момент) в защемленні. Реакція $R = F = 600 \text{ Н}$ діє вгору. Реактивний момент $m = F \cdot l = 600 \cdot 0,1 = 60 \text{ Нм}$ діє проти годинникової стрілки.

3. Записуємо універсальне рівняння зігнутої осі балки для визначення прогинів (рис. 7.11):

$$YEJ = Y_0 EJ + \theta_0 EJ \cdot x + R \frac{(x-0)^3}{3!} - M \frac{(x-0)^2}{2!}.$$

4. Початкові параметри для консольної балки $y_0 = 0$; $\theta_0 = 0$.

5. Максимальний прогин знайдемо з універсального рівняння, підставляючи значення $x = l = 0,1 \text{ м}$:

$$Y_A EJ = \frac{Rl^3}{6} - \frac{Ml^2}{2} = \frac{600 \cdot 0,1^3}{6} - \frac{60 \cdot 0,1^2}{2} = -0,2 \text{ Н} \cdot \text{м}^3.$$

Момент інерції поперечного перерізу різця:

$$J = \frac{12 \cdot 15^3}{12} = 3375 \text{ мм}^4 = 3,375 \cdot 10^{-9} \text{ м}^4.$$

Жорсткість:

$$EJ = 2 \cdot 10^{11} \cdot 3,375 \cdot 10^{-9} = 6,75 \cdot 10^2 \text{ Н} \cdot \text{м}^2.$$

Максимальний прогин:

$$Y_A = -\frac{0,2}{6,75 \cdot 10^2} = -2,96 \cdot 10^{-4} \text{ м} = -0,296 \text{ мм}.$$

Знак «-» означає, що кінець різця відхиляється вниз.

Розмірність: x, l — м; J — м⁴; E — Па.

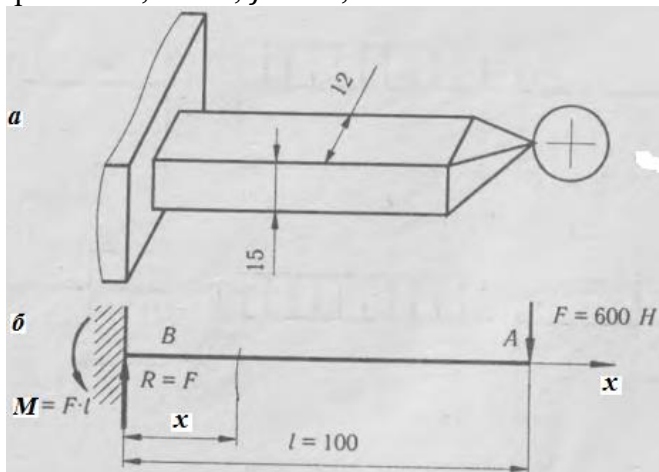


Рис. 7.11

7.2.3. Задачі для самостійного розв'язання

7.1. Для балок, схеми яких показані на рис. 7.12, побудувати епюри Q і M у загальному вигляді. Записати вирази для згинальних моментів у небезпечних перерізах у вигляді формул.

$$(Відповідь: а) $-F \cdot l$; б) $-\frac{ql^2}{2}$; в) M ; г) $\frac{Fl}{4}$;$$

$$д) \frac{ql^2}{8}; е) -\frac{Mb}{l}.)$$

7.2. Для балок, схеми яких показані на рис. 7.13, побудувати епюри Q і M , яким завгодно методом. Підібрати номер стандартного двотаврового перерізу; $[\sigma] = 160$ МПа.

(Відповідь: а) № 27; б) № 16; в) № 16; г) № 10; д) № 18; е) № 10 (ГОСТ 8239-72).

7.3. Відтворити навантаження, що відповідає показаним на рис. 7.14 епюрам. Перевірити міцність сталевих балок вказаного перерізу; $[\sigma] = 160$ МПа.

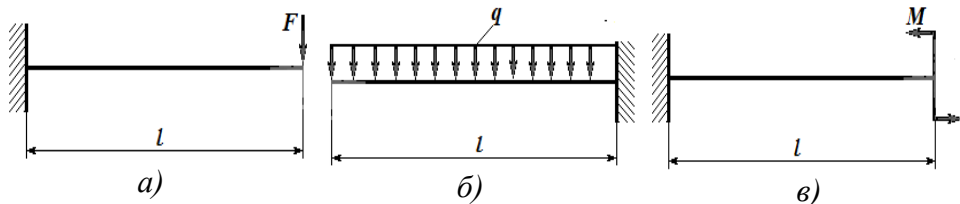
(Відповідь: а) міцність забезпечена; $W_H = 100 \text{ см}^3 < W_{дв} = 109 \text{ см}^3$. б) міцність не забезпечена; $W_H = 25 \text{ см}^3 > W_d 21,2 \text{ см}^3$).

7.4. Знайти в загальному вигляді кутові переміщення вказаних на рис. 7.15 перерізів і записати їх у вигляді формул.

$$(Відповідь: $\theta_B = \frac{Ml}{EJ}$; $\theta_A = -\frac{Fl^2}{16EJ}$).$$

7.5. Знайти лінійні переміщення (прогини) перерізів А (рис. 7.16) і записати їх у вигляді формул.

$$(Відповідь: а) $\frac{Fl^3}{3EJ}$; б) $\frac{Fl^3}{48EJ}$; в) $-\frac{ql^4}{8}$; г) $-\frac{5}{384}ql^4$).$$



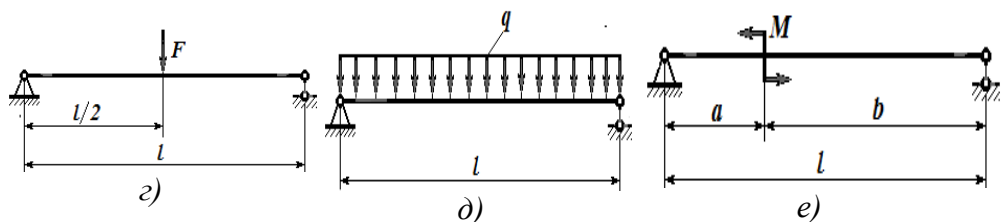


Рис. 7.12

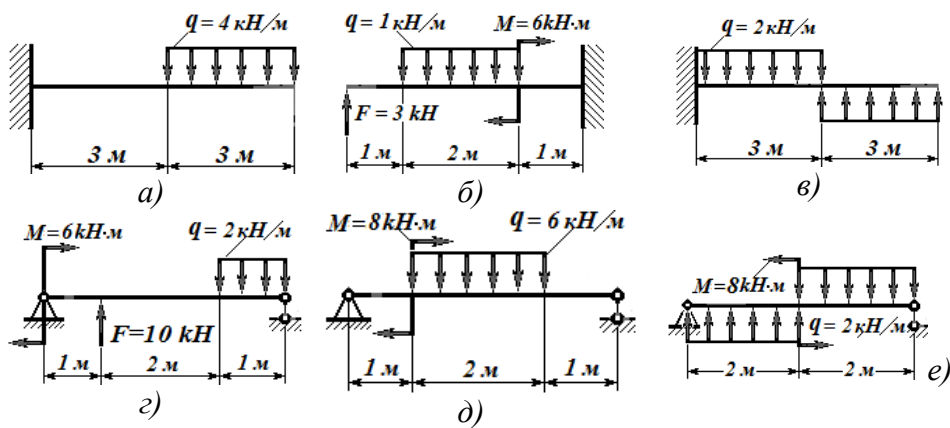


Рис. 7.13

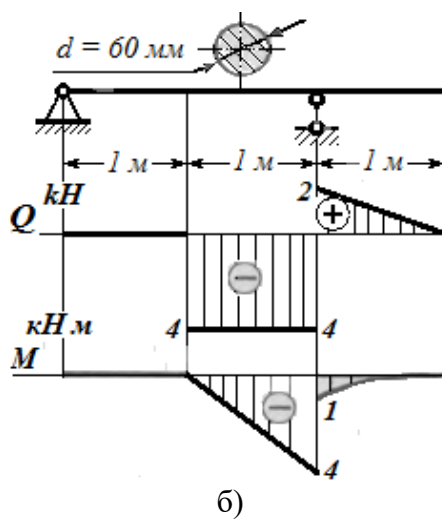
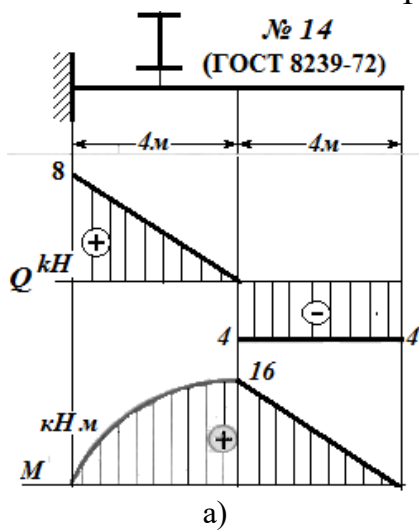


Рис. 7.14

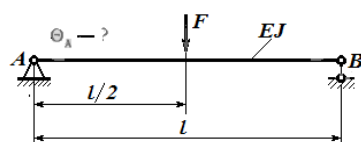
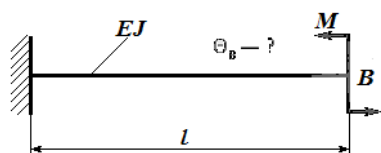
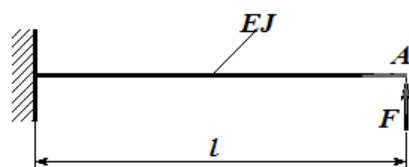
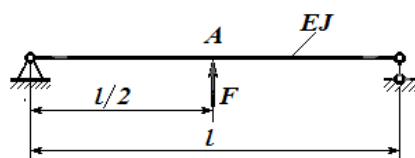


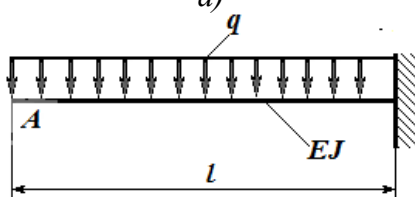
Рис. 7.15



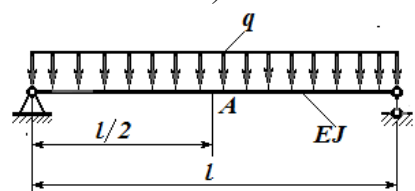
a)



б)



в)



г)

Рис. 7.16

7.3. Розрахунково-проектувальна робота «Дослідження та розрахунок балки на міцність при згині»

Мета роботи:

- проаналізувати схему навантаження балки;
- дослідити рівновагу двохопорної балки при випробуваннях на згин;

- визначити внутрішні силові фактори в перерізах балки, а саме поперечні сили та згинаючі моменти;

- з умови міцності підібрати три різновиди поперечних перерізів:

круглого, прямокутного (з співвідношенням сторін $k = \frac{h}{b}$) та двотаврового перерізу;

- проаналізувати отримані результати, виявити раціональний профіль перерізу, порівнявши маси балок.

Методичні рекомендації до виконання роботи

Відомо, що при деформації згину в поперечних перерізах балок виникають внутрішні силові фактори – моменти згину і поперечні сили. При одночасній дії в перерізі обох силових факторів, згинаючих моментів і поперечних сил, згин називають поперечним, а при відсутності поперечної сили – чистий згин.

Внутрішні силові фактори визначають використовуючи метод перерізів.

Поперечна сила Q_y в перерізі балки чисельно дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх сил, які лежать по один бік від перерізу, і вважаються додатними, якщо рівнодійна зовнішніх сил, розміщених ліворуч (праворуч) від перерізу, направлена вгору (вниз) (рис.7.17).

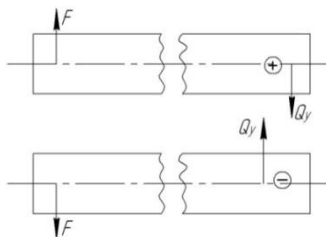


Рисунок 7.17 – Поперечні сили в перерізі при згині балки

Згинаючі моменти в перерізах балки дорівнюють алгебраїчній сумі моментів зовнішніх сил, прикладених до балки по один бік від

перерізу, відносно центра ваги перерізу, що досліджується. Згинаючий момент вважається додатним, якщо зовнішнє навантаження вигинає балку випуклістю вниз і від'ємним, якщо вигин балки направлений вгору (рис.7.18).

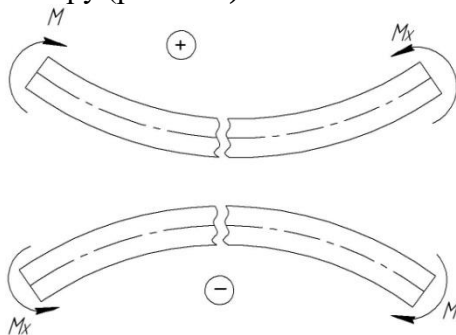


Рисунок 7.18 – Згинаючі моменти в перерізах балки

Між функціями згинаючого моменту M_x , поперечною силою Q_y , і інтенсивністю розподіленого навантаження q існують диференціальні залежності:

$$\frac{dM_x}{dz} = Q_y, \quad \frac{dQ_y}{dz} = q.$$

Графічне зображення зміни згинаючих моментів по довжині балки називається *епюрою згинаючих моментів*.

Графічне зображення зміни поперечних сил по довжині балки називається *епюрою поперечних сил*.

Дослідження двохопорних балок з метою перевірки умови міцності починають з визначення опорних реакцій відповідно існуючих методик.

Далі балку уявно розбивають на ділянки. Якщо балка представляє собою брус постійного поперечного перерізу з однорідного матеріалу, то границі ділянок визначаються перерізами, в яких змінюються тільки зовнішні навантаження.

На основі методу перерізів і диференціальних залежностей можна зробити висновок про характер епюр згинаючого моменту M_x , поперечної сили Q_y в залежності від діючих на балку навантажень.

Для епюр поперечних сил мають місце наступні взаємозв'язки:

- на ділянці, що навантажена рівномірно розподіленим навантаженням, епюра Q_y зображується похилою прямою;
- на ділянці, вільній від розподіленого навантаження, епюра Q_y зображується лінією паралельною осі балки;

- в перерізі балки, де прикладена зосереджена сила, на епюрі Q_y має місце "скачок" значенні поперечної сили, що чисельно дорівнює модулю зосередженої сили.

Для епюр згинаючих моментів існують наступні взаємозв'язки:

- на ділянці, навантажений рівномірно розподіленим навантаженням, епюра M_x зображується квадратичною параболою;

- на ділянці, вільному від рівномірно розподіленого навантаження, епюра M_x зображується прямою лінією;

- в перерізі балки, де діє зовнішній момент, на епюрі M_x виникає "скачок" значення згинаючого моменту, що дорівнює модулю зовнішнього моменту;

- на ділянці, де поперечна сила дорівнює нулеві, епюра M_x – пряма лінія, паралельна осі балки;

- на ділянках з розподіленим навантаженням згинаючий момент приймає екстремальні значення, в точках де епюра поперечної сили змінює знак (перетинає ось Oz).

При згині в поперечних перерізах балки виникають нормальні і дотичні напруження.

Нормальні напруження в довільній точці поперечного перерізу визначаються по формулі:

$$\sigma = \frac{M_{xi} \cdot Y_i}{J_i},$$

де M_{xi} – згинаючий момент в даному перерізі, Нм;

Y_i – відстань від зазначеної точки до нейтральної осі, м;

J_i – момент інерції перерізу відносно нейтральної осі.

Умова міцності при згині має вид:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{x \max}}{W_x} \leq [\sigma],$$

де $M_{x \max}$ – максимальний згинаючий момент в перерізах балки, Н·м;

$$W_x = \frac{J_x}{Y_{\max}}$$

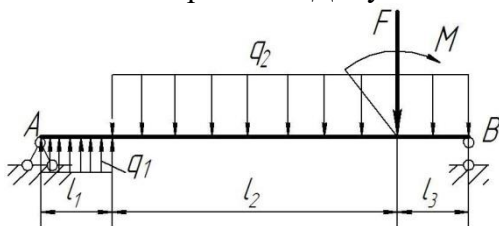
– осьовий момент опору переріза відносно нейтральної осі, м³;

$[\sigma]$ – допустиме напруження для даного матеріалу балки.

Приклад дослідження та розрахунку балки на згин.

Надано: Балка з конструктивними розмірами $l_1 = 1$ м, $l_2 = 4$ м, $l_3 = 1$ м, знаходиться під дією зовнішнього моменту $M = 20$ кНм,

зосередженої сили $F = 50$ кН, розподіленого навантаження інтенсивністю $q_1 = 20$ кН/м, $q_2 = 2q_1 = 40$ кН/м. Матеріал балки вуглецева сталь марки Ст3. Допустиме напруження $[\sigma] = 160$ МПа.



1. Визначення опорних реакцій балки.

Позбавивши балку в'язей, замінимо їх дію відповідними реакціями – реакціями опор. Опорні реакції визначаємо з II-форми умов рівноваги довільної системи сил:

$$\Sigma M_A(F_i) = 0,$$

$$q_1 \cdot l_1 \cdot \frac{l_1}{2} - q_2 \cdot (l_2 + l_3) \cdot \left(l_1 + \frac{l_2 + l_3}{2} \right) - M - F \cdot (l_1 + l_2) + R_B \cdot (l_1 + l_2 + l_3) = 0;$$

$$\Sigma M_B(F_i) = 0,$$

$$-R_A \cdot (l_1 + l_2 + l_3) - q_1 \cdot l_1 \cdot \left(\frac{l_1}{2} + l_2 + l_3 \right) + q_2 \cdot (l_2 + l_3) \cdot \frac{l_2 + l_3}{2} - M + F \cdot l_3 = 0.$$

Розв'язуючи рівняння отримуємо:

$$R_B = \frac{-q_1 \cdot l_1 \cdot \frac{l_1}{2} + q_2 \cdot (l_2 + l_3) \cdot \left(l_1 + \frac{l_2 + l_3}{2} \right) + M + F \cdot (l_1 + l_2)}{(l_1 + l_2 + l_3)} =$$

$$= \frac{-20 \cdot \frac{1^2}{2} + 40 \cdot 5 \cdot 3,5 + 20 + 50 \cdot 5}{(1 + 4 + 1)} = 160 \text{ кН};$$

$$R_A = \frac{-q_1 \cdot l_1 \cdot \left(\frac{l_1}{2} + l_2 + l_3 \right) + q_2 \cdot (l_2 + l_3) \cdot \frac{l_2 + l_3}{2} - M + F \cdot l_3}{(l_1 + l_2 + l_3)} =$$

$$R_A = \frac{-20 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{2} + 4 + 1 \right) + 40 \cdot (4 + 1) \cdot \frac{4 + 1}{2} - 20 + 50 \cdot 1}{(1 + 4 + 1)} = 70 \text{ кН}.$$

Додатні значення отриманих реакцій опор свідчать про те, що попередньо обрані напрями реакцій є дійсними.

Правильність обчислення опорних реакцій перевіримо за допомогою рівняння рівноваги:

$$\Sigma Y_i = 0, \quad R_A + q_1 \cdot 1 - q_2 \cdot 5 + R_B = 0, \\ 70 + 20 \cdot 1 - 40 \cdot 5 + 160 = 0.$$

Умова рівноваги виконується, значить реакції опор знайдені вірно.

2. *Визначення внутрішніх силових факторів: згинальних моментів та поперечних сил в перерізах балки при згині.*

Досліджувана балка має три ділянки, для яких будемо визначати згинальні моменти та поперечні сили.

Ділянка I: $0 \leq Z_1 \leq l_1$ або $0 \leq Z_1 \leq 1\text{м}$,

Рівняння поперечних сил

$$Q_Y^I = R_A + q_1 \cdot Z_1 = 70 + 20 \cdot Z_1.$$

Значення поперечних сил на границях ділянки:

$$\text{При } Z_1 = 0 \quad Q_Y^I = 70 + 20 \cdot 0 = 70 \text{ кН};$$

$$Z_1 = 1\text{м} \quad Q_Y^I = 70 + 20 \cdot 1 = 90 \text{ кН}.$$

Рівняння згинальних моментів

$$M_X^I = R_A \cdot Z_1 + \frac{q_1 \cdot Z_1^2}{2} = 70 \cdot Z_1 + 20 \cdot \frac{Z_1^2}{2}.$$

Значення згинальних моментів на границях ділянки:

$$\text{При } Z_1 = 0 \quad M_X^I = 0 \text{ кНм};$$

$$Z_1 = 1\text{м} \quad M_X^I = 70 \cdot 1 + 20 \cdot \frac{1^2}{2} = 80 \text{ кНм}.$$

Аналізуючи отримані значення робимо висновок: тому, що Q_Y є лінійна зростаюча функція, що не змінює на ділянці знак, то у відповідності з диференціальними залежностями Q і M_X , епюр M_X на ділянці буде обмежена увігнутою кривою без екстремуму.

Ділянка II: $l_1 \leq Z_2 \leq l_1 + l_2$ або $1 \leq Z_2 \leq 5\text{м}$,

Рівняння поперечних сил

$$Q_Y^{II} = R_A + q_1 \cdot Z_1 - q_2 \cdot (Z_2 - 1) = 70 + 20 \cdot Z_1 - 40 \cdot (Z_2 - 1).$$

Значення поперечних сил на границях ділянки:

$$\text{При } Z_2 = 1\text{м} \quad Q_Y^{II} = 70 + 20 \cdot 1 - 40 \cdot 0 = 90 \text{ кН};$$

$$Z_2 = 5\text{м} \quad Q_Y^{II} = 70 + 20 \cdot 1 - 40 \cdot 5 = -70 \text{ кН}.$$

Рівняння згинальних моментів

$$M_X'' = R_A \cdot Z_2 + q_1 \cdot (Z_2 - 0,5) - \frac{q_2 \cdot (Z_2 - 1)^2}{2} = 70 \cdot Z_2 + 20 \cdot (Z_2 - 0,5) - 40 \cdot \frac{(Z_2 - 1)^2}{2}.$$

Значення згинальних моментів на границях ділянки:

При $Z_2 = 1$ м

$$M_X'' = 70 \cdot 1 + 20 \cdot (1 - 0,5) - 40 \cdot 0 = 80 \text{ кНм};$$

$Z_2 = 5$ м

$$M_X'' = 70 \cdot 5 + 20 \cdot (5 - 0,5) - 40 \cdot \frac{(5 - 1)^2}{2} = 120 \text{ кНм}.$$

Аналізуючи отримані значення робимо висновок: на ділянці Q_Y – лінійна убуюча функція, що міняє знак, значить, M_X – опукла криволінійна функція, що має екстремум в границях даної ділянки.

Абсцису точки екстремуму знайдемо з виразу:

$$\frac{dM_X}{dZ} = Q_Y = 70 + 20 \cdot 1 - 40 \cdot (Z_2 - 1) = 0, \text{ звідки } Z_2 = 3,25 \text{ м}.$$

Згинальний момент в точці екстремуму $M_{X \max}$ дорівнює:

$$M_X'' = 70 \cdot 3,25 + 20 \cdot (3,25 - 0,5) - 40 \cdot \frac{(3,25 - 1)^2}{2} = 181 \text{ кНм}.$$

Ділянка III: $0 \leq Z_3 \leq l_3$ або $0 \leq Z_3 \leq 1$ м,

Рівняння поперечних сил $Q_Y''' = -R_B + q_2 \cdot Z_3 = -160 + 40 \cdot Z_3$.

Значення поперечних сил на границях ділянки:

$$\text{При } Z_3 = 0 \text{ м} \quad Q_Y''' = -160 + 40 \cdot 0 = -160 \text{ кН};$$

$$Z_3 = 1 \text{ м} \quad Q_Y''' = -160 + 40 \cdot 1 = -120 \text{ кН}.$$

Рівняння згинальних моментів

$$M_X''' = R_B \cdot Z_3 - \frac{q_2 \cdot Z_3^2}{2} = 160 \cdot Z_3 - 40 \frac{Z_3^2}{2}.$$

Значення згинальних моментів на границях ділянки:

При $Z_3 = 0$ м

$$M_X''' = 0 \text{ кНм};$$

$$M_X''' = 160 \cdot 1 - 40 \frac{1^2}{2} = 120 \text{ кНм}.$$

$Z_3 = 1$ м

Аналізуючи отримані значення робимо висновок: тому, що Q_Y є лінійна зростаюча функція, що не змінює на ділянці знак, то у відповідності з диференціальними залежностями Q і M_X , епюра M_X на ділянці буде обмежена вигнутою кривою без екстремуму.

За отриманими значеннями Q_Y та M_X будуюмо епюри поперечних сил та згинаючих моментів (рис 7.19).

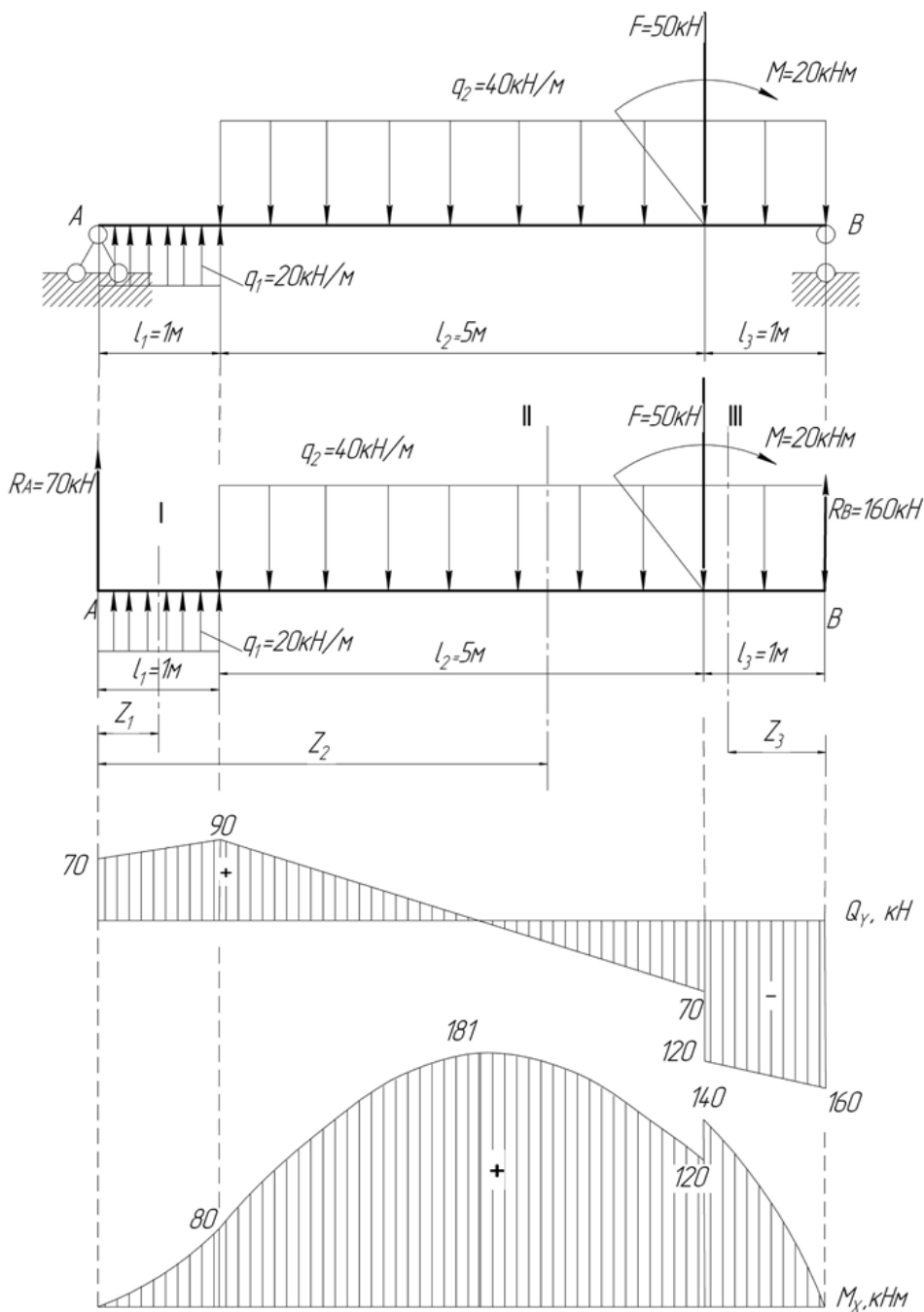
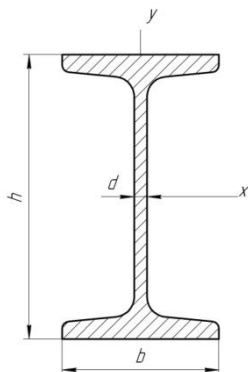


Рис. 7.19

3. Визначення розмірів поперечного перерізу балки.

За умовами завдання вимагається визначити раціональний профіль перерізу балки. Для цього, використовуючи умову міцності при згині,



$$\sigma_{\max} = \frac{M_{x \max}}{W_x} \leq [\sigma],$$

визначимо потрібний момент опору перерізу та розміри різних видів поперечного перерізу балки:

$$W_x \geq \frac{M_{x \max}}{[\sigma]} = \frac{181 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 1,13 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3,$$

- для балки круглого перерізу - $W_x \geq \frac{\pi d^3}{32},$

звідки діаметр балки визначиться як,

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 W_x}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 1,13 \cdot 10^3}{3,14}} = 0,226 \text{ м}.$$

У відповідності з СТ СЭВ 514-77 з ряду Ra40 приймаємо для балки круглого перерізу діаметр $d = 240 \text{ мм} = 0,24 \text{ м}$.

$$A_1 = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 0,24^2}{4} = 4,52 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2.$$

Площа поперечного перерізу

Для балки прямокутного перерізу зі співвідношенням сторін

$$k = \frac{h}{b} = 1,7$$

момент опору перерізу буде дорівнювати:

$$W_x = \frac{b^3 \cdot h^2}{6} = \frac{1,7^2 \cdot b^3}{6} = 0,482 b^3,$$

Тоді сторона перерізу

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{W_x}{0,482}} = \sqrt[3]{\frac{1,13 \cdot 10^{-3}}{0,482}} = 0,133 \text{ м},$$

сторона перерізу $h = 1,7b = 1,7 \cdot 0,133 = 226 \text{ мм} = 0,226 \text{ м}$.

У відповідності з СТ СЭВ 514-77 з ряду Ra40 приймаємо для балки прямокутного перерізу розміри $b = 140 \text{ мм} = 0,14 \text{ м}$, $h = 240 \text{ мм} = 0,24 \text{ м}$.

Площа прямокутного поперечного перерізу балки буде дорівнювати

$$A_2 = b \cdot h = 0,14 \cdot 0,24 = 3,36 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2.$$

Визначимо площу перерізу двотаврової балки. По сортаменту ГОСТ 8239-72 (додаток В) по моменту опору перерізу обираємо

двотавр №45, з моментом опору $W_X = 1220 \text{ см}^3$ і площею поперечного перерізу $A_3 = 83 \text{ см}^2 = 0,83 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2$.

4. Аналіз металоємності балок різного поперечного перерізу.

Металоємність балок трьох досліджуваних перерізів можна оцінити, порівнюючи їх площі:

$A_1 : A_2 : A_3 = 4,52 : 3,36 : 0,83$, або прийняв одну, найменшу з них за одиницю, маємо $A_1 : A_2 : A_3 = 5,44 : 4,05 : 1,0$.

Порівняння показує, що найбільш економічним є двотавровий переріз балки, а найменш економічним – круглий.

Завдання до виконання роботи

Виконати дослідження та розрахунок балки на міцність при згині.

Вихідні дані та схеми навантаження балок для дослідження надано в таблицях 7.1. і 7.2.

Зміст звіту

1. Аналіз схеми навантаження балки.
2. Визначення внутрішніх силових факторів в перерізах балки, а саме поперечних сил та згинаючих моментів.

3. Підбір трьох різновидів поперечних перерізів: круглого, прямокутного (з співвідношенням сторін $k = \frac{h}{b}$) та двотаврового перерізу з умови міцності.

4. Аналіз отриманих результатів, виявлення раціонального профілю перерізу шляхом порівняння маси балок.

Питання до захисту розрахунково-проектувальної роботи

1. При якому навантаженні балка випробовує чистий, а при якому – поперечний згин?

2. Які типи опор використовують для закріплення балки на основі?

3. Як визначаються опорні реакції балки?

4. Як складаються рівняння поперечних сил і згинальних моментів в довільному перерізі на ділянках вала?

5. Що собою представляють епюри поперечних сил та згинальних моментів, і як вони будуються?

6. Як визначаються знаки поперечних сил і згинальних моментів?

7. Яка диференціальна залежність існує між згинальним моментом, поперечною силою та зовнішнім розподіленням навантаженням?

8. Як визначаються нормальні напруження в поперечному перерізі балки і як вони змінюються по висоті балки?

9. Що представляє собою нейтральний прошарок і нейтральна вісь, як вони розміщені в балці?

10. Як записується умова міцності при згині?

11. Як визначаються осьові моменти інерції та моменти опору перерізу для різних перерізів (круглого, квадратного, прямокутного)?

12. Які форми поперечного переріза є найбільш раціональними при згині?

Таблиця 7.1

Вихідні дані для дослідження балки на згин

Буква прізвища	Номер схеми	F, кН	M, кНм	q, кН/м	Розміри балки, м			[σ]	$k = \frac{h}{b}$
					l_1	l_2	l_3		
А, Б, В	1	10	10	20	1,0	2,0	0,8	80	1,5
Г, І, Д	2	20	20	18	1,2	2,8	0,9	90	1,6
Е, Ж, З,	3	30	30	30	1,3	2,6	1,0	100	1,7
І, Ї, К	4	40	40	32	1,4	2,4	1,1	110	1,8
Л, М, Н	5	50	50	24	1,5	2,2	1,2	120	1,9
О, П, Р	6	60	60	25	1,6	2,0	1,3	130	2,0
С, Т, У	7	70	70	35	1,7	2,8	1,4	140	1,9
Ф, Х, Ц	8	80	80	40	1,8	2,6	1,5	150	1,8
Ч, Ш, Щ,	9	90	90	25	1,9	2,4	1,4	160	1,7
Є, Ю, Я	0	100	100	20	2,0	2,2	0,8	150	1,6
	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Примітка: При виборі варіанту слід пронумерувати букви прізвища і відповідно до номеру букви обирати дані з таблиці. Для всіх варіантів матеріал вала – вуглецева сталь марки Ст3.

Наприклад: С Л Ю С А Р Е Н К О

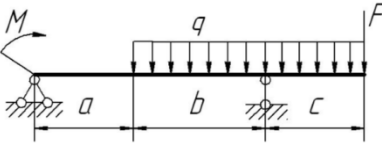
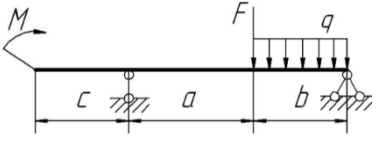
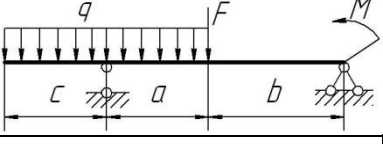
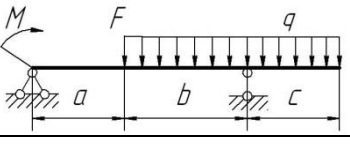
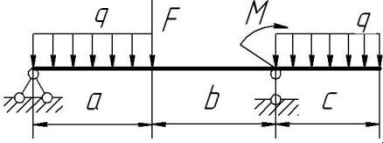
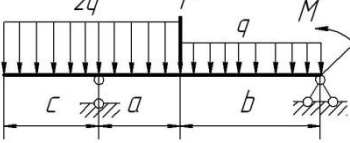
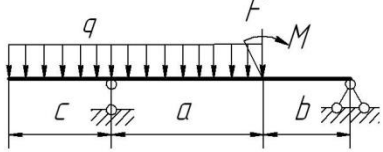
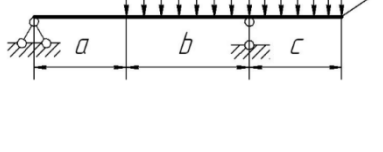
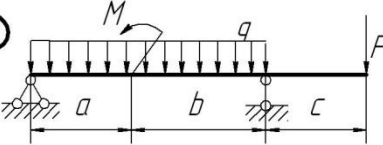
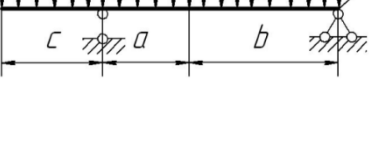
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

З таблиці обираємо: схема 7, $F_1=50$ кН, $M=100$ кНм, $q=25$ кН/м,

$l_1=1,0$ м, $l_2=2,0$ м, $l_3=1,0$ м, $[\sigma]=120$ МПа, $k=1,8$

Схеми двохопорних балок для дослідження на згин

Варіанти схем балок для дослідження на згин

① 	⑥ 
② 	⑦ 
③ 	⑧ 
④ 	⑨ 
⑤ 	⑩ 

8. ВИЗНАЧЕННЯ ПЕРЕМІЩЕНЬ У ПРУЖНИХ СИСТЕМАХ

Переміщення, спричинені деформаціями елементів конструкцій, необхідно знати для перевірки їх жорсткості. Крім цього, визначення переміщень є важливим етапом розрахунків систем на дію динамічних навантажень, а також розрахунків статистично невизначених конструкцій.

8.1. Теоретичні відомості. загальні поняття

При деформації стержневої конструкції поперечні перерізи її елементів отримують лінійні Δ і кутові θ переміщення. Величини цих переміщень у пружних системах можна визначити за допомогою інтеграла переміщень Мора –Максвелла або його графо –аналітичних інтерпретацій.

8.2. Інтеграл переміщень Мора-Максвелла

Інтеграл переміщень в узагальненому вигляді:

$$\Delta = \sum \int_0^l \frac{S \cdot S_i}{C} dl,$$

де S – функції внутрішніх зусиль N, Q, M або $M_{кр}$ на кожній ділянці від дії фактичного зовнішнього навантаження; S_i – функції внутрішніх зусиль N_i, Q_i, M_i або $M_i^{кр}$ на тих самих ділянках від дії безрозмірної одиничної сили, що умовно прикладена в перерізі, переміщення якого визначають; C – жорсткість EA, GA, EI, GI_p , що відповідає зусиллям N, Q, M або $M_{кр}$.

В плоских системах крутні моменти $M_{кр}$ не виникають. Для рам і балок впливом поздовжніх N і поперечних Q при обчисленні переміщень можна знехтувати. Тому в інтеграл переміщень для балок і плоских рам входять тільки функції згинальних моментів M :

$$\Delta = \sqrt{\int_0^l \frac{M \cdot M_i}{EI} dl}.$$

Інтегрування виконують у межах кожної ділянки і результат додають.

8.3. Визначення переміщень за допомогою інтегралу Мора

Формула для визначення переміщень, що називається *інтегралом Мора*, має вигляд

$$\Delta_i = \sum \int_{l_k} \frac{M \bar{M}_i}{EI} dx. \quad (8.1)$$

Для обчислення лінійного переміщення $\Delta_i = y_i$ в довільному перерізі балки за допомогою формули (8.1) необхідно виконати послідовно наступні операції:

- 1) скласти рівняння згинальних моментів $M_{зг}$ від заданого навантаження для кожної ділянки балки;
- 2) до балки, що розглядається, прикласти силу, величина якої становить одиницю, в тому перерізі, переміщення якого визначається. Одинична сила прикладається по напрямку переміщення, що передбачається;
- 3) скласти рівняння згинальних моментів $\bar{M}_i$ від одиничної сили для кожної ділянки балки;
- 4) обчислити суму інтегралів (8.1) від добутку обох моментів M і $\bar{M}_i$, поділеного на жорсткість поперечного перерізу балки (EI).

Для обчислення кута повороту $\Delta_i = \varphi_i$ поперечного перерізу до балки, що розглядається, належить прикласти одиничний зосереджений момент, а потім складати рівняння згинальних моментів $\bar{M}_i$.

Приклад 8.1. Визначити вертикальне переміщення (прогин y_B) вільного кінця бруса змінної жорсткості (рис. 8.1); $F = 50 \text{ kH}$; $a = 0.2 \text{ м}$; жорсткість $EI = 100 \text{ kH} \cdot \text{м}^2$.

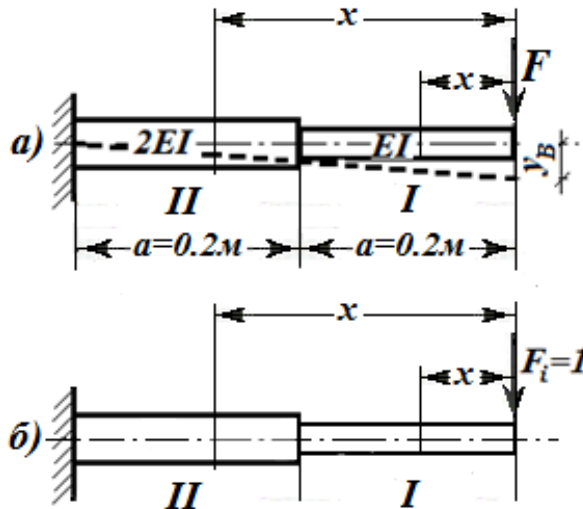


Рис. 8.1

Розв’язок. Жорсткість першої та другої діляниць балки різна, а згинальні моменти описуються одними і тими ж функціями.

1. Записуємо вираз вантажного моменту (рис. 8.1, а):

$$M_I = M_{II} = -F \cdot x.$$

2. Прикладемо вертикальну одиничну силу $F_i = 1$ до вільного кінця балки (рис. 8.1, б) і записуємо вираз згинального моменту від цієї одиничної сили:

$$M_i^I = M_i^{II} = -F_i \cdot x = -x.$$

3. Підставляємо функції M і $\bar{M}_i$ в інтеграл переміщень (8.1) і обчислюємо прогин вільного кінця бруса:

$$\begin{aligned} \Delta_i &= \sum \int_{l_k} \frac{M \bar{M}_i}{EI} dx = \int_{lk} \frac{M_I \bar{M}_i^I}{EI} dx + \int_{lk} \frac{M_I \bar{M}_i^{II}}{2EI} dx = \int_0^a \frac{(-Fx)(-x)}{EI} + \\ &\quad \int_a^{2a} \frac{(-Fx)(-x)}{2EI} dx = \frac{3Fa^3}{2EI}. \\ \Delta &= \frac{3 \cdot 50 \cdot 0.2^3}{2 \cdot 100} = 6 \text{ мм}. \end{aligned}$$

По способу (правилу) Верещагіна операція інтегрування (8.1) замінюється перемножуванням площі першої епюри M на ординату другої епюри $\bar{M}_i$, яка знаходиться під центром ваги площі першої епюри. При цьому (8.1) набуває вигляду:

$$\Delta = \sum \frac{\omega \cdot M_i^C}{EI}, \quad (8.2)$$

де ω – площа фігури, що обмежена криволінійним чи прямолінійним вантажним епюром M ; M_i^C – ордината прямолінійного епюра в перерізі, що збігається з центром ваги вантажного епюра на заданій ділянці.

Вказівки

1. Добуток площі одного епюра на ординату другого рахують додатним, якщо площа і ордината розташовані по одну сторону від осі балки.

2. Якщо в межах ділянки, що розглядається, обидва епюри (M і $\bar{M}_i$) є лінійними, то без різниці площу якого епюра брати, а на якому епюрі – ординату.

3. Якщо один з епюрів (M) криволінійний, а другий – ламаний, належить розбити другий епюр ($\bar{M}_i$) на окремі ділянки, в межах яких він лінійний.

4. Якщо обидва епюри ламані і межі ділянок у них не співпадають, то потрібно розбити обидва ці епюри на однакове число

лінійних ділянок, щоб в межах цих отриманих ділянок обидва епюри були лінійними і межі ділянок співпадали.

5. Для перемноження двох трапецеїдальних епюрів (рис. 8.2) зручно використовувати формулу

$$\frac{l}{6}(2ab + 2cd + ad + bc)$$
(8.3)

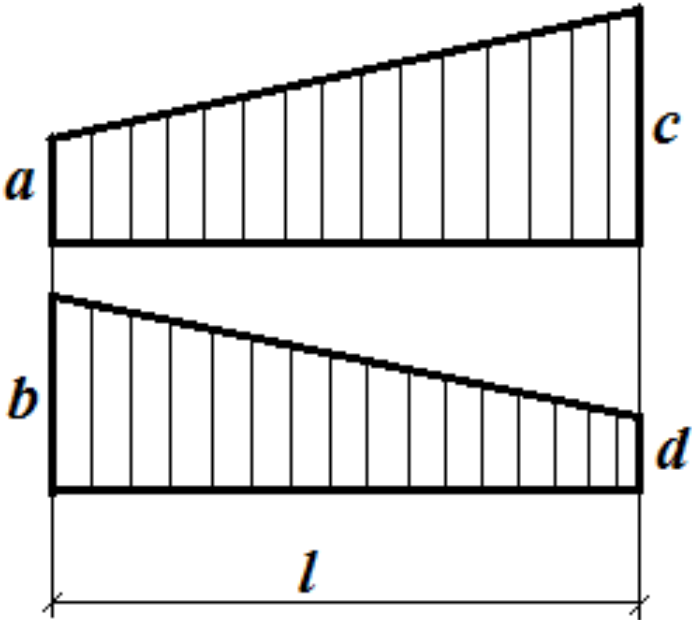
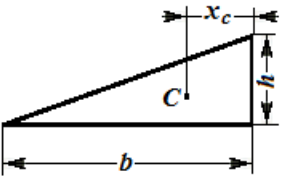
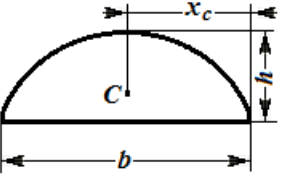
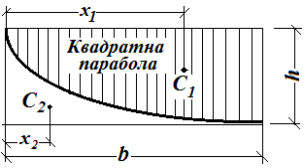
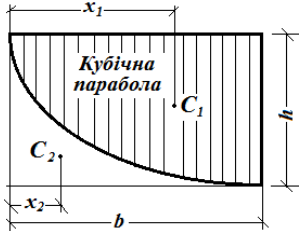


Рис. 8.2

6. В табл. 8.1 наведені значення площ деяких епюрів і координати їх центрів ваги. Цими даними необхідно користуватись, якщо балка завантажена як зосередженим, так і рівномірно розподіленим по довжині або трикутно розподіленим навантаженням.

Таблиця 8.1

Геометрична форма	Площа ω_i	Абсциса центру ваги
	$\omega = \frac{1}{2}bh$	$x_c = \frac{1}{3}(a + b)$

Геометрична форма	Площа ω_i	Абсциса центру ваги
	$\omega = \frac{1}{2}bh$	$x_c = \frac{1}{3}b$
	$\omega = \frac{2}{3}bh$	$x_c = \frac{1}{2}b$
	$\omega_1 = \frac{2}{3}bh$	$x_1 = \frac{5}{8}b$
	$\omega_2 = \frac{1}{3}bh$	$x_2 = \frac{1}{4}b$
	$\omega_1 = \frac{3}{4}bh$	$x_1 = \frac{3}{5}b$
	$\omega_2 = \frac{1}{4}bh$	$x_2 = \frac{1}{5}b$

7. Якщо значення переміщення $\Delta_i = y_i$ отримується з від'ємним знаком, то це вказує на те, що реальне переміщення перерізу, до досліджується, є протилежним попередньо вибраному напрямленню одиничної сили.

Епюр згинальних моментів M від заданого навантаження зазвичай називають *вантажним*, а епюр $\bar{M}_i$ – *одиничним*.

Приклад 8.2. Визначити вертикальне переміщення перерізу B консольної балки, зображеної на рис.8.3.



Рис. 8.3

Розв'язок. Будемо епюр згинальних моментів M від дії зовнішньої зосередженої сили F : $M_B = 0, M_A = -F \cdot 2l$ (епюр лінійний).

За умовою задачі потрібно визначити вертикальне переміщення y_B перерізу B консольної балки, тому будемо одиничну епюру $\bar{M}_i$ від дії вертикальної одиничної сили $F_i = 1$, прикладеній в перерізі B .

Враховуючи, що консольна балка складається з двох ділянок з різною жорсткістю на згин, епюри M і $\bar{M}_i$ будемо перемножувати за допомогою правила Верещагіна по ділянках окремо. Епюри M і $\bar{M}_i$ першої ділянки перемножуємо за формулою (8.2), а епюри другої ділянки – як площу епюру M другої ділянки $F \cdot l^2/2$ на ординату $2l/3$ епюру $\bar{M}_i$ другої ділянки під центром ваги трикутного епюру M цієї ділянки.

В цьому випадку за формулою (7.1) отримуємо:

$$y_B = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{l}{6} (2 \cdot 2Fl \cdot 2l + 2 \cdot Fl \cdot l + 2Fl \cdot l + Fl \cdot 2l) + \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} Fl \cdot l \cdot \frac{2}{3} l \right) = \frac{3Fl^3}{2EI}.$$

Приклад 8.3. Визначити вертикальне переміщення перерізу B однопрогінної балки, що зображена на рис. 7.12. Балка має постійну по всій довжині жорсткість на згин EI .

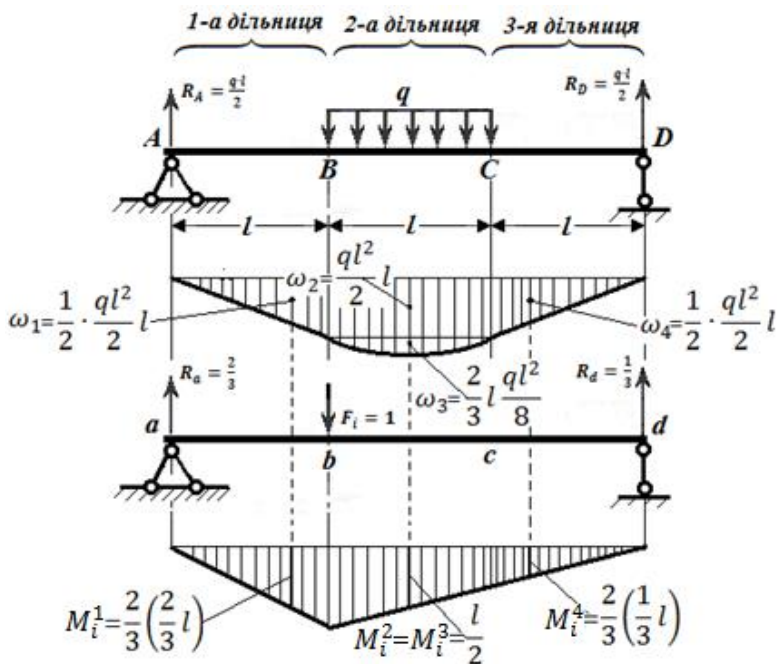


Рис. 8.4

Розв'язок. Будуємо епюр згинальних моментів від дії зовнішнього розподіленого навантаження: $M_A = 0$; $M_D = 0$;

$$M_B = R_A \cdot l = \frac{q l^2}{2} = M_C.$$

Прикладаємо в перерізі В одиничну вертикальну силу $F_i = 1$ і будуємо епюр $\bar{M}_l$ (рис. 7.12): $\sum M_d = R_a \cdot 3l - F_i \cdot 2l = 0$, звідки $R_a = \frac{2}{3}$; $\sum M_a = R_d \cdot 3l - F_i \cdot l = 0$, звідки $R_d = \frac{1}{3}$, тому $M_a = M_d = 0$; $M_b = R_a \cdot l = \frac{2}{3} l$.

Розділимо балку, що розглядається, на 3 дільниці. Перемноження епюр 1-ої і 3-ої дільниці не викликає труднощів, оскільки ми будемо перемножувати трикутні епюри. Для того щоб застосувати правило Верещагіна до 2-ої дільниці, розділимо епюр М 2-ої дільниці на дві складові епюри: прямокутну $\omega_2 = \left(\frac{q l^2}{2} \right) \cdot (l)$ і параболічну з площею $\omega_3 = \left(\frac{2}{3} l \right) \cdot \left(\frac{q l^2}{8} \right)$ (рис.8.4). Центр ваги параболічної частини епюру М лежить посередині 2-ої дільниці.

Таким чином, формула (8.2) при використанні правила Верещагіна дає:

$$Y_B = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{ql^2}{2} l \cdot \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3} l \right) + \frac{ql^2}{2} l \cdot \frac{l}{2} + \frac{2}{3} l \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{l}{2} + \frac{1}{2} \frac{ql^2}{2} l \cdot \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3} l \right) \right] = \frac{11ql^4}{24EI}.$$

Приклад 8.4. Визначити за правилом Верещагіна вертикальне переміщення вільного кінця консольної балки, схема якої показана на рис. 8.5, а. ($F = 1 \text{ кН}$; $q = 3 \text{ кН/м}$; $a = 2 \text{ м}$; $EI = 2 \text{ МН} \cdot \text{м}^2 = 2000 \text{ кН} \cdot \text{м}^2$.)

Розв'язок. На вільному кінці балки прикладаємо вертикальну одиничну силу за напрямком переміщення, що визначається (рис.8.5, г).

1. Будуємо епюри $M_{зг}$ вантажних згинальних моментів (рис.8.4, б, в) і епюр $\bar{M}_i$ від одиничної сили (рис.8.5, д). Епюри $M_{зг}$ будуємо від кожного виду навантаження окремо, що дає можливість використати стандартні формули для визначення площ ω і положень центрів ваги C епюр (табл.8.1).

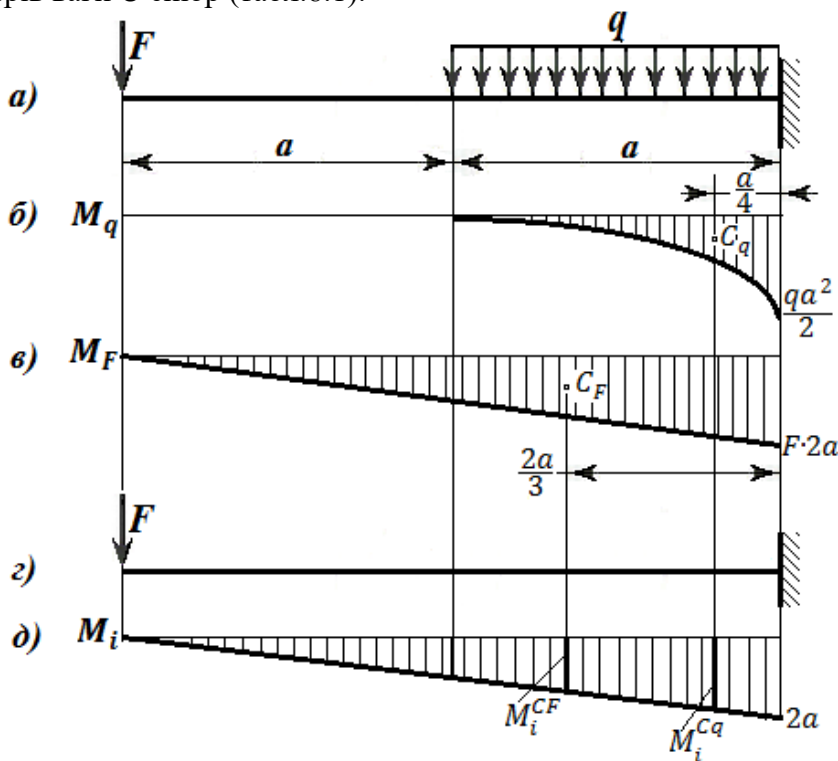


Рис.8.5

2. Обчислюємо площі ω вантажних епюр і ординати одиничного епюру під центром ваги вантажних:

$$\omega_q = \frac{1}{3} \times \frac{qa^2}{2} \times a = \frac{qa^3}{6}; \quad x_{Cq} = \frac{a}{4}; \quad \omega_F = \frac{1}{2} \times F2a \times 2a = 2Fa^2; \quad x_{CF} = \frac{2a}{3}; \quad M_i^{Cq} = \frac{7}{4}a; \quad M_i^{CF} = \frac{4}{3}a.$$

3. Визначаємо переміщення за формулою

$$\Delta = \sum \frac{\omega \cdot M_i^C}{EI} = \frac{\omega_q \cdot M_i^{Cq}}{EI} + \frac{\omega_F \cdot M_i^{CF}}{EI} = \frac{\frac{qa^3}{6} \cdot \frac{7}{4}a + 2Fa^2 \cdot \frac{4}{3}a}{EI} = \frac{\frac{7}{24}qa^4 + \frac{8}{3}Fa^3}{EI}.$$

$$\Delta = \frac{\frac{7}{24} \cdot 3 \cdot 2^4 + \frac{8}{3} \cdot 1 \cdot 2^3}{2000} = \frac{35.3}{2000} = 0,0177 \text{ м} = 1,8 \text{ см.}$$

Розмірність: ω - $\text{кН} \cdot \text{м}^2$; M_i - м ; EI - $\text{кН} \cdot \text{м}^2$.

Відповідь: прогин вільного кінця балки становить $\Delta = 1,8 \text{ см}$.

Запитання для самоконтролю:

1. Які види переміщень поперечних перерізів бруса ви знаєте, як їх позначають?
2. Як записується інтеграл в переміщень Мора – Максвелла в узагальненому вигляді?
3. Як записується інтеграл переміщень для балок чи плоских рам?
4. В якій послідовності виконується обчислення переміщень за інтегралом Мора?
5. Як записується вираз для обчислень інтеграла Мора графоаналітичним методом?
6. В якій послідовності виконується обчислення переміщень за правилом Верещагіна?
7. В яких випадках можна користуватись правилом Верещагіна для обчислення інтеграла Мора?
8. Що означає від'ємний результат при обчисленні переміщень?

9. КРУЧЕННЯ ІЗ ЗГИНОМ

Небезпечним перерізом буде переріз біля заробки, оскільки тут найбільші $M_{зг}$ і $M_{кр}$ (рис. 9.1). В цьому перерізі небезпечними будуть точки А і В, що найбільш віддалені від нейтральної лінії.

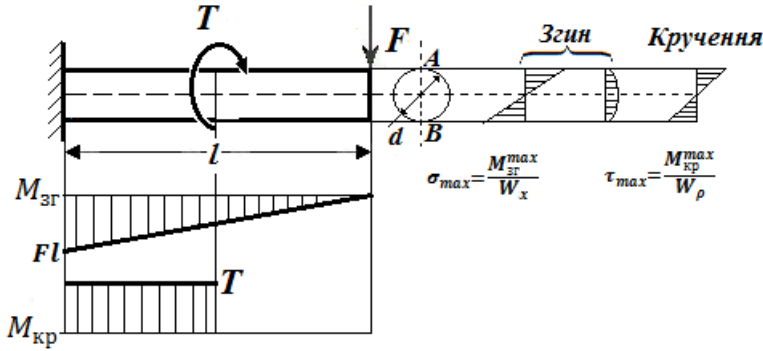


Рис. 9.1

Розглянемо точку А. В ній найбільші $\tau_{\max}$ і $\sigma_{\max}$ (рис. 9.2).

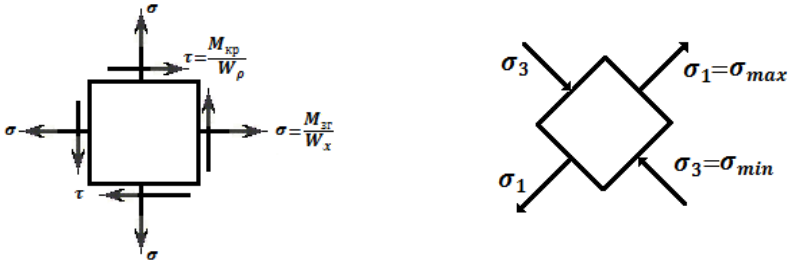


Рис. 9.2

По площадці поздовжнього перерізу нормальні напруження відсутні, а дотичні (в силу закону парності сил) мають ту ж величину, що і в поперечному перерізі.

Елементарний об'єм частини валу, взятий в точці, знаходиться в плоскому напруженому стані, по його двох гранях діють нормальні напруження (розтягу або стиску) від згину σ , а по чотирьох гранях – дотичні напруження від кручення τ (рис. 9.2).

Тому при перевірці міцності такого елемента необхідно використати умови, що витікають з чотирьох теорій міцності:

- 1) теорія найбільших нормальних напружень

$$\frac{1}{2}[\sigma_{зг}] + \sqrt{\sigma_{зг}^2 + 4 \cdot \tau_{кр}^2} \leq [\sigma]; \quad (9.1)$$

- 2) теорія найбільших деформацій

$$\frac{1}{2} \left[0,35 \cdot \sigma_{3\Gamma} + 0,65 \cdot \sqrt{\sigma_{3\Gamma}^2 + 4 \cdot \tau_{\text{кр}}^2} \right] \leq [\sigma]; \quad (9.2)$$

3) теорія найбільших дотичних напружень

$$\sqrt{\sigma_{3\Gamma}^2 + 4 \cdot \tau_{\text{кр}}^2} \leq [\sigma]; \quad (9.3)$$

4) енергетична теорія

$$\sqrt{\sigma_{3\Gamma}^2 + 3 \cdot \tau_{\text{кр}}^2} \leq [\sigma]; \quad (9.4)$$

Відомо, що для круглих перерізів валів : $\sigma_{3\Gamma} = \frac{M_{3\Gamma}}{W}$; $\tau_{\text{кр}} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_{\rho}}$; $W_{\rho} = 2 \cdot W_x$.

Підставляючи W_{ρ} і W в формулах (9.1) - (9.4), отримаємо:

$$\frac{1}{2} \left[\frac{M_{3\Gamma}}{W_x} + \sqrt{\left(\frac{M_{3\Gamma}}{W_x} \right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{M_{\text{кр}}}{W_{\rho}} \right)^2} \right] = \frac{M_{3\Gamma} + \sqrt{M_{3\Gamma}^2 + M_{\text{кр}}^2}}{2 \cdot W_x} = \frac{M_{\text{розр}}}{W_x} \leq [\sigma]. \quad (9.5)$$

Звідси $\frac{M_{\text{розр}}}{W_x} \leq [\sigma]$.

Подібним чином можуть бути отримані розрахункові формули і по інших теоріях міцності. Всі ці формули можна замінити однією розрахунковою формулою:

$$\frac{M_{\text{розр}}}{W} \leq [\sigma], \quad (9.6)$$

де $M_{\text{розр}}$ – розрахунковий момент, величина якого залежить як від $M_{3\Gamma}$ і $M_{\text{кр}}$, так і від прийнятої теорії міцності:

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{\text{розр.I}} = \frac{1}{2} \left[M_{3\Gamma} + \sqrt{M_{3\Gamma}^2 + M_{\text{кр}}^2} \right] ; \\ M_{\text{розр.II}} = 0,35 \cdot M_{3\Gamma} + 0,65 \cdot \sqrt{M_{3\Gamma}^2 + M_{\text{кр}}^2} ; \\ M_{\text{розр.III}} = \sqrt{M_{3\Gamma}^2 + M_{\text{кр}}^2} ; \\ M_{\text{розр.IV}} = \sqrt{M_{3\Gamma}^2 + 0,75 \cdot M_{\text{кр}}^2} . \end{array} \right. \quad (9.7)$$

При $W = \frac{\pi D^3}{32}$ діаметр валу з (9.7) буде дорівнювати:

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{\text{розр}}}{\pi \cdot [\sigma]}}. \quad (9.8)$$

При розрахунках валів з в'язких пластичних матеріалів найбільше поширення отримали теорія найбільших дотичних напружень і енергетична теорія міцності.

Визначення скручуючого моменту, що передається на вал

При визначеній потужності N і числу обертів n , скручувальний момент:

$$M_{кр} = k \cdot \frac{N}{n}.$$

Якщо $N = \text{к. сил.}; n = \frac{\text{об}}{\text{хв}}$, то $k = 7162$.

$$M_{кр} = 7162 \cdot \frac{N}{n}, (H \cdot \text{м}).$$

Якщо $N = \text{квт.}; n = \frac{\text{об}}{\text{хв}}$, то $k = 9736$.

$$M_{кр} = 9736 \cdot \frac{N}{n}, (H \cdot \text{м}).$$

Якщо $N = \text{квт.}; n = \frac{\text{рад}}{\text{с}}$, то $k = 1$.

$$M_{кр} = N/\omega, (\text{кН} \cdot \text{м}).$$

Приклад 9.1. Задана схема (рис. 9.3) вала, на якому знаходяться три шківів з діаметрами $D_1 = D_2 = 0,4 \text{ м}$, а $D_3 = 2D_1 = 0,8 \text{ м}$. До шківів прикладена по колу сила $F_1 = 4 \text{ кН}$, $F_2 = 6 \text{ кН}$ і сила $F_3 = 0,5F_1$. Довжини відрізків між шківів і опорами дорівнюють: $a = c = 1 \text{ м}$, $b = 2 \text{ м}$. З умови міцності при $4[\sigma] = 150 \text{ МПа}$ визначити діаметр вала.

Розв'язок. 1. З умови статичної рівноваги скручувальних моментів відносно осі Z знаходимо силу F_3 .

$$\sum T_Z = 0; \rightarrow T_1 + T_2 - T_3 = 0;$$

$$T_1 = F_1 \cdot \frac{D_1}{2}; T_2 = F_2 \cdot \frac{D_1}{2}; T_3 = F_3 \cdot \frac{D_3}{2}; D_3 = 2D_1.$$

Рівняння рівноваги скручувальник набуває нового вигляду:

$$F_1 \cdot \frac{D_1}{2} + F_2 \cdot \frac{D_1}{2} - F_3 \cdot D_1 = 0;$$

$$F_1 + F_2 - 2F_3 = 0;$$

$$F_3 = \frac{F_1 + F_2}{2} = \frac{4 + 6}{2} = 5 \text{ кН}.$$

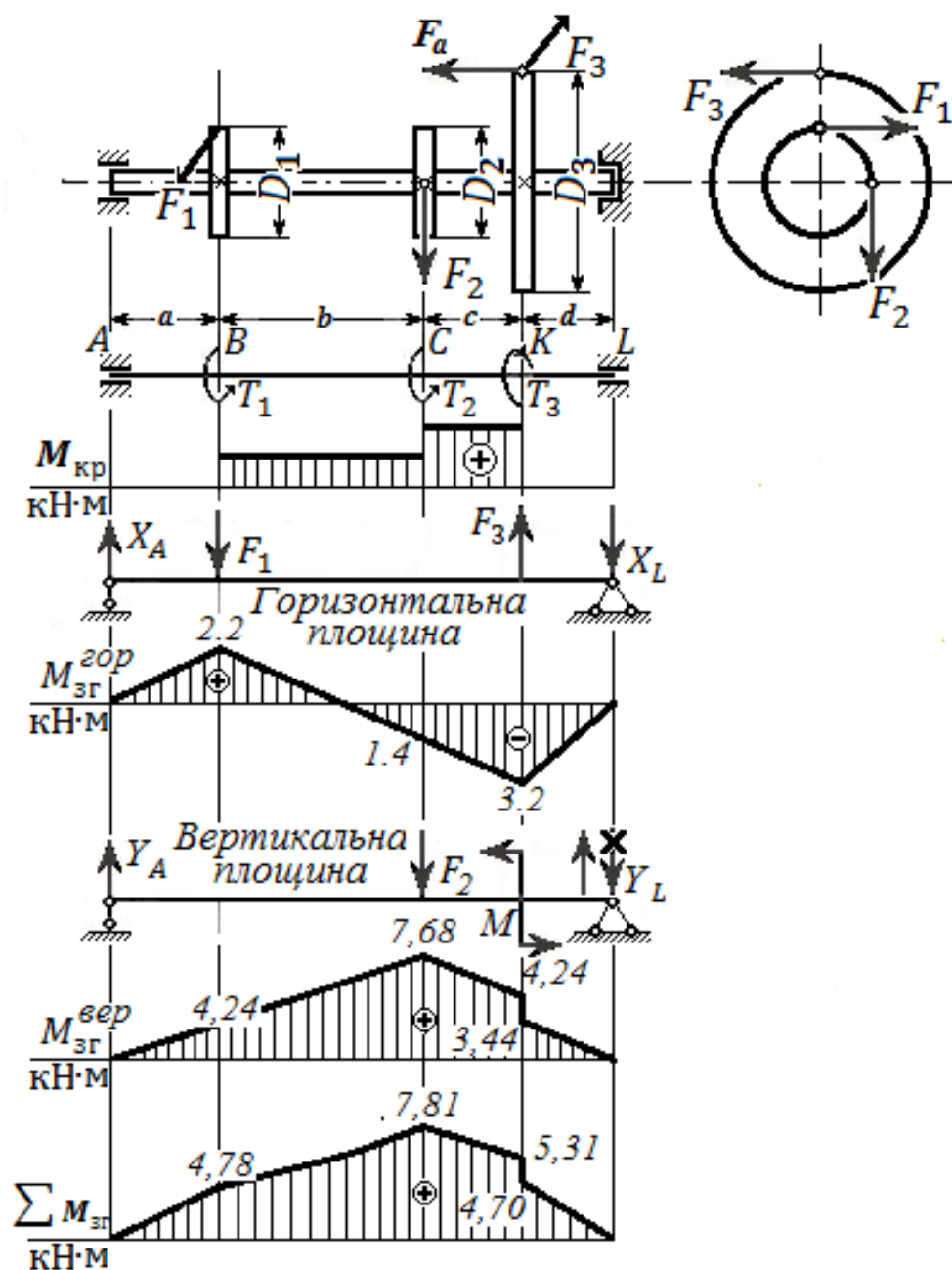


Рис. 9.3

2. Визначаємо величину крутних моментів на ділянках вала і будуємо епюру.

Величина крутного моменту визначається як при розрахунку на кручення:

1. Ділянка **BC**:

$$M_{кр}^1 = T_1 = F_1 \cdot \frac{D_1}{2} = 0,8 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

2. Ділянка **CK**

$$M_{кр}^2 = T_1 + T_2 = F_1 \cdot \frac{D_1}{2} + F_2 \cdot \frac{D_2}{2} = 0,8 + \frac{6 \cdot 4}{2} = 0,8 + 1,2 = 2,0 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

3. Будуємо епюри згинальних моментів в горизонтальній і вертикальній площинах.

Визначаємо опорні реакції від дії горизонтальних сил F_1 і F_3 з умови статичної рівноваги:

$$\sum M_A = 0; \rightarrow -F_1 \cdot a + F_3 \cdot (a + b + c) - X_L \cdot (2a + b + c) = 0;$$

$$X_L = \frac{F_3 \cdot (a + b + c) - F_1 \cdot a}{(2a + b + c)} = \frac{5 \cdot (1 + 2 + 1) - 4 \cdot 1}{2 \cdot 1 + 2 + 1} = 3,2 \text{ кН}.$$

$$\sum M_A = 0; \rightarrow F_1 \cdot (b + c + a) + F_3 \cdot a - X_A \cdot (2a + b + c) = 0;$$

$$X_A = \frac{F_1 \cdot (b + c + a) - F_3 \cdot a}{(2a + b + c)} = \frac{4 \cdot (2 + 1 + 1) - 5 \cdot 1}{2 \cdot 1 + 2 + 1} = 2,2 \text{ кН}.$$

Знак реакцій отримали додатний - це говорить про те, що попередній напрямок опорних реакцій вибрано правильно.

Перевірка величин отриманих реакцій :

$$\sum F_X = 0; \rightarrow X_A - F_A + F_3 - X_L = 0; \rightarrow 2,2 - 4 + 5 - 3,2 = 0.$$

Величини отриманих реакцій визначені вірно.

Визначаємо значення згинальних моментів у всіх перерізах горизонтальної площини:

$$M_A = 0; M_B = X_A \cdot a = 2,2 \cdot 1 = 2,2 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

$$M_C = X_A \cdot (a + b) - F_1 \cdot b = 2,2 \cdot (1 + 2) - 4 \cdot 2 = -1,4 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

$$M_K = -X_L \cdot a = -3,2 \cdot 1 = -3,2 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

$$M_L = 0.$$

Визначаємо опорні реакції від сили F_2 для момента M в вертикальній площині з умови статичної рівноваги:

$$\sum M_A = 0; -F_2(a + b) + M - Y_L(2a + b + c) = 0;$$

$$M = F_A \cdot \frac{D_3}{2} = 0.5F_1 \cdot \frac{D_3}{2} = 0.5 \cdot 4 \cdot \frac{0.8}{2} = 0.8 \text{ kH} \cdot \text{м.}$$

$$Y_L = \frac{-F_2 \cdot (a+c) + M}{a+b+c} = \frac{-6 \cdot (1+1) + 0.8}{2 \cdot 1 + 2 + 1} = -2.56 \text{ kH.}$$

Виконуємо перевірку величин реакцій:

$$\sqrt{F_Y} = 0; \rightarrow Y_A - F_2 + Y_L = 0; \rightarrow 2.56 - 6 + 3.44 = 0.$$

Реакції визначені вірно.

Обчислюємо величини згинальних моментів в вертикальній площині і будуємо епюру.

$$M_A = 0; M_B = Y_A \cdot a = 2.56 \cdot 1 = 2.56 \text{ kH} \cdot \text{м.}$$

$$M_C = Y_A \cdot (a + b) = 2.56 \cdot (1 + 2) = 2.56 \cdot 3 = 7.68 \text{ kH} \cdot \text{м.}$$

$$M_{K'} = Y_A \cdot (a + b + c) - F_2 \cdot c = 2.56 \cdot (1 + 2 + 1) - 6 \cdot 1 = 4.24 \text{ kH} \cdot \text{м.}$$

$$M_{K''} = Y_L \cdot a = 3.44 \cdot 1 = 3.44 \text{ kH} \cdot \text{м}$$

$$M_L = 0.$$

4. Визначаємо величину сумарного згинального моменту , оскільки згин відбувається в двох площинках - вертикальній і горизонтальній.

$$\sum M = \sqrt{M_G^2 + M_B^2}.$$

$$\sum M_A = 0; \quad \sum M_B = \sqrt{2,2^2 + 4,24^2} = 4,78 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

$$\sum M_c = \sqrt{1,4^2 + 7,68^2} = 7,81 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

$$\sum M_{K'} = \sqrt{3,2^2 + 4,24^2} = 5,31 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

$$\sum M_{K''} = \sqrt{3,2^2 + 3,44^2} = 4,7 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

$$\sum M_L = 0.$$

5. Визначаємо небезпечний переріз вала за максимальним розрахунковим моментом по четвертій теорії міцності:

$$M_{\text{розр}} = \sqrt{\sum M^2 + 0,75 M_{\text{кр}}^2}.$$

$$M_{\text{розр}}^A = 0; M_{\text{розр}}^B = \sqrt{4,78^2 + 0,75 \cdot 0,8^2} = 4,83 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$M_{\text{розр}}^C = \sqrt{7,81^2 + 0,75 \cdot 2^2} = 8 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

$$M_{\text{розр}}^K = \sqrt{5,31^2 + 0,75 \cdot 2^2} = 5,59 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

$$M_{\text{розр}}^L = 0.$$

Небезпечний переріз вала в точці С.

6. Визначаємо діаметр вала з умов міцності при сумісній дії кручення і згину.

$$\sigma_{\text{РОЗР. МАХ}} = \frac{M_{\text{РОЗР. МАХ}}}{W_x} \leq [\sigma].$$

Для кола момент момент опору площі поперечного перерізу вала відносно осі Х:

$$W_x = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3.$$

Підставляємо значення $W_x = 0,1d^3$ в умову міцності і з нього знаходимо діаметр вала.

$$d = \sqrt[3]{\frac{M_{\text{РОЗР. МАХ}}}{0,1[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{8 \cdot 10^3}{0,1 \cdot 150 \cdot 10^6}} = 0,81 \cdot 10^{-1} = 81 \text{ мм}$$

Приймаємо ближнє більше стандартне значення вала: $d = 85$ мм.

Приклад 8.2. На вал (рис. 9.4) посаджені два шків: перший – діаметром 80 см (0,8 м), що важить 80 кг (785 Н), і другий – діаметром 1,0 м, що важить 120 кг (1177 Н). Через шківів перекинуті паси, вітки яких паралельні і нахилені до горизонту під кутом $\alpha_1 = 30^\circ$ на першому шківі і під кутом $\alpha_2 = 135^\circ$ на другому. Від першого шківів пас іде до електродвигуна; в цьому пасу зусилля в збігаючій вітці в два рази більші ніж в набігаючій. Від другого шківів пас іде до верстату; в цьому пасу зусилля в набігаючій вітці вдвічі більші ніж в збігаючій. Верстат має потужність $P = 100$ к.с. (1 к.с. $\approx 0,735$ кВт); вал обертається з швидкістю $n = 200$ об./хв. Використовуючи четверту теорію міцності, визначити необхідний діаметр валу при допустимому напруженні для його матеріалу $[\sigma] = 800$ кГс/см² (80 МПа).

Розв'язок. В заданому варіанті вал піддається деформаціям згину, а його частина, що розташовується між шківів – додатково ще і деформаціям кручення.

1. Зображаємо розрахункову схему в масштабі (рис. 9.4, а).

2. Обчислюємо обертовий момент T :

$$T = \frac{P}{\omega} = \frac{73,5 \cdot 10^3}{21} = 3500 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Розмірність: $P - \text{ват}, \omega = \frac{\pi \cdot n}{30} - \text{с}^{-1}$.

3. Визначаємо силові навантаження на шків:

Позначимо натяг набігаючої вітки через t_1 (перший шків), тоді натяг в збігаючій вітці згідно з умовою дорівнює $2t_1 = T_1$. Тоді крутний момент $M_{кр1}$ на першому шківі буде обчислюватись за формулою:

$$M_{кр1} = T_1 = \frac{D_1 \cdot t_1}{2}; \rightarrow t_1 = \frac{2 \cdot T}{D_1} = \frac{2 \cdot 3,5}{0,8} = 8,75 \text{ кН};$$

для другого шків аналогічно:

$$t_2 = \frac{2 \cdot T_2}{D_2} = \frac{2 \cdot 3,5}{1,0} = 7,0 \text{ кН},$$

де - $T_1 = T_2 = T = 3500 \text{ Н} \cdot \text{м} = 3,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Таким чином, в перерізах посадки шківів вал навантажений похилими силами (рис. 8.4):

$$F_1 = 3 \cdot t_1 = 3 \cdot 8,75 = 26,25 \text{ кН}; \quad F_2 = 3 \cdot t_2 = 3 \cdot 7,0 = 21 \text{ кН}.$$

Крім цього, в цих же перерізах діють вертикальні сили, що дорівнюють вазі шківів ($G_1 = 0,785 \text{ кН}$; $G_2 = 1,177 \text{ кН}$).

4. Будуємо епюри згинальних моментів у вертикальній і горизонтальній площинках.

А. вертикальна площина (рис. 9.4, б).

В цій площині вал буде навантажений зовнішніми зосередженими силами P_1^B і P_2^B , які прикладені в перерізах валу де посаджені шків. Величини цих сил визначаються як алгебраїчні суми вертикальних складових сил F_1 і F_2 та сил ваги шківів G_1 і G_2 відповідно.

Тоді вертикальне навантаження від першого шків буде дорівнювати:

$$P_1^B = G_1 + F_1 \cdot \sin 30^\circ = 0,785 + 26,25 \cdot 0,5 = 13,91 \text{ кН}.$$

За аналогією визначаємо і вертикальне навантаження від другого шків:

$$P_2^B = G_2 + F_2 \cdot \sin 45^\circ = 1,177 + 21,0 \cdot 0,707 \approx 16,03 \text{ кН}.$$

Для навантажень, що діють у вертикальній площині (P_1^B і P_2^B) визначимо опорні реакції A' і B' :

$$\sum M_{B'} = 0; \rightarrow P_2^B \cdot 0,75 - A' \cdot 1,5 + P_1^B \cdot 2,0 = 0 \rightarrow A' = \frac{P_2^B \cdot 0,75 + P_1^B \cdot 2,0}{1,5} = 26,56 \text{ кН};$$

$$\begin{aligned} \sum M_{A'} &= 0; \rightarrow -P_2^B \cdot 0,75 + B' \cdot 1,5 + P_1^B \cdot 0,5 = 0 \rightarrow B' \\ &= \frac{P_2^B \cdot 0,75 - P_1^B \cdot 0,5}{1,5} = 3,38 \text{ кН}. \end{aligned}$$

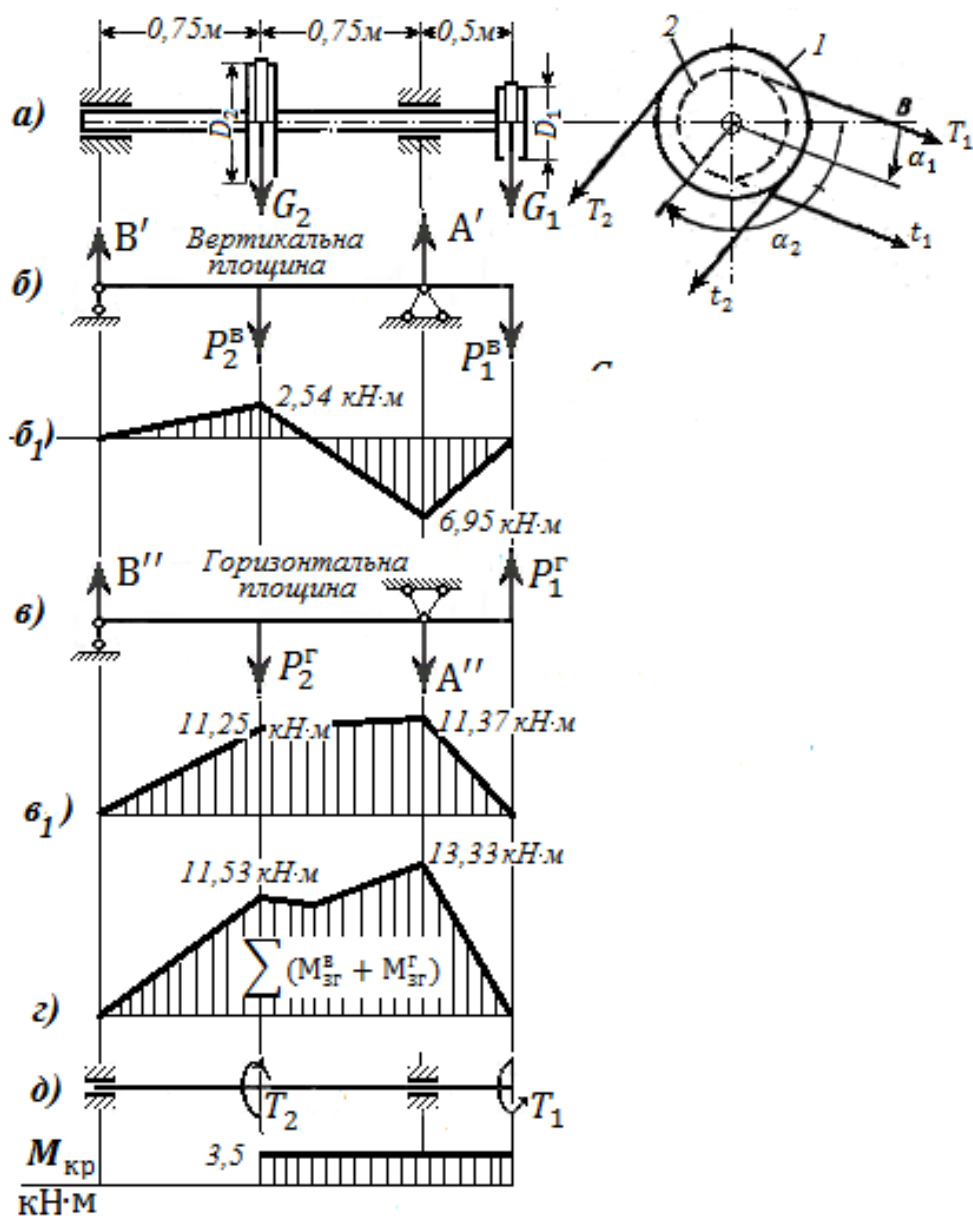


Рис. 9.4

Перевірка:

$$\sum Y_i = 0; \rightarrow B' - P_2^B + A' - P_1^B = 0; \rightarrow 3,38 - 16,03 + 26,56 - 13,39 = 0.$$

Обчислюємо згинальні моменти в характерних перерізах:

$$M_B^B = M_C^B = 0;$$

$$M_D^B = B' \cdot 0,75 = 3,38 \cdot 0,75 \approx 2,54 \text{ kH} \cdot \text{м};$$

$$M_A^B = -P_1^B \cdot 0,5 = -13,91 \cdot 0,5 \approx -6,95 \text{ kH} \cdot \text{м}.$$

Будуємо епюру $M_{\text{згн}}^B$ (рис. 8.5, б₁)

Б. Горизонтальна площина (рис. 9.4, в).

В цій площині вал навантажується двома зосередженими зовнішніми силами F_1^r і F_2^r , які прикладені в перерізах де посаджені шківів. Величина цих сил визначається як горизонтальна складова сил F_1 і F_2 .

Горизонтальне навантаження від першого шківів:

$$P_1^r = F_1 \cdot \cos 30^\circ = 26,25 \cdot 0,866 = 22,73 \text{ kH}.$$

Горизонтальне навантаження від другого шківів:

$$P_2^r = F_2 \cdot \cos 45^\circ = 21,00 \cdot 0,707 = 14,85 \text{ kH}.$$

При цьому навантаження P_1^r і P_2^r направлені в протилежні сторони.

Для навантажень, що діють у горизонтальній площині (P_1^r і P_2^r) визначимо опорні реакції A'' і B'' :

$$\sum M_{B''} = 0; \rightarrow P_2^r \cdot 0,75 - A'' \cdot 1,5 - P_1^B \cdot 2,0 = 0 \rightarrow A'' = \frac{-P_2^r \cdot 0,75 + P_1^B \cdot 2,0}{1,5} = 22,88 \text{ kH};$$

$$\sum M_{A''} = 0; \rightarrow -P_2^B \cdot 0,75 + B'' \cdot 1,5 - P_1^B \cdot 0,5 = 0 \rightarrow B'' = \frac{P_2^B \cdot 0,75 + P_1^B \cdot 0,5}{1,5} = 15,0 \text{ kH}.$$

Перевірка:

$$\sum Y_i = 0; \rightarrow B'' - P_2^r - A'' + P_1^r = 0; \rightarrow 15,0 - 14,85 - 22,88 + 22,73 = 0.$$

Обчислюємо згинальні моменти в характерних перерізах:

$$M_B^r = M_C^r = 0;$$

$$M_D^r = B'' \cdot 0,75 = 15,0 \cdot 0,75 \approx 11,25 \text{ kH} \cdot \text{м};$$

$$M_A^r = P_1^r \cdot 0,5 = 22,73 \cdot 0,5 \approx 11,37 \text{ kH} \cdot \text{м}.$$

Будуємо епюру $M_{\text{згн}}^B$ (рис. 8.4, в₁).

5. Будуємо епюру $M_{\text{згн}}$ сумарних згинальних моментів.

Сумарні згинальні моменти в характерних перерізах обчислюємо за формулою:

$$M_{згн} = \sqrt{M_{\Gamma}^2 + M_B^2}.$$

$$M_{згн}^B = M_{згн}^C = 0; \quad M_{згн}^D = \sqrt{11,25^2 + 2,54^2} = 11,53 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{згн}^A = \sqrt{11,37^2 + 6,95^2} = 13,33 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Будуємо епюру сумарних згинальних моментів (рис. 9.4, г).

6. Будуємо епюру крутних моментів (рис. 9.4, д):

Дільниця BD: $M_{кр} = 0$;

Дільниця CD: $M_{кр} = -T = -3,5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$

7. Визначаємо небезпечний переріз валу і його діаметр. З епюр $M_{кр}$ і $M_{згн}$ видно, що небезпечним є переріз A, в якому діють крутний момент $M_{кр} = 3,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$ і сумарний згинальний момент $M_{згн} = 13,33 \text{ кН} \cdot \text{м}$. Визначаємо діаметр валу, виходячи з четвертої теорії міцності. Обчислюємо розрахунковий момент IV – четвертою теорією міцності:

$$M_{розр.IV} = \sqrt{M_{зг}^2 + 0,75 \cdot M_{кр}^2} = \sqrt{13,33^2 + 0,75 \cdot 3,5^2} = 13,67 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

$$\text{Тоді } W_x \geq \frac{M_{розр.IV}}{[\sigma]} = \frac{13,67 \cdot 10^2}{8} = 170,88 \text{ см}^3.$$

(Розмірність: $M_{розр.IV}$ - кН·см; $[\sigma]$ - кН/см².)

$$W_x = \frac{\pi d^3}{32}; \rightarrow d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot W_x}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 170,88}{3,14}} \approx 12 \text{ см}.$$

Відповідно до ряду діаметрів приймаємо $d = 120 \text{ мм}.$

9.1. Запитання для самоконтролю:

1. Які напруження виникають в поперечних перерізах бруса при згині з крученням?
2. Як знаходять небезпечні перерізи бруса круглого перерізу при згині з крученням?
3. Які точки круглого поперечного перерізу являються небезпечними при згині з крученням?
4. Як визначається величина розрахункового моменту (за різними теоріями міцності) при згині з крученням бруса круглого перерізу? Запишіть відповідні формули.
5. Запишіть умову міцності при сумісній дії кручення і згину.
6. Як визначається діаметр вала при сумісній дії кручення і згину?

9.2. Розрахунок вала на згин з крученням

Стальний вал трансмісії робить n об/хв і передає через два ведені шківів потужності, що задані в табл. 9.1; діаметри шківів $D_1 = 60$ см, $D_2 = 40$ см, $D_3 = 30$ см, $a = 100$ см. Визначити діаметр вала.

План розв'язання задачі:

1. Визначити потужність на шківі, де вона не задана.
2. Визначити скручувальні моменти, створювані на кожному шківі і побудувати епюру крутних моментів.
3. Визначити тиск, що передається шківками на вал, вважаючи, що натяг ведучої вітки паса в два рази більший, ніж натяг веденої.
4. Показати на схемі в аксонометрії розміщення зусиль, що діють на вал, і розкласти їх на горизонтальні і вертикальні складові.
5. Визначити величину складових, що діють у горизонтальній і вертикальній площинах.
6. Побудувати епюри згинальних моментів у горизонтальній і вертикальній площинах.
7. Побудувати сумарну епюру згинальних моментів.
8. Визначити небезпечний переріз і величину згинального і крутного моментів у цьому перерізі.
9. Визначити діаметр валу, користуючись третьою теорією міцності (запасом міцності задатись з відповідним обґрунтуванням).

Дані взяти з таблиці 9.1 і розрахункову схему з рис. 9.5.

Таблица 9.1

№ П/П	α_1^0	α_2^0	α_3^0	$n, \frac{\text{об}}{\text{хв}}$	$N_1, \text{кВт}$	$N_2, \text{кВт}$	$N_3, \text{кВт}$	Материал
0	0	60	90	1000		10	20	Сталь 20Х
1	30	80	120	100	10		20	Сталь 45Х
2	90	180	150	300	10	20		Сталь 08
3	120	90	180	400		30	40	Сталь 65Г
4	150	120	210	500	30		40	Ст.3
5	180	30	240	600	30	40		Ст.5
6	210	60	270	700		50	60	Ст.6
7	240	90	30	800	50		60	Сталь 20ХН
8	270	120	60	200	50	60		Сталь 55С2
9	60	150	0	900		90	50	Сталь 70

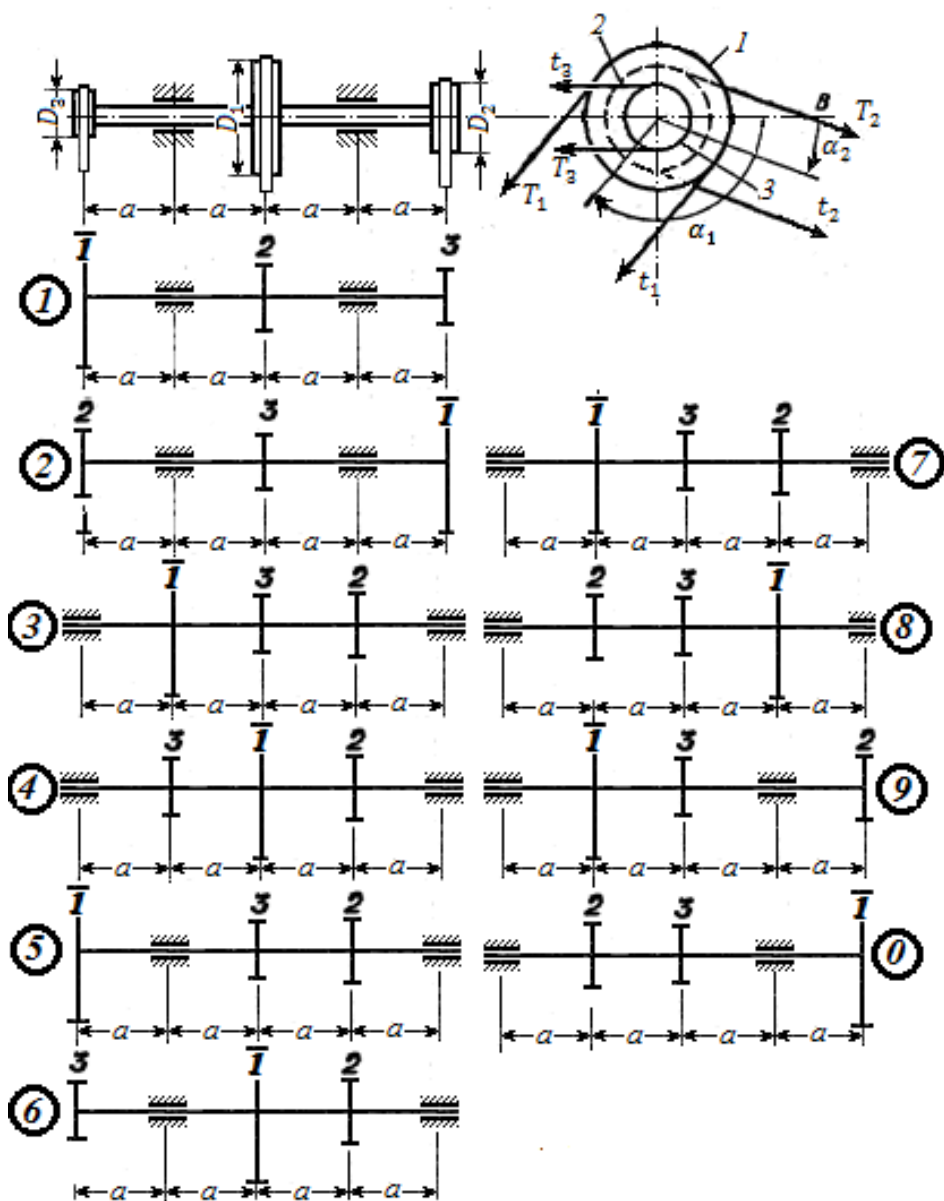


Рис.9.5

10. СТІЙКІСТЬ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ

В реальних умовах навантажень багато елементів конструкцій працюють на стиск. При стиску елемент конструкції може втратити стійкість, причому при напруженнях значно менших, ніж руйнуючі. **Стійкість** – здатність конструктивного елементу зберігати вихідну форму пружної рівноваги при дії зовнішніх навантажень. При втраті стійкості елемент перестає працювати як силовий елемент конструкції. Тому при розрахунках на міцність обов'язково перевіряють стиснуті елементи на місцеву та загальну втрати стійкості.

Проводячи розрахунки на міцність і жорсткість при різних видах деформацій, передбачалось, що під час деформації будь-якої системи має місце єдина форма пружної рівноваги. В дійсності ж в деформованому стані рівновага між зовнішніми і викликаними ними внутрішніми силами пружності може бути не тільки *стійкою*, але і *нестійкою*.

10.1. Поняття про стійкість і нестійкі форми рівноваги

Із теоретичної механіки відомо, що рівновага абсолютно твердого тіла може бути *стійкою*, *байдужою* і *нестійкою*. Наприклад, кулька, що лежить на ввігнутій поверхні, знаходиться в стані стійкої рівноваги. Якщо надати їй невелике відхилення від цього положення і відпустити, то вона знову повернеться в вихідне положення (рис. 10.1, а). Кулька, що лежить на горизонтальній поверхні, знаходиться в стані байдужої рівноваги (рис. 10.1, б). Будучи відхиленою від положення рівноваги, вона в положення вихідне не повертається. кулька, що лежить на випуклій поверхні, знаходиться в стані нестійкої рівноваги (рис. 10.1, в). Будучи відхиленою від першопочаткового положення, вона в це місце самостійно ніколи не повернеться.

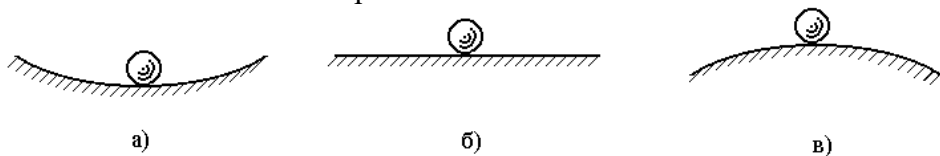


Рис. 10.1

Пружна рівновага буде *стійкою*, якщо деформоване тіло при будь-якому малому відхиленні від стану рівноваги намагається

повернутися до перш початкового стану і повертається до нього після усунення зовнішньої дії, що порушила рівноважний стан.

Пружна рівновага **нестійка**, якщо деформоване тіло, будучи виведеним із нього якою-небудь дією, набуває намагання продовжувати деформуватись в напрямку заданого йому відхилення і після усунення дії в вихідний стан не повертається.

Між цими двома станами рівноваги існує перехідний стан, що називають критичним, при якому деформоване тіло знаходиться в «**байдужій**» рівновазі: воно може зберігати перш початкову форму, але може і втратити її від самої незначної дії.

Стійкість форми рівноваги деформованого тіла залежить від величини прикладених до нього навантажень.

Навантаження, перевищення якого викликає втрату стійкості першопочаткової форми тіла, називають критичним і позначають $P_{кр}$.

При $P = P_{кр}$ наступає руйнування конструкції (максимальні деформації та напруження), причому $\sigma_{кр} \ll [\sigma_c]$.

Умова стійкості

$$P \leq [P] \text{ або } n_c \geq [n_c], \quad (10.1)$$

де $[P] = \frac{P_{кр}}{n_c}$ – допустиме навантаження; $P_{кр}$ – критичне навантаження; P – діюче навантаження;

$n_c = \frac{P_{кр}}{P}$ (n_c – коефіцієнт запасу стійкості) ;- $[n_c]$ – необхідний коефіцієнт запасу стійкості:

для дерева $[n_c] = 2,8 \div 3,2$;

для сталі $[n_c] = 1,8 \div 3,0$;

для чавуну $[n_c] = 5,0 \div 5,5$.

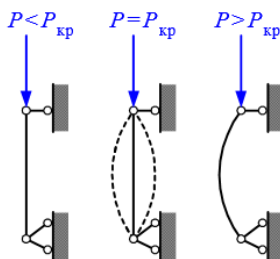


Рис. 10.2. Випадок втрати стійкості при стисканні довгого тонкого стрижня – поздовжній згин

10.2. Формула Ейлера

Задачу про стійкість прямолінійного стержня, що стиснутий центральною силою P , часто називають задачею Ейлера, оскільки ним вона була розглянута в 1744 р. Для розв'язку цієї задачі Ейлером була запропонована математична модель, яка стала в подальшому основою статичного методу (методу Ейлера) дослідження стійкості.

Згідно цьому методу досліджується можливість існування, наряду з вихідною, іншої форми пружної рівноваги, що породжується збурженнями.

Будемо вважати, що $P > P_{кр}$, а $\sigma < \sigma_{пц}$.

Наближене диференціальне рівняння пружної лінії напишемо у вигляді:

$$EJ_{min} \frac{d^2 z(x)}{dx^2} = \pm M(x),$$

де J_{min} – мінімальний момент інерції.

Оскільки знак прогину завжди протилежний знаку $\frac{d^2 z(x)}{dx^2}$, а $M(x) = -Pz$, то

$$EJ_{min} \frac{d^2 z(x)}{dx^2} = -Pz,$$

або

$$\frac{d^2 z(x)}{dx^2} + \frac{Pz}{EJ_{min}} = 0.$$

Прийнявши

$$\frac{P}{EJ_{min}} = k^2, \quad (10.4)$$

отримаємо

$$\frac{d^2 z(x)}{dx^2} + k^2 z = 0 \quad (10.5)$$

- однорідне лінійне диференціальне рівняння.

Розв'язок рівняння:

$$z = A \sin kx + B \cos kx.$$

Сталі інтегрування A і B визначимо із граничних умов:

$$z(0) = 0; \quad z(l) = 0.$$

$$\text{При } z(0) = 0 \rightarrow B = 0$$

$$z(x) = A \sin kx. \quad (10.6)$$

$$\text{При } z(l) = 0 \rightarrow A \sin kl = 0.$$

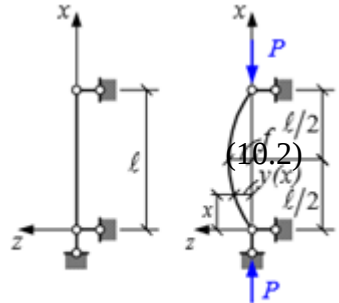


Рис. 10.3 (10.3)

Якщо $A=0$, то $z(x) \equiv 0$. Це відповідає прямолінійній формі пружної осі.

Якщо $A \neq 0$, то $\sin kl = 0$, де $kl = 0, \pi, \dots, n\pi$ –

$$kl = n\pi \text{ (довільне число)}. \quad (10.7)$$

$$k^2 l^2 = n^2 \pi^2. \quad (10.8)$$

Таким чином, отримуємо з рівняння (10.4) вираз для стискаючої сили:

$$P = \frac{n^2 \pi^2 EJ_{min}}{l^2} \text{ формула Ейлера}. \quad (10.9)$$

При $n = 1$, $kl = \pi$

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{l^2}. \quad (10.10)$$

10.3. Рівняння зігнутої осі стрижня

Із формул (10.6) і (10.7) отримаємо рівняння зігнутої осі стрижня при малих деформаціях:

$$z(x) = A \sin \frac{n\pi}{l} x. \quad (10.11)$$

$z_{max} = f$ – найбільший прогин при $\sin \frac{n\pi x}{l} = 1$, тоді $z(x) = z_{max} = f = A$.

Як наслідок, рівняння пружної лінії стиснутого стержня має вигляд:

$$z = f \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (10.12)$$

Графік цієї залежності представлений на рис.

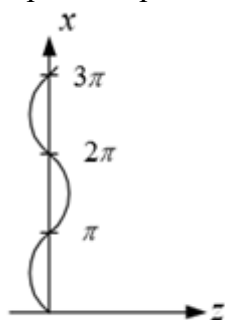


Рис. 10.4 3.

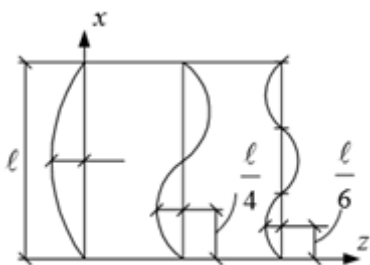


Рис. 10.5

Максимум $z(x)$ має місце, якщо

$$\frac{dz}{dx} = f \frac{n\pi}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} = 0, \text{ тобто } \cos \frac{n\pi x}{l} = 0.$$

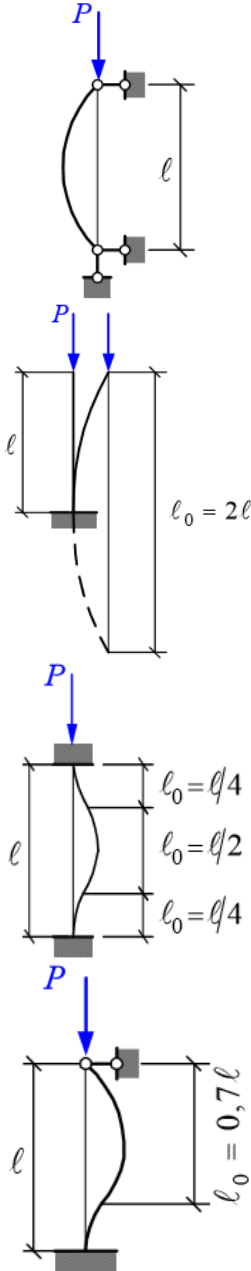
Найменше значення аргументу буде в випадку, коли $\frac{n\pi x}{l} = \frac{\pi}{2}$, або

$$x = \frac{l}{2n}. \quad (10.13)$$

Якщо $n = 1 \rightarrow x = \frac{l}{2}$, то будемо мати

основний випадок (n – число півхвиль синусоїди, що містяться на довжині зігнутого стрижня).

10.4. Вплив умов закріплення стрижня на величину критичної сили



$n = 1$ основний випадок (див. формулу (10.10))

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{l^2},$$

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(2l)^2} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{4l^2} \quad (10.14)$$

$$P_{\text{кр}} = \frac{4\pi^2 EJ_{\min}}{l^2}, \quad (10.15)$$

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(2l)^2} \quad (10.16)$$

Співвідношення (10.10), (10.14) – (10.16) можна об'єднати в одну формулу

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{(\nu l)^2}, \quad (10.17)$$

де $\nu l = l_0$ – приведена довжина стрижня; ν – коефіцієнт приведення довжини.

Таким чином, різні випадки спирання і навантаження стрижня приводяться до основного випадку введенням в формулу для $P_{кр}$ так званої приведеної довжини $l_{пр} = \nu l$ (ν – коефіцієнт приведення, що залежить від випадків спирання стрижня (див. рис. 10.6)). Це поняття вперше було введено Ф.С. Ясинським.

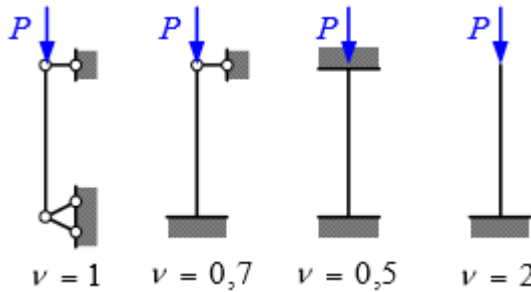


Рис. 10.6

10.5. Критичні напруження. Гнучкість

Виведення формули Ейлера ґрунтується на використанні диференціального рівняння пружної лінії, якщо виконується закон Гука, тобто:

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{A} \leq \sigma_{пл}. \quad (10.18)$$

Дійсно, якщо прямолінійна форма стрижня залишається стійкою і при напруженнях, що перевищують межу пропорційності, то диференціальне рівняння (10.1), яке передбачає достовірність закону Гука, вже є несприйнятливим.

Виведемо формулу для критичного напруження $\sigma_{кр}$. У відповідності з виразами (10.18) і (10.17)

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{A(\nu l)^2} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{\nu l}{i}\right)^2}. \quad (10.19)$$

Тут $i^2 = \frac{J_{min}}{A}$.

Ввівши безрозмірну величину

$$\lambda = \frac{\nu l}{i}, \quad (10.20)$$

що називається **гнучкістю стрижня**, остаточно отримуємо:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \quad (10.21)$$

тобто критичне напруження стрижня залежить тільки від *пружних властивостей матеріалу* (E) і *гнучкості стрижня* (λ).

10.6. Межі використання формули Ейлера

Функціональна залежність (10.21) представляє собою видозмінену формулу Ейлера. В системі координат $\sigma_{кр} - \lambda$ ця залежність може бути представлена гіперболічною кривою, що називається **гіперболою Ейлера** (рис. 10.7).

Графік показує, що по мірі зростання гнучкості стрижня критичне напруження прямує до нуля, і, навпаки, по мірі наближення гнучкості стрижня до нуля критичне напруження прямує до безкінечності.

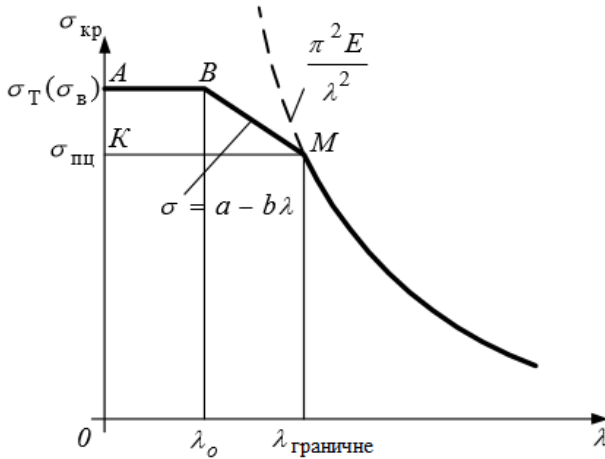


Рис. 10.7

Але, з умови (10.18) застосування формули Ейлера у відповідності з залежністю (10.21) будемо мати:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{пц}$$

і, як наслідок, $\lambda \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}}} = \lambda_{гр}$,

$$\lambda_{гр} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}}}. \quad (10.22)$$

Значить, формула Ейлера стає неприйнятною для гнучкості стрижня, що менше граничного значення $\lambda_{\text{гр}}$, яке залежить тільки від властивостей матеріалу.

Якщо відомі параметри матеріалу, з якого виготовлений стрижень, то величину $\lambda_{\text{гр}}$ можна обчислити по залежності (10.22). Також можна отримати і графічно. Якщо по осі ординат ($\sigma_{\text{кр}}$) відкласти величину межі пропорційності ($\sigma_{\text{пц}}$) і провести із отриманої точки К пряму паралельну осі абсцис, то вона в перетині з гіперболою Ейлера дасть точку М, абсциса якої і є $\lambda_{\text{гр}}$. ліворуч від точки М гіпербола показана штриховою лінією, оскільки тут вона дає значення напружень, більших границі пропорційності, тобто таким, що не відповідають умовам її застосування.

10.7. Формула Ясинського

Формулу Ейлера застосовують при $\lambda < \lambda_{\text{гр}}$.

Але, явище поздовжнього згину продовжує існувати і за межами пропорційності. Дослідним шляхом встановлено, що дійсні критичні напруження для стрижнів середньої і малої гнучкості ($\lambda < \lambda_{\text{гр}}$) є нижчими, що визначаються за формулою Ейлера. Таким чином, в цьому випадку формула Ейлера дає завищені значення критичної сили, тобто завжди переоцінює дійсну стійкість стрижня. Тому **використання формули Ейлера для стрижнів, що втрачають стійкість за межами пропорційності, не тільки принципово невірно, але і вкрай небезпечно за своїми наслідками.**

Теоретичний розв'язок задачі про стійкість за межами пропорційності дуже складний, тому зазвичай користуються емпіричними формулами, отриманими в результаті обробки великої кількості дослідних даних.

Ф.С. Ясинський зібрав і опрацював поширений дослідний матеріал про поздовжній згин стрижнів, в результаті чого склав таблицю критичних напружень в залежності від гнучкості для ряду матеріалів і запропонував просту емпіричну формулу для обчислення критичних напружень за межами пропорційності:

$$\sigma_{\text{кр}} = a - b\lambda. \quad (10.23)$$

Значення коефіцієнтів a і b наводиться в вигляді таблиць. За цими даними для кожного матеріалу можна побудувати залежності

критичних напружень від гнучкості стержня при $0 < \lambda < \lambda_{\text{гр}}$, вірніше $\lambda_0 < \lambda < \lambda_{\text{гр}}$.

Оскільки при деякому значенні гнучкості (λ_0) величина $\sigma_{\text{кр}}$, обчислена за формулою (10.23), стає рівною граничному напруженню при стиску (для пластичних матеріалів), то

$$\sigma_{\text{кр}} = \sigma_{\text{Т}},$$

а для крихких матеріалів

$$\sigma_{\text{кр}} = \sigma_{\text{В}}.$$

Стержні, в яких $\lambda < \lambda_0$, називають **стрижнями малої гнучкості**. Їх розраховують тільки на міцність.

Стосовно стрижнів середньої гнучкості $\lambda_0 < \lambda < \lambda_{\text{гр}}$, що найбільш широко застосовуються в конструкціях, то дослідями було встановлено, що втрата їх несучої здатності визначається порушенням стійкості прямолінійної форми при напруженнях $\sigma_{\text{кр}}$, що перевищують $\sigma_{\text{пц}}$, але менші, ніж σ° ($\sigma_{\text{Т}}$ і $\sigma_{\text{В}}$) – небезпечне напруження.

Таким чином, комбінуючи формулу Ейлера з результатами дослідів, можна побудувати повний графік критичних напружень для стержнів із різних матеріалів і знайти $\sigma_{\text{кр}}$ при будь-якій їх гнучкості (рис. 10.7).

В табл. 10.1 наведено значення коефіцієнтів a, b, c і гнучкостей λ_0 і $\lambda_{\text{гр}}$ для деяких матеріалів.

Т а б л и ц я 10.1

Значення коефіцієнтів і гнучкостей в залежності від матеріалу

Матеріал	a , МПа	b , МПа	c , МПа	λ_0	λ
Сталь Ст.3	310	1,14	0	61	100
Сталь Ст.5	350	1,15	0	57	90
Дюралюміній Д16Т	406	2,83	0	30	53
Чавун	776	12	0,053	10	80
Сосна	29,3	0,194	0	-	70

Примітка: Сталі Ст.3 приблизно відповідає сталь 20, а Ст.5 – сталь 35.

10.8. Умова стійкості стиснутих стрижнів

Можна рахувати, що центрально стиснуті стрижні втрачають свою несучу здатність раніше, ніж від втрати міцності, оскільки критичне напруження завжди є меншим за межу текучості чи міцності:

$$\sigma_{\text{кр}} < \sigma^{\circ},$$

де $\sigma^{\circ} = \sigma_T$ – для пластичних матеріалів; $\sigma^{\circ} = \sigma_B$ – для крихких матеріалів.

Необхідно згадати, що для стрижнів малої гнучкості ($\lambda < \lambda_0$) є не характерним явище втрати стійкості прямолінійної форми стрижня, оскільки це має місце для стрижнів середньої і великої гнучкості. Несуча здатність стрижнів малої гнучкості визначається міцністю матеріалу.

Критичне напруження для центрально стиснутих стержнів середньої і великої гнучкості являє собою, майбуть, більшу небезпеку, ніж межа текучості для пластичних матеріалів чи межа міцності для крихких матеріалів при простому розтягу. Очевидним є і те, що при практичному розв'язку питання про стійкість стрижня не можна допустити виникнення в ньому критичного напруження, а належить прийняти відповідний запас стійкості.

Щоб отримати допустиме напруження на стійкість, необхідно вибрати коефіцієнт запасу $[n]_c$. Тоді

$$[\sigma]_c = \frac{\sigma_{\text{кр}}}{[n]_c}. \quad (10.24)$$

Коефіцієнт запасу на стійкість завжди приймають подекуди більшим основного коефіцієнта запасу на міцність ($[n]_c > n$). Це робиться для того, що для центрально стиснутих стрижнів ряд обставин, неминучих на практиці (ексцентриситет прикладання навантаження, початкова кривизна та неоднорідність стрижня), сприяють поздовжньому згину, в той час як при інших видах деформацій ці обставини майже не проявляються. Допустимі напруження на стійкість і допустимі напруження на міцність при стиску взаємно пов'язані:

$$[\sigma]_c = \varphi[\sigma_c]. \quad (10.25)$$

Тут φ – коефіцієнт зменшення основного допустимого напруження при розрахунку на стійкість.

Складемо умову стійкості стиснутих стрижнів:

$$\sigma \leq [\sigma]_c, \quad (10.26)$$

або

$$\sigma = \frac{N}{A_{\text{бр}}} \leq \varphi[\sigma_c]. \quad (10.27)$$

При розрахунках на стійкість місцеві ослаблення перерізу практично не змінюють величину критичної сили, тому в розрахункові формули вводять повну площу $A_{\text{бр}}$ поперечного перерізу.

10.9. Розрахунки стиснутих стрижнів на стійкість (Умова стійкості. Перевірочний та проектний розрахунки)

Для стиснутих стрижнів повинні бути виконані перевірки:

на міцність –

$$\sigma = \frac{P}{A_{\text{нетто}}} \leq [\sigma_c]; [\sigma_c] = \frac{\sigma^\circ}{n^\circ}, \text{ в приватності, } \sigma^\circ = \sigma_T; n^\circ = n_T;$$

на стійкість –

$$\sigma = \frac{P}{A_{\text{бр}}} \leq [\sigma]_c; [\sigma]_c = \frac{\sigma_{\text{кр}}}{[n]_c}.$$

Встановимо взаємозв'язок між $[\sigma_c]$ і $[\sigma]_c$:

$$\frac{[\sigma]_c}{[\sigma_c]} = \frac{\sigma_{\text{кр}}}{[n]_c} \cdot \frac{n^\circ}{\sigma^\circ} \rightarrow [\sigma]_c = \frac{\sigma_{\text{кр}}}{\sigma^\circ} \cdot \frac{n^\circ}{[n]_c} [\sigma_c].$$

Позначимо

$$\frac{\sigma_{\text{кр}}}{\sigma^\circ} \cdot \frac{n^\circ}{[n]_c} = \varphi \rightarrow [\sigma]_c = \varphi[\sigma_c],$$

де φ – коефіцієнт зменшення основного допустимого напруження на стиск ($\varphi \leq 1$).

Коефіцієнт φ залежить від матеріалу стрижня і його гнучкості і знаходять по таблицях.

Умова міцності –

$$\frac{P}{A_{\text{бр}}} \leq \varphi[\sigma_c].$$

При розрахунках на стійкість місцеві ослаблення перерізу не впливають на величину критичної сили і тому в розрахунок приймають $A_{\text{брutto}}$.

Розрізняють два види розрахунків на стійкість стиснутих стрижнів: перевірочний і проектний.

Перевірочний розрахунок:

1. Знаючи форму і розміри поперечного перерізу, визначити $A_{\text{бр}}$ і J_{min} .

2. Обчислити $i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}}$; $\lambda = \frac{\nu l}{i_{\min}}$.
3. По таблиці знайти значення φ (табл. 10.3).
4. Перевірити умову стійкості $\frac{P}{A_{\text{бп}}} \leq \varphi[\sigma_c]$.

Проектний розрахунок:

Умова стійкості містить дві невідомі величини A і φ , які залежать одна від другої, тому задача розв'язується методом послідовних наближень. Зазвичай в першому наближенні призначають $\varphi_1 = 0,5 \div 0,6$, визначають A і знаходять фактичне значення φ_1 . При великій різниці φ_1 від φ_1' виконується друге наближення $\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_1'}{2}$. Якщо необхідне третє наближення, то $\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi_2'}{2}$ і т.д.

10.10. Про вибір матеріалу і раціональної форми поперечного перерізу стиснутих стрижнів

Для стрижнів великої гнучкості ($\lambda \geq \lambda_{\text{гр}}$), коли $\sigma_{\text{кр}} < \sigma_{\text{пц}}$, модуль пружності E є єдиною механічною характеристикою, що визначає здатність стрижня чинити опір втраті стійкості. В цьому випадку є недоцільним використання сталей підвищеної міцності, оскільки модуль E для всіх сталей практично однаковий.

Для стрижнів малої гнучкості використання високосортних сталей є недоцільним, оскільки в цьому випадку підвищення границі текучості $\sigma_T(\sigma_B)$ збільшує критичні напруження, а, як наслідок, і запас стійкості.

З економічної точки зору найбільш раціональна така форма поперечного перерізу стрижня, при якій $i_{\min}$ при визначеній площі є найбільшим. Для оцінки раціональної форми перерізу використовують безрозмірну величину $\rho = \frac{i_{\min}}{\sqrt{A}}$ – питомий радіус інерції. В табл. 10.2 наведено значення ρ для деяких перерізів.

Значення ρ для перерізів

Переріз	ρ
Трубчастий ($C = \frac{d}{D} = 0,95, \dots, 0,8$)	1,246, ..., 0,602
Трубчастий ($C = 0,7, \dots, 0,5$)	0,482, ..., 0,364
Кутиковий	0,5, ..., 0,3
Двотавровий	0,41, ..., 0,27
Швелерний	0,41, ..., 0,29
Квадратний	0,289
Круглий	0,283
Прямокутний	0,204

Аналіз показує, що найбільш раціональними є трубчасті кільцеві перерізи. Але при проектуванні елементів конструкцій з такими поперечними перерізами необхідно передбачити постановку діафрагм і ребр жорсткості для запобігання місцевої втрати стійкості.

При розрахунках стиснутих стрижнів необхідно, щоб вони були рівно стійкими в усіх напрямках. В зв'язку з цим є недоцільним використовувати двотаврові і прямокутні перерізи.

Основна задача проектувальників полягає в тім, щоб зробити гнучкості в головних площинках перерізу рівними або хоч близькими між собою. Якщо не вдається зробити гнучкості однаковими, то розрахунок необхідно провести за максимальною гнучкістю.

Таблиця 10.3

Значення коефіцієнтів φ і величини $\lambda/\sqrt{\varphi}$

Гнучкість λ	Сталі Ст.3 і Ст.4		Сталь Ст.5		Чавун		Деревина		Сталі 14Г2, 15ГС, 10Г2С, 15ХСНД	
	φ	$\lambda/\sqrt{\varphi}$	φ	$\lambda/\sqrt{\varphi}$	φ	$\lambda/\sqrt{\varphi}$	φ	$\lambda/\sqrt{\varphi}$	φ	$\lambda/\sqrt{\varphi}$
0	1,00	0	1,00	0	1,0	0	1,0	0	1,0	0
10	0,99	10,05	0,98	10,10	0,97	10,15	0,99	10,05	0,98	10,10
20	0,97	20,31	0,96	20,41	0,91	20,97	0,97	20,31	0,95	20,52
30	0,95	30,78	0,93	31,11	0,81	33,33	0,93	31,11	0,92	31,28
40	0,92	41,70	0,89	42,40	0,69	48,15	0,87	42,88	0,89	42,40
50	0,89	53,00	0,85	54,23	0,57	66,23	0,80	55,90	0,84	54,56
60	0,86	64,70	0,80	67,08	0,44	90,45	0,71	71,21	0,78	67,93
70	0,81	77,78	0,74	81,37	0,34	120,15	0,60	90,37	0,71	83,08
80	0,75	92,38	0,67	97,74	0,26	156,9	0,48	115,5	0,63	100,8
90	0,69	108,4	0,59	117,2	0,20	201,3	0,38	146,0	0,54	122,5
100	0,60	129,1	0,50	141,4	0,16	250,0	0,31	179,6	0,46	147,4
110	0,52	152,5	0,43	167,8			0,25	220,0	0,39	176,1
120	0,45	178,9	0,37	197,3			0,22	255,8	0,33	208,9
130	0,40	205,6	0,32	229,8			0,18	306,4	0,29	241,4
140	0,36	233,3	0,28	264,6			0,16	350,0	0,25	280,0
150	0,32	265,2	0,25	300,0			0,14	400,9	0,23	312,8
160	0,29	297,1	0,23	333,6			0,12	461,9	0,21	349,1
170	0,26	333,4	0,21	371,0			0,11	512,6	0,19	390,0
180	0,23	375,3	0,19	413,0			0,10	569,2	0,17	436,6
190	0,21	414,6	0,17	460,8			0,09	633,3	0,15	490,6
200	0,19	458,8	0,15	516,4			0,08	707,1	0,13	555,1
210	0,17	509,3	0,14	561,3						
220	0,16	550,0	0,13	610,2						

10.11. Практичні заняття розрахунків стиснутих стержнів на стійкість

10.11.1. Контрольні запитання

1. Що таке втрата стійкості?
2. Які причини руйнування стиснутого стержня при втраті стійкості?
3. Як записують формулу Ейлера для критичної сили?
4. Що таке коефіцієнт приведення довжини стержня?
5. Які межі застосування формули Ейлера для критичної сили?
6. Що таке мінімальний радіус інерції і гнучкість стержня?
7. Як записують формулу Ясинського-Тетмайєра? Які межі її застосування?
8. Як визначити критичну величину стискувальної сили, якщо гнучкість стержня менша граничної?
9. Що таке питомий радіус інерції перерізу?
10. Що є мірою раціональності форми перерізу стиснутого стержня?
11. Як записують умову стійкості при розрахунках за коефіцієнтом поздовжнього згину? Які типи задач можна розв'язати з допомогою цієї умови?
12. Як перевіряють стиснутий стержень на стійкість?
13. Як визначають вантажопідйомність стиснутого стержня?
14. Як підбирають поперечний переріз стиснутого стержня методом поступових наближень?
15. Як підбирають поперечний переріз стиснутого стержня за питомим радіусом?

10.11.2. Приклади розв'язання задач

Приклад 10.1. Дано: матеріал стержня сталь Ст. 5; $k_T = 2$; $P = 500kH$; довжина $l = 12\text{ м}$.

Потрібно визначити: номер швелера; дійсний коефіцієнт запасу стійкості n_c ; завантаженість колони $\Delta\sigma\%$; довжину a_B гілки колони (рис. П.1) і забезпечити рівно стійкість колони.

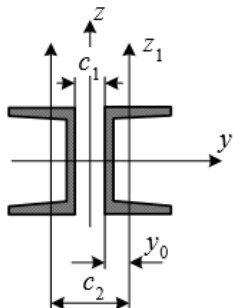


Рис. П.1

Розв'язок

Із таблиць виписуємо механічні характеристики матеріалу сталь Ст.5 для розрахунку на стійкість: $\sigma_T = 280$ МПа; $\sigma_{\text{пц}} = 280$ МПа; $a = 350$ МПа; $b = 1,15$ МПа; $\lambda_{\text{гр}} = 92$; $\lambda_1 = 57$.

Визначимо допустимі напруження на стиск для даної сталі: $[\sigma_c] = \frac{\sigma_T}{k_T} = \frac{280}{2} = 140$ МПа. Оскільки основною формулою при підборі перерізу за будівельними нормами є нерівність $A_{\text{бр}} = \frac{P}{\varphi[\sigma_c]}$, то у нас виникає

невизначеність, пов'язана з залежністю коефіцієнта φ від геометричних характеристик перерізу. Використаємо метод послідовних наближень для визначення номера швелера. Оскільки місцеві послаблення перерізу практично не впливають на величини критичної сили, то $A_{\text{бр}} = 2A^{\text{шв}}$, де $A^{\text{шв}}$ – площа поперечного перерізу одного швелера.

1. Визначаємо номер швелера з врахуванням можливої рівно стійкості колони в двох головних напрямках.

I-е наближення

- 1) призначаємо коефіцієнт зменшення основного допустимого напруження $\varphi_1 = 0,5 \div 0,6$. Вибираємо $\varphi^1 = 0,5$;
- 2) визначаємо площу складеного перерізу колони:

$$A_{\text{бр}}^1 \geq \frac{P}{\varphi^1[\sigma_c]} = \frac{500 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 140 \cdot 10^6} = 71,43 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

- 3) по сортаменту вибираємо номер швелера з врахуванням того, що $A_{\text{бр}} = 2A^{\text{шв}}$, тобто $A^{\text{шв}} \geq 35,715 \text{ см}^2$. Підходить швелер №30: $A_1^{\text{шв}} = 40,5 \text{ см}^2$; $J_y^{\text{шв}} = 5810 \text{ см}^4$; $J_{z1}^{\text{шв}} = 327 \text{ см}^4$; $i_y^{\text{шв}} = 12 \text{ см}$; $i_{z1}^{\text{шв}} = 2,84 \text{ см}$; $y_0 = 2,52 \text{ см}$;

4) визначаємо гнучкість колони за формулою $\lambda_1 = \frac{v \cdot l}{i_{min1}}$, де $i_{min1} = \sqrt{\frac{J_{min}^{2-x_{шв}}}{2A_{шв}}} = \sqrt{\frac{2J_y^{шв}}{2A_{шв}}} = \sqrt{\frac{J_y^{шв}}{A_{шв}}} = i_y^{шв}$, з врахуванням рівно стійкості колони в двох напрямках. Остаточного отримуємо $\lambda_1 = \frac{v \cdot l}{i_y^{шв}} = \frac{0,7 \cdot 12}{12 \cdot 10^{-2}} = 70$;

5) за таблицями () визначаємо коефіцієнт зменшення основного допустимого напруження на стиск для вибраного перерізу $\varphi_1 = 0,74$;

6) перевіряємо оптимальність колони заданого перерізу по коефіцієнту φ : $\Delta\varphi\% = \left| \frac{\varphi^I - \varphi_1}{\varphi_1} \right| \cdot 100\% = \left| \frac{0,5 - 0,74}{0,74} \right| \cdot 100\% = 32,4\% > 5\%$. Колона недовантажена на 32,4%.

II-е наближення

1) визначаємо φ^{II} за формулою $\varphi^{II} = \frac{\varphi^I + \varphi_1}{\varphi_1} = \frac{0,5 + 0,74}{2} = 0,62$;

2) визначаємо площу складеного перерізу колони:

$$A_{6p}^{II} \geq \frac{P}{\varphi^{II}[\sigma_c]} = \frac{500 \cdot 10^3}{0,62 \cdot 140 \cdot 10^6} = 57,6 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

3) по сортаменту вибираємо номер швелера:

$A_{шв} = \frac{A_{6p}^{II}}{2} \geq \frac{57,6}{2} = 28,8 \text{ см}^2$; швелер №22а: $A_2^{шв} = 28,8 \text{ см}^2$; $J_y^{шв} = 2330 \text{ см}^4$; $J_{z1}^{шв} = 187 \text{ см}^4$; $i_y^{шв} = 8,99 \text{ см}$; $i_{z1}^{шв} = 2,55 \text{ см}$; $y_0 = 2,46 \text{ см}$;

4) визначаємо гнучкість колони: $\lambda_2 = \frac{v \cdot l}{i_y^{шв}} = \frac{0,7 \cdot 12}{8,99 \cdot 10^{-2}} = 93,44$;

5) за таблицями (табл. 10.3) визначаємо φ_2 з врахуванням лінійної інтерполяції:

$$\text{при } \lambda' = 90 \rightarrow \varphi' = 0,59;$$

$$\text{при } \lambda'' = 100 \rightarrow \varphi'' = 0,5,$$

тоді $\varphi_2 = \varphi' - \frac{\varphi' - \varphi''}{\lambda'' - \lambda'} \cdot (\lambda_2 - \lambda') = 0,59 - \frac{0,59 - 0,5}{100 - 90} \cdot (93,44 - 90) = 0,559$;

6) визначаємо оптимальність колони цього перерізу за коефіцієнтом φ : $\Delta\varphi\% = \left| \frac{\varphi^{II} - \varphi_2}{\varphi_2} \right| \cdot 100\% = \left| \frac{0,62 - 0,559}{0,559} \right| \cdot 100\% = 10,9\% > 5\%$. Колона перевантажена на 10,9%.

III-є наближення

1) визначаємо φ^{III} за формулою $\varphi^{\text{III}} = \frac{\varphi^{\text{II}} + \varphi_2}{\varphi_2} = \frac{0,62 + 0,559}{2} = 0,5895$;

2) визначаємо площу складеного перерізу колони:

$$A_{\text{бр}}^{\text{III}} \geq \frac{P}{\varphi^{\text{III}}[\sigma_c]} = \frac{500 \cdot 10^3}{0,5895 \cdot 140 \cdot 10^6} = 60,58 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

3) по сортаменту вибираємо номер швелера:

$$A_{\text{шв}}^{\text{III}} = \frac{A_{\text{бр}}^{\text{III}}}{2} \geq \frac{60,58}{2} = 30,29 \text{ см}^2; \text{ швелер №24: } A_3^{\text{шв}} = 30,6 \text{ см}^2; J_y^{\text{шв}} = 2900 \text{ см}^4; J_{z1}^{\text{шв}} = 208 \text{ см}^4; i_y^{\text{шв}} = 9,73 \text{ см}; i_{z1}^{\text{шв}} = 2,6 \text{ см}; y_0 = 2,42 \text{ см};$$

4) визначаємо гнучкість колони: $\lambda_3 = \frac{v \cdot l}{i_y^{\text{шв}}} = \frac{0,7 \cdot 12}{9,73 \cdot 10^{-2}} = 86,33$;

5) за таблицями (табл. 10.3) визначаємо φ_3 з врахуванням лінійної інтерполяції:

$$\text{при } \lambda' = 80 \rightarrow \varphi' = 0,67;$$

$$\text{при } \lambda'' = 90 \rightarrow \varphi'' = 0,59,$$

$$\text{тоді } \varphi_3 = \varphi' - \frac{\varphi' - \varphi''}{\lambda'' - \lambda'} \cdot (\lambda_3 - \lambda') = 0,67 - \frac{0,67 - 0,59}{90 - 80} \cdot (86,33 - 80) = 0,6194;$$

6) визначаємо оптимальність колони цього перерізу за коефіцієнтом φ : $\Delta\varphi\% = \left| \frac{\varphi^{\text{III}} - \varphi_3}{\varphi_3} \right| \cdot 100\% = \left| \frac{0,5895 - 0,6194}{0,6194} \right| \cdot 100\% = 4,82\% < 5\%$. Колона недовантажена на 4,82%. Розрахунок закінчений, оскільки похибка менша 5%. Для колон із стандартного прокату можна зупиняти розрахунок і у випадку, коли похибка по коефіцієнту φ більше 5%, але і в наступному наближенні номер профілю повторюється або виникає ситуація повторення номерів двох ближніх профілів.

2. Визначаємо дійсний коефіцієнт запасу стійкості вибраної колони. Оскільки $\lambda_1 < \lambda_3 < \lambda_{\text{гр}}$ (див. табл. 10.3), то розрахунок критичної сили проводиться з використанням формули Ясинського. В підсумку

$$[n]_c = \frac{P_{\text{кр}}^{\text{Я}}}{P} = \frac{(a - b\lambda_3) \cdot 2A_3^{\text{шв}}}{P} = \frac{(350 - 1,15 \cdot 86,33) \cdot 2 \cdot 30,6 \cdot 10^{-4}}{500 \cdot 10^3} = 3,07.$$

Допустимий діапазон цього коефіцієнта для сталей складає 1,8,...,3,0. Отриманий коефіцієнт близький до верхньої межі і незначно (менше 5%) перевищує її, що є допустимим.

3. Визначаємо завантаженість колони по напруженнях:

3.1. Знаходимо діючі напруження в складеному перерізі колони:

$$\sigma_x = \frac{P}{2A_3^{\text{шв}}} = \frac{500 \cdot 10^3}{2 \cdot 30,6 \cdot 10^{-4}} = 81,7 \cdot 10^6 \text{ Па.}$$

3.2. Розраховуємо допустиме напруження на стійкість вибраної колони:

$$[\sigma]_c = \varphi_3 \cdot [\sigma_c] = 0,6194 \cdot 140 = 86,72 \text{ МПа.}$$

3.3. Обчислюємо процент недовантаження колони по напруженням:

$$\Delta\sigma\% = \left| \frac{\sigma_x - [\sigma]_c}{[\sigma]_c} \right| \cdot 100\% = \left| \frac{81,7 - 86,72}{86,72} \right| \cdot 100\% = 5,79\%.$$

4. Визначаємо відстань, що забезпечує рівно стійкість колони в двох головних напрямках:

4.1. Із умови рівно стійкості колони:

$$2 \cdot J_y^{\text{шв}} = J_{z1}^{2-x.\text{шв}} = 2 \cdot \left[J_{z1}^{\text{шв}} + \left(\frac{C_2}{2} \right)^2 \cdot A_3^{\text{шв}} \right] \text{ в двох головних напрямках}$$

визначаємо відстань C_2 між центрами двох швелерів:

$$C_2 = 2 \sqrt{\frac{J_y^{\text{шв}} - J_{z1}^{\text{шв}}}{A_3^{\text{шв}}}} = 2 \sqrt{\frac{2900 - 208}{30,6}} = 18,76 \text{ см.}$$

4.2. Знаходимо ввідстань C_1 між стінками двох швелерів.:

$$C_1 = C_2 - 2 \cdot y_0 = 18,76 - 2 \cdot 2,42 = 13,92 \text{ см.}$$

5. Забезпечуємо роботу колони, що складається із двох гілок (швелерів), як єдиного цілого в перерізі (рис. П. 2)

5.1. Визначимо довжину a_B гілки колони. Оскільки, $P \leq [P]_K = 2[P]_B$, а $[P]_K = \varphi \cdot 2 \cdot A_3^{\text{шв}} \cdot [\sigma_c]$ і $[P]_B = \varphi_B \cdot 2 \cdot A_3^{\text{шв}} \cdot [\sigma_c]$, відстань між стрижнями – перемичками, що з'єднують між собою швелери в єдине ціле, тобто a_B повинна бути вибрана такою, щоб $\varphi_B = \varphi_K$ і відповідно $\lambda_B = \lambda_K$. Тоді $\frac{\nu_B \cdot a_B}{i_{\min, B}} = \frac{\nu_K \cdot a_K}{i_{\min, K}}$, де $\nu_B = 1$ за умовою спирання в пружно-податливих з'єднаннях стержнів і швелерів; $i_{\min, K} = i_y^{\text{шв}}$ (показано в п. 1 цього прикладу); $i_{\min, B} = i_{z1}^{\text{шв}}$.
В підсумку

$$a_B = \frac{\nu_k \cdot l}{i_{yB}^{шБ}} \cdot \frac{i_{z1}^{шБ}}{\nu_B} = \lambda_3 \cdot \frac{i_{z1}^{шБ}}{\nu_B} = 86,33 \cdot 2,6 = 224,5 \text{ см.}$$

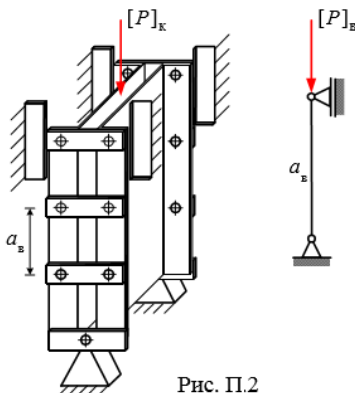


Рис. П.2

5.2. Визначаємо мінімальну кількість стрижнів-перемичок, що з'єднують між собою полки швелерів по одну сторону колони, за формулою $n \geq \frac{l}{a_B}$, де n – найближче число:

$$\frac{l}{a_B} = \frac{1200}{224,5} = 5,345.$$

Приймаємо $n = 6$. Тоді уточнене значення $a = \frac{l}{n} = \frac{1200}{6} = 200 \text{ см.}$ Всього (з обох сторін колони) потрібно встановити 12 поперечних стержнів –перемичок, які можуть бути виконані із кутника чи прокату іншої форми і будуть працювати тільки на розтяг-стиск. В результаті колона буде вигляд конструкції ферми.

Приклад 10.2. Дано: матеріал стрижня сталь Ст.3; $n_T = 1,5$; $\sigma_T = 240 \text{ МПа}$; $E = 200 \text{ ГПа}$; $P = 800 \text{ кН}$; довжина $l = 3,5 \text{ м.}$

Потрібно підібрати розміри поперечного перерізу (рис. П.3); дійсний коефіцієнт запасу стійкості n_c ; завантаженість колони $\Delta\sigma\%$ (перевантаження чи недовантаження %).

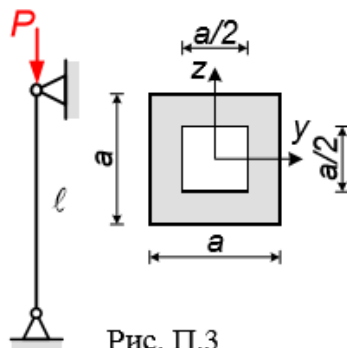


Рис. П.3

Розв'язок

Розрахунок потрібно виконати за єдиними нормами будівельного проектування з використанням коефіцієнта зменшення

основного допустимого напруження на стиск φ . При цьому проектувальна формула буде виглядати так:

$$\frac{P}{A_{\text{бр}}} \leq \varphi \cdot [\sigma_c],$$

де $[\sigma_c] = \frac{\sigma_T}{n_T} = \frac{240}{1,5} = 160 \text{ МПа}$; $A_{\text{бр}}$ – площа поперечного перерізу колони без врахування місцевих ослаблень.

Попередньо виразимо гнучкість через основний геометричний розмір a заданого поперечного перерізу:

$$\begin{aligned} A_{\text{бр}} &= a^2 - (0,5a)^2 = 0,75a^2; \\ J_{\min} &= J_x = J_y = \frac{a^4}{12} - \frac{(0,5a)^4}{12} = 0,07813a^4; \\ i_{\min} &= \sqrt{\frac{J_{\min}}{A_{\text{бр}}}} = \sqrt{\frac{0,07813a^4}{0,75a^2}} = 0,3228a; \\ \lambda &= \frac{v \cdot l}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 3,5}{0,3228a} = \frac{10,84}{a}. \end{aligned}$$

Далі будемо розглядати задачу в звичайному порядку.

1. Призначаємо $\varphi^I = 0,5$.
2. Визначаємо необхідну площу поперечного перерізу колони:

$$A_{\text{бр}}^I \geq \frac{P}{\varphi^I [\sigma_c]} = \frac{80 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 160 \cdot 10^6} = 100 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 100 \text{ см}^2.$$

3. Обчислюємо характерний геометричний розмір перерізу колони a_1 :

$$a_1 = \sqrt{\frac{A_{\text{бр}}^I}{0,75}} = \sqrt{\frac{100 \cdot 10^{-4}}{0,75}} = 0,1155 \text{ м}.$$

4. Обчислюємо гнучкість отриманої колони $\lambda_1 = \frac{10,84}{0,1155} = 93,91$.

5. За таблицями () визначаємо дійсний коефіцієнт φ_1 для колони з розміром перерізу a_1 , використовуючи лінійну інтерполяцію його значень в заданих інтервалах:

$$\begin{cases} \text{при } \lambda' = 90: \rightarrow \varphi' = 0,69 \\ \text{при } \lambda'' = 100: \rightarrow \varphi'' = 0,60 \end{cases}$$

$$\varphi_1 = \varphi' - \frac{\varphi' - \varphi''}{\lambda'' - \lambda'} \cdot (\lambda_1 - \lambda') = 0,69 - \frac{0,69 - 0,60}{10} \cdot (93,91 - 90) = 0,655.$$

6. Перевіряємо збіжність значень коефіцієнтів φ призначеного і отриманого : $\Delta\varphi\% = \left| \frac{\varphi_1 - \varphi^I}{\varphi_1} \right| \cdot 100\% = \left| \frac{0,655 - 0,5}{0,655} \right| \cdot 100\% = 23,66\% > 5\%$, тому розрахунок продовжуємо.

II-е наближення

1. Опосередковуємо значення коефіцієнту зменшення основного допустимого напруження на стиск: $\varphi^{II} = \frac{\varphi^I + \varphi_1}{2} = \frac{0,5 + 0,655}{2} = 0,578$.

2. Визначаємо необхідну площу поперечного перерізу:

$$A_{6p}^{II} \geq \frac{P}{\varphi^{II}[\sigma_c]} = \frac{80 \cdot 10^3}{0,578 \cdot 160 \cdot 10^6} = 86,6 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 86,6 \text{ см}^2.$$

3. Обчислюємо характерний геометричний розмір перерізу колони

$$a_2 = \sqrt{\frac{A_{6p}^{II}}{0,75}} = \sqrt{\frac{86,6 \cdot 10^{-4}}{0,75}} = 0,1074 \text{ м.}$$

4. Визначаємо гнучкість отриманої колони $\lambda_2 = \frac{10,84}{0,1074} = 100,92$.

5. За таблицями (табл. 10.3) визначаємо дійсний коефіцієнт φ_2 для колони з розміром перерізу a_2 , використовуючи лінійну інтерполяцію його значень в заданих інтервалах:

$$\begin{cases} \text{при } \lambda' = 100: \rightarrow \varphi' = 0,60 \\ \text{при } \lambda'' = 110: \rightarrow \varphi'' = 0,52 \end{cases}$$

$$\varphi_2 = \varphi' - \frac{\varphi' - \varphi''}{\lambda'' - \lambda'} \cdot (\lambda_2 - \lambda') = 0,6 - \frac{0,6 - 0,52}{10} \cdot (100,92 - 100) = 0,593.$$

6. Перевіряємо збіжність значень коефіцієнтів φ призначеного і отриманого : $\Delta\varphi\% = \left| \frac{\varphi_2 - \varphi^{II}}{\varphi_2} \right| \cdot 100\% = \left| \frac{0,593 - 0,578}{0,593} \right| \cdot 100\% = 2,53\% < 5\%$.

7. Закруглюючи величину a_2 , приймаємо $a = 108$ мм. При цьому гнучкість складе $\lambda = \frac{10,84}{0,108} = 100,4$. Визначаємо дійсний коефіцієнт запасу $n_c = \frac{P_{кр}^E}{P}$, де $P_{кр}$ знаходимо з врахуванням остаточної гнучкості колони виходячи з діаграми стійкості. Оскільки $\lambda_{гр} = 100$ для сталі Ст.3 (див табл.), то при $\lambda = 100,4$ ми знаходимось в зоні Ейлера:

$$n_c = \frac{P_{кр}^E}{P} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{(\nu \cdot l)^2 \cdot P} = \frac{\pi^2 E \cdot 0,07813 \cdot a^4}{(\nu \cdot l)^2 \cdot P} = \frac{\pi^2 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 0,07813 \cdot (0,108)^4}{(0,7 \cdot 3)^2 \cdot 800 \cdot 10^3} = 2,141.$$

8. Визначаємо процент завантаженості отриманої колони. Спочатку обчислюємо дійсні напруження в перерізі колони, виготовленої із заданим перерізом $a = 108 \text{ мм}$:

$$\sigma_x = \frac{P}{A} = \frac{P}{0,75a^2} = \frac{800 \cdot 10^3}{0,75 \cdot 0,108^2} = 91,45 \cdot 10^6 \text{ Па},$$

а потім, підставивши коефіцієнт φ при $\lambda = 100,4$:

$$\begin{cases} \text{при } \lambda' = 100: \rightarrow \varphi' = 0,60 \\ \text{при } \lambda'' = 110: \rightarrow \varphi'' = 0,52 \end{cases}$$

$$\varphi = \varphi' - \frac{\varphi' - \varphi''}{\lambda'' - \lambda'} \cdot (\lambda - \lambda') = 0,6 - \frac{0,6 - 0,52}{110 - 100} \cdot (100,4 - 100) = 0,598,$$

отримаємо допустимі напруження для матеріалу колони:

$$[\sigma]_c = [\sigma_c] \cdot \varphi = 160 \cdot 0,598 = 95,63 \text{ МПа}.$$

При цьому недовантаження складе:

$$\Delta\sigma\% = \left| \frac{[\sigma]_c - \sigma_x}{[\sigma]_c} \right| \cdot 100\% = \left| \frac{95,63 - 96,6}{95,63} \right| \cdot 100\% = 4,37\%.$$

Приклад 10.3. Дано: матеріал колони – сосна (дерево); $[\sigma_c] = 10 \text{ МПа}$; $P = 100 \text{ кН}$; довжина $l = 4,0 \text{ м}$; $a = 120 \text{ мм}$.

Необхідно перевірити на стійкість соснову колону.

Розв'язок

Перевірочний розрахунок потрібно виконати за єдиними нормами будівельного проектування з використанням коефіцієнта зменшення основного допустимого напруження на стиск φ . При цьому проектувальна формула буде виглядати так:

$$\frac{P}{A_{\text{бр}}} \leq \varphi \cdot [\sigma_c],$$

де $A_{\text{бр}}$ – площа поперечного перерізу колони без врахування місцевих ослаблень.

1. Коефіцієнт φ залежить від гнучкості стрижня λ . Обчислимо гнучкість колони:

$$i_{\min} = i_y = i_z = \sqrt{\frac{J_y}{A}} = \sqrt{\frac{a^4}{12 \cdot a^2}} = \frac{a}{\sqrt{12}} = \frac{12}{\sqrt{12}} = 3,46 \text{ см};$$

$$\lambda = \frac{\nu \cdot l}{i_{\min}} = \frac{0,5 \cdot 4}{3,46 \cdot 10^{-2}} = 58,8.$$

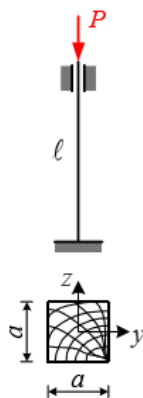


Рис. П.4

2. За довідковою таблицею (табл. 10.3) визначаємо коефіцієнт φ для заданої колони, використавши лінійну інтерполяцію його значень в заданих інтервалах:

$$\begin{cases} \text{при } \lambda' = 50: \rightarrow \varphi' = 0,80 \\ \text{при } \lambda'' = 60: \rightarrow \varphi'' = 0,71 \end{cases}$$

$$\varphi = \varphi' - \frac{\varphi' - \varphi''}{\lambda'' - \lambda'} \cdot (\lambda - \lambda') = 0,8 - \frac{0,8 - 0,71}{10} \cdot (58,8 - 50) = 0,720.$$

3. Отримуємо допустимі напруження для матеріалу колони:

$$[\sigma]_c = \varphi \cdot [\sigma_c] = 0,72 \cdot 10 = 7,2 \text{ МПа}$$

4. Визначаємо дійсні напруження в перерізі колони:

$$\sigma_x = \frac{P}{A} = \frac{P}{a^2} = \frac{100 \cdot 10^3}{0,12^2} = 6,95 \cdot 10^6 \text{ Па} = 6,95 \text{ МПа}.$$

5. Порівнюємо напруження: $\sigma_x < [\sigma_c]$. Стійкість колони забезпечена. Недовантаженість складає:

$$\Delta\sigma\% = \left| \frac{[\sigma]_c - \sigma_x}{[\sigma]_c} \right| \cdot 100\% = \left| \frac{7,2 - 6,95}{7,2} \right| \cdot 100\% = 3,47\%.$$

Приклад 10.4. Дано: матеріал колони – сталь Ст.3;
 $E = 200 \text{ ГПа}$; довжина $l = 1,0 \text{ м}$; $d = 40 \text{ мм}$ (рис. П.5).

Необхідно визначити критичну силу для заданої колони.

Розв'язок

Для визначення критичної сили належить виявити, яка у заданої колони гнучкість: мала, середня чи велика і з врахуванням цього скористатись відповідною формулою для розрахунку (по напруженнях текучості, Ясинського чи Ейлера).

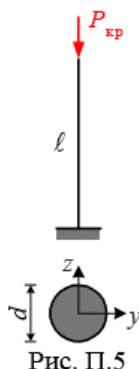
1. Обчислимо гнучкість колони λ :

$$J_{\min} = J_z = J_y ; i_{\min} = \sqrt{(J_{\min}/A_{\text{бр}})} = \sqrt{((\pi \cdot d^4 \cdot 4)/(64 \cdot \pi \cdot d^2))} = d/4 = 4/4 = 1 \text{ см};$$

$$\lambda = \frac{\nu \cdot l}{i_{\min}} = \frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 10^{-2}} = 200.$$

2. За довідковою таблицею (табл. 10.3) визначаємо для сталі СТ.3 $\lambda_{\text{гр}} = 100$. Як наслідок, колона великої гнучкості і розрахунок критичної сили необхідно проводити за формулою Ейлера.

3. Обчислюємо величину критичної сили:



$$P_{кр}^E = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{min}}{(v \cdot l)^2} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot \pi \cdot d^4}{64 \cdot (v \cdot l)^2} = \frac{\pi^3 \cdot E \cdot d^4}{64 \cdot (v \cdot l)^2} = \frac{\pi^3 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot (4 \cdot 10^{-2})^4}{64 \cdot (2 \cdot 1)^2} = 61,3 \cdot 10^3 \text{ Н} = 61,3 \text{ кН}.$$

Приклад 10.5. Дано: $l=6,0$ м. Колона (рис. П.6) складається із двох швелерів №22 і двох листів 320×10 мм (рис. П.7). матеріал колони сталь Ст.3 ($[\sigma_c] = 160$ МПа). Листи і швелери скріплені заклепками діаметром $d = 20$ мм. Необхідно визначити найбільше допустиме навантаження для заданої колони.

Розв'язок

1. За таблицями сортаменту визначаємо геометричні характеристики швелера №22:

$$A_{шв} = 26,7 \text{ см}^2; J_y^{шв} = 2110 \text{ см}^4; J_z^{шв} = 151 \text{ см}^4.$$

Обчислимо ці ж характеристики для всього складного перерізу:

$$A = 2(A_{шв} + A_{листа}) = 2(26,7 + 32 \cdot 1) = 117,4 \text{ см}^2;$$

$$J_z = 2 \left[151 + 26,7 \cdot (16 - 8,2 + 2,21)^2 + \frac{1 \cdot 32^3}{12} \right] = 11110 \text{ см}^4;$$

$$J_y = 2 \left[2110 + \frac{32 \cdot 1^3}{12} + 32 \cdot 1 \cdot 11,5^2 \right] = 12690 \text{ см}^4.$$

Оскільки $J_z < J_y$, найменший радіус інерції перерізу колони

$$i_{min} = i_z = \sqrt{\frac{J_z}{A}} = \sqrt{\frac{11110}{117,4}} = 9,73 \text{ см}.$$

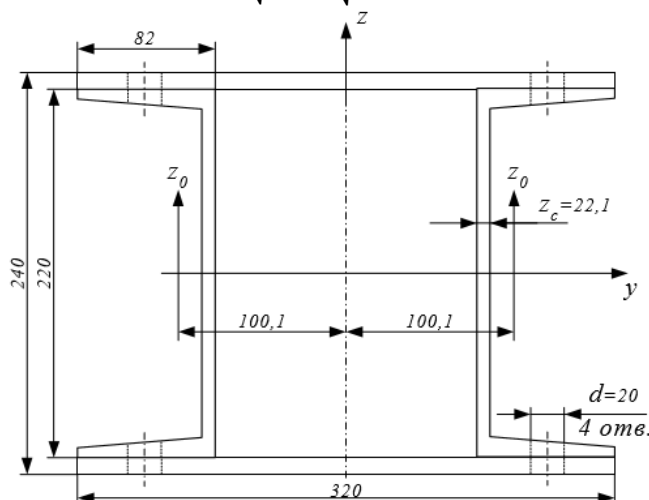


Рис. П.7



Рис. П.6

$$2. \text{ Визначаємо гнучкість колони: } \lambda = \frac{\nu \cdot l}{i_{\min}} = \frac{(1 \cdot 600)}{9,73} = 61,7.$$

3. За довідковою таблицею (табл. 10.3) визначаємо коефіцієнт φ для заданої колони, використавши лінійну інтерполяцію його значень в заданих інтервалах:

$$\begin{cases} \text{при } \lambda' = 60: \rightarrow \varphi' = 0,86 \\ \text{при } \lambda'' = 70: \rightarrow \varphi'' = 0,81 \end{cases}$$

$$\varphi = \varphi' - \frac{\varphi' - \varphi''}{\lambda'' - \lambda'} \cdot (\lambda - \lambda') = 0,86 - \frac{0,86 - 0,81}{10} \cdot (61,7 - 60) = 0,852.$$

4. Допустиме зусилля на колону з умови стійкості складає:

$$[P]_c = \varphi \cdot [\sigma_c] \cdot A = 0,852 \cdot 160 \cdot 10^6 \cdot 117,4 \cdot 10^{-4} = 1600 \cdot 10^3 \text{ Н} = 1600 \text{ кН}.$$

5. Раніше розглядався переріз колони без врахування наявності заклепок ($A = A_{бр}$), тому необхідно провести розрахунок за умовою міцності на стиск для нетто-перерізу (A_H), що ослаблений чотирма отворами під заклепки. Для визначення A_H скористаємось таблицями сортаменту, де товщина полки для швелера №22 дорівнює 0,95 см:

$$A_H = A_{бр} - 4 \cdot d \cdot (t^{\text{листа}} + t^{\text{шв}}) = 117Б4 - 4 \cdot 2 \cdot (1 + 0,95) = 101,8 \text{ см}^2.$$

Із умови міцності $\sigma_{\max} = \frac{P}{A_H} \leq [\sigma_c]$ витікає, що

$$[P_c] = [\sigma_c] \cdot A_H = 160 \cdot 10^6 \cdot 101,8 \cdot 10^{-4} = 1629 \cdot 10^3 \text{ Н} = 1629 \text{ кН}.$$

6. Таким чином, оскільки $[P_c] > [P]_c$, то допустиме стискаюче зусилля на колону повинно бути призначено виходячи з умови стійкості $[P] = 1600 \text{ кН}$.

Приклад 10.6. Користуючись табл.10.3 для значень коефіцієнтів φ , знайти допустиме навантаження для стержня трубчастого перерізу, виготовленого із сталі Ст. 3. Довжина стержня $l = 7 \text{ м}$; зовнішній діаметр $D = 20 \text{ см}$; внутрішній діаметр $d = 16 \text{ см}$; допустиме напруження $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$. Нижній кінець затиснутий, верхній – шарнірно опертий.

Розв'язок

Визначаємо момент інерції перерізу стержня:

$$J = \frac{\pi D^4}{64} \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right] = \frac{3,14 \cdot 20^4}{64} \left[1 - \left(\frac{16}{20} \right)^4 \right] = 4628,48 \text{ см}^4$$

Визначаємо площу поперечного перерізу стержня:

$$A = \frac{\pi D^2}{4} \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^2 \right] = \frac{3,14 \cdot 20^2}{4} \left[1 - \left(\frac{16}{20} \right)^2 \right] = 113 \text{ см}^2;$$

Визначаємо радіус інерції перерізу стержня:

$$i = \sqrt{\frac{J}{A}} = \sqrt{\frac{4628,48}{113}} = 6,4 \text{ см.}$$

Обчислюємо гнучкість стержня:

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{min}} = \frac{0,7 \cdot 700}{6,4} = 76,6.$$

Інтерполюючи за таблицями, одержимо $\varphi \approx 0,76$. Тоді:

$$[F] = \varphi A [\sigma] = 0,76 \cdot 113 \cdot 160 \cdot 10^{-1} = 1341 \text{ кН},$$

де 10^{-1} - перевідний коефіцієнт.

Приклад 10.6. Підірати розмір d кільцевого поперечного перерізу штовхачів (рис. П.8 ,б) пневматичного пристрою для затикуванн деталей при їх обробці (рис. П.8 ,а).

Тиск в циліндрі $p = 2$ МПа; матеріал – сталь 20, $\sigma = 160$ МПа.

Розв'язок

Визначаємо зусилля в стержнях BC і BK . Розглянемо в рівновазі вузол B (рис. П.8 ,в). Вісь y є віссю симетрії. Тому зусилля $N_{BC} = N_{BK} = N$.

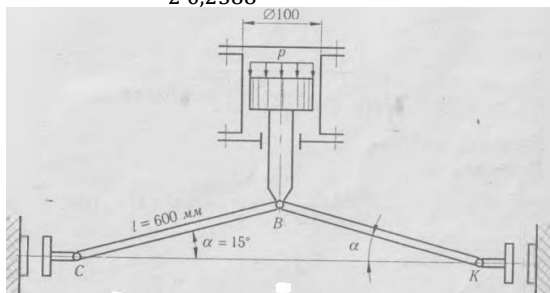
$$\sum Y = 0 \rightarrow -F - 2N \sin 15^\circ = 0 \rightarrow N = -\frac{F}{2 \sin 15^\circ}.$$

Отже, стержні сприймають стискувальні зусилля.

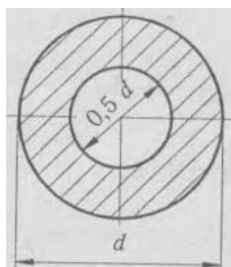
$$F = p \cdot A = p \frac{\pi d^2}{4} = 2 \cdot \frac{\pi \cdot 100^2}{4} = 15,7 \cdot 10^3 \text{ Н} = 15,7 \text{ кН}.$$

Розмірність: p — Н/мм²; d — мм.

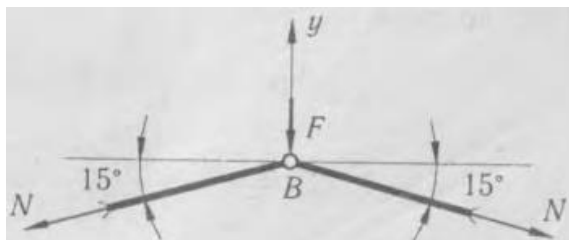
$$N = -\frac{15,7}{2 \cdot 0,2588} = -30,33 \text{ кН}.$$



a)



б)



в)

Рис. П.8

Визначимо діаметр d з умови стійкості. Переріз геометрично подібний, тому використаємо метод питомого радіуса. Умова стійкості:

$$n = \frac{\mu l}{\rho} \sqrt{\frac{[\sigma]}{N}} \geq \frac{\lambda}{\sqrt{\varphi}}.$$

Питомий радіус ρ визначаємо за формулою ($\rho = \frac{i_{\min}}{\sqrt{A}}$). Для кільця (рис. П.8, б) :

$$\rho = \frac{\sqrt{J}}{A} = \frac{\sqrt{\pi d^4 (1 - C^4) / 64}}{\pi d^2 (1 - C^2) / 4} = \frac{\sqrt{\pi (1 - 0,5^4)}}{2\pi (1 - 0,5^2)} = 0,364.$$

$$n = \frac{1 \cdot 60}{0,364} \sqrt{\frac{16}{30,33}} = 119,7.$$

З таблиці 10.3 за величиною $\lambda / \sqrt{\varphi} = 119,7$ знаходимо $\varphi = 0,641$.

З умови стійкості (10.27) визначаємо площу перерізів стержнів

$$\frac{N}{A} \leq \varphi [\sigma] \rightarrow A \geq \frac{N}{\varphi [\sigma]} = \frac{30,33}{0,641 \cdot 16} = 2,96 \text{ см}^2.$$

Тоді

$$d = \sqrt{\frac{4A}{\pi(1 - C^2)}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 2,96}{\pi(1 - 0,5^2)}} = 2,24 \text{ см}.$$

Приймаємо $d = 23 \text{ мм}$.

Перевірка:

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{30,33 \cdot 4}{\pi \cdot 2,3^2 (1 - 0,5^2)} = 9,74 \text{ кН/см}^2 = 97,4 \text{ МПа}.$$

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}}.$$

$$i_{\min} = \rho \cdot \sqrt{A} = 0,364 \sqrt{\pi d^2 (1 - 0,5^2) / 4} = 0,28d.$$

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 60}{0,28 \cdot 2,3} = 93,17 \rightarrow \varphi = 0,661.$$

$$\varphi [\sigma] = 0,661 \cdot 160 = 105,8 \text{ МПа}.$$

$\sigma < \varphi [\sigma]$, умова стійкості виконується.

Відповідь: $d = 23$ мм.

10.11.3. Задачі для самостійного розв'язання

1) Перевірити на стійкість стержень довжиною $l = 60$ см з діаметром перерізу $d = 2$ см, один кінець якого шарнірно обіпєртий, а другий кінець защемлений. Величина стискувальної сили $F = 40$ кН. Матеріал сталь 25, $[\sigma] = 180$ МПа.

Відповідь: стержень недонавантажений на 2,5%.

2) Перевірити на міцність і стійкість сосновий стояк, ослаблений отворами (рис. 10.8); $[\sigma] = 10$ МПа.

Відповідь: 1) перенапруження по міцності 4%; 2) недонавантаження по стійкості 4%.

3) Визначити допустиму величину стискувальної сили для чавунної пустотілої колони висотою 8 м. Зовнішній діаметр перерізу колони $D = 24$ см, товщина стінки 2 см, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа. Обидва кінці шарнірно закріплені. Коефіцієнт запасу стійкості $[\text{пст}] = 5$.

Відповідь: 312 кН.

4) Визначити допустиме навантаження на стержень (рис. 10.9). Матеріал — сталь 3; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа. Коефіцієнт запасу стійкості $[\text{пст}] = 3$.

Відповідь: 101 кН.

(Примітка: характеристики перерізу двотавра за ГОСТ 8239-72).

5) Розв'язати попередню задачу, якщо нижній кінець стержня защемити.

Відповідь: 145,5 кН

6) Підібрати двотавровий переріз стержня довжиною 5 м, що стискається силою $F = 300$ кН. Обидва кінці стержня защемлєні. Матеріал — сталь 3; $[\sigma] = 160$ МПа.

Відповідь: двотавр № 22а (ГОСТ 8239-72); недонавантаження 4,7%.

7) Використавши умову попередньої задачі, підібрати кільцевий переріз з відношенням діаметрів $C = d/D = 0,9$. Порівняти площі перерізів двотавра і кільця.

Відповідь: $D = 122$ мм, $d = 110$ мм. Відношення $A_{\text{дв}}/A_{\text{к}} = 1,5$.

8) Підібрати квадратний переріз соснового стояка довжиною $l = 3$ м, що стискається силою 60 кН. Обидва кінці стержня защемлєні; $[\sigma] = 10$ МПа.

Відповідь: сторона квадрата $a = 9$ см; перенапруження $\sim 1\%$.

9) Підібрати чотири рівнобікі кутики перерізу стисненого стержня (рис. 10.10). Кутики жорстко з'єднані між собою. Матеріал — сталь 3; $[\sigma] = 160$ МПа.

Відповідь: 4 кутики $63 \times 63 \times 5$ (ГОСТ 8509-72), недонавантаження 17,6%.

10) Підібрати діаметр сталюго (Ст. 5) стержня довжиною $l = 70$ см, стиснутого силою 120 кН. Обидва кінці стержня шарнірно обіпєрті; $[\sigma] = 200$ МПа.

Відповідь: 32,6 мм

11) Знайти розмір a (рис. 10.11), що забезпечує рівностійкість стояка в головних площинах інерції. Визначити для такого стояка допустиму величину стискувальної сили. 2 швелери № 20 (ГОСТ 8240-72). Матеріал — сталь 3; $[\sigma] = 160$ МПа.

Відповідь: 11,4 см; 587 кН.

12) Стержень прямокутного поперечного перерізу стиснутий силами F (рис. 10.12, а). Визначити розміри його перерізу. Стержень повинен бути рівностійким у головних площинах інерції. Розрахункова схема показана на рис. 10.12, б. Матеріал — сталь 3; $[\sigma] = 160$ МПа.

Відповідь: $b = 53,2$ мм; $h = 106,4$ мм

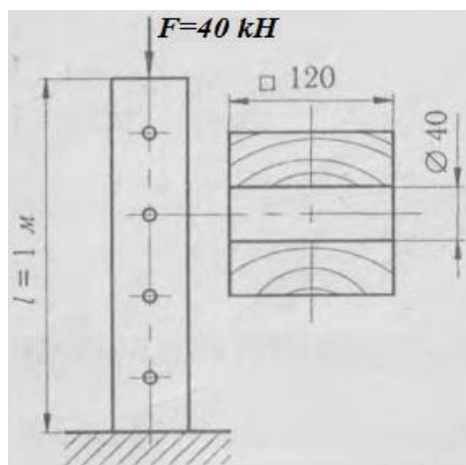


Рис. 10.8

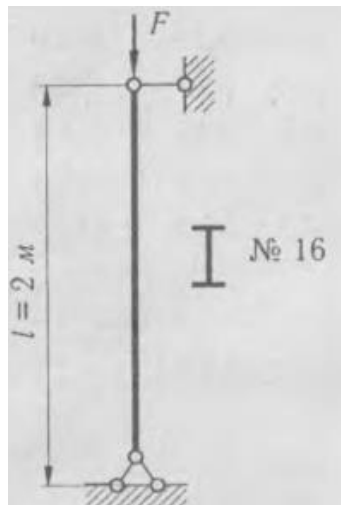


Рис. 10.9

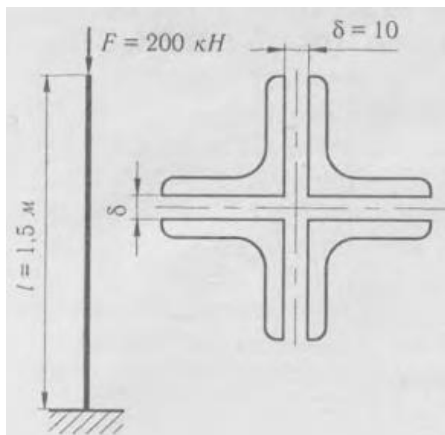


Рис. 10.10

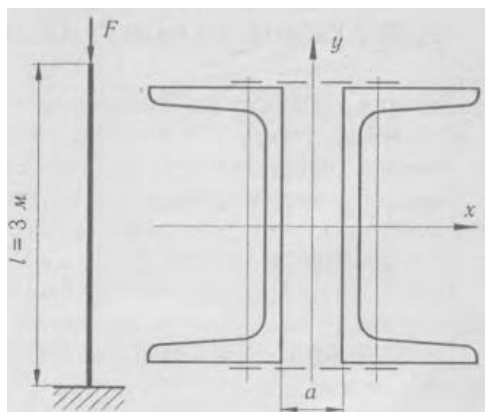
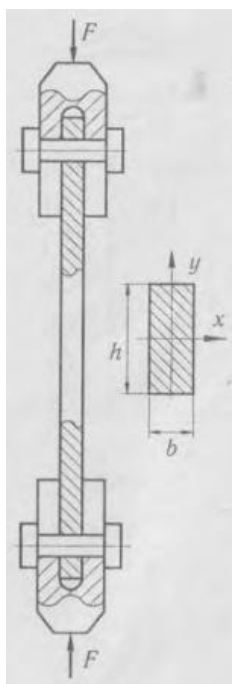
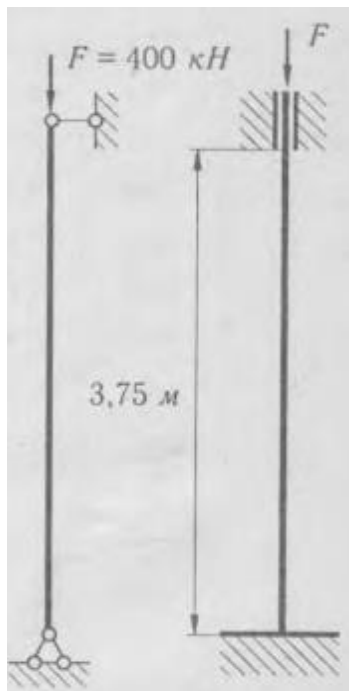


Рис. 10.11



а)



б)

Рис. 10.12

10.11.4. Розрахунково-проектувальна робота «розрахунок стиснутих стержнів на стійкість»

Згідно з варіантом підібрати перерізи стиснутого стержня.

Варіанти перерізів стиснутого стержня представлені в табл.

10.4.

Матеріал прокатних профілів сталь 20, $[\sigma] = 160$ МПа.

Прийняти: модулі пружності для вуглецевої сталі $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, для чавуну $E = 1,2 \cdot 10^5$ МПа; коефіцієнт запасу міцності для чавуну $[n_m] = 3$.

Інші дані взяти з табл. 10.5, а також з табл..5.3 і табл..5.4 (стор.).

Підбір перерізу з профільного прокату за методом поступових наближень з використанням коефіцієнта поздовжнього згину показано на прикладі 10.6.

Таблиця 10.4

№ п/п	F, кН	l, м	μ	Матеріал геометрично подібних перерізів			n_T
				Марка	σ_{mc} , МПа	σ_T , МПа	
0	200	2,0	0,5	Сталь 20		250	2,0
1	210	2,1	1,0	Сталь 25		280	2,1
2	220	2,2	2,0	Сталь 35		320	2,2
3	230	2,3	0,7	СЧ-12	500		2,3
4	240	2,4	1,0	СЧ-15	650		2,4
5	250	2,5	0,5	СЧ-18	700		1,5
6	260	2,6	2,0	СЧ-21	750		1,6
7	270	2,7	0,7	Ст. 3		220	1,7
8	280	2,8	1,0	Ст. 4		240	1,8
9	290	2,9	0,5	Ст. 5		280	1,9

11. РОЗРАХУНКИ НА МІЦНІСТЬ ПРИ ЗМІННИХ НАПРУЖЕННЯХ

11.1. Характер зміни напружень

1. Такий, що не встановився (зміна напружень в прольоті моста від руху по ньому трамваю, машин, пішоходів і т.д.).

2. Такий, що встановився (зміна напружень в шатуні під час роботи ДВЗ).

3. Із різних видів встановлених змінних напружень найбільше значення мають циклічні напруження.

11.2. Циклічні напруження

При дії повторно-змінного, циклічного, навантаження відповідно змінюються і напруження. Циклом напружень називається зміна напружень від однієї крайньої величини до іншої і навпаки. Іншими словами, циклом називається сукупність усіх значень напружень за час одного періоду їх безперервної зміни. Закон зміни напружень за один цикл зазвичай зображується графічно (рис. 11.1)

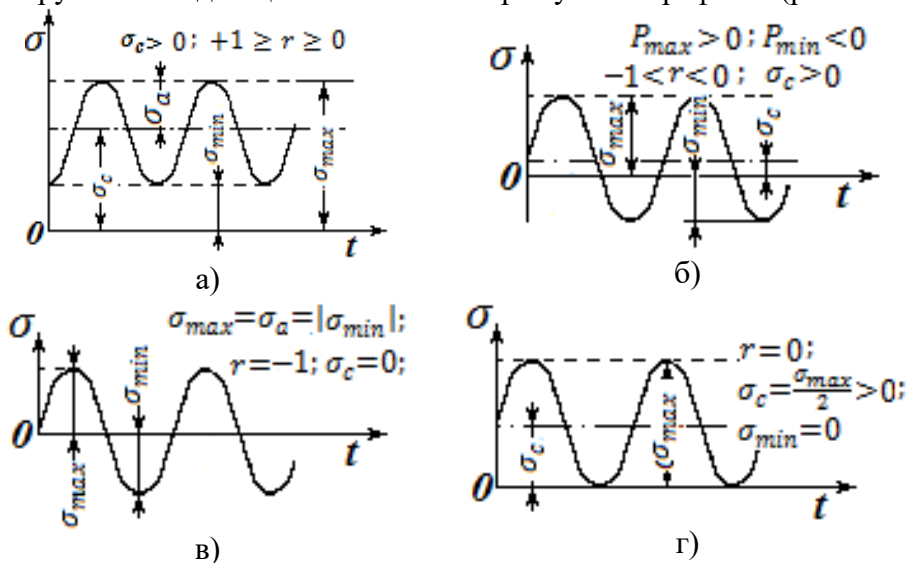


Рис. 11.1

Крім максимального σ_{max} і мінімального σ_{min} напружень, вводиться поняття постійного, або середнього, напруження циклу σ_c

$$\sigma_c = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}, \quad (11.1)$$

поняття про амплітуду або змінну складову напруження σ_a

$$\sigma_c = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}, \quad (11.2)$$

а також поняття про коефіцієнт асиметрії циклу, що позначається літерою r ,

$$r = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}. \quad (11.3)$$

При визначенні σ_c , σ_a і r значення σ_{max} і σ_{min} потрібно підставляти з їх знаками. Одержаний при цьому знак вказує, що середнє нормальне напруження є розтягуючим, якщо знак «+», або стискаючим, якщо знак «-»; амплітуда циклу визначається абсолютною величиною.

Знак «-» при r вказує, що цикл знакозмінний (тобто σ_{max} і σ_{min} мають різні знаки, рис. 11.1, б і в); знак «+», - що цикл знакопостійний (однозначний), тобто напруження або тільки розтягуючі, або тільки стискаючі (рис. 11.1, а і г).

Цикли можуть бути симетричними та несиметричними.

Якщо σ_{max} і σ_{min} однакові за величиною і протилежні за знаком, цикл симетричний (рис. 11.1, в). При цьому $r = -1$.

Якщо σ_{max} і σ_{min} неоднакові за величиною, цикл несиметричний. В окремому випадку, якщо $\sigma_{min} = 0$, цикл називається пульсуючим (рис. 11.1, г).

Для визначення характеру циклу, крім характеристики циклу r , необхідно знати σ_{max} або σ_{min} . При статичному навантаженні $\sigma_{max} = \sigma_{min} = \sigma_c$; $r = +1$.

Будь – який несиметричний цикл можна зобразити як одержаний внаслідок накладання симетричного циклу на постійне напруження, що дорівнює σ_c (рис.11.1).

На рис.11.1, а, б, г показані цикли розтягу ($\sigma_c > 0$), аналогічно графічно зображуються цикли стиску ($\sigma_c < 0$), тобто стискаючі, і цикли при дії дотичних напружень. В останньому випадку в залежностях (11.1), (11.2), (11.3) замість σ потрібно писати τ . Знак дотичних напружень приймається умовно; якщо направлені в один бік прийняти за додатні, то направлені в зворотному напрямку – від'ємні. Здатність матеріалів, не руйнуючись чинити опір дії циклічних навантажень називається втомною міцністю (або витривалістю). Механічною характеристикою втомної міцності є границя витривалості (втомленості), тобто максимальне напруження, при якому матеріал може витримувати, не руйнуючись, практично

необмежене число циклів навантаження при заданому ступені асиметрії циклу r .

Границя витривалості позначається через σ_r (або τ_r , якщо напруження дотичні), де r вказує на ступінь асиметрії, при якій була визначена границя витривалості. Так σ_{-1} – границя витривалості при симетричному циклі; σ_0 – границя витривалості при пульсуючому циклі; $\sigma_{0,2}$ – границя витривалості при $r = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} = 0,2$; σ_{+1} – границя витривалості при статичному навантаженні, тобто $\sigma_{+1} = \sigma_B$.

Границя витривалості σ_r для кожного матеріалу визначається дослідним способом на спеціальних випробувальних машинах.

11.3. Розрахунки на міцність при повторно-змінних напруженнях. Визначення коефіцієнта запасу міцності

Міцність при дії повторно-змінного навантаження забезпечується, якщо напруження, які при цьому виникають в деталі, менші границі витривалості, тобто:

$$\sigma_{max} \leq [\sigma_r] = \frac{\sigma_r}{n}, \quad (11.4)$$

де n – запас міцності.

Границя міцності σ_r , залежить від цілого ряду конструктивних і технологічних факторів ($K_\sigma, K_\tau, \alpha_\pi, \varepsilon_m, \alpha_t$ та ін.), конкретний вплив яких можна визначити лише при відомих розмірах, конфігурації та технології виготовлення деталі. Тому в практиці машинобудування при дії повторно-змінного навантаження виконують головним чином перевірні розрахунки, тобто, спочатку створюють робоче креслення деталі, а потім визначають коефіцієнт запасу міцності в небезпечних перерізах з врахуванням усіх конструктивних і технологічних факторів, які можуть впливати на втомну міцність.

Якщо запас міцності n виявляється нижчим потрібного, то в розміри і конструкцію деталі вносять зміни, які направлені на збільшення міцності. Якщо таких змін зробити не можливо, то вибирається міцніший матеріал. Навпаки, якщо фактичний запас міцності n вищий потрібного, відповідні розміри належить зменшити. При такій методиці розрахунку необхідно мати формулу для визначення фактичного запасу міцності. Цю формулу виводять, користуючись спеціальною виправленою діаграмою граничних напружень. В кінцевому варіанті формула має вигляд - для пластичних матеріалів,

$$n = \frac{\sigma_T}{\sigma_c + \sigma_a} = \frac{\sigma_T}{\sigma_{max}}; \quad (11.5)$$

для крихких

$$n = \frac{\sigma_B}{\sigma_c + \sigma_a} = \frac{\sigma_B}{\sigma_{max}}. \quad (11.6)$$

Аналогічно записують ці формули при дії дотичних напружень τ .

Запитання для самоконтролю:

1. Як графічно зображується зміна напружень в часі?
2. Що називається циклом напружень?
3. Що називається середнім, максимальним і мінімальним напруженням, амплітудою, коефіцієнтом асиметрії і характеристикою циклу напружень?
4. Що являє собою симетричний і асиметричний цикли?
5. Що називається втомою? Опишіть характер руйнування від втоми.
6. Що називається границею витривалості (межою втоми)?
7. Як визначається коефіцієнт запасу міцності при руйнуванні від втоми?

ДОДАТКИ

Додаток 1

Механічні характеристики конструкційних сталей

Марка сталі	$\sigma_{\text{м}}$	$\sigma_{\text{т}}$	$\tau_{\text{т}}$	Відносне видовже ння δ , %	Ударна в'язкість КС, кДж/м ²	Границя витривалості, МПа		
	не менше					Згин, σ_{-1}	Розтяг- стиск, $\sigma_{-1\text{р}}$	Кручення, τ_{-1}
	МПа							
10	340	210	140	31	2400	160—220	120—150	80—120
20	420	250	160	25	—	170—220	120—160	100—130
25	460	280	—	23	900	190—250	—	—
30	500	300	170	21	800	200—270	170—210	110—140
35	540	320	190	20	700	220—300	170—220	130—180
40	580	340	—	10	600	230—320	180—240	140—190
45	610	360	220	16	500	250—340	190—250	150—200
50	640	380	—	14	400	270—350	200—260	160—210
55	660	390	—	13	—	—	—	—
60	690	410	—	12	—	310—380	220—280	180—220
20Г	460	280	—	24	—	—	—	-
30Г	550	320	—	20	800	220—320	—	—
50Г	660	400	—	13	400	290—360	—	—
20Х	800	650	—	11	600	380	—	170—320
40Х	1000	800	—	10	600	350—380	250	225
45Х	1050	850	—	9	500	400—500	—	—
30ХМ	950	750	—	11	800	310—410	370	230
35ХМ	1000	850	—	12	800	470—510	—	—
40ХН	1000	800	390	11	700	400	290	240
50ХН	1100	900	—	9	500	550	—	—
40ХФА	900	750	—	10	900	380—490	—	—
38ХМЮ	1000	850	—	14	900	420—550	—	—
12ХНЗА	950	700	400	11	900	390—470	270—320	220—260
20ХНЗА	950	750	—	12	1000	430—450	300—320	245—255
30ХНЗА	1000	800	—	10	800	520—700	—	320—400
40ХНМА	1000	950	—	12	1000	500—700	—	270—380
30ХГСА	1100	850	—	10	500	510—540	500—535	220—245

Примітка. При використанні сталей за ГОСТ 380 – 71 необхідно враховувати приблизну відповідність марок: Ст. 3 відповідає сталі 20; Ст. 4 – сталі 25; Ст. 5 – сталі 35; Ст. 6 – сталі 45.

Механічні характеристики чавуну

Марка чавуну	Границя міцності, <i>МПа</i>				Твердість по Бринеллю НВ	Границя витривалості, <i>МПа</i>	
	при розтягу	при стиску	при згині	при крученні		Згин	Кручення
	$\sigma_{\text{мр}}$	$\sigma_{\text{мс}}$	$\sigma_{\text{м}}$	$\tau_{\text{м}}$		σ_{-1}	τ_{-1}
СЧ 12	120	500	280	—	143—229	—	—
СЧ 15	150	650	320	240	163—229	70	50
СЧ 18	180	700	360	—	170—229	—	—
СЧ 21	210	750	400	280	173—241	100	80
СЧ 24	240	850	440	300	187—217	120	100
СЧ 28	280	1000	480	350	170—241	140	110
СЧ 32	320	1100	520	390	187—255	140	110
СЧ 35	350	1200	560	400	198—269	160	115
СЧ 38	380	1400	600	460	207—269	150	115
ВЧ 40—10	400	1600— 1700	—	480— 510	156—197	250— 280	198
ВЧ 50—1,5	500	1860— 2000	—	740— 790	187—255	200— 220	170—210
ВЧ 60—2	600	2040 — 2290	—	660— 810	197—269	170— 230	150—160

Додаток 3

Орієнтовні значення основних допустимих напружень на розтяг та стиск

Матеріал	Допустимі напруження, МПа	
	на розтяг	на стиск
Чавун сірий	—30	120—150
Сталь: Ст. 2	140	
Ст. 3	160	
машинобудівельна (конструкційна)		
— вуглецева		
машинобудівельна (конструкційна)	60—250	
— легована		
Мідь	100—400 і більше	
Латунь	30—120	
Бронза	70—140	
Алюміній	60—120	
Алюмінієва бронза	30—80	
Дюралюміній	80—120	
Текстоліт	80—150	
	30—40	

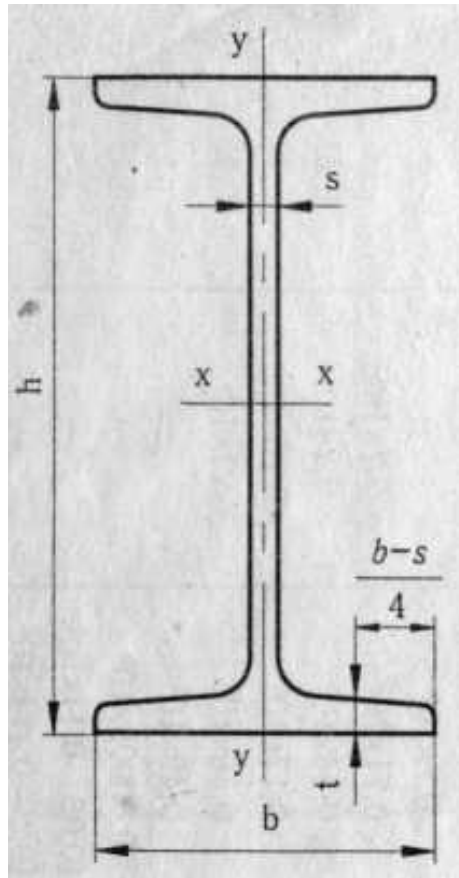
Додаток 4

Допустимі напруження на зріз для заклепкових та зварних з'єднань

Тип з'єднання	Напруження на зріз, МПа
Заклепкове:	
Основні елементи із сталі 20	100
— заклепка в розсвердлених отворах (клас В);	140
— заклепка в протиснених отворах (клас С)	100
Зварне:	
— зварювання ручне, електроди з тонкою обмазкою	80
— зварювання ручне, електроди з товстою обмазкою	110
— автоматичне зварювання	110

Модулі пружності і коефіцієнт Пуассона

Матеріал	Модуль пружності, МПа	Коефіцієнт Пуассона, μ	
	E	G	
Чавун сірий, білий	$(1,15—1,60) \times 10^5$	$4,5 \times 10^4$	0,23—0,27
Чавун ковкий	$1,55 \times 10^5$	—	—
Сталі вуглецеві	$(2,0—2,1) \times 10^5$	$(8,0—8,1) \times 10^4$	0,24—0,28
Сталі леговані	$(2,1—2,2) \times 10^5$	$(8,0—8,1) \times 10^4$	0,25—0,30
Мідь прокатана	$1,1 \times 10^5$	$4,0 \times 10^4$	0,31—0,34
Мідь холодноотягнута	$1,3 \times 10^5$	$4,9 \times 10^4$	—
Мідь лита	$0,84 \times 10^5$	—	—
Бронза фосфориста катана	$1,15 \times 10^5$	$4,2 \times 10^4$	0,32—0,35
Бронза марганцевиста катана	$1,1 \times 10^5$	$4,0 \times 10^4$	0,35
Бронза алюмінієва лита	$1,06 \times 10^5$	$4,2 \times 10^4$	—
Латунь холодноотягнута	$(0,91—0,99) \times 10^5$	$(3,5—3,7) \times 10^4$	0,32—0,42
Латунь катана	$1,0 \times 10^5$	—	0,36
Дріт алюмінієвий тягнутий	$0,7 \times 10^5$	—	—
Дюралюміній катаний	$0,71 \times 10^5$	$2,7 \times 10^4$	—
Цинк катаний	$0,84 \times 10^5$	$3,2 \times 10^4$	0,27
Свинець	$0,17 \times 10^5$	$0,70 \times 10^4$	0,42
Скло	$0,56 \times 10^5$	22×10^4	0,25
Граніт	$0,49 \times 10^5$	—	—
Каучук	$0,00008 \times 10^5$	—	0,47
Текстоліт	$(0,06—0,1) \times 10^5$	—	—
Гетинакс	$(0,1—0,17) \times 10^5$	—	—



Балки двотаврові (за ГОСТ 8239-72)

h — висота балки;

J — момент інерції;

b — ширина полиці;

W — момент опору;

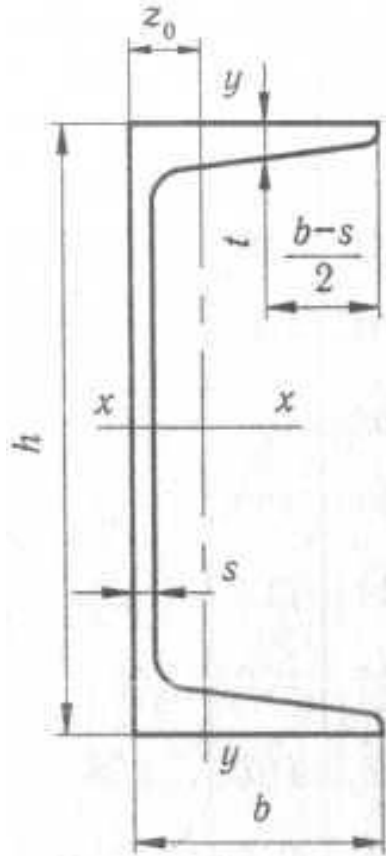
s — товщина стінки;

i — радіус інерції;

t — середня товщина полиці;

S_x — статичний момент половини перерізу

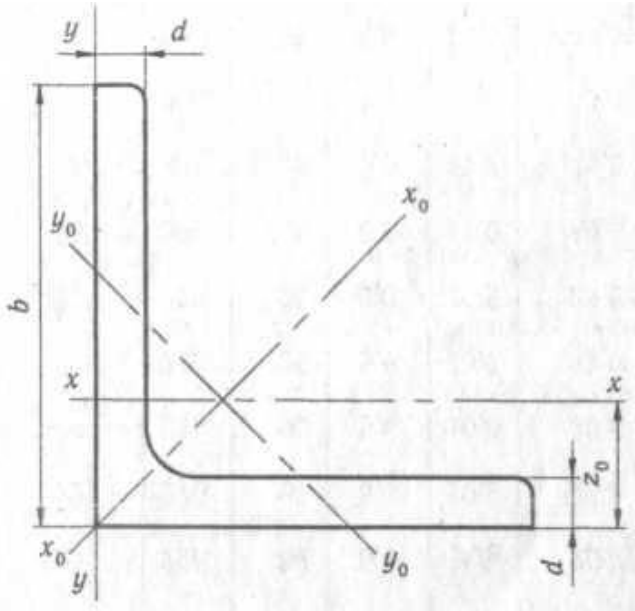
Номер профілю	Розміри, мм				Площа перерізу, см ²	$J_x,$ см ⁴	$W_x,$ см ³	$i_x,$ см	$S_x,$ см ³	$J_y,$ см ⁴	$W_y,$ см ³	$i_y,$ см	Маса 1 м, кг
	h	b	s	t									
10	100	55	4,5	7,2-	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22	9,46
12	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38	11,5
14	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55	13,7
16	160	81	5,0	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70	15,9
18	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88	18,4
18a	180	100	5,1	8,3	25,4	1430	159	7,51	89,8	114	22,8	2,12	19,9
20	200	100	5,2	8,4	26,8	18,40	184	8,28	104	115	23,1	2,07	21,0
20a	200	110	5,2	8,6	28,9	2030	203	8,37	114	155	28,2	2,32	22,7
22	220	110	5,4	5,4	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27	24,0
22a	220	120	5,4	8,9	32,8	2790	254	9,22	143	206	34,3	2,50	25,8
24	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37	27,3
24a	240	125	5,6	9,8	37,5	3800	317	10,1	178	260	41,6	2,63	29,4
27	270	125	6,0	9,8	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54	31,5
27a	270	135	6,0	10,2	43,2	5500	407	11,3	229	337	50,0	2,80	33,9
30	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69	36,5
30a	300	145	6,5	10,7	49,9	7780	518	12,5	292	436	60,1	2,95	39,2
33	330	140	7,0	11,2	53,8	9840	597	13,5	389	419	69,9	2,79	42,2
36	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,7	423	519	71,1	2,89	48,6
40	400	155	8,3	13,0	72,6	19062	953	16,2	545	667	86,1	3,03	57,0
45	450	160	9	14,2	84,7	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09	66,5
50	500	170	10	15,2	100	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23	78,5
55	550	180	11	16,5	118	35962	2035	21,8	1181	1366	151	3,39	92,7
60	600	190	12	17,8	138	76806	2560	23,6	1481	1725	182	3,54	108



Балки швелерні (за ГОСТ 8240-72)

 h — висота балки; W — момент опору; b — ширина полиці; i — радіус інерції; s — товщина стінки; S_x — статичний момент половини перерізу; t — середня товщина полиці; J — момент інерції; z_0 — віддаль від центра ваги до зовнішньої грані стінки

Номер профілю	Розміри, мм				Площа перерізу, $см^2$	$J_x, см^4$	$W_x, см^3$	$i_x, см$	$S_x, см^3$	$J_y, см^4$	$W_y, см^3$	$i_y, см$	$Z_0, см$	Маса 1 м, кг
	h	b	s	t										
5	50	32	4,4	7,0	6,16	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,954	1,16	4,84
6,5	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15,0	2,54	9,0	8,7	3,68	1,08	1,24	5,90
8	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31	7,05
10	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44	8,59
12	120	52	4,8	7,8	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54	10,4
14	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	5,60	40,8	45,4	11,0	1,70	1,67	12,3
14a	140	62	4,9	8,7	17,0	545	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87	13,3
16	160	64	5,0	8,4	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,80	14,2
16a	160	68	5,0	9,0	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,00	15,3
18	180	70	5,1	8,7	20,7	1090	121	7,24	69,8	86	17,0	2,04	1,94	16,3
18a	180	74	5,1	9,3	22,2	1190	132	7,32	76,1	105	20,0	2,18	2,13	17,4
20	200	76	5,2	9,0	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07	18,4
20a	200	80	5,2	9,7	25,2	1670	167	8,15	95,9	139	24,2	2,35	2,28	19,8
22	220	82	5,4	9,5	26,7	2110	192	8,89	ПО	151	25,1	2,37	2,21	21,0
22a	220	87	5,4	10,2	28,8	2330	212	8,99	121	187	30,0	2,55	2,46	22,6
24	240	90	5,6	10,0	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42	24,0
24a	240	95	5,6	10,7	32,9	3180	265	9,84	151	254	37,2	2,78	2,67	25,8
27	270	95	6,0	10,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47	27,7
30	300	100	6,5	11,0	40,5	5810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52	31,8
33	330	105	7,0	11,7	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59	36,5
36	360	110	7,5	12,6	53,4	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68	41,9
40	400	115	8,0	13,5	61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75	48,3



Кутики рівнобікі (за ГОСТ 8509-72)

B — ширина полиці;

t — товщина полиці;

i — радіус інерції;

γ_0 — віддаль від центра ваги до зовнішньої грані полиці;

J — момент інерції

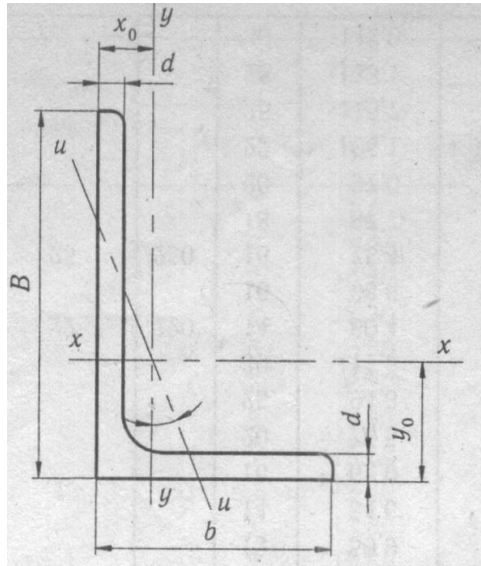
Номер профілю	b	d	Площа перерізу, $см^2$	Довідкові величини для осей						$Z_0, см$	Маса 1 м профілю, кг
				$X - X$		$X_0 - X_0$		$Y_0 - Y_0$			
	$мм$			$J_x, см^4$	$I_x, см$	$J_{x0max}, см^4$	$I_{x0max}, см$	$J_{y0min}, см^4$	$I_{y0min}, см$		
2	20	3	1,13	0,40	0,59	0,63	0,75	0,17	0,39	0,60	0,89
		4	1,46	0,50	0,58	0,78	0,73	0,22	0,38	0,64	1,15
2,5	25	3	1,43	0,81	0,75	1,29	0,95	0,34	0,49	0,73	1,12
		4	1,86	1,03	0,74	1,62	0,93	0,44	0,48	0,76	1,46
2,8	28	3	1,62	1,16	0,85	1,84	1,07	0,48	0,55	0,80	1,27
3,2	32	3	1,86	1,77	0,97	2,80	1,23	0,74	0,63	0,89	1,46
		4	2,43	2,26	0,96	3,58	1,21	0,94	0,62	0,94	1,91
3,6	36	3	2,10	2,56	1,10	4,06	1,39	1,06	0,71	0,99	1,65
		4	2,75	3,29	1,09	5,21	1,38	1,36	0,70	1,04	2,16
4	40	3	2,35	3,55	1,23	5,63	1,55	1,47	0,79	1,09	1,85
		4	3,08	4,58	1,22	7,26	1,53	1,90	0,78	1,13	2,42
		5	3,79	5,53	1,20	8,75	1,54	2,30	0,79	1,17	2,97
4,5	45	3	2,65	5,13	1,39	8,13	1,75	2,12	0,89	1,21	2,08
		4	3,48	6,63	1,38	10,50	1,74	2,74	0,89	1,26	2,73
		5	4,29	8,03	1,37	12,70	1,72	3,33	0,88	1,30	3,37
5	50	3	2,96	7,11	1,55	11,30	1,95	2,95	1,00	1,33	2,32
		4	3,89	9,21	1,54	14,60	1,94	3,80	0,99	1,38	3,05
		5	4,80	11,20	1,53	17,80	1,92	4,63	0,98	1,42	3,77
5,6	56	4	4,38	13,10	1,73	20,80	2,18	5,41	1,11	1,52	3,44
		5	5,41	16,00	1,72	25,40	2,16	6,59	1,10	1,57	4,25

Номер профілю	b	d	Площа перерізу, $см^2$	Довідкові величини для осей						$Z_0, см$	Маса 1 м профілю, кг
				$X - X$		$X_0 - X_0$		$Y_0 - Y_0$			
	$мм$			$J_x, см^4$	$I_x, см$	$J_{x0max}, см^4$	$I_{x0max}, см$	$J_{y0min}, см^4$	$I_{y0min}, см$		
6,3	63	4	4,96	18,90	1,95	29,90	2,45	7,81	1,25	1,69	3,90
		5	6,13	23,10	1,94	36,60	2,44	9,52.	1,25	1,74	4,81
		6	7,28	27,10	1,93	42,90	2,43	11,20	1,24	1,78	5,72
7	70	4,5	6,20	29,0	2,16	46,0	2,72	12,0	1,39	1,88	4,87
		5	6,86	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	1,90	5,38
		6	8,15	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	1,94	6,39
		7	9,42	43,0	2,14	68,2	2,69	17,8	1,37	1,99	7,39
		8	10,70	48,2	2,13	76,4	2,68	20,0	1,37	2,02	8,37
7,5	75	5	7,39	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	2,02	5,80
		6	8,78	46,6	2,30	73,9	2,90	19,3	1,48	2,06	6,89
		7	10,10	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	2,10	7,96
		8	11,50	59,8	2,28	94,6	2,87	24,8	1,47	2,15	9,02
		9	12,80	66,1	2,27	105,0	2,86	27,5	1,46	2,18	10,10
8	80	5,5	8,63	52,7	2,47	83,6 ‘	3,11	21,8	1,59’	2,17	6,78
		6	9,38	57,0	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	2,19	7,36
		7	10,80	65,3	2,45	104,0	3,09	27,0	1,58	2,23	8,51
		8	12,30	73,4	2,44	116,0	3,08	30,3	1,57	2,27	9,65
9	90	6	10,60	82,1	2,78	130,0	3,50	34,0	1,79	2,43	8,33
		7	12,30	94,3	2,77	150,0	3,49	38,9	1,78	2,47	9,64
		8	13,90	106,0	2,76	168,0	3,48	43,8	1,77	2,51	10,90

Номер профілю	<i>b</i>	<i>d</i>	Площа перерізу, <i>см²</i>	Довідкові величини для осей						<i>Z₀, см</i>	Маса 1 <i>m</i> профілю, <i>кг</i>
				<i>X – X</i>		<i>X₀ – X₀</i>		<i>Y₀ – Y₀</i>			
	<i>мм</i>			<i>J_x, см⁴</i>	<i>I_x, см</i>	<i>J_{x0max}, см⁴</i>	<i>I_{x0max}, см</i>	<i>J_{y0min}, см⁴</i>	<i>I_{y0min}, см</i>		
		9	15,60	118,0	2,75	186,0	3,46	48,6	1,77	2,55	12,20
10	100	6,5	12,80	122,0	3,09	193,0	3,88	50,7	1,99	2,68	10,10
		7	13,80	131,0	3,08	207,0	3,88	54,2	1,98	2,71	10,80
		8	15,60	147,0	3,07	233,0	3,87	60,9	1,98	2,75	12,20
		10	19,20	179,0	3,05	284,0	3,84	74,1	1,96	2,83	15,10
		12	22,80	209,0	3,03	331,0	3,81	86,9	1,95	2,91	17,90
		14	26,30	237,0	3,00	375,0	3,78	99,3	1,94	2,99	20,60
		16	29,70	264,0	2,98	416,0	3,74	112,0	1,94	3,06	23,30
11	110	7	15,20	176,0	3,40	279,0	4,29	72,7	2,19	2,96	11,90
		8	17,20	198,0	3,39	315	4,28	81,8	2,18	3,00	13,50
12,5	125	8	19,7	294	3,87'	467	4,87.	122	2,19	3,36	15,5
		9	22,0	327	3,86	520	4,86	135	2,48	3,40	17,3
		10	24,3	360	3,85	571	4,84	149	2,47	3,45	19,1
		12	28,9	422	3,82	670	4,82	174	2,46	3,53	22,7
		14	33,4	482	3,80	764	4,78	200	2,45	3,61	26,2
		16	37,8	539	3,78	853	4,75	224	2,44	3,68	29,6
14	140	9	24,7	466	4,34	739	5,47	192	2,79	3,78	19,4
		10	27,3	512	4,33	814	5,46	211	2,78	3,82	21,5
		12	32,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	3,90	25,5
		11	34,4	844	4,95	1341	6,24	348	3,18	4,35	27,0

Номер профілю	b	d	Площа перерізу, $см^2$	Довідкові величини для осей						$Z_0, см$	Маса 1 м профілю, кг
				$X - X$		$X_0 - X_0$		$Y_0 - Y_0$			
	$мм$			$J_x, см^4$	$I_x, см$	$J_{x0max}, см^4$	$I_{x0max}, см$	$J_{y0min}, см^4$	$I_{y0min}, см$		
		12	37,4	913	4,94	1450	6,23	376	3,17	4,39	29,4
		14	43,3	1046	4,92	1662	6,20	431	3,16	4,47	34,0
		16	49,1	1175	4,89	1866	6,17	485	3,14	4,55	38,5
		18	54,8	1299	4,87	2061	6,13	537	3,13	4,63	43,0
		20	60,4	1419	4,85	2248	6,10	589	3,12	4,70	47,4
18	180	11	38,8	1216	5,60	1133	7,06	500	3,59	4,85	30,5
		12	42,2	1317	5,59	2093	7,04	540	3,58	4,89	33,1
20	200	12	47,1	1823	6,22	2896	7,84	749	3,99	5,37	37,0
		13	50,9	1961	6,21	3116	7,83	805	3,98	5,42	39,9
		14	54,6	2097	6,20	3333	7,81	861	3,97	5,46	42,8
		16	62,0	2363	6,17	3755	7,78	970	3,96	5,54	48,7
		20	76,5	2871	-6,12	4560	7,72	1182	3,93	5,70	60,1
		25	94,3	3466	6,06	5494	7,63 -	1438	3,91	5,89	74,0
		30	111,5	4020	6,00	6351	7,55	1688	3,89	6,07	87,6
22	220	14	60,4	2814 .	6,83	4470	8,60	1159	4,38	5,93	47,4
		16	68,6	3175	6,81	5045	8,58	1306	4,36	6,02	53,8
25	250	16	78,4	4717	7,76	7492	9,78	1942	4,98	6,75	61,5
		18	87,7	5247	7,73	8337	9,75	2158	4,96	6,83	68,9
		20	97,0	5765	7,71	9160	9,72	2370	4,94	6,91	76,1
		22	106,1	6270	7,69	9961	9,69	2579	4,93	7,00	83,3

Номер профілю	b	d	Площа перерізу, $см^2$	Довідкові величини для осей						$Z_0, см$	Маса 1 м профілю, кг
	$мм$	$X - X$		$X_0 - X_0$		$Y_0 - Y_0$					
		$J_x, см^4$		$I_x, см$	$J_{x0max}, см^4$	$I_{x0max}, см$	$J_{y0min}, см^4$	$I_{y0min}, см$			
		25	119,7	7006	7,65	11125	9,64	2887	4,91	7,11	94,0
		28	133,1	7717	7,61	12244	9,59	3190	4,89	7,23	104,5
		30	142,0	8177	7,59	12965	9,56	3389	4,89	7,31	111.4



Кутики нерівнобокі (ГОСТ 8510-72)

B — ширина більшої полиці;

b — ширина меншої полиці;

d — товщина полиці;

J — момент інерції;

i — радіус інерції;

x_0, y_0 — віддаль від центра ваги до зовнішніх граней полиць

Номер профілю	<i>B</i>	<i>b</i>	<i>d</i>	Площа перерізу, <i>см²</i>	Довідкові величини для осей								Кут нахилу осі tgα	Маса 1 <i>м</i> профілю <i>кг</i>
	мм	Х-Х			У-У				<i>X</i> ₀	<i>Y</i> ₀				
		<i>J_x</i> , <i>см⁴</i>	<i>i_x</i> , <i>см</i>		<i>J_y</i> , <i>см⁴</i>	<i>i_y</i> , <i>см</i>	<i>J_{u min}</i> , <i>см⁴</i>	<i>i_{u min}</i> , <i>см</i>	<i>см</i>	<i>см</i>				
2,5/1,6	25	16	3	1,16	0,70	0,78	0,22	0,44	0,13	0,34	0,42	0,86	0,392	0,91
3,2/2	32	20	3	1,49	1,52	1,01	0,46	0,55	0,28	0,43	0,49	1,08	0,382	1,17
			4	1,94	1,93	1,00	0,57	0,54	0,35	0,43	0,53	1,12	0,374	1,52
4/2,5	40	25	3	1,89	3,06	1,27	0,93	0,70	0,56	0,54	0,59	1,32	0,385	1,48
			4	2,47	3,93	1,26	1,18	0,69	0,71	0,54	0,63	1,37	0,381	* *1,94
4,5/2,8	45	28	3	2,14	4,41	1,43	1,32	0,79	0,79	0,61	0,64	1,47	0,382	1,68
			4	2,80	5,68	1,42	1,69	0,78	1,02	0,60	0,68	1,51	0,379	2,20
5/3,2	50	32	3	2,42	6,17	1,60	1,99	0,91	1,18	0,70	0,72	1,60	0,403	1,90
			4	3,17	7,98	1,59	2,56	0,90	1,52	0,69	0,76	U\$5	0,401	2,49
5,6/3,6	56	36	4	3,58	11,40	1,78	3,70	1,02	2,19	0,78	0,84	1,82	0,406	2,81
			5	4,41	13,80	1,77	4,48	1,01	2,66	0,78	0,88	1,86	0,404	3,46
6,3/4,0	63	40	4	4,04	16,30	2,01	5,16	1,13	3,07	0,87"	0,91	2,03	0,397	3,17
			5	4,98	19,90	2,00	6,26	1,12	3,72	0,86	0,95	2,08	0,396	3,91
			6	5,90	23,30	1,99	7,28	1,11	4,36	0,86	0,99	2,12	0,393	4,63
			8	7,68	29,60	1,96	9,15	1,09	5,58	0,85	1,07	2,20	0,386	6,03
7/4,5	70	45	5	5,59	27,80	2,23	9,05	1,27	5,34	0,98	1,05	2,28	0,406	4,39
7,5/5	75	50	5	6,11	34,80	2,39	12,50	1,43	7,24	1,09	1,17	2,39	0,436	4,79
			6	7,25	40,90	2,38	14,60	1,42	8,48	1,08	1,21	2,44	0,435	5,69
			8	9,47	52,40	2,35	18,50	1,40	10,90	1,07	1,29	2,52	0,430	7,43

Номер профілю	<i>B</i>	<i>b</i>	<i>d</i>	Площа перерізу, <i>см</i> ²	Довідкові величини для осей								Кут нахилу осі <i>tga</i>	Маса 1 <i>м</i> профілю <i>кг</i>
	мм	Х-Х			У-У				<i>X</i> ₀	<i>Y</i> ₀				
		<i>J</i> _х , <i>см</i> ⁴	<i>i</i> _х , <i>см</i>		<i>J</i> _у , <i>см</i> ⁴	<i>i</i> _у , <i>см</i>	<i>J</i> _{u min} , <i>см</i> ⁴	<i>i</i> _{u min} <i>см</i>	<i>см</i>	<i>см</i>				
8/5	80	50	5	6,36	41,60	2,56	12,70	1,41	7,58	1,09	1,13	2,60	0,387	4,99
			6	7,55	49,00	2,55	14,80	1,40	8,88	1,08	1,17	2,65	0,386	5,92
9/5,6	90	56	5,5	7,86	65,3	2,88	19,7	1,58	11,8	1,22	1,26	2,92	0,384	6,17
			6,0	8,54	70,6	2,88	21,2	1,58	12,7	1,22	1,28	2,95	0,384	6,70
			8,0	11,18	90,9	2,85	27,1	1,56	16,3	1,21	1,36	3,04	0,380	8,77
10/6,3	100	63	6,0	9,59	98,3	3,20	30,6	1,79	18,2	1,38	1,42	3,23	0,393	7,53
			7,0	11,10	113,0	3,19	35,0	1,78	20,8	1,37	1,46	3,28	0,392	8,70
			8,0	12,6	127,0	3,18	39,2	1,77	23,4	1,36	1,50	3,32	0,391	9,87
			10,0	15,50	154,0	3,15	47,1	1,75	28,3	1,35	1,58	3,40	0,387	2,10
11/7	110	70	6,5	11,40	142,0	3,53	45,6	2,00	26,9	1,53	1,58	3,55	0,402	9,98
			8,0	13,90	172,0	3,51	54,6	1,98	32,3	1,52	1,64	3,61	0,400	10,90
12,5/8	125	80	7,0	14,10	227,0	4,01	73,7	2,29	43,4	1,76	1,80	4,01	0,407	11,00
			8,0	16,00	256,0	4,00	83,0	2,28	48,8	1,75	1,84	4,05	0,406	12,50
			10,0	19,70	312,0	3,98	100,0	2,26	59,3	1,74	1,92	4,14	0,404	15,50
			12,0	23,40	365,0	3,95	117,0	2,24	69,5	1,72	2,00	4,22	0,400	18,30
14/9	140	90	8,0	18,00	364,0	4,49	120,0	2,58	70,3	1,98	2,03	4,49	0,411	14,10
			10,0	22,20	444,0	4,47	146,0	2,56	85,5	1,96	2,12	4,58	0,409	17,50
16/10	160	100	9,0	22,90	606,0	5,15	186,0	2,85	110,0	2,20	2,23	5,19	0,391	18,0
			10,0	25,30	667,0	5,13	204,0	2,84	121,0	2,19	2,28	5,23	0,390	19,80

Продовження додатку 8

Номер профілю	<i>B</i>	<i>b</i>	<i>d</i>	Площа перерізу, $см^2$	Довідкові величини для осей								Кут нахилу осі tga	Маса 1 м профілю $кг$	
	мм				Х-Х		У-У				X_0	Y_0			
					$J_x, см^4$	$i_x, см$	$J_y, см^4$	$i_y, см$	$J_{u\ min}, см^4$	$i_{u\ min}\ см$	$см$	$см$			
			12,0	30,00	784,0	5,11	239,0	2,82	142,0	2,18	2,36	5,32	0,388	23,60	
			14,0	34,70	897,0	5,09	272,0	2,80	162,0	2,16	2,43	5,40	0,385	27,30	
18/11	180	110	10,0	28,30	952,0	5,80	276,0	3,12	165,0	2,42	2,44	5,88	0,375	22,20	
			12,0	33,70	1123	5,77	324,0	3,10	194,0	2,40	2,52	5,97	0,374	26,40	
20/12,5	200	125	11	34,9	1449	6,45	446	3,58	264	2,75	2,79	6,5	0,392	27,4	
			12	37,9	1568	6,43	482	3,57	285	2,74	2,83	6,54	0,392	29,7	
			14	43,9	1801	6,41	551	3,54	327	2,73	2,91	6,62	0,390	34,4	
			16	49,8	2026	6,38	617	3,52	367	2,72	2,99	6,71	0,388	39,1	
25/16	250	160	12	48,3	3147	8,07	1032	4,62	604	3,54	3,53	7,97	0,410	37,9	
			16	63,6	4091	8,02	1333	4,58	781	3,50	3,69	8,14	0,408	49,9	
			18	71,1	4545	7,99	1475	4,56	866	3,49	3,77	8,23	0,407	55,8	
			20	78,5	4987	7,97	1613	4,53	949	3,48	3,85	8,31	0,405	67,7	

Значення допустимих напружень деяких конструкційних матеріалів

Матеріал	Твердість, НВ	Допустимі напруження [σ], МПа	
		розтяг	стиск
Чавун	170 – 240	14	50
Низьковуглецева сталь марки Ст3	150 – 170	160	160
Вуглецева якісна марки сталь 45	160 – 190	200	200
Конструкційна легована сталь марки 40Х	265 – 315	300	300
Мідь	3,5	80	80
Латунь	55 – 150	100	100
Бронза	66 – 200	80	100
Дюралюміній	45 – 113	125	125

Таблиця 2

Значення модуля пружності деяких конструкційних матеріалів

Матеріал	Модуль пружності Е, МПа	Модуль зсува G, МПа
Сталь	$2 \cdot 10^5 - 2,2 \cdot 10^5$	$0,81 \cdot 10^5$
Чавун	$1,15 \cdot 10^5 - 1,6 \cdot 10^5$	$0,45 \cdot 10^5$
Мідь та її сплави (латунь, бронза)	$1,0 \cdot 10^5$	$0,25 \cdot 10^5$
Дюралюміній	$0,7 \cdot 10^5 - 0,99 \cdot 10^5$	$0,27 \cdot 10^5$
Склопластик	$1 \cdot 10^4$	$0,22 \cdot 10^5$
Деревина: вздовж волокон	$0,11 \cdot 10^5$	$0,006 \cdot 10^5$
поперек волокон	$0,05 \cdot 10^5 - 0,14 \cdot 10^5$	-
Бетон	0,03	-

Додаток Б**Таблиця 1**

Нормальні лінійні розміри по СТ СЭВ 514-77 (витяг лінійних розмірів з стандарту в інтервалі від 10 до 950мм)

Ряд															
Ra5	Ra10	Ra20	Ra40	Ra5	Ra10	Ra20	Ra40	Ra5	Ra10	Ra20	Ra40	Ra5	Ra10	Ra20	Ra40
10	10	10	10	25	25	25	25	63	63	63	63	160	160	160	160
			10.5				26				67				170
		11	11			28	28			71	71			180	180
			11.5				30				75				190
	12	12	12		32	32	32		80	80	80		200	200	200
			13				34				85				210
		14	14			36	36			90	90			220	220
			15				38				95				240
16	16	16	16	40	40	40	40	100	100	100	100	250	250	250	250
			17				42				105				260
		18	18			45	45			110	110			280	280
			19				48				120				300
	20	20	20		50	50	50		125	125	125		320	320	320
			21			56	56				130				340
		22	22				60				140			360	360
		24	24								150				380
Примітка: Ряд Ra5 слід ряду Ra10, ряд Ra10 – ряду Ra20 і т.д. Значення нормальних лінійних розмірів по ряду Ra40 при $l > 380\text{мм}$: 400; 420; 450 480; 500; 560; 600; 630; 670; 710; 750; 800; 850; 950; 950мм															

**Префікси та позначення для утворення кратних і частинних
одиниць Міжнародної системи СІ**

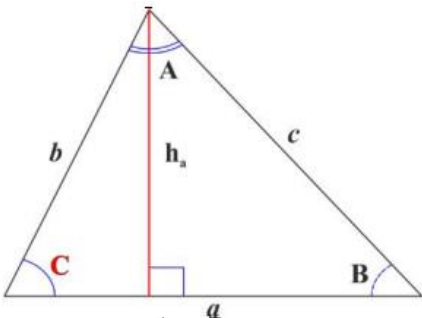
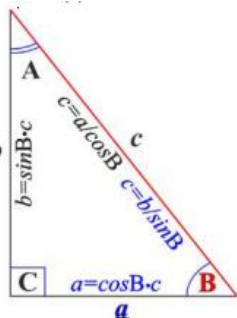
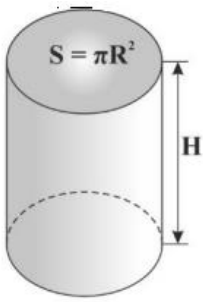
Кратні одиниці			Частинні одиниці		
Кратність	Префікс (укр. / міжнар.)	Позначенн я (укр. / міжнар.)	Частка	Префікс (укр. / міжнар.)	Позначенн я (укр. / міжнар.)
10^1	дека / deca	да / da	10^{-1}	деци / deci	д / d
10^2	гекто / hecto	г / h	10^{-2}	санти / centi	с / c
10^3	кіло / kilo	к / k	10^{-3}	мілі / milli	м / m
10^6	мега / mega	М / M	10^{-6}	мікро / micro	мк / μ
10^9	гіга / giga	Г / G	10^{-9}	нано / nano	н / n
10^{12}	тера / tera	Т / T	10^{-12}	піко / pico	п / p
10^{15}	пета / peta	П / P	10^{-15}	фемто / femto	ф / f
10^{18}	екса / exa	Е / E	10^{-18}	ато / atto	а / a
10^{21}	зета / zetta	З / Z	10^{-21}	zepto / zepto	з / z
10^{24}	йота / yotta	Й / Y	10^{-24}	йокто / yocto	й / y

Грецький і латинський алфавіти

<i>Грецький алфавіт</i>								
1.	Αα	(альфа)	9.	Ιι	(йота)	17.	Ρρ	(ро)
2.	Ββ	(бета)	10.	Κκ	(каппа)	18.	Σσ, ς	(сігма)
3.	Γγ	(гамма)	11.	Λλ	(лямбда)	19.	Ττ	(тау)
4.	Δδ	(дельта)	12.	Μμ	(мю (мі))	20.	Υυ	(іпсилон)
5.	Εε	(епсилон)	13.	Νν	(ню (ні))	21.	Φφ	(фі)
6.	Ζζ	(дзета)	14.	Ξξ	(ксі)	22.	Χχ	(хі)
7.	Ηη	(ета)	15.	Οο	(омікрон)	23.	Ψψ	(псі)
8.	Θθ	(тета)	16.	Ππ	(пі)	24.	Ωω	(омега)
<i>Латинський алфавіт</i>								
1.	A a	(а)	10.	J j	(йот)	19.	S s	(ес)
2.	B b	(бе)	11.	K k	(ка)	20.	T t	(те)
3.	C c	(це)	12.	L l	(ель)	21.	U u	(у)
4.	D d	(де)	13.	M m	(ем)	22.	V v	(ве)
5.	E e	(е)	14.	N n	(ен)	23.	W w	(дубль ве)
6.	F f	(еф)	15.	O o	(о)	24.	X x	(ікс)
7.	G g	(ге)	16.	P p	(пе)	25.	Y y	(ігрек)
8.	H h	(аш)	17.	Q q	(ку)	26.	Z z	(зет)
9.	I i	(і)	18.	R r	(ер)			

Деякі відомості з математики

Сталі числа та деякі відомості з геометрії

$\pi = 3,1416$	$e = 2,7183$	$\ln 10 = 2,3026$	$\lg e = 0,4343$
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$		$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	
$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$		$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	
Теорема косинусів $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$		Косинус кута В $\cos B = \frac{a}{c}$ $a = \cos B \cdot c$ $c = \frac{a}{\cos B}$	Синус кута В $\sin B = \frac{b}{c}$ $b = \sin B \cdot c$ $c = \frac{b}{\sin B}$
Теорема синусів $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$		де а, b, с – сторони трикутника; А, В, С – відповідні їм кути (для будь-якого трикутника)	
		 	
Тангенс кута В $\tan B = \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{b}{a}$		Котангенс кута В $\cot B = \frac{\cos B}{\sin B} = \frac{a}{b}$	

Площа трикутника	$S = \frac{1}{2}ah_a$ дорівнює половині добутку довжини сторони трикутника та довжини висоти, проведеної до цієї сторони	Площа трикутника	$S = \frac{1}{2}ab \sin C$ дорівнює половині добутку двох його сторін, помноженого на синус кута між ними
Довжина кола	$L = 2\pi R$	Радіан	$1 \text{ рад} = 360^\circ/2\pi = 180^\circ/\pi = 57^\circ$

Сталі числа та деякі відомості з геометрії

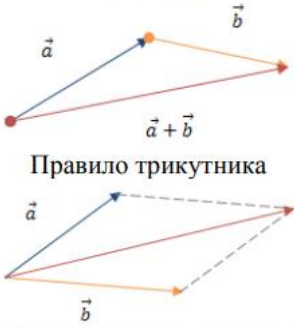
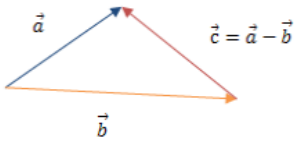
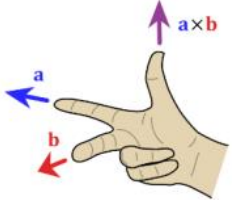
Площа кола	$S = (\pi d^2)/4 = \pi R^2$	Площа поперечного перерізу циліндра	$s = \pi d^2/4$
Об'єм циліндра	$V = SH = \pi R^2 H$		
Площа поверхні сфери	$S = 4\pi R^2$	Площа поверхні тора	$A = 4\pi^2 Rr = (2\pi r)(2\pi R)$
Об'єм кулі	$S = 4/3 \pi R^3$	Об'єм тора	$V = (\pi r^2)(2\pi R)$ $V = 2\pi^2 Rr^2$

Деякі похідні основних елементарних функцій

$C' = 0,$ $(C = \text{const})$	$x' = 1$	$(x^n)' = nx^{n-1}$	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$	$(a^x)' = a^x \ln a$	$(e^x)' = e^x$
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{ctg} x)' = \frac{1}{\sin^2 x}$	$(\sin x)' = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

<i>Правила диференціювання</i>	
$(u \pm v)' = u' \pm v'$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$
$(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$	$(C \cdot u)' = C \cdot u'$
<i>Деякі інтеграли</i>	
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, (n \neq -1)$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}$
$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}$	$\int \frac{dx}{x} = \ln x $
$\int e^x dx = e^x$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$
$\int \sin x dx = -\cos x$	$\int \cos x dx = \sin x$
$\int \tan x dx = -\ln \cos x $	$\int \operatorname{ctan} x dx = \ln \sin x $
$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x)$	$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x)$
$\int_{x_1}^{x_2} C \frac{dx}{x^2} = C \cdot \left(-\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}\right) = -C \cdot \left(\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1}\right),$ де $C = \text{const}$	

Довідка про вектори

Додавання векторів	Різниця векторів
$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$  Правило трикутника Правило паралелограма	$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$  $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$
Скалярний добуток	Векторний добуток
$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \cos(\vec{a} \wedge \vec{b})$ Скалярний добуток векторів дорівнює добутку їх довжини на косинус кута між ними	$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \sin(\vec{a} \wedge \vec{b})$ Векторний добуток дорівнює добутку довжини векторів на синус кута між ними  Напрямок векторного добутку знаходимо за правилом правої руки

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Писаренко Г.С. та ін. Опір матеріалів. Підручник – К.: Вища школа, 2004. – 655 с.
2. . Механіка матеріалів: навчальний посібник / Чаусов М.Г., Пилипенко А.П., Куценко А.Г., Бондар М.М. – Ніжин. : ТОВ «Видавництво «АспектПоліграф», 2018. – 560 с.
3. Прикладна механіка (опір матеріалів): навчальний посібник / М.Г.Чаусов, М.М.Бондар, А.П.Пилипенко, А.Г. Куценко. – Київ : ТОВ «Видавництво», 2019. – 736 с. (Рекомендовано Вченою радою НУБіП України МОН України як навчальний посібник для вищих навчальних закладів III – IV ступенів акредитації (протокол № 4 від 26 листопада 2019 р.))
4. Калетнік Г.М., Чаусов М.Г., Швайко В.М. та ін: Основи інженерних методів розрахунків на міцність і жорсткість. Ч. I, II: Підручник / За ред. Г.М. Калетніка, М.Г. Чаусова. — К.: «Хай-Тек Прес», 2011. 432 с.: іл.
5. Навчально-методичний комплекс з вивчення навчальної дисципліни «Опір матеріалів» за спеціальностями 131 «Прикладна механіка», 133 «Галузеве машинобудування» та 274 «Автомобільний транспорт» (автори: Кравченко О.П., Опанасюк Є.Г., Можаровський М.М.), 2019. 118 с.
6. Райковська Г.О., Можаровський М.М. Курс лекцій з тестовими завдання. Частина 1. Елементи розрахунків на міцність. Методичний посібник для здобувачів освітнього ступеня «бакалавр», денної та заочної форми навчання [Електронне видання] / Г.О. Райковська, М.М. Можаровський. – Житомир : ЖДТУ, 2019. – 178 с.
7. Розман В.П. Прикладна механіка. Опір матеріалів: Навчальний посібник. – К. : Центр навчальної літератури, 2004. – 124 с.
8. Гонтаровський В.П., Гонтаровська Т.М. Опір матеріалів. Навчально – методичний посібник для самостійної роботи студентів. – Житомир: ЖДТУ, 2006. – 72 с.
9. Гонтаровський В.П., Гонтаровська Т.М. Збірник задач з опору матеріалів. – Житомир: ЖДТУ, 2009. – 64 с.

Підручник

ШУМЛЯКІВСЬКИЙ Володимир Петрович

МОЖАРОВСЬКИЙ Микола Мар'янович

ПИЛИПЕНКО Олександр Михайлович

Підручник

Електронне видання

Комп'ютерний дизайн та верстка: Можаровський М.М.,

Добровінський О.О.

Державний університет «Житомирська політехніка»

вул. Чуднівська, 103, м. Житомир, 10005

ISBN 978-966-683-690-1 © Шумляківський В.П. 2023