ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

ЗАДАЧА 1

Класичне визначення ймовірності

1.1 Студент знає відповіді на 45 із 60 питань програми. Кожен екзаменаційний білет містить 2 питання. Яка ймовірність того, що студент складе іспит, якщо для цього він має відповісти на обидва питання?

1.2 Дві групи по 10 спортсменів проводять жеребкування для присвоєння номерів учасникам змагань (від 1 до 10 в кожній групі). Два брати входять в склад різних груп. Знайти ймовірність того, що обидва брати отримають: а) номер 3; б) однаковий номер.

1.3 Із колоди карт (36 штук) дістають навмання дві. Яка ймовірність того, що це десятка і туз?

1.4 Серед 100 лотерейних білетів є 2 виграшних. Яка ймовірність того, що серед трьох придбаних білетів рівно один виграшний?

1.5 В гості прийшли п'ять осіб. Йдучи по домівках, гості вибирають свої черевики навмання. Знайти ймовірність того, що гість, який виходить першим, візьме саме свої черевики.

1.6 Є п'ять карток розрізної азбуки з буквами А, Б, В, Г, Д. Навмання одна за одною вибираються три і розташовуються в порядку появи. Яка ймовірність того, що утвориться слово “ДВА”?

1.7 Гральний кубик підкидається 5 разів. Яка ймовірність того, що шістка випаде рівно один раз?

1.8 В ящику є десять куль з номерами 1, 2, ..., 10. Навмання дістають п'ять куль. Яка ймовірність того, що серед витягнутих куль знайдуться кулі з номерами 7 та 8?

1.9 В замку на спільній осі 4 диски. Кожен диск розділений на 10 секторів, на яких написані різні цифри. Замок відчиниться лише в тому випадку, якщо диски встановлено так, що цифри на них складуть певну комбінацію (код). Знайти ймовірність того, що при довільному встановленні дисків замок буде відчинено.

1.10 Набираючи номер телефону абонент забув останні дві цифри і пам'ятаючи лише що вони різні, набрав їх навмання. Знайти ймовірність того, що абонент правильно набрав номер телефону.

1.11 Знайти ймовірність того, що дні народження 12 осіб припадуть на різні місяці року.

1.12 У ліфт на першому поверсі зайшли три особи, кожна з яких може вийти на будь-якому поверсі з другого по дев'ятий. Яка ймовірність того, що усі пасажири вийдуть на різних поверхах?

1.13 Десять осіб шикуються в колону в довільному порядку. Яка ймовірність того, що дві певні особи стоятимуть поруч?

1.14 На картках лото написано числа від 1 до 10. Знайти ймовірність того, що на трьох вибраних навмання картках написані числа менші 6.

1.15 Із букв розрізної азбуки складено слово "АНАНАС". Малюк розсипав ці букви і знову зібрав у довільному порядку. Знайти ймовірність того, що у нього знову утвориться слово "АНАНАС".

1.16 Куб, всі грані якого пофарбовано, розрізано на тисячу однакових кубиків, які ретельно перемішали. Знайти ймовірність того, що навмання взятий кубик буде мати дві пофарбовані грані.

1.17 Підкидають шість гральних кубиків. Яка ймовірність того, що на всіх кубиках випаде різне число очок?

1.18 В урні є 8 послідовно занумерованих куль. З урни навмання одну за одною витягують три кулі. Яка ймовірність того, що номери витягнутих куль будуть розміщені в порядку зростання?

1.19 Навмання записано двозначне число. Знайти ймовірність того, що його цифри розміщені в порядку зростання і відрізняються рівно на дві одиниці.

1.20 За умовами лотереї "СУПЕР ЛОТО" учасник лотереї, який вгадає 3, 4, 5 або 6 номерів з відібраних при випадковому розіграші шести номерів з 49, одержує грошовий приз. Знайти ймовірність того, учасник лотереї вгадає: а) всі 6 номерів (джекпот); б) не менше ніж чотири номери.

1.21 Колоду із 36 карт ретельно перетасовано. Яка ймовірність того, що перші чотири карти в колоді тузи?

1.22 Цифри 1,2,3,4,5,6 розставлено випадковим чином. Знайти ймовірність того, що 1 і 2 будуть стояти поруч, причому в порядку зростання.

1.23 З урни, в якій є 10 різних куль, дістають навмання з поверненням 5 куль. Знайти ймовірність того, що серед них немає однакових.

1.24 Десять осіб навмання вибирають собі місце за круглим столом. Знайти ймовірність того, що певні дві особи будуть сидіти поруч.

1.25 До чотиристороннього перехрестя з кожної сторони під'їхало по одному автомобілю. Для кожного автомобіля є однаково можливими всі чотири маневри: поїхати назад, прямо, наліво або направо. Знайти ймовірність того, що три автомобілі поїдуть по одній з вулиць.

1.26 Для зменшення загальної кількості ігор, 18 команд розбивають випадковим чином на дві групи по 9 команд. Знайти ймовірність того, що дві найсильніші команди потраплять до однієї групи.

1.27 В чотири вагони потягу заходять 9 пасажирів. Яка ймовірність того, що в перший вагон зайде 3 пасажири?

1.28 Колоду із 36 карт ретельно перетасовано. Яка ймовірність того, що перша і остання карта – туз?

1.29 Десять осіб, серед яких є X та Y, стоять у черзі. Знайти ймовірність того, що між X та Y знаходяться рівно дві особи.

1.30 В партії 80 виробів, з яких чотири – браковані. Партія довільним чином розділена на дві рівні частини, які відправлені двом споживачам. Яка ймовірність того, що браковані вироби дістануться обом споживачам порівну?

ЗАДАЧА 2

Теореми додавання та множення ймовірностей

2.1 У двох партіях відповідно 75 % та 80 % якісних виробів. Навмання беруть по одному виробу з кожної партії. Знайти ймовірність того, що серед них: а) обидва вироби якісні; б) хоча б один якісний; б) один якісний і один бракований.

2.2 При вмиканні запалення двигун починає працювати з ймовірністю 0,8. Знайти ймовірність того, що для запуску двигуна запалення доведеться вмикати: а) три рази; б) не більше трьох разів.

2.3 Розрив електричного ланцюга може відбутися внаслідок виходу з ладу одного елемента k_1 або одночасного виходу з ладу двох елементів k_2 і k_3, які виходять з ладу незалежно один від одного з ймовірностями 0,1; 0,2; 0,3 відповідно. Знайти ймовірність розриву ланцюга.

2.4 В механізм входять три однакові деталі. Робота механізму порушиться, якщо при його збиранні будуть встановлені всі три деталі розміру більшого, ніж вказано на кресленні. У складальника 5 деталей з 12 мають більший розмір. Знайти ймовірність нормальної роботи зібраного з цих деталей механізму, якщо складальник бере деталі навмання.

2.5 Ймовірність виготовлення деталі першого ґатунку на першому верстаті рівна 0,7, на другому – 0,8. На першому верстаті виготовлено дві деталі, а на другому – три. Знайти ймовірність того, що всі деталі першого ґатунку.

2.6 Робітник обслуговує три верстати. Ймовірність того, що протягом однієї години перший верстат потребує уваги робітника дорівнює 0,3, другий – 0,4 і третій – 0,2. Знайти ймовірність того, що протягом однієї години хоча б один верстат потребує уваги робітника.

2.7 Ймовірність виходу з ладу k-го блоку обчислювальної машини за час *t* дорівнює $k \cdot 10^{-2}$ $k = 1, 2, 3, 4$. Знайти ймовірність того, що за цей час жоден з блоків не вийде з ладу, якщо блоки працюють незалежно.

2.8 Ймовірності влучення в об'єкт для першої, другої та третьої гармат дорівнюють відповідно 0,9; 0,6; 0,8. Гармати одночасно роблять по одному пострілу. Знайти ймовірність того, що хоча б одна з гармат влучить в об'єкт.

2.9 Серед деталей які виробляє робітник в середньому 4 % бракованих. Знайти ймовірність того, що серед взятих п'яти деталей не буде жодної бракованої.

2.10 Деталь проходить три стадії обробки. Ймовірність того, що вона виявиться бракованою на першій стадії обробки, дорівнює 0,02, другій – 0,03, третій – 0,02 .Знайти ймовірність того, що деталь не буде бракованою після трьох стадій, припускаючи, що поява браку на окремих стадіях – незалежні події.

2.11 В цеху 6 двигунів. Кожен двигун працює в даний момент з ймовірністю 0,8. Знайти ймовірність того, що в даний момент працює 4 двигуни.

2.12 З колоди гральних карт (36 штук) навмання дістають чотири карти. Знайти ймовірність того, що серед них буде хоча б один туз.

2.13 Стрілець стріляє по мішені, яка віддаляється. Ймовірність влучення в неї на початку стрільби дорівнює 0,8, а після кожного пострілу зменшується на 0,1. Знайти ймовірність того, що стрілець влучить з третього разу.

2.14 Ймовірність того, що необхідний матеріал є на першій базі дорівнює 0,9, на другій – 0,8, на третій – 0,6. Знайти ймовірність того, що цей матеріал є рівно на двох базах.

2.15 Ймовірність одного влучення в ціль при пострілі з двох гармат дорівнює 0,46. Знайти ймовірність влучення в ціль другою гарматою, якщо для першої гармати ця ймовірність дорівнює 0,7.

2.16 Радист тричі викликає кореспондента. Ймовірність того, що буде прийнято перший виклик дорівнює 0,2, другий – 0,3, третій – 0,4. Події, які полягають в тому, що кореспондент почує виклик, незалежні. Знайти ймовірність того, що кореспондент почує виклик радиста.

2.17 Три верстати працюють незалежно. Ймовірність того, що перший верстат протягом однієї зміни вийде з ладу, дорівнює 0,1, другий – 0,2, третій – 0,3. Знайти ймовірність того, що протягом зміни хоча б один верстат не вийде з ладу.

2.18 Ймовірність того, що протягом однієї зміни виникне несправність верстату, дорівнює 0,05. Знайти ймовірність того, що не виникне жодної несправності за чотири зміни.

2.19 Ймовірність того, що подія D відбудеться хоча б один раз у трьох незалежних випробуваннях, дорівнює 0,784. Знайти ймовірність події D в одному випробуванні, якщо в кожному випробуванні ця ймовірність одна і та сама.

2.20 Для повідомлення про аварію встановлено два незалежно працюючих сигналізатори. Ймовірність того, що при аварії спрацює перший сигналізатор, дорівнює 0,7, другий – 0,9. Знайти ймовірність того, що при аварії: а) спрацюють обидва сигналізатори; б) спрацює хоча б один сигналізатор; в) спрацює рівно один сигналізатор; г) не спрацює жоден сигналізатор.

2.21 Фірму перевіряють незалежно один від одного три аудитори. Ймовірність того, що перший аудитор знайде недоліки становить 0,5; другий – 0,7; третій – 0,4. Знайти ймовірність того, що на фірмі будуть виявлені недоліки.

2.22 Спортсмену надається чотири спроби для виконання кваліфікації. Ймовірність виконання кваліфікації при одній спробі становить 0,8. Знайти ймовірність того, що спортсмен використає всі спроби.

2.23 Є дві коробки, в першій з яких 2 білі та 3 чорні кулі, а в другій – 4 білі та 2 чорні. З кожної коробки виймається по одній кулі. Знайти ймовірність того, що вони одного кольору.

2.24 Партія із 100 виробів проходить вибірковий контроль. Умова непридатності всієї партії – наявність хоча б одного бракованого виробу серед чотирьох, що проходять контроль. Знайти ймовірність того, що ця партія буде забракована, якщо вона містить шість бракованих виробів.

2.25 Ймовірність того, що при одному пострілі стрілець влучить в ціль, дорівнює 0,8. Скільки пострілів повинен зробити стрілець, щоб з ймовірністю не менше 0,99 бути впевненим у влученні в ціль хоча б один раз?

2.26 В першій коробці 2 білих, 3 червоних і 5 синіх куль, а в другій – 1 біла, 6 червоних і 3 синіх. З кожної коробки дістають навмання по одній кулі. Знайти ймовірність того, що серед цих куль одна синя.

2.27 В магазині продаються 10 телевізорів, три з яких мають дефекти. Яка ймовірність того, що покупцю для придбання телевізора знадобиться не більше двох спроб?

2.28 На підприємстві брак складає 2 % від загальної кількості виробів. Серед небракованих виробів вироби першого ґатунку складають 95 %. Знайти ймовірність того, що навмання взятий виріб виявиться першого ґатунку, якщо виріб взято: а) із числа небракованих; б) із загальної маси виготовленої продукції.

2.29 З усіх родин, які мають двох дітей, обрано одну. Усі елементарні події однаково можливі. Знайти ймовірність того, що обидві дитини – хлопчики, якщо відомо, що в сім'ї є хлопчик.

2.30 Студент прийшов на залік знаючи відповіді на 24 питання з 30. Яка ймовірність того, що студент складе залік, якщо після відмови відповісти на запитання викладач буде задавати ще одне питання?

ЗАДАЧА 3

Формула повної ймовірності

3.1 Із 1000 ламп 520 належать першій партії, 90 – другій, а решта третій. В першій партії 8 %, в другій – 5 %, в третій – 6 % бракованих ламп. Яка ймовірність того, що навмання вибрана лампа буде бракованою?

3.2 В даний район вироби поставляються трьома фірмами у співвідношенні 5:8:7. Серед продукції першої фірми стандартних виробів 90 %, другої – 80 %, третьої – 75 %. Покупцем придбано один виріб. Знайти ймовірність того, що придбаний виріб стандартний.

3.3 В двох коробках знаходиться по 20 деталей, з них стандартних: в першій – 14, в другій – 16. З першої коробки навмання вибрано одну деталь та перекладено в другу. Знайти ймовірність того, що навмання вибрана після цього деталь з другої коробки буде стандартною.

3.4 В тирі є 7 гвинтівок, серед яких три з оптичним прицілом. Ймовірність попадання в ціль при одному пострілі із гвинтівки з оптичним прицілом для даного спортсмена рівна 0,96, без оптичного прицілу – 0,75. Знайти ймовірність попадання в ціль, якщо спортсмен зробить один постріл з навмання вибраної гвинтівки.

3.5 Кількість вантажних авто на даному підприємстві втричі перевищує кількість легкових. Дизельні двигуни мають 50 % вантажних авто та 30 % легкових. Яка ймовірність того, що навмання вибраний автомобіль матиме дизельний двигун?

3.6 В двох коробках знаходяться мікросхеми: в першій – 8 мікросхем, з них одна дефектна; в другій – 11, з них дві дефектні. З першої коробки навмання перекладено одну мікросхему в другу коробку. Знайти ймовірність того, що навмання вибрана з другої коробки мікросхема буде дефектною.

3.7 Є мікросхеми двох видів у кількості 18 та 10 штук відповідно. Ймовірність відмови мікросхеми першого виду – 0,03, другого виду – 0,02. Навмання взято одну мікросхему і вмонтовано в електронний вузол. Знайти ймовірність того, що вузол вийде з ладу внаслідок відмови мікросхеми.

3.8 Прилад, встановлений на літаку, може працювати в двох режимах: в умовах нормального польоту та в умовах перевантаження при злеті і посадці. Перший режим здійснюється в 80 % всього часу польоту, другий – в 20 %. Ймовірність того, що прилад вийде з ладу за час польоту в нормальному режимі рівна 0,2, в умовах перевантаження – 0,4. Знайти ймовірність безвідмовної роботи приладу за час польоту.

3.9 Три автомати виготовляють деталі, які потрапляють на спільний конвеєр. Потужності автоматів відносяться як 2:4:4. Ймовірність того, що якість деталі відмінна для цих автоматів відповідно рівна: 0,7; 0,8 і 0,9. Знайти ймовірність того, що навмання взята з конвеєра деталь буде відмінної якості.

3.10 В тирі є п’ять рушниць, ймовірність влучення в мішень з яких при одному пострілі рівна відповідно 0,5; 0,8; 0,7; 0,6; 0,9. Визначити ймовірність попадання в мішень при одному пострілі, якщо рушниця вибирається навмання.

3.11 В першій коробці знаходиться 8 білих та 3 чорних кульки, в другій – 4 білих та 6 чорних. З першої коробки в другу переклали навмання 2 кульки. Після чого, з другої коробки виймають одну кульку. Знайти ймовірність того, що вона біла.

3.12 В артилерійській військовій частині 20 гармат, з них чотири непристріляні. Ймовірність попадання в ціль з пристріляної гармати рівна 0,8, з непристріляної – 0,3. Знайти ймовірність враження цілі, якщо буде зроблено один постріл з навмання вибраної гармати.

3.13 На заводі по виготовленню гвинтів перший верстат виробляє 25 %, другий – 35 %, третій – 40 % всіх виробів. В їх продукції брак складає відповідно 3 %, 2 % та 1 %. Знайти ймовірність того, що навмання вибраний гвинт не є бракованим.

3.14 Радіолампа може належати до однієї з чотирьох партій з ймовірностями $p_1 = 0,2$, $p_2 = 0,4$, $p_3 = 0,3$, $p_4 = 0,1$. Ймовірність того, що лампа пропрацює заданий час, для цих партій рівна відповідно 0,5; 0,7; 0,6; 0,8. Знайти ймовірність того, що навмання вибрана лампа пропрацює заданий час.

3.15 Стріляють по 9 мішенях типу X, по шести – типу Y і по п’яти – типу Z. Ймовірність попадання при одному пострілі в мішень типу X рівна 0,6, типу Y – 0,5, типу Z – 0,8. Знайти ймовірність враження мішені при одному пострілі, якщо мішень вибирається навмання.

3.16 З першого автомата на конвеєр потрапляє 30 %, з другого – 25 %, з третього – 20 %, з четвертого – 25 % деталей. Серед деталей першого автомата 1 % бракованих, другого – 2 %, третього – 1 %, з четвертого – 5 %. Знайти ймовірність того, що навмання вибрана з конвеєра деталь виявиться бракованою.

3.17 В коробці знаходиться 25 деталей, виготовлених на першому заводі, 15 – на другому, 20 – на третьому. Серед деталей, виготовлених на першому заводі, 80 % відмінної якості, на другому – 70 %, на третьому – 90 %. Знайти ймовірність того, що навмання вибрана з коробки деталь виявиться відмінної якості.

3.18 Є дві партії виробів по 20 шт. кожна, при чому в кожній з них є по два бракованих вироби. Виріб, навмання вибраний з першої партії, перекладено в другу, після чого навмання вибрано виріб з другої партії. Знайти ймовірність того, що цей виріб виявиться бракованим.

3.19 На деякому підприємстві перша машина виробляє 15 %, друга – 45 %, третя – 40 % всіх деталей. В їх продукції браку, відповідно 8, 6, 3 %. Яка ймовірність того, що навмання вибрана деталь небракована?

3.20 Деталі виготовляють на двох заводах. Об'єм продукції другого заводу в два рази більший, ніж першого. Серед деталей першого заводу 5 % бракованих, другого – 3 %. Знайти ймовірність того, що навмання вибрана деталь виявиться небракованою.

3.21 Працівник друкарні, при наборі тексту, користується двома комплектами літер: в першому – 80 %, в другому – 95 % шрифту відмінної якості. Знайти ймовірність того, що навмання вибрана літера з навмання вибраного комплекту виявиться відмінної якості.

3.22 Виріб перевіряється на стандартність одним з двох контролерів. Ймовірність того, що виріб потрапить до першого контролера рівна 0,6, до другого – 0,4. Ймовірність того, що стандартний виріб буде визнано стандартним першим контролером, рівна 0,92, другим – 0,99. Знайти ймовірність того, що стандартний виріб при перевірці буде визнано стандартним.

3.23 В продаж надходять телевізори трьох заводів. Продукція першого заводу містить 10 % телевізорів з прихованим дефектом, другого – 4 %, третього – 6 %. Знайти ймовірність придбання справного телевізора, якщо магазин одержав 20 % телевізорів з першого заводу, 45 % – з другого, 35 % – з третього.

3.24 Ймовірності того, що під час роботи комп'ютера збій виникне в процесорі, в оперативній пам'яті, в інших вузлах відносяться як 2:3:5. Ймовірності виявлення збою в процесорі, в оперативній пам'яті та в інших вузлах відповідно рівні 0,85; 0,95; 0,8. Знайти ймовірність того, що збій, який виник в машині, буде виявлено.

3.25 В цеху працює 26 верстатів. З них 12 марки X, 8 марки Y і 6 марки Z. Верстати виготовляють відповідно 80 %, 70 % і 90 % деталей відмінної якості. Який процент деталей відмінної якості випускає цех в цілому, якщо продуктивність верстатів однакова?

3.26 Торгова фірма одержує телевізори від трьох виробників у співвідношенні 1:4:5. Досвід показує, що телевізори цих виробників не потребують ремонту на протязі гарантійного терміну відповідно в 98 %, 88 % та 92 % випадків. Знайти ймовірність того, що придбаний покупцем телевізор не потребуватиме ремонту на протязі гарантійного терміну.

3.27 В першій коробці знаходиться 3 білих та 7 чорних кульок, в другій – 4 білі та 6 чорних, в третій – 8 білих та 2 чорних. Знайти ймовірність того, що навмання вибрана кулька з навмання вибраної коробки виявиться чорною.

3.28 В коробку з трьома однаковими деталями кинуто стандартну деталь, а потім навмання вибрано одну деталь. Знайти ймовірність того, що вона стандартна, якщо однаково ймовірні всі гіпотези про початкову кількість стандартних деталей в коробці.

3.29 В кошику знаходиться 10 тенісних м'ячів, 8 з яких нові. Для першої гри беруть навмання один м'яч, який після гри повертають в кошик. Для другої гри також навмання беруть м'яч. Знайти ймовірність того, що взятий для другої гри м'яч новий.

3.30 В першій коробці знаходиться 10 куль, з яких 8 білих; в другій – 20 куль, з яких 4 білі. З кожного ящика навмання дістають по одній кулі, а потім з цих двох куль навмання вибирають одну кулю. Знайти ймовірність того, що це буде біла куля.

ЗАДАЧА 4

Формула Байєса

4.1 В даний район вироби постачаються трьома фірмами у співвідношенні 5:4:6. Серед продукції першої фірми стандартних виробів 80 %, другої – 90 %, третьої – 85 %. Покупцем придбано один виріб, який виявився стандартним. Знайти ймовірність того, що він поставлений першою фірмою.

4.2 Серед 25 гранітних блоків 5 – червоного граніту, решта – сірого. Відомо, що 10 % блоків червоного та 15 % сірого мають внутрішні дефекти. Навмання вибраний для дослідження блок виявився дефектним. Яка ймовірність того, що він з сірого граніту?

4.3 В тирі є 5 гвинтівок, серед яких лише дві з оптичним прицілом. Ймовірність попадання в ціль при одному пострілі із гвинтівки з оптичним прицілом для даного спортсмена рівна 0,95, без оптичного прицілу – 0,70. Спортсмен одним пострілом з навмання вибраної гвинтівки вразив ціль. Знайти ймовірність того, що він стріляв з гвинтівки без оптичного прицілу.

4.4 На деякому підприємстві перша машина виробляє 15 %, друга – 45 %, третя – 40 % всіх деталей. В їх продукції браку, відповідно 8, 6, 3 %. Випадково вибрана деталь виявилась дефектною. Яка ймовірність того, що вона виготовлена другою машиною?

4.5 В продаж надходять телевізори трьох заводів. Продукція першого заводу містить 6 % телевізорів з прихованим дефектом, другого – 5 %, третього – 4 %. Магазин одержав 20 % телевізорів з першого заводу, 45 % – з другого, 35 % – з третього. Придбаний телевізор виявився справним. Знайти ймовірність того, що його виготовлено на першому заводі.

4.6 Виріб перевіряється на стандартність одним з двох контролерів. Ймовірність того, що виріб потрапить до першого контролера рівна 0,55, до другого – 0,45. Ймовірність того, що стандартний виріб буде визнано стандартним першим контролером, рівна 0,9, другим – 0,98. Стандартний виріб при перевірці визнано стандартним. Знайти ймовірність того, що перевірка здійснювалась другим контролером.

4.7 З першого цеху на конвеєр потрапляє 40 %, з другого – 20 %, з третього – 10 %, з четвертого – 30 % деталей. Серед деталей першого цеху 2 % бракованих, другого – 3 %, третього – 4 %, з четвертого – 1 %. Знайти ймовірність того, що навмання вибрана з конвеєра деталь, яка виявилась бракованою, виготовлена третім цехом.

4.8 В першій коробці знаходиться 7 білих та 5 чорних кульок, в другій – 1 біла та 6 чорних. З першої коробки в другу переклали навмання одну кульку. Після чого, з другої коробки навмання виймають одну кульку, яка виявилась чорною. Знайти ймовірність того, що було перекладено білу кульку.

4.9 Працівник друкарні, при наборі тексту, користується двома комплектами літер: в першому – 85 %, в другому – 90 % шрифту відмінної якості. Знайти ймовірність того, що навмання вибрана літера, яка виявилась відмінної якості, належить до першого комплекту.

4.10 Кількість вантажних авто на даному підприємстві вдвічі перевищує кількість легкових. Дизельні двигуни мають 50 % вантажних авто та 10 % легкових. Яка ймовірність того, що навмання вибраний автомобіль, який виявився з дизельним двигуном, є вантажним?

4.11 Серед 16 одиниць продукції першого виду 15 % браку, а серед 30 одиниць другого виду 6 % браку. Навмання вибрана одиниця продукції виявилась бракованою. Яка ймовірність того, що вона другого виду?

4.12 На деякому підприємстві перша машина виробляє 25 %, друга – 35 %, третя – 40 % всіх деталей. В їх продукції браку відповідно 6, 5 та 4 %. Яка ймовірність того, що випадково вибрана деталь, яка виявилась дефектною, виготовлена першою машиною?

4.13 Є 32 одиниці продукції двох видів. Серед 12 одиниць продукції першого виду 5 % браку, а серед 20 одиниць другого виду 10 % браку. Навмання вибрана одиниця продукції виявилась бракованою. Яка ймовірність того, що вона другого виду?

4.14 В двох коробках знаходиться по 20 деталей, з них стандартних: в першій – 18, в другій – 10. З першої коробки навмання вибрано одну деталь та перекладено в другу. Навмання вибрана після цього деталь з другої коробки виявилась стандартною. Знайти ймовірність того, що було перекладено нестандартну деталь.

4.15 В коробці знаходиться 16 деталей, виготовлених на першому заводі, 14 – на другому, 10 – на третьому Серед деталей, виготовлених на першому заводі, 90 % відмінної якості, на другому – 80 %, на третьому – 70 %. Навмання вибрана з коробки деталь виявилась відмінної якості. Знайти ймовірність того, що її виготовлено на третьому заводі.

4.16 Стріляють по двох мішенях типу X , по шести – типу Y і по п'яти – типу Z . Ймовірність попадання при одному пострілі в мішень типу X рівна 0,6, типу Y – 0,5, типу Z – 0,4. При одному пострілі мішень було вражено. Знайти ймовірність того, що стріляли по мішені типу Y , якщо мішень вибирається навмання.

4.17 Прилад, встановлений на літаку, може працювати в двох режимах: в умовах нормального польоту та в умовах перевантаження при злеті і посадці. Перший режим здійснюється в 80 % всього часу польоту, другий – в 20 %. Ймовірність того, що прилад вийде з ладу за час польоту в нормальному режимі рівна 0,2, в умовах перевантаження – 0,4. Прилад вийшов з ладу за час польоту. Знайти ймовірність того, що це сталось в умовах перевантаження при злеті і посадці.

4.18 Деталі виготовляють на двох заводах. Об'єм продукції другого заводу в три рази більший, ніж першого. Серед деталей першого заводу 8 % бракованих, другого – 2 %. Знайти ймовірність того, що навмання вибрана деталь, яка виявилась бракованою, виготовлена на першому заводі.

4.19 Ймовірності того, що під час роботи комп'ютера збій виникне в процесорі, в оперативній пам'яті, в інших вузлах відносяться як 3:4:3. Ймовірності виявлення збою в процесорі, в оперативній пам'яті та в інших вузлах відповідно рівні 0,85; 0,95; 0,8. Знайти ймовірність того, що збій, який виявлено в машині, виник в процесорі.

4.20 На заводі по виготовленню гвинтів перший верстат виробляє 15 %, другий – 25 %, третій – 60 % всіх виробів. В їх продукції брак складає відповідно 2 %, 1 % та 3 %. Знайти ймовірність того, що випадково вибраний гвинт, який виявився дефектним, виготовлено на третьому верстаті.

4.21 Відомо, що 90 % продукції заводу відповідає стандарту. Спрощена схема контролю визнає придатною стандартну продукцію з ймовірністю 0,98 та нестандартну – з ймовірністю 0,05. Знайти ймовірність того, що виріб, який пройшов спрощений контроль, задовольняє стандарту.

4.22 В першій коробці знаходиться 5 білих та 8 чорних кульок, в другій – 2 білі та 7 чорних, в третій – 5 білих та 3 чорних. З навмання вибраної коробки вийнято кульку. Вона виявилась білою. Знайти ймовірність того, що кульку вийнято з другої коробки.

4.23 Однотипні прилади випускаються трьома заводами в кількісному співвідношенні 5:2:3, причому ймовірності браку для цих заводів становлять відповідно 0,04; 0,1; 0,05. Прилад, придбаний лабораторією, виявився бракованим. Знайти ймовірність того, що даний прилад виготовлено другим заводом.

4.24 Маємо 10 однакових коробок, в семи з яких міститься по чотири чорних та три білих, а в трьох – по сім чорних та п’ять білих кульок. З навмання вибраної коробки вийнято кульку. Вона виявилась білою. Знайти ймовірність того, що кульку вийнято з коробки, в якій знаходиться чотири чорних та три білих кульки.

4.25 Серед 300 виробів 150 першого ґатунку, 100 – другого, 50 – третього. Ймовірність браку серед виробів першого ґатунку 0,02, другого – 0,03, третього – 0,05. Взятий навмання виріб, виявився небракованим. Знайти ймовірність того, що цей виріб першого ґатунку.

4.26 В артилерійській військовій частині 18 гармат, з них дві непристріляні. Ймовірність влучення в ціль з пристріляної гармати дорівнює 0,8, з непристріляної – 0,3. Зробили один постріл і в ціль не влучили. Знайти ймовірність того, що постріл зроблено з непристріляної гармати.

4.27 Радіолампа може належати до однієї з трьох партій з ймовірностями $p_1 = 0,2$, $p_2 = 0,5$, $p_3 = 0,3$. Ймовірність того, що лампа пропрацює заданий час, для цих партій рівна відповідно 0,5; 0,4; 0,8. Лампа пропрацювала заданий час. Знайти ймовірність того, що вона належить першій партії.

4.28 В тирі є чотири рушниці, ймовірності влучення з яких в мішень при одному пострілі рівні відповідно 0,8; 0,9; 0,7; 0,5. При одному пострілі було влучено в мішень. Знайти ймовірність того, що постріл було зроблено з другої рушниці, якщо рушниця вибирається навмання.

4.29 В коробці лежить куля невідомого кольору – з однаковою ймовірністю біла або чорна. В коробку поклали білу кулю, після чого з коробки навмання дістали одну кулю. Вона виявилась білою. Знайти ймовірність того, що в коробці залишилась біла куля.

4.30 Два мисливці одночасно вистрілили по кабану. Ймовірності влучення для мисливців відповідно дорівнюють 0,8 і 0,4. Кабана вбито однією кулею. В якому співвідношенні мисливці повинні розділити здобич?

ЗАДАЧА 5

Схема Бернуллі

5.1 Контролер перевіряє партію з n виробів. Ймовірність того, що виріб відповідає стандарту, $p = 0,6$. Нехай m – кількість стандартних виробів. Знайти ймовірність $P_n \; k_1 \le m \le k_2$, якщо: а) $n = 5$, $k_1 = 1$, $k_2 = 3$; б) $n = 216$, $k_1 = 120$, $k_2 = 140$.

5.2 У магазині для освітлення використовується n електричних ламп. Ймовірність вийти з ладу протягом року для кожної з них $p = 0,2$. Нехай m – кількість ламп, які перегоріли протягом року. Знайти ймовірність $P_n \; k_1 \le m \le k_2$, якщо: а) $n = 6$, $k_1 = 2$, $k_2 = 4$; б) $n = 600$, $k_1 = 100$, $k_2 = 130$.

5.3 Протягом години магазин відвідало n чоловік. Ймовірність здійснити покупку для кожного з них $p = 0,2$. Нехай m – кількість відвідувачів, які зробили покупку. Знайти ймовірність $P_n \; k_1 \le m \le k_2$, якщо: а) $n = 8$, $k_1 = 1$, $k_2 = 3$; б) $n = 100$, $k_1 = 15$, $k_2 = 32$.

5.4 Банк надав кредити n підприємствам. Ймовірність своєчасного повернення кредиту $p = 0,8$. Нехай m – кількість підприємств, які повернули кредит вчасно. Знайти ймовірність $P_n \; k_1 \le m \le k_2$, якщо: а) $n = 5$, $k_1 = 2$, $k_2 = 4$; б) $n = 100$, $k_1 = 75$, $k_2 = 90$.

5.5 Податкова інспекція перевіряє n підприємств. За статистикою ймовірність несплати податків підприємством оцінюється як $p = 0,8$. Нехай m – кількість підприємств, які не сплатили податки. Знайти ймовірність $P_n(k_1 \le m \le k_2)$, якщо: а) $n = 5$, $k_1 = 1$, $k_2 = 3$; б) $n = 216$, $k_1 = 160$, $k_2 = 180$.

5.6 Секретарка повинна надрукувати n сторінок тексту. Ймовірність того, що на сторінці вона допустить принаймні одну помилку, $p = 0,2$. Нехай m – кількість сторінок з помилками. Знайти ймовірність $P_n(k_1 \le m \le k_2)$, якщо: а) $n = 7$, $k_1 = 1$, $k_2 = 4$; б) $n = 100$, $k_1 = 16$, $k_2 = 30$.

5.7 В міському парку посаджено n молодих дерев. Ймовірність того, що дерево приживеться, $p = 0,8$. Нехай m – кількість дерев, які прижилися. Знайти ймовірність $P_n(k_1 \le m \le k_2)$, якщо: а) $n = 7$, $k_1 = 4$, $k_2 = 6$; б) $n = 400$, $k_1 = 300$, $k_2 = 330$.

5.8 Магазин продав n телевізорів. Ймовірність того, що телевізор вийде з ладу протягом гарантійного терміну, $p = 0,2$. Нехай m – кількість телевізорів, які потребували гарантійного ремонту. Знайти ймовірність $P_n(k_1 \le m \le k_2)$, якщо: а) $n = 7$, $k_1 = 2$, $k_2 = 4$; б) $n = 100$, $k_1 = 14$, $k_2 = 22$.

5.9 Гральний кубик підкинуто n разів. Нехай m – кількість випадань 5 очок. Знайти ймовірність $P_n(k_1 \le m \le k_2)$, якщо: а) $n = 5$, $k_1 = 2$, $k_2 = 4$; б) $n = 100$, $k_1 = 10$, $k_2 = 20$.

5.10 У змаганнях з рибалки бере участь n чоловік. Ймовірність піймати принаймні одну рибину для кожного з них $p = 0,3$. Нехай m – кількість рибалок, які піймали рибу. Знайти ймовірність $P_n(k_1 \le m \le k_2)$, якщо: а) $n = 6$, $k_1 = 3$, $k_2 = 5$; б) $n = 120$, $k_1 = 30$, $k_2 = 45$.

5.11 Ймовірність народження дівчинки дорівнює 0,48. Знайти ймовірність того, що серед 1000 немовлят: а) 480 дівчаток; б) від 250 до 540 дівчаток.

5.12 Ймовірність того, що клієнту банка знадобиться грошова позика, дорівнює 0,02. Знайти ймовірність того, що з 10000 клієнтів банка за позикою звернеться в банк: а) 200 чоловік; б) від 180 до 220 чоловік.

5.13 Ймовірність того, що відвідувач бібліотеки вибере книгу українського автора, дорівнює 0,45. Знайти ймовірність того, що з 1000 відвідувачів бібліотеки книгу українського автора вибрали: а) 450 читачів; б) від 410 до490 читачів.

5.14 За попередніми опитуваннями відомо, що 40 % опитаних готові проголосувати на виборах мера міста за діючого голову міста. Знайти ймовірність того, що з 10000 виборців за діючого мера віддадуть свої голоси: а) рівно 4000 чоловік; б) від 3000 до 5000 чоловік.

5.15 Ймовірність того, що виготовлена верстатом-автоматом деталь виявиться бракованою, дорівнює 0,1. Знайти ймовірність, що серед 600 деталей виявиться бракованих: а) рівно 60; б) від 50 до 70 деталей.

5.16 Ймовірність порушення герметичності контейнера з радіоактивними відходами 0,001. Знайти ймовірність того, що серед 10000 контейнерів з порушеннями герметичності виявиться: а) рівно 10; б) від 8 до 11 контейнерів.

5.17 Схожість насіння пшениці становить 85 %. Знайти ймовірність того, що серед 20000 висіяних зернин зійде: а) рівно 17000; б) від 15000 до 19000.

5.18 Магазин одержав 1000 бляшанок морської капусти. Ймовірність того, що під час перевезення бляшанка буде пошкоджена дорівнює 0,004. Знайти ймовірність того, що магазин одержить пошкодженими: а) 2 бляшанки; б) більше 3 бляшанок.

5.19 Технологія друку книги, що видається накладом у 10000 екземплярів допускає дефект друку з ймовірністю 0,0002. Знайти ймовірність того, що книг з дефектом переплетення буде: а) принаймні дві; б) більше 3.

5.20 Пристрій складається з 1000 датчиків, що працюють незалежно один від одного. Ймовірність відмови будь-якого датчика протягом доби дорівнює 0,005. Знайти ймовірність того, що протягом доби відмовить: а) принаймні один датчик; б) від 3 до 7 датчиків.

5.21 Ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,52. Знайти ймовірність того, що серед 1000 немовлят: а) 520 хлопчиків; б) від 150 до 530 хлопчиків.

5.22 Ймовірність того, що клієнту страхової компанії знадобиться страхова виплата, дорівнює 0,01. Знайти ймовірність того, що з 10000 застрахованих у страхову компанію за виплатою звернеться: а) 100 клієнтів; б) від 90 до 110 клієнтів.

5.23 Ймовірність того, що відвідувач, який зайшов у магазин, придбає певний товар, дорівнює 0,35. Знайти ймовірність того, що з 1000 відвідувачів магазину товар придбають: а) 350 відвідувачів; б) від 320 до 380 відвідувачів.

5.24 За попередніми опитуваннями відомо, що 40 % опитаних готові проголосувати на виборах мера міста за кандидата N. Знайти ймовірність того, що з 50000 жителів, що мають право голосувати, за кандидата N віддадуть свої голоси: а) рівно 20000 чоловік; б) від 15000 до 25000 чоловік.

5.25 Верстат-автомат штампує деталі. Ймовірність того, що виготовлена деталь виявиться бракованою, дорівнює 0,1. Знайти ймовірність, що серед 500 деталей виявиться бракованих: а) рівно 50; б) від 40 до 60 деталей.

5.26 Ймовірність порушення герметичності банки консервів 0,001. Знайти ймовірність того, що серед 20000 банок з порушеннями герметичності виявиться: а) рівно 20; б) від 15 до 25 банок.

5.27 За статистикою відомо, що з посіяного насіння деякої рослини сходить 80 %. Знайти ймовірність того, що серед 2000 висіяних насінин зійде: а) рівно 1600; б) від 1400 до 1800 насінин.

5.28 Магазин замовив 1000 пляшок мінеральної води. Ймовірність того, що під час перевезення пляшка буде пошкоджена дорівнює 0,003. Знайти ймовірність того, що магазин одержить пошкодженими: а) рівно 3 пляшки; б) більше 2 пляшок.

5.29 Книга видається тиражем 10000 екземплярів. Технологія виготовлення допускає дефект переплетення з ймовірністю 0,0003. Знайти ймовірність того, що книг з дефектом переплетення буде: а) принаймні одна; б) більше 2.

5.30 Пристрій складається з 1000 елементів, що працюють незалежно один від одного. Ймовірність відмови будь-якого елемента протягом години дорівнює 0,005. Знайти ймовірність того, що протягом години відмовить: а) хоча б один елемент; б) від 4 до 6 елементів.

ЗАДАЧА 6

Закон розподілу дискретної випадкової величини

6.1–6.6 Маємо n ламп, кожна з яких з ймовірністю p є якісною. Лампа вгвинчується в прилад і вмикається струм. При вмиканні струму дефектна лампа одразу виходить з ладу, після чого замінюється іншою. Розглядається випадкова величина X – число випробуваних ламп. Знайти її закон розподілу.

Варіант	6.1	6.2	6.3	6.4	6.5	6.6
n	5	4	5	4	5	4
p	0,9	0,7	0,8	0,8	0,7	0,9

6.7–6.12 Випробовується пристрій, який складається з трьох незалежно працюючих приладів. Ймовірності відмови приладів p_1,

p_2, p_3. Розглядається випадкова величина X – число приладів, які вийшли з ладу. Знайти її закон розподілу.

Варіант	6.7	6.8	6.9	6.10	6.11	6.12
p_1	0,5	0,6	0,7	0,3	0,4	0,3
p_2	0,6	0,7	0,8	0,8	0,7	0,6
p_3	0,7	0,8	0,5	0,6	0,5	0,4

6.13–6.18 Два спортсмени незалежно роблять по одному пострілу, кожен в свою мішень. Ймовірність влучення в мішень для першого спортсмена – p_1, для другого – p_2. Розглядаються випадкові величини: X_1 – число влучень першого спортсмена, X_2 – число влучень другого спортсмена та їх сума $Z = X_1 + X_2$. Знайти закон розподілу випадкової величини Z.

Варіант	6.13	6.14	6.15	6.16	6.17	6.18
p_1	0,5	0,6	0,7	0,4	0,5	0,8
p_2	0,6	0,7	0,8	0,8	0,7	0,6

6.19–6.24 В коробці k білих та n чорних кульок. Дві кульки навмання дістають з коробки. Розглядається випадкова величина X – число вийнятих білих кульок. Знайти її закон розподілу.

Варіант	6.19	6.20	6.21	6.22	6.23	6.24
k	3	4	5	3	4	5
n	5	6	8	6	7	7

6.25–6.27 Правильний гральний кубик підкидається n разів. Розглядається випадкова величина X – число підкидань, при яких випаде не менше п’яти очок. Знайти її закон.

Варіант	6.25	6.26	6.27
n	3	4	5

6.28–6.30 Симетрична монета підкидається n разів. Розглядається випадкова величина X – число появ герба. Знайти її закон розподілу.

Варіант	6.28	6.29	6.30
n	3	4	5

ЗАДАЧА 7

Числові характеристики дискретної випадкової величини

Відомий закон розподілу випадкової величини X. Знайти її математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення.

7.1

x_i	–2	1	3	5
p_i	0,2	0,28	0,42	0,1

7.2

x_i	–5	2	3	4
p_i	0,4	0,29	0,11	0,2

7.3

x_i	–3	–2	1	3
p_i	0,35	0,15	0,2	0,3

7.4

x_i	–4	0	2	5
p_i	0,1	0,2	0,25	0,45

7.5

x_i	–2	2	5	8
p_i	0,27	0,21	0,22	0,3

7.6

x_i	–1	1	5	7
p_i	0,2	0,33	0,24	0,23

7.7

x_i	–2	–1	3	5
p_i	0,22	0,3	0,21	0,27

7.8

x_i	–5	2	3	4
p_i	0,2	0,28	0,42	0,1

7.9

x_i	–3	–2	1	3
p_i	0,4	0,29	0,1	0,21

7.10

x_i	–4	0	2	5
p_i	0,35	0,15	0,2	0,3

7.11

x_i	–2	2	5	8
p_i	0,1	0,2	0,25	0,45

7.12

x_i	–1	1	5	7
p_i	0,27	0,21	0,22	0,3

7.13

x_i	–2	3	4	5
p_i	0,15	0,25	0,25	0,35

7.14

x_i	–5	–2	3	4
p_i	0,1	0,23	0,22	0,45

7.15

x_i	–4	1	2	5
p_i	0,13	0,21	0,22	0,44

7.16

x_i	–2	2	4	6
p_i	0,14	0,26	0,25	0,35

7.17

x_i	–3	–2	2	6
p_i	0,21	0,22	0,27	0,3

7.18

x_i	–1	3	5	6
p_i	0,18	0,21	0,23	0,38

7.19

x_i	–5	–1	3	5
p_i	0,21	0,22	0,25	0,32

7.20

x_i	–2	–1	4	9
p_i	0,2	0,28	0,42	0,1

7.21

x_i	–5	–2	–1	4
p_i	0,4	0,29	0,1	0,21

7.22

x_i	–4	-1	0	5
p_i	0,35	0,15	0,2	0,3

7.23

x_i	–1	2	4	7
p_i	0,1	0,2	0,25	0,45

7.24

x_i	–5	–3	–2	1
p_i	0,2	0,31	0,22	0,27

7.25

x_i	–2	2	5	6
p_i	0,25	0,22	0,23	0,3

7.26

x_i	–4	2	4	6
p_i	0,22	0,2	0,23	0,35

7.27

x_i	–3	–2	1	6
p_i	0,2	0,23	0,32	0,25

7.28

x_i	–4	0	2	5
p_i	0,3	0,32	0,22	0,16

7.29

x_i	–1	3	5	8
p_i	0,25	0,4	0,2	0,15

7.30

x_i	–3	1	3	5
p_i	0,05	0,25	0,52	0,18

ЗАДАЧА 8

Неперервна випадкова величина

Випадкова величина X має функцію розподілу $F(x)$. Знайти: а) ймовірність того, що X набуде значення з інтервалу $\ \alpha;\beta\ $; б) щільність розподілу; в) математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення. Побудувати графіки функції розподілу та щільності розподілу.

8.1

$$F(x)=\begin{cases}0 & при\ \ x\le 2,\\ x-2\ ^{2} & при\ \ 2<x\le 3,\\ 1 & при\ \ x>3.\end{cases}$$

$\alpha=-1$; $\beta=1$.

8.2

$$F(x)=\begin{cases}0 & при\ \ x\le 1,\\ \dfrac{x^2-x}{2} & при\ \ 1<x\le 2,\\ 1 & при\ \ x>2.\end{cases}$$

$\alpha=-1$; $\beta=1,5$.

8.3

$$F(x)=\begin{cases}0 & при\ \ x\le 2,\\ \dfrac{9(x^2-4)}{5x^2} & при\ \ 2<x\le 3,\\ 1 & при\ \ x>3.\end{cases}$$

$\alpha=0$; $\beta=2,5$.

8.4

$$F(x)=\begin{cases}0 & при\ \ x\le 2,\\ 2-\dfrac{4}{x} & при\ \ 2<x\le 4,\\ 1 & при\ \ x>4.\end{cases}$$

$\alpha=2$; $\beta=3$.

8.5

$$F(x)=\begin{cases}0 & при\ \ x\le 0\\ \sqrt{x} & при\ \ 0<x\le 1,\\ 1 & при\ \ x>1.\end{cases}$$

$\alpha=0$; $\beta=0,5$.

8.6

$$F(x)=\begin{cases}0 & при\ \ x\le -1,\\ \dfrac{x+1\ ^{2}}{16} & при\ \ -1<x\le 3,\\ 1 & при\ \ x>43\end{cases}$$

$\alpha=0$; $\beta=1$.

8.7

$$F(x)=\begin{cases}0 & при\ \ x\le 3,\\ x-3\ ^{3} & при\ \ 3<x\le 4,\\ 1 & при\ \ x>4.\end{cases}$$

$\alpha=0,5$; $\beta=1$.

8.8

$$F(x)=\begin{cases}0 & при\ \ x\le 0,\\ \dfrac{x^2+x}{2} & при\ \ 0<x\le 1,\\ 1 & при\ \ x>1.\end{cases}$$

$\alpha=0,2$; $\beta=1$.

8.9
$$F(x)=\begin{cases}0 & при\ \ x\le -2,\\ -\dfrac{2}{x}-1 & при\ \ -2<x\le -1,\\ 1 & при\ \ x>-1.\end{cases}$$
$\alpha=-2$; $\beta=0$.

8.10
$$F(x)=\begin{cases}0 & при\ \ x\le 0,\\ 3x^2+2x & при\ \ 0<x\le \dfrac{1}{3},\\ 1 & при\ \ x>\dfrac{1}{3}.\end{cases}$$
$\alpha=-2$; $\beta=0,25$.

8.11
$$F(x)=\begin{cases}0 & при\ \ x\le 2,\\ \dfrac{x}{2}-1 & при\ \ 2<x\le 4,\\ 1 & при\ \ x>4.\end{cases}$$
$\alpha=-2$; $\beta=3$.

8.12
$$F(x)=\begin{cases}0 & при\ \ x\le 4,\\ \dfrac{x-4\ ^{2}}{25} & при\ \ 4<x\le 9,\\ 1 & при\ \ x>9.\end{cases}$$
$\alpha=1$; $\beta=3$.

8.13
$$F(x)=\begin{cases}0 & при\ \ x\le -2,\\ \dfrac{x+2\ ^{2}}{4} & при\ \ -2<x\le 0,\\ 1 & при\ \ x>0.\end{cases}$$
$\alpha=0$; $\beta=1$.

8.14
$$F(x)=\begin{cases}0 & при\ \ x\le 0,\\ \sqrt{x^3} & при\ \ 0<x\le 1,\\ 1 & при\ \ x>1.\end{cases}$$
$\alpha=0$; $\beta=0,5$.

8.15
$$F(x)=\begin{cases}0 & при\ \ x\le 1,\\ \dfrac{4}{3}\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right) & при\ \ 1<x\le 2,\\ 1 & при\ \ x>2.\end{cases}$$
$\alpha=1,5$; $\beta=2,5$.

8.16
$$F(x)=\begin{cases}0 & при\ \ x\le 0,\\ \dfrac{1}{2}\sqrt{x} & при\ \ 0<x\le 4,\\ 1 & при\ \ x>4.\end{cases}$$
$\alpha=1$; $\beta=2$.

8.17
$$F(x)=\begin{cases}0 & при\ \ x\le 0,\\ \sqrt[4]{x^3} & при\ \ 0<x\le 1,\\ 1 & при\ \ x>1.\end{cases}$$
$\alpha=0,5$; $\beta=2,5$.

8.18
$$\mathrm{F}(x)=\begin{cases}0 & при\ \ x\le 1,\\ 2-\dfrac{2}{x} & при\ \ 1<x\le 2,\\ 1 & при\ \ x>2.\end{cases}$$
$\alpha=0$; $\beta=1,5$.

8.19 $$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0,\\ \sqrt[3]{x^2} & \text{при } 0<x\le 1,\\ 1 & \text{при } x>1.\end{cases}$$

$\alpha=-1$; $\beta=0{,}5$.

8.20 $$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le -1,\\ \frac{1}{4}(x+1)^2 & \text{при } -1<x\le 1,\\ 1 & \text{при } x>1.\end{cases}$$

$\alpha=1$; $\beta=2$.

8.21 $$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 1,\\ (x-1)^2 & \text{при } 1<x\le 2,\\ 1 & \text{при } x>2.\end{cases}$$

$\alpha=1$; $\beta=1{,}5$.

8.22 $$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le -1,\\ 1-\sqrt[3]{x^4} & \text{при } -1<x\le 0,\\ 1 & \text{при } x>0.\end{cases}$$

$\alpha=-0{,}5$; $\beta=1$.

8.23 $$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0,\\ \frac{1}{8}\sqrt{x^3} & \text{при } 0<x\le 4,\\ 1 & \text{при } x>4.\end{cases}$$

$\alpha=2$; $\beta=3$.

8.24 $$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 2,\\ \frac{1}{9}(x-2)^2 & \text{при } 2<x\le 5,\\ 1 & \text{при } x>5.\end{cases}$$

$\alpha=3$; $\beta=4$.

8.25 $$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 1,\\ \dfrac{(x-1)^2}{9} & \text{при } 1<x\le 4,\\ 1 & \text{при } x>4.\end{cases}$$

$\alpha=2$; $\beta=3{,}5$.

8.26 $$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 1,\\ \sqrt{x}-1 & \text{при } 1<x\le 4,\\ 1 & \text{при } x>4.\end{cases}$$

$\alpha=1$; $\beta=2$.

8.27 $$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0,\\ \sqrt[3]{x^4} & \text{при } 0<x\le 1,\\ 1 & \text{при } x>1.\end{cases}$$

$\alpha=0{,}5$; $\beta=2$.

8.28 $$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 3,\\ \dfrac{(x-3)^2}{4} & \text{при } 3<x\le 5,\\ 1 & \text{при } x>5.\end{cases}$$

$\alpha=3$; $\beta=4{,}5$.

8.29
$$F(x)=\begin{cases}0 & при \;\; x\le 0,\\ \dfrac{x^3}{8} & при \;\; 0<x\le 2,\\ 1 & при \;\; x>2.\end{cases}$$

$\alpha=1$; $\beta=1,5$.

8.30
$$F(x)=\begin{cases}0 & при \;\; x\le 1,\\ \dfrac{1}{7}\;\sqrt{x^3}-1 & при \;\; 1<x\le 4,\\ 1 & при \;\; x>4.\end{cases}$$

$\alpha=1$; $\beta=3$.

ЗАДАЧА 9

Розподіли: нормальний, рівномірний, показниковий, Пуассона

9.1 Автомат штампує деталі. Контрольований розмір деталі є випадковою величиною X, що має нормальний розподіл з параметрами $a=50$, $\sigma=0,02$. Знайти функцію розподілу і щільність розподілу випадкової величини X. Знайти відсоток бракованих деталей, якщо деталь вважається придатною, коли її розмір міститься в межах від 49,96 до 50,04.

9.2 Жирність молока корів у Житомирській області (у %) можна розглядати як нормально розподілену випадкову величину з математичним сподіванням рівним 4 % і середнім квадратичним відхиленням 0,03 %. Обчислити ймовірність того, що в навмання взятій пробі жирність молока буде: а) більшою 4 %; б) меншою 4 %; в) від 3,95 до 4,05 %. Знайти щільність розподілу даної випадкової величини.

9.3 Вага однієї плитки шоколаду є нормально розподіленою випадковою величиною з математичним сподіванням 100 г і середнім квадратичним відхиленням 2 г. а) Знайти відсоток коробок, вага яких більша 100 г; б) Знайти відсоток коробок, вага яких міститься у межах від 99 до 101 г.

9.4 Зріст студентів першого курсу можна описати нормальним розподілом з математичним сподіванням 170 см і середнім квадратичним відхиленням 7 см. Визначити відсоток студентів першого курсу, що мають зріст: а) більше 170 см; б) менше 170 см; в) від 170 до 180 см. Розв'язок пункту в) зобразити схематично на графіку щільності розподілу.

9.5 Зміна індексу цінних паперів на фондовій біржі може бути змодельована як нормально розподілена випадкова величина з параметрами $a=1$ і $\sigma^2=0,01$. Знайти ймовірність того, що на наступних торгах індекс цінних паперів буде: а) більшим 1;

б) меншим 1; в) від 0,98 до 1,02. Знайти функцію розподілу і щільність розподілу ймовірностей даної випадкової величини.

9.6 Середній відсоток виконання плану підприємствами галузі складає 103 %, середнє квадратичне відхилення 2 %. Припускаючи, що виконання плану підприємствами має нормальний розподіл, визначити відсоток підприємств, що виконують план: а) більше 103 %; б) менше 103 %; в) від 99 % до 107 %. Розв'язок пункту в) схематично зобразити на графіку щільності розподілу.

9.7 Діаметр деталей, виготовлених цехом, є випадковою величиною, що має нормальний розподіл з математичним сподіванням $a = 5$ см і дисперсією $\sigma^2 = 0,0004$. У яких межах за правилом "трьох сигм" можна практично гарантувати діаметр деталей? Знайти відсоток деталей, діаметр яких міститься у межах від 4,96 до 5,04 см.

9.8 На автоматі виготовляють заклепки. Діаметр заклепок можна вважати нормально розподіленою випадковою величиною з математичним сподіванням 3 мм і середнім квадратичним відхиленням 0,1. Які розміри діаметра заклепки можна гарантувати з ймовірністю: а) 0,95; б) 0,9973?

9.9 Контрольований розмір деталі є нормально розподіленою випадковою величиною з параметрами $a = 150$ мм та $\sigma = 2$ мм. а) Знайти ймовірність браку, якщо припустимі розміри повинні бути 150 ± 3 мм; б) Яку точність контрольованого розміру можна гарантувати з ймовірністю 0,97? в) За які межі за правилом "трьох сигм" практично не вийде контрольований розмір деталі?

9.10 Вага окремої коробки цукерок є нормально розподіленою випадковою величиною з математичним сподіванням 500 г і середнім квадратичним відхиленням 10 г. а) Знайти відсоток коробок, вага яких більша 500 г; б) Знайти відсоток коробок, вага яких знаходиться в межах 500 ± 15 г.

9.11 Масу тіла курсантів військового інституту можна вважати нормально розподіленою випадковою величиною з математичним сподіванням 60 кг і середнім квадратичним відхиленням 2 кг. Визначити відсоток курсантів, що мають масу: а) більшу 60 кг; б) меншу 70 кг; в) від 58 до 62 кг. Розв'язок пункту в) зобразити схематично на графіку щільності розподілу.

9.12 Середній курс акцій деякої компанії протягом одних біржових торгів дорівнює 8 грн, середнє квадратичне відхилення – 1 грн. Вважаючи, що курс акцій компанії – нормально розподілена випадкова величина, визначити: а) відсоток акцій, що мають курс в інтервалі

$4,9)$; б) ймовірність того, що абсолютна величина відхилення X від середнього курсу виявиться меншою 2 грн.

9.13 Середній відсоток виконання плану підприємствами галузі складає 105 %, середнє квадратичне відхилення 2 %. Припускаючи, що виконання плану підприємствами має нормальний розподіл, визначити відсоток підприємств, що виконують план: а) більше 103 %; б) менше 105 %; в) від 100 % до 110 %. Розв'язок пункту в) схематично зобразити на графіку щільності розподілу.

9.14 Діаметр вала є нормально розподіленою випадковою величиною з параметрами $a = 200$ мм та $\sigma = 3$ мм. а) Знайти відсоток деталей, діаметр яких лежить в межах від 196 до 204 мм; б) Яку точність діаметра деталі можна гарантувати з ймовірністю 0,97? в) За які межі за правилом "трьох сигм" практично не вийде діаметр деталі?

9.15 Випадкова величина X – час безвідмовної роботи елемента має показниковий розподіл, причому відомо, що середній час безвідмовної роботи елемента дорівнює 1,5 доби. Знайти числові характеристики випадкової величини X та наступні ймовірності: а) $P(X < 1)$; б) $P(1,4 < X < 1,6)$.

9.16 Хвилинна стрілка годинника переміщується стрибком наприкінці кожної хвилини. Знайти ймовірність того, що в даний момент годинник покаже час, що відрізняється від справжнього не більше ніж на 15 секунд.

9.17 Випадкова величина X – число викликів, що надходять на пульт диспетчера станції швидкої допомоги протягом години, має розподіл Пуассона з параметром $\lambda = 10$ (повідомлень за годину). Знайти числові характеристики випадкової величини X та ймовірності наступних подій: а) $P(X = 0)$; б) $P(X > 6)$.

9.18 На торгівельну базу у середньому приїздить 5 вантажних авто за добу. Випадкова величина X – число вантажних авто, що прибули на базу протягом доби, має розподіл Пуассона. Знайти числові характеристики випадкової величини X та ймовірності наступних подій: а) $P(X \geq 2)$; б) $P(X \leq 6)$.

9.19 Випадкова величина X – час безвідмовної роботи приладу має показниковий розподіл, причому відомо, що середній час безвідмовної роботи елемента дорівнює 15 діб. Знайти числові характеристики випадкової величини X та наступні ймовірності: а) $P(X < 10)$; б) $P(14 < X < 16)$.

9.20 Координата точки, що навмання вибирається на відрізку $[1, 5]$, є рівномірно розподіленою випадковою величиною X. Записати функцію розподілу та щільність розподілу, побудувати їх графіки. Обчислити числові характеристики випадкової величини X та ймовірність $P\{X \in [3, 4]\}$.

9.21 Випадкова величина X – число повідомлень, що надходять на пульт диспетчера протягом години, має розподіл Пуассона з параметром $\lambda = 5$ (повідомлень за годину). Знайти числові характеристики випадкової величини X та ймовірності наступних подій: а) $P\{X = 0\}$; б) $P\{X > 3\}$.

9.22 У порт приходить у середньому 2,5 судна за добу. Випадкова величина X – число суден, що зайшли в порт протягом доби, має розподіл Пуассона. Знайти числові характеристики випадкової величини X та ймовірності наступних подій: а) $P\{X \geq 1\}$; б) $P\{X \leq 3\}$.

9.23 Інтервали часу між приходами в порт суден розподілені за показниковим законом з параметром $\lambda = 5$. Знайти числові характеристики випадкової величини X – часу між приходами двох суден. Обчислити: а) $P\{X \in [1, 2]\}$; б) $P\{X \in [4, 6]\}$.

9.24 Випадкова величина X – час між двома повідомленнями, що надходять на торгову площадку, має показниковий розподіл з параметром $\lambda = 0,5$. Знайти числові характеристики випадкової величини X та наступні ймовірності: а) $P\{X < 0,2\}$; б) $P\{0,3 < X < 0,7\}$.

9.25 Середнє число викликів, що надходять на пульт диспетчера таксі протягом хвилини, дорівнює трьом. Знайти ймовірність того, що за дві хвилини: а) не надійде жодного виклику; б) надійде чотири виклики; в) надійде менше трьох викликів.

9.26 Випадкова величина X – час обслуговування клієнтів у майстерні має показниковий розподіл з функцією розподілу $F(x) = 1 - e^{-3x}$ (відлік часу проводиться в годинах). Знайти числові характеристики випадкової величини X та наступні ймовірності: а) $P\{X < 0,5\}$; б) $P\{0,2 < X < 0,4\}$.

9.27 Автобуси деякого маршруту рухаються з інтервалом 10 хв. Випадкова величина X – час, протягом якого пасажиру доведеться чекати автобус, має рівномірний розподіл. Знайти числові характеристики випадкової величини X та ймовірність того, що пасажир буде чекати автобус більше 3 хвилин.

9.28 Випадкова величина X – має рівномірний розподіл на відрізку $[2, 6]$. Записати функцію розподілу та щільність розподілу. Знайти числові характеристики випадкової величини X та ймовірність $P(X \in (3, 4))$.

9.29 Шкала лабораторної ваги має ціну поділки 1 грам. При зважуванні вага заокруглюється в найближчий бік. Яка ймовірність того, що випадкова величина X – абсолютна помилка визначення маси: а) буде міститись між $\sqrt{D(X)}$ і $2\sqrt{D(X)}$? б) буде меншою 0,2 грама?

9.30 Тривалість роботи приладу вважають нормально розподіленою випадковою величиною з параметрами $a = 1000$ год і $\sigma = 30$ год. Знайти ймовірність того, що тривалість роботи приладу складе: а) більше 1000 год; б) менше 1000 год; в) від 940 до 1060 год. Знайти щільність розподілу даної випадкової величини і зобразити розв'язок пункту в) на графіку щільності розподілу.

ЗАДАЧА 10

Дискретний випадковий вектор

За даним законом розподілу двовимірного випадкового вектора (X, Y) знайти:

1) закони розподілу компонент X та Y;

2) математичні сподівання, дисперсії і коефіцієнт кореляції компонент;

3) умовні закони розподілу величини X при $Y = a$ і величини Y при $X = b$;

4) умовні математичні сподівання величини X при $Y = a$ і величини Y при $X = b$.

10.1 $a = 3$, $b = 4$.

X	Y			
	-2	3	8	13
1	0,02	0,04	0,03	0,01
4	0,06	0,2	0,1	0,03
7	0,06	0,13	0,11	0,04
10	0,03	0,06	0,06	0,02

10.2 $a = 6$, $b = 2$.

X	Y			
	3	4	5	6
-1	0,03	0,07	0,05	0,01
2	0,07	0,13	0,1	0,03
5	0,06	0,23	0,09	0,03
8	0,02	0,04	0,03	0,01

10.3 $a = -2$, $b = 6$.

X	Y			
	-2	1	4	7
3	0,02	0,05	0,05	0,02
4	0,04	0,11	0,19	0,05
5	0,05	0,11	0,12	0,05
6	0,02	0,05	0,05	0,21

10.4 $a = 7$, $b = -3$.

X	Y			
	-2	1	4	7
-5	0,03	0,06	0,06	0,02
-3	0,05	0,12	0,12	0,05
-1	0,05	0,11	0,19	0,04
1	0,01	0,04	0,04	0,01

10.5 $a = -2$, $b = 5$.

X	Y			
	-5	-2	1	4
2	0,03	0,07	0,06	0,02
5	0,07	0,2	0,11	0,04
8	0,06	0,11	0,1	0,03
11	0,02	0,04	0,03	0,01

10.6 $a = 5$, $b = 2$.

X	Y			
	2	5	8	11
2	0,02	0,06	0,05	0,02
5	0,06	0,12	0,11	0,05
8	0,05	0,2	0,11	0,04
11	0,02	0,04	0,04	0,01

10.7 $a = 9$, $b = 5$.

X	*Y*			
	3	5	7	9
2	0,02	0,04	0,04	0,01
3	0,06	0,12	0,17	0,03
4	0,07	0,13	0,11	0,04
5	0,03	0,06	0,05	0,02

10.8 $a = 4$, $b = -1$.

X	*Y*			
	-5	-2	1	4
-3	0,01	0,04	0,04	0,02
-1	0,04	0,1	0,11	0,05
1	0,05	0,12	0,19	0,06
3	0,02	0,06	0,06	0,03

10.9 $a = 10$, $b = 5$.

X	*Y*			
	-2	2	6	10
2	0,02	0,05	0,05	0,02
3	0,05	0,18	0,12	0,05
4	0,05	0,11	0,11	0,05
5	0,02	0,05	0,05	0,02

10.10 $a = 9$, $b = 5$.

X	*Y*			
	3	5	7	9
3	0,03	0,07	0,06	0,02
5	0,07	0,13	0,11	0,04
7	0,06	0,18	0,1	0,03
9	0,02	0,04	0,03	0,01

10.11 $a = 5$, $b = 4$.

X	*Y*			
	3	5	7	9
1	0,01	0,04	0,04	0,02
4	0,04	0,1	0,2	0,05
7	0,05	0,12	0,12	0,05
10	0,02	0,06	0,06	0,02

10.12 $a = 3$, $b = 4$.

X	Y			
	3	4	5	6
3	0,02	0,05	0,04	0,01
5	0,05	0,12	0,11	0,04
7	0,06	0,12	0,2	0,04
9	0,02	0,05	0,05	0,02

10.13 $a = 2$, $b = -1$.

X	Y			
	-2	2	6	10
-1	0,01	0,03	0,03	0,01
1	0,04	0,18	0,1	0,04
3	0,05	0,13	0,13	0,05
5	0,03	0,07	0,07	0,03

10.14 $a = 9$, $b = 3$.

X	Y			
	-6	-1	4	9
3	0,01	0,04	0,04	0,01
5	0,05	0,11	0,1	0,04
7	0,05	0,21	0,12	0,05
9	0,03	0,06	0,06	0,02

10.15 $a = -1$, $b = 7$.

X	Y			
	-6	-1	4	9
3	0,02	0,04	0,04	0,01
5	0,05	0,11	0,2	0,04
7	0,06	0,12	0,11	0,05
9	0,02	0,06	0,05	0,02

10.16 $a = 7$, $b = 2$.

X	Y			
	-2	1	4	7
-6	0,01	0,04	0,04	0,02
-2	0,04	0,1	0,11	0,05
2	0,04	0,12	0,2	0,06
6	0,02	0,06	0,06	0,03

10.17 $a = -3$, $b = 5$.

X	Y			
	-3	-1	1	3
2	0,02	0,05	0,04	0,01
3	0,05	0,2	0,11	0,04
4	0,06	0,12	0,11	0,04
5	0,02	0,06	0,05	0,02

10.18 $a = 2$, $b = 6$.

X	Y			
	-1	2	5	8
3	0,02	0,05	0,04	0,02
6	0,05	0,11	0,11	0,04
9	0,05	0,21	0,11	0,05
12	0,02	0,05	0,05	0,02

10.19 $a = -1$, $b = 3$.

X	Y			
	-1	3	7	11
3	0,02	0,04	0,04	0,01
6	0,05	0,11	0,2	0,04
9	0,06	0,12	0,11	0,05
12	0,02	0,06	0,05	0,02

10.20 $a = 9$, $b = 10$.

X	Y			
	3	5	7	9
1	0,01	0,03	0,04	0,02
4	0,04	0,1	0,11	0,05
7	0,05	0,12	0,19	0,06
10	0,02	0,06	0,07	0,03

10.21 $a = -2$, $b = 2$.

X	Y			
	-2	3	8	13
2	0,02	0,04	0,04	0,01
5	0,06	0,2	0,09	0,03
8	0,07	0,13	0,11	0,04
11	0,03	0,06	0,05	0,02

10.22 $a = 5$, $b = 3$.

X	Y			
	2	5	8	11
3	0,02	0,06	0,06	0,02
4	0,05	0,12	0,12	0,05
5	0,04	0,19	0,11	0,05
6	0,01	0,04	0,04	0,02

10.23 $a = 1$, $b = 4$.

X	Y			
	-3	-1	1	3
1	0,03	0,06	0,05	0,02
4	0,06	0,13	0,19	0,04
7	0,06	0,11	0,1	0,04
10	0,02	0,04	0,04	0,01

10.24 $a = -1$, $b = -5$.

X	Y			
	-3	-1	1	3
-5	0,03	0,06	0,06	0,02
-2	0,06	0,13	0,12	0,04
1	0,05	0,11	0,17	0,04
4	0,02	0,04	0,04	0,01

10.25 $a = -1$, $b = 3$.

X	Y			
	-5	-3	-1	1
-3	0,02	0,05	0,04	0,01
-1	0,06	0,19	0,1	0,04
1	0,06	0,13	0,11	0,04
3	0,03	0,06	0,05	0,01

10.26 $a = -2$, $b = 3$.

X	Y			
	-2	1	4	7
-1	0,02	0,06	0,06	0,02
1	0,05	0,12	0,12	0,05
3	0,04	0,19	0,11	0,05
5	0,01	0,04	0,04	0,02

10.27 $a=9$, $b=6$.

X	Y			
	3	5	7	9
-2	0,02	0,05	0,06	0,03
2	0,04	0,11	0,19	0,06
6	0,04	0,1	0,12	0,06
10	0,01	0,04	0,05	0,02

10.28 $a=3$, $b=8$.

X	Y			
	-1	3	7	11
2	0,02	0,05	0,05	0,02
5	0,05	0,11	0,11	0,05
8	0,05	0,11	0,19	0,05
11	0,02	0,05	0,05	0,02

10.29 $a=-2$, $b=5$.

X	Y			
	-5	-2	1	4
-1	0,01	0,03	0,03	0,01
1	0,03	0,21	0,1	0,05
3	0,04	0,12	0,13	0,06
5	0,02	0,06	0,07	0,03

10.30 $a=-1$, $b=-5$.

X	Y			
	-6	-1	4	9
-5	0,02	0,04	0,04	0,01
-2	0,05	0,11	0,1	0,04
1	0,06	0,19	0,12	0,05
4	0,03	0,06	0,06	0,02

МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

ЗАДАЧА 1

Задано вибірку. Потрібно:

1) побудувати варіаційний ряд;
2) побудувати статистичний розподіл вибірки;
3) побудувати полігон відносних частот;
4) знайти емпіричну функцію розподілу і побудувати її графік.

1.1	2, 6, 5, 6, 7, 6, 5, 6, 9, 2, 7, 6, 5, 6, 5, 7, 6, 2, 6, 5, 9, 7, 6, 5, 6.
1.2	1, 5, 3, 5, 6, 5, 8, 5, 1, 5, 3, 5, 6, 5, 3, 5, 5, 6, 3, 5.
1.3	5, 3, 5, 5, 4, 5, 5, 7, 5, 9, 5, 4, 5, 7, 5, 9, 5, 4, 5, 7, 5, 7, 5, 5, 5.
1.4	5, 1, 2, 5, 8, 2, 5, 10, 1, 5, 2, 5, 8, 2, 5, 2, 5, 8, 2, 5.
1.5	5, 4, 2, 3, 4, 5, 4, 8, 4, 2, 3, 4, 5, 8, 4, 2, 3, 4, 5, 3, 4, 5, 4, 5, 4.
1.6	7, 5, 7, 6, 7, 9, 7, 10, 7, 6, 7, 7, 9, 7, 10, 6, 7, 9, 7, 10, 6, 7, 9, 6, 7.
1.7	1, 2, 4, 7, 8, 1, 2, 4, 7, 8, 1, 2, 4, 7, 8, 1, 2, 4, 7, 2, 4, 7, 2, 4, 4.
1.8	3, 5, 6, 8, 10, 3, 5, 6, 8, 10, 5, 6, 8, 10, 5, 6, 8, 6, 8, 6.
1.9	3, 1, 3, 2, 3, 4, 5, 3, 2, 3, 4, 3, 5, 2, 3, 4, 5, 2, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3.
1.10	5, 2, 5, 4, 5, 7, 5, 8, 5, 4, 5, 7, 5, 8, 4, 5, 7, 5, 7, 5.
1.11	7, 4, 6, 7, 8, 7, 10, 6, 7, 7, 8, 7, 10, 7, 6, 7, 8, 10, 7, 8, 7, 10, 7, 8, 7.
1.12	4, 1, 4, 3, 4, 6, 4, 8, 1, 4, 3, 4, 6, 4, 3, 4, 6, 4, 6, 4.
1.13	2, 5, 4, 5, 6, 7, 2, 4, 5, 6, 2, 4, 5, 6, 4, 5, 4, 5, 4, 5, 4, 5, 4, 5, 5.
1.14	3, 4, 5, 8, 5, 10, 4, 5, 8, 10, 5, 4, 5, 8, 4, 5, 8, 5, 8, 5.
1.15	6, 4, 5, 6, 10, 6, 11, 4, 6, 5, 6, 10, 11, 5, 6, 10, 11, 6, 10, 6.
1.16	1, 5, 2, 5, 6, 5, 8, 5, 1, 5, 2, 5, 6, 5, 1, 5, 2, 5, 6, 2, 5, 6, 5, 2, 5.
1.17	2, 4, 5, 6, 5, 9, 5, 2, 5, 4, 5, 6, 5, 9, 2, 4, 5, 6, 9, 5, 6, 9, 5, 6, 5.
1.18	4, 2, 3, 4, 5, 4, 7, 4, 2, 3, 4, 5, 7, 3, 4, 4, 5, 7, 3, 4.
1.19	3, 5, 6, 8, 6, 9, 6, 5, 6, 8, 9, 6, 5, 6, 8, 9, 6, 8, 9, 6, 8, 9, 6, 8, 6.
1.20	2, 5, 3, 5, 7, 5, 8, 3, 5, 7, 5, 8, 3, 5, 7, 3, 5, 7, 5, 7.
1.21	3, 5, 6, 8, 9, 3, 5, 6, 8, 9, 5, 6, 8, 9, 5, 6, 8, 9, 3, 6, 8, 6, 8, 6, 3.
1.22	4, 1, 2, 4, 5, 4, 6, 1, 4, 2, 4, 5, 6, 1, 2, 4, 5, 2, 4, 5, 2, 4, 2, 4, 4.
1.23	1, 4, 5, 7, 10, 1, 4, 5, 7, 4, 5, 7, 4, 5, 4, 5, 4, 5, 5, 5.
1.24	1, 2, 4, 5, 6, 1, 2, 4, 5, 6, 4, 2, 4, 5, 6, 4, 2, 4, 5, 2, 4, 5, 4, 5, 4.
1.25	1, 2, 3, 5, 6, 1, 2, 3, 5, 6, 1, 2, 3, 5, 6, 2, 3, 5, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 3.
1.26	4, 2, 4, 3, 4, 5, 4, 6, 4, 2, 4, 3, 4, 4, 5, 3, 4, 5, 3, 4.
1.27	2, 4, 5, 7, 5, 8, 2, 5, 4, 5, 7, 8, 2, 5, 4, 5, 7, 5, 2, 4, 5, 7, 5, 4, 5.
1.28	2, 5, 3, 5, 6, 7, 5, 2, 3, 5, 6, 5, 7, 2, 3, 5, 6, 3, 5, 5.
1.29	1, 2, 3, 5, 3, 6, 1, 3, 2, 3, 5, 3, 6, 3, 1, 2, 3, 5, 1, 2, 3, 5, 2, 3, 3.
1.30	1, 2, 3, 5, 2, 6, 1, 2, 3, 5, 6, 1, 2, 3, 2, 5, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 2, 3, 2.

ЗАДАЧА 2

Дано інтервальний варіаційний ряд (в першому рядку вказано часткові інтервали $a_{i-1}-a_i$, в другому – відповідні їм частоти n_i).

Побудувати гістограму відносних частот.

2.1

$a_{i-1}-a_i$	2-6	6-10	10-14	14-18	18-22	22-26
n_i	10	16	32	24	12	6

2.2

$a_{i-1}-a_i$	1-4	4-7	7-10	10-13	13-16	16-19
n_i	6	15	27	33	12	7

2.3

$a_{i-1}-a_i$	4-6	6-8	8-10	10-12	12-14	14-16
n_i	8	25	30	20	10	7

2.4

$a_{i-1}-a_i$	3-7	7-11	11-15	15-19	19-23	23-27
n_i	9	13	25	32	13	8

2.5

$a_{i-1}-a_i$	1-3	3-5	5-7	7-9	9-11	11-13
n_i	7	14	28	34	18	12

2.6

$a_{i-1}-a_i$	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35
n_i	5	12	25	30	18	10

2.7

$a_{i-1}-a_i$	2-7	7-12	12-17	17-22	22-27	27-32
n_i	9	24	30	19	10	8

2.8

$a_{i-1}-a_i$	3-5	5-7	7-9	9-11	11-13	13-15
n_i	15	32	25	12	10	6

2.9

$a_{i-1}-a_i$	1-5	5-9	9-13	13-17	17-21	21-25
n_i	8	10	14	8	6	4

2.10

$a_{i-1}-a_i$	6-9	9-12	12-15	15-18	18-21	21-24
n_i	6	12	21	10	7	4

2.11

$a_{i-1}-a_i$	5-9	9-13	13-17	17-21	21-25	25-29
n_i	8	20	30	25	12	5

2.12

$a_{i-1}-a_i$	3-8	8-13	13-18	18-23	23-28	28-33
n_i	3	13	25	32	22	5

2.13

$a_{i-1}-a_i$	1-4	4-7	7-10	10-13	13-16	16-19
n_i	9	10	16	12	8	5

2.14

$a_{i-1}-a_i$	6-8	8-10	10-12	12-14	14-16	16-18
n_i	5	17	20	10	6	2

2.15

$a_{i-1}-a_i$	1-6	6-11	11-16	16-21	21-26	26-31
n_i	10	22	28	18	14	8

2.16

$a_{i-1}-a_i$	2-4	4-6	6-8	8-10	10-12	12-14
n_i	9	14	24	30	16	7

2.17

$a_{i-1}-a_i$	0-6	6-12	12-18	18-24	24-30	30-36
n_i	5	15	21	10	6	3

2.18

$a_{i-1}-a_i$	4-8	8-12	12-16	16-20	20-24	24-28
n_i	6	10	15	12	4	3

2.19

$a_{i-1}-a_i$	5-7	7-9	9-11	11-13	13-15	15-17
n_i	8	12	20	30	19	11

2.20

$a_{i-1}-a_i$	6-10	10-14	14-18	18-22	22-26	26-30
n_i	12	14	28	20	15	11

2.21

$a_{i-1}-a_i$	1-7	7-13	13-19	19-25	25-31	31-37
n_i	8	10	16	6	7	3

2.22

$a_{i-1}-a_i$	2-7	7-12	12-17	17-22	22-27	27-32
n_i	7	11	17	8	4	3

2.23

$a_{i-1}-a_i$	4-9	9-14	14-19	19-24	24-29	29-34
n_i	18	30	22	14	10	6

2.24

$a_{i-1}-a_i$	5-8	8-11	11-14	14-17	17-20	20-23
n_i	9	24	34	18	9	6

2.25	$a_{i-1} - a_i$	1-4	4-7	7-10	10-13	13-16	16-19
	n_i	5	10	15	8	7	5

2.26	$a_{i-1} - a_i$	4-7	7-10	10-13	13-16	16-19	19-22
	n_i	3	6	13	18	7	3

2.27	$a_{i-1} - a_i$	1-3	3-5	5-7	7-9	9-11	11-13
	n_i	10	25	32	16	10	7

2.28	$a_{i-1} - a_i$	1-3	3-5	5-7	7-9	9-11	11-13
	n_i	12	20	35	15	13	5

2.29	$a_{i-1} - a_i$	2-5	5-8	8-11	11-14	14-17	17-20
	n_i	5	6	12	16	6	5

2.30	$a_{i-1} - a_i$	0-2	2-4	4-6	6-8	8-10	10-12
	n_i	6	10	22	18	10	4

ЗАДАЧА 3

1) За статистичним розподілом вибірки (див. задачу 1) знайти вибіркове середнє $\overline{x}$, вибіркову дисперсію $\sigma_в^2$, виправлену вибіркову дисперсію s^2 і вибіркове середнє квадратичне відхилення $\sigma_в$.

2) За заданим інтервальним варіаційним рядом (див. задачу 2) знайти вибіркове середнє $\overline{x}$ та вибіркову дисперсію $\sigma_в^2$.

ЗАДАЧА 4

Побудувати надійний інтервал для оцінки з надійністю γ невідомого математичного сподівання a нормально розподіленої генеральної сукупності X, якщо відомі середнє квадратичне відхилення σ, вибіркове середнє $\overline{x}$ і об'єм вибірки n.

№	σ	$\overline{x}$	n	γ
4.1	3	10,2	36	0,95
4.2	4	11,4	64	0,99
4.3	4,5	15,6	100	0,99
4.4	5	13,2	64	0,95

№	σ	$\overline{x}$	n	γ
4.5	5,5	11	144	0,999
4.6	2	18,2	36	0,95
4.7	3,5	12,4	64	0,99
4.8	3	11,6	81	0,999
4.9	4,5	19,4	100	0,95
4.10	6	18,6	81	0,95
4.11	5	17,7	100	0,99
4.12	3	24,6	81	0,95
4.13	2,5	14,4	100	0,999
4.14	4	20,3	64	0,99
4.15	4	15,8	64	0,95
4.16	3	16,5	100	0,999
4.17	5	19,2	49	0,95
4.18	2	12,2	64	0,999
4.19	4	18,7	100	0,99
4.20	3,5	11,9	49	0,95
4.21	5	20,8	100	0,999
4.22	4	13,6	144	0,99
4.23	3	14,8	81	0,95
4.24	2	10,4	64	0,999
4.25	4,5	15,2	81	0,95
4.26	4	15,6	49	0,99
4.27	3	22,4	64	0,95
4.28	5	26,8	81	0,999
4.29	2,4	37,5	100	0,999
4.30	3,2	21,9	49	0,95

ЗАДАЧА 5

Побудувати надійний інтервал для оцінки з надійністю γ невідомого середнього квадратичного відхилення σ нормально розподіленої генеральної сукупності X, якщо відомі виправлене середнє квадратичне відхилення s і об’єм вибірки n.

№	s	n	γ
5.1	0,5	20	0,999
5.2	1,5	10	0,99
5.3	4,5	6	0,95
5.4	0,8	30	0,999
5.5	2,4	9	0,99
5.6	2,3	12	0,95

№	s	n	γ
5.7	0,7	25	0,999
5.8	0,6	18	0,99
5.9	1,3	15	0,95
5.10	0,9	35	0,999
5.11	1,8	20	0,99
5.12	0,7	16	0,95

№	s	n	γ
5.13	1,0	40	0,999
5.14	2,1	25	0,99
5.15	1,5	18	0,95
5.16	1,1	45	0,999
5.17	0,8	30	0,99
5.18	0,6	20	0,95
5.19	0,6	50	0,999
5.20	1,0	35	0,99
5.21	1,1	25	0,95

№	s	n	γ
5.22	2,5	16	0,999
5.23	1,4	40	0,99
5.24	0,9	30	0,95
5.25	1,8	15	0,999
5.26	2,8	8	0,99
5.27	1,5	11	0,95
5.28	2,0	14	0,999
5.29	1,9	45	0,99
5.30	0,5	35	0,95

ЗАДАЧА 6

Знайти вибіркове рівняння прямої регресії $y = a\,x + b$ за даними п'яти спостережень $x_i ; y_i$ над величинами X та Y. Зробити малюнок, на якому вказати експериментальні дані та побудувати пряму регресії.

6.1	(1; 4,9)	(2; 5,9)	(3; 4,4)	(4; 3,4)	(5; 2,9)
6.2	(2; 3,5)	(4; 5,8)	(6; 7,1)	(8; 6,1)	(10; 7,5)
6.3	(1; 0,9)	(3; 2,9)	(4; 2,5)	(6; 5,1)	(7; 4)
6.4	(1; 4,7)	(2; 5,7)	(3; 4,2)	(4; 2,2)	(5; 2,7)
6.5	(0; 3,5)	(2; 3,8)	(4; 1,8)	(6; 1,5)	(7; 0,4)
6.6	(1; 1,5)	(3; 4,5)	(4; 4,1)	(5; 6,4)	(6; 6,8)
6.7	(1; 4,5)	(2; 5,5)	(3; 3,9)	(4; 2,1)	(5; 2,5)
6.8	(2; 5,3)	(3; 6,3)	(4; 4,9)	(5; 2,9)	(6; 3,3)
6.9	(0; 1,2)	(1; 2,1)	(2; 1,5)	(3; 2,9)	(4; 2,5)
6.10	(1; 4,2)	(2; 5,2)	(3; 3,7)	(4; 1,7)	(5; 2,2)
6.11	(2; 4,9)	(3; 5,7)	(4; 4,3)	(5; 2,4)	(6; 2,9)
6.12	(0; 3,7)	(1; 4,2)	(2; 2,7)	(3; 3,3)	(4; 1,5)
6.13	(2; 1,5)	(3; 2,8)	(4; 2,4)	(6; 4,8)	(7; 3,8)
6.14	(1; 2,9)	(2; 3,9)	(3; 2,3)	(4; 0,8)	(5; 1,3)
6.15	(1; 4,1)	(2; 4,9)	(3; 3,6)	(4; 1,9)	(5; 2,1)
6.16	(0; 4,3)	(1; 2,5)	(3; 3,1)	(5; 2,1)	(7; 0,3)
6.17	(1; 2,5)	(3; 4,8)	(5; 5,9)	(7; 4,9)	(9;6,5)
6.18	(1; 3,9)	(2; 4,8)	(3; 3,4)	(4; 1,4)	(5; 1,9)
6.19	(0; 3,5)	(2; 6,1)	(4; 6,9)	(6; 6,5)	(8; 7,5)
6.20	(1; 2,3)	(2; 2,5)	(3; 4,5)	(4; 4,1)	(5; 5,5)
6.21	(1; 3,7)	(2; 4,7)	(3; 3,2)	(4; 1,4)	(5; 1,7)
6.22	(2; 5,5)	(3; 6,5)	(4; 5,1)	(5; 3,2)	(6; 3,6)
6.23	(2; 4,5)	(4; 7,1)	(6; 8,1)	(8; 7,5)	(10;8,5)

6.24	(1; 3,5)	(2; 4,5)	(3; 2,9)	(4; 1,5)	(5; 1,8)
6.25	(1; 3,3)	(2; 4,3)	(3; 2,8)	(4; 1,1)	(5; 1,4)
6.26	(1; 2,5)	(3; 1,8)	(5; 3,1)	(7; 4,9)	(9; 6,1)
6.27	(2; 2,5)	(4; 2,8)	(6; 5,1)	(7; 3,9)	(8; 5,3)
6.28	(1; 0,9)	(2; 3,3)	(3; 4,5)	(4; 4,1)	(5; 6,2)
6.29	(1; 3,1)	(2; 2,6)	(3; 3,4)	(4; 2,5)	(5; 0,9)
6.30	(0; 0,8)	(2; 2,5)	(4; 2,6)	(6; 4,8)	(8; 3,9)

ЗАДАЧА 7

Використовуючи критерій Пірсона, при рівні значущості α перевірити, чи узгоджується гіпотеза про нормальний розподіл генеральної сукупності X зі статистичними даними, які подані у вигляді інтервального варіаційного ряду (в першому рядку вказано часткові інтервали $a_{i-1} - a_i$, в другому – відповідні їм частоти n_i).

7.1 $\alpha = 0,05$;

$a_{i-1} - a_i$	2-12	12-22	22-32	32-42	42-52	52-62	62-72
n_i	7	8	15	36	15	11	8

7.2 $\alpha = 0,05$;

$a_{i-1} - a_i$	1,5-3,5	3,5-5,5	5,5-7,5	7,5-9,5	9,5-11,5	11,5-13,5	13,5-15,5
n_i	5	17	12	35	15	10	6

7.3 $\alpha = 0,05$;

$a_{i-1} - a_i$	1-6	6-11	11-16	16-21	21-26	26-31	31-36
n_i	6	12	16	40	13	8	5

7.4 $\alpha = 0,01$;

$a_{i-1} - a_i$	3,0-3,6	3,6-4,2	4,2-4,8	4,8-5,4	5,4-6,0	6,0-6,6	6,6-7,2
n_i	6	8	31	43	22	15	5

7.5 $\alpha = 0,025$;

$a_{i-1} - a_i$	0-2,2	2,2-4,4	4,4-6,6	6,6-8,8	8,8-11,0	11,0-13,2	13,2-15,4
$\mathrm{n_i}$	14	18	32	70	20	36	10

7.6 $\alpha = 0,01$;

$a_{i-1} - a_i$	–4 - 0	0-4	4-8	8-12	12-16	16-20	20-24
n_i	8	16	40	72	36	18	10

7.7 $\alpha = 0,05$;

$a_{i-1} - a_i$	2-7	7-12	12-17	17-22	22-27	27-32	32-37
n_i	10	26	25	30	26	21	12

7.8 $\alpha = 0,05$;

$a_{i-1} - a_i$	–10- –5	–5-0	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25
n_i	14	18	32	70	36	20	10

7.9 $\alpha = 0,025$;

$a_{i-1} - a_i$	4-6	6-8	8-10	10-12	12-14	14-16	16-18
n_i	12	14	36	15	10	7	6

7.10 $\alpha = 0,05$;

$a_{i-1} - a_i$	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
n_i	10	27	55	70	20	13	5

7.11 $\alpha = 0,025$;

$a_{i-1} - a_i$	1,8-2,8	2,8-3,8	3,8-4,8	4,8-5,8	5,8-6,8	6,8-7,8	7,8-8,8
n_i	5	15	23	27	19	6	5

7.12 $\alpha = 0,05$;

$a_{i-1} - a_i$	10-13	13-16	16-19	19-22	22-25	25-28	28-31
n_i	12	23	30	29	29	16	11

7.13 $\alpha = 0,01$;

$a_{i-1} - a_i$	1,2-5,2	5,2-9,2	9,2-13,2	13,2-17,2	17,2-21,2	21,2-25,2	25,2-29,2
n_i	8	28	32	66	36	20	10

7.14 $\alpha = 0,05$;

$a_{i-1} - a_i$	1,5-4,5	4,5-7,5	7,5-10,5	10,5-13,5	13,5-16,5	16,5-19,5	19,5-22,5
n_i	5	12	34	50	28	14	7

7.15 $\alpha = 0,025$;

$a_{i-1} - a_i$	10,5-12,5	12,514,5	14,5-16,5	16,5-18,5	18,5-20,5	20,5-22,5	22,5-24,5
n_i	15	25	32	50	12	10	6

7.16 $\alpha = 0,05$;

$a_{i-1} - a_i$	10-16	16-22	22-28	28-34	34-40	40-46	46-52
n_i	9	24	34	48	20	9	6

7.17 $\alpha = 0,01$;

$a_{i-1} - a_i$	2,0-3,5	3,5-5,0	5,0-6,5	6,5-8,0	8,0-9,5	9,5-11,0	11,0-12,5
n_i	5	16	21	42	32	8	6

7.18 $\alpha = 0,05$;

$a_{i-1} - a_i$	9-11	11-13	13-15	15-17	17-19	19-21	21-23
n_i	6	8	15	32	18	14	7

7.19 $\alpha = 0,05$;

$a_{i-1} - a_i$	0,5-5,5	5,5-10,5	10,5-15,5	15,5-20,5	20,5-25,5	25,5-30,5	30,5-35,5
n_i	13	20	30	60	35	30	12

7.20 $\alpha = 0,025$;

$a_{i-1} - a_i$	12-15	15-18	16-21	21-24	24-27	27-30	30-33
n_i	10	13	20	65	55	24	13

7.21 $\alpha = 0,05$;

$a_{i-1} - a_i$	2,6-6,6	6,6-10,6	10,6-14,6	14,6-18,6	18,6-22,6	22,6-26,6	26,6-30,6
n_i	6	10	17	45	35	22	15

7.22 $\alpha = 0,01$;

$a_{i-1} - a_i$	2-8	8-14	14-20	20-26	26-32	32-38	38-44
n_i	12	18	22	38	24	20	16

7.23 $\alpha = 0,05$;

$a_{i-1} - a_i$	3,5-7,5	7,5-11,5	11,5-15,5	15,5-19,5	19,5-23,5	23,5-27,5	27,5-31,5
n_i	5	10	23	45	36	22	9

7.24 $\alpha = 0,025$;

$a_{i-1} - a_i$	8-18	18-28	28-38	38-48	48-58	58-68	68-78
n_i	15	20	26	40	26	16	7

7.25 $\alpha = 0,05$;

$a_{i-1} - a_i$	–6-0	0-6	6-12	12-18	18-24	24-30	30-36
n_i	20	29	48	70	81	40	12

7.26 $\alpha = 0,025$;

$a_{i-1} - a_i$	–4-6	6-16	16-26	26-36	36-46	46-56	56-66
n_i	7	14	46	88	64	53	28

7.27 $\alpha = 0,01$;

$a_{i-1} - a_i$	–3-1	1-5	5-9	9-13	13-17	17-21	21-25
n_i	7	12	25	52	30	18	6

7.28 $\alpha = 0,05$;

$a_{i-1} - a_i$	0,5-2,5	2,5-4,5	4,5-6,5	6,5-8,5	8,5-10,5	10,5-12,5	12,5-14,5
n_i	12	24	38	64	34	18	10

7.29 $\alpha = 0,05$;

$a_{i-1} - a_i$	–1,5-3,5	3,5-8,5	8,5-13,5	13,5-18,5	18,5-23,5	23,5-28,5	28,5-33,5
n_i	10	22	38	70	40	14	6

7.30 $\alpha = 0,025$;

$a_{i-1} - a_i$	–1,6-2,4	2,4-6,4	6,4-10,4	10,4-14,4	14,4-18,4	18,4-22,4	22,4-26,4
n_i	6	10	26	48	32	18	10

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Приклад 1. В партії із 25 деталей є чотири браковані. Знайти ймовірність того, що серед взятих навмання для перевірки п'яти деталей буде дві браковані.

Розв'язання. Розглянемо випадкову подію A – серед п'яти взятих навмання деталей дві браковані. За класичним визначенням ймовірності $P(A) = \frac{m}{n}$, де n – число усіх рівноможливих елементарних подій в даному випадковому експерименті, m – число елементарних подій, які сприяють події A. Загальне число елементарних подій дорівнює числу способів, за допомогою яких можна вибрати п'ять деталей із 25, тобто $n = C_{25}^5$. Дві браковані деталі можна вибрати з чотирьох бракованих C_4^2 способами, а інші три не браковані – C_{21}^3 способами. Тоді $m = C_4^2 \cdot C_{21}^3$. Отже

$$P(A) = \frac{C_4^2 \cdot C_{21}^3}{C_{25}^5} = \frac{\frac{4!}{2!\cdot 2!} \cdot \frac{21!}{3!\cdot 18!}}{\frac{25!}{5!\cdot 20!}} \approx 0{,}15 .$$

Приклад 2. Книги деякого чотиритомного видання розставляють навмання на полиці. Знайти ймовірність того, що всі чотири томи стоятимуть в порядку зростання їх номерів.

Розв'язання. Загальне число елементарних подій дорівнює числу переставлень із чотирьох елементів, тобто $n = 4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$. Події A сприяє лише одна елементарна подія (1,2,3,4), тобто $m = 1$. Отже

$$P(A) = \frac{1}{24} \approx 0,042 .$$

Приклад 3. В коробці 10 деталей, з яких 8 стандартних. З коробки навмання дістають три деталі. Знайти ймовірність того, що всі три деталі стандартні.

Розв'язання. Подію A (всі три деталі стандартні) представимо як $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$, де події A_1, A_2, A_3 означають, що відповідно перша, друга і третя взяті деталі стандартні. За теоремою про множення ймовірностей

$$P(A) = P(A_1)\cdot P(A_2 \mid A_1)\cdot P(A_3 \mid A_1 A_2) = \frac{8}{10}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{6}{8} \approx 0,467 .$$

Приклад 4. Верстат-автомат штампує деталі. Ймовірність того, що за зміну не буде випущено жодної бракованої деталі, дорівнює 0,9. Знайти ймовірність того, що за три зміни не буде випущено жодної бракованої деталі.

Розв'язання. Подію А (за три зміни не випущено жодної бракованої деталі) представимо, як $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$, де події A_1, A_2, A_3 означають, що відповідно за першу, другу і третю зміну не випущено жодної бракованої деталі. Події A_1, A_2, A_3 – незалежні. Тому за теоремою множення ймовірностей:

$$P(A) = P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3) = 0,9\cdot 0,9\cdot 0,9 \approx 0,729 .$$

Приклад 5. На заводі перший цех виробляє 10 %, другий – 70 %, третій – 20 % всіх деталей. В їх продукції браку, відповідно 9, 8, 7 %. Знайти ймовірність того, що випадково вибрана деталь дефектна.

Розв'язання. Нехай подія A – деталь дефектна. Висунемо гіпотези: H_1 – деталь виготовлена першим цехом; H_2 – деталь виготовлена другим цехом; H_3 – деталь виготовлена третім цехом. За умовою задачі, відповідні ймовірності $P(H_1) = 0,1$, $P(H_2) = 0,7$, $P(H_3) = 0,2$; $P(A \mid H_1) = 0,09$, $P(A \mid H_2) = 0,08$, $P(A \mid H_3) = 0,07$.

Застосовуючи формулу повної ймовірності

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P(A\,|\,H_i)\,,$$

отримаємо

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(H_i)P(A\,|\,H_i)=0,09\cdot 0,1+0,08\cdot 0,7+0,07\cdot 0,2=0,079\ .$$

Приклад 6. На заводі перший цех виробляє 10 %, другий – 70 %, третій – 20 % всіх деталей. В їх продукції браку, відповідно 9, 8, 7 %. Випадково вибрана деталь виявилась дефектною. Знайти ймовірність того, що вона виготовлена другим цехом.

Розв’язання. Нехай подія A – деталь дефектна. Висунемо гіпотези: H_1 – деталь виготовлена першим цехом; H_2 – деталь виготовлена другим цехом; H_3 – деталь виготовлена третім цехом. За умовою задачі, відповідні ймовірності $P(H_1)=0,1$, $P(H_2)=0,7$, $P(H_3)=0,2$; $P(A\,|\,H_1)=0,09$, $P(A\,|\,H_2)=0,08$, $P(A\,|\,H_3)=0,07$.

Застосовуючи формулу Байєса

$$P(H_k\mid A)=\frac{P(H_k)\;P(A\,|\,H_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(H_i)\;P(A\,|\,H_i)},\qquad k=1,2,\ldots,n\ ,$$

отримаємо

$$P(H_2\mid A)=\frac{P(H_2)\;P(A\,|\,H_2)}{\sum\limits_{i=1}^{3}P(H_i)\;P(A\,|\,H_i)}=\frac{0,08\cdot 0,7}{0,09\cdot 0,1+0,08\cdot 0,7+0,07\cdot 0,2}=$$

$$=\frac{0,056}{0,079}=0,709.$$

Приклад 7. Монета підкидається п’ять разів. Знайти ймовірність того, що: а) тричі випаде “герб”; б) “герб” випаде не менше трьох разів.

Розв’язання. Ймовірність випадання “герба” при одному підкиданні монети $p=\dfrac{1}{2}$, звідки $q=1-p=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$. За формулою Бернуллі $P_n\ \ m\ =C_n^m p^m q^{n-m}$ маємо:

а) $P_5\ \ 3\ =C_5^3\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\left(\dfrac{1}{2}\right)^{5-3}=\dfrac{C_5^3}{2^5}=\dfrac{5}{16}$;

б) $P_5(3 \le m \le 5) = P_5(3) + P_5(4) + P_5(5) = \frac{10}{32} + \frac{5}{32} + \frac{1}{32} = \frac{1}{2}$, оскільки

$P_5(3) = C_5^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{10}{32}$; $P_5(4) = C_5^4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{C_5^4}{2^5} = \frac{5}{32}$;

$P_5(5) = C_5^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{32}$.

Приклад 8. Знайти ймовірність того, що подія A відбудеться рівно 80 разів у 400 випробуваннях, якщо ймовірність її настання в кожному випробуванні дорівнює 0,2.

Розв'язання. За умовою $n = 400$, $m = 80$, $p = 0,2$, отже $q = 1 - p = 1 - 0,2 = 0,8$.

Оскільки n велике, скористаємося локальною теоремою Муавра-Лапласа у вигляді формули

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \quad x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}.$$

Таблиця значень функції $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ для невід'ємних значень аргументу наведена у додатку 1 (для від'ємних значень x користуються тією ж таблицею, оскільки функція $\varphi(x)$ парна, тобто $\varphi(-x) = \varphi(x)$).

Одержимо $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{80 - 400 \cdot 0,2}{8} = 0$, звідки за таблицею значень функції $\varphi(x)$ (додаток 1) знаходимо $\varphi(0) = 0,3989$.

Отже, $P_{400}(80) = \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} \cdot \varphi(x) = \frac{1}{8} \varphi(0) = \frac{1}{8} \cdot 0,3989 = 0,04986$.

Приклад 9. Ймовірність того, що деталь не буде перевірено, дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що серед 400 випадково відібраних деталей неперевірених буде від 70 до 100 деталей.

Розв'язання. Скористаємося інтегральною теоремою Муавра-Лапласа у вигляді формули

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

де $x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Тут $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ – функція Лапласа, таблиця значень якої наведена в додатку 2.

За умовою $n=400$, $p=0,2$, $m_1=70$, $m_2=100$. Знайдемо $q=$ $=1-p=1-0,2=0,8$ та обчислимо

$$x_1=\frac{m_1-np}{\sqrt{npq}}=\frac{70-400\cdot 0,2}{\sqrt{400\cdot 0,2\cdot 0,8}}=-1,25;\ x_1=\frac{m_2-np}{\sqrt{npq}}=\frac{100-400\cdot 0,2}{\sqrt{400\cdot 0,2\cdot 0,8}}=2,5.$$

Використовуючи непарність функції Лапласа $\Phi(-x)=-\Phi(x)$ одержимо

$$P_{400}(70\le m\le 100)=\Phi(2,5)-\Phi(-1,25)=\Phi(2,5)+\Phi(1,25).$$

За таблицею (додаток 2) знаходимо

$$\Phi(2,5)=0,4938,\ \Phi(1,25)=0,3944.$$

Тому

$$P_{400}(70\le m\le 100)=0,4938+0,3944=0,8882.$$

Приклад 10. Магазин одержав 1000 новорічних пакунків цукерок. Ймовірність того, що під час перевезення пакунок буде пошкоджено дорівнює 0,002. Знайти ймовірність того, що магазин одержить пошкодженими: а) рівно 3 пакунки; б) більше 3 пакунків.

Розв'язання. а) Оскільки число $n=1000$ велике, а ймовірність $p=0,002$ близька до нуля, скористаємося теоремою Пуассона:

$$P_n(m)=\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda},\ \lambda=np.$$

Знайдемо $\lambda=np=1000\cdot 0,002=2$. Звідки

$$P_{1000}(3)=\frac{2^3}{3!}e^{-2}=0,18.$$

б) Скористаємось очевидною рівністю

$$P_{1000}(4\le m\le 1000)=1-P_{1000}(0\le m\le 3)=$$
$$=1-P_{1000}(0)-P_{1000}(1)-P_{1000}(2)-P_{1000}(3).$$

За теоремою Пуассона знайдемо

$$P_{1000}(0)=\frac{2^0}{0!}e^{-2}=0,135;\quad P_{1000}(1)=\frac{2^1}{1!}e^{-2}=0,271;$$

$$P_{1000}(2)=\frac{2^2}{2!}e^{-2}=0,271;\quad P_{1000}(3)=\frac{2^3}{3!}e^{-2}=0,18.$$

Звідки

$$P_{1000}\ \ 4 \le m \le 1000\ \ = 1 - 0{,}135 - 0{,}271 - 0{,}271 - 0{,}18 = 0{,}143 .$$

Зауважимо, що інтегральна теорема Муавра-Лапласа дає у цьому випадку менш точний результат, оскільки ймовірність p *близька до нуля.*

Приклад 11. Проводиться три незалежних випробування, в кожному з яких подія A відбувається з ймовірністю 0,4. Розглядається випадкова величина X – число появ події A в трьох випробуваннях. Знайти закон розподілу випадкової величини X .

Розв'язання. Випадкова величина X може набувати значень: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$. Знайдемо відповідні їм ймовірності. Для цього скористаємося формулою Бернуллі

$$P_n(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m} ,\ \text{де}\ C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!} ,\ m=0,\ 1,\ \dots ,n.$$

Отримаємо:

$$P_3(0) = C_3^0 \cdot 0{,}4^0 \cdot 0{,}6^3 = 0{,}216 ;\ P_3(1) = C_3^1 \cdot 0{,}4^1 \cdot 0{,}6^2 = 0{,}432 ;$$

$$P_3(2) = C_3^2 \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}6^1 = 0{,}288 ;\ P_3(3) = C_3^3 \cdot 0{,}4^3 \cdot 0{,}6^0 = 0{,}064 .$$

Закон розподілу випадкової величини має вигляд

x_i	0	1	2	3
p_i	0,216	0,432	0,288	0,064

Приклад 12. Відомий закон розподілу випадкової величини X . Знайти її математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення.

x_i	0	1	2	3
p_i	0,216	0,432	0,288	0,064

Розв'язання. Обчислимо числові характеристики випадкової величини:

$$M(X) = \sum_{i=0}^{3} x_i p_i = 0 \cdot 0{,}216 + 1 \cdot 0{,}432 + 2 \cdot 0{,}288 + 3 \cdot 0{,}064 = 1{,}2 ;$$

$$D(X) = \sum_{i=0}^{3} x_i^{\,2} p_i - \ M(X)\ ^2 =$$

$$= 0^2 \cdot 0{,}216 + 1^2 \cdot 0{,}432 + 2^2 \cdot 0{,}288 + 3^2 \cdot 0{,}064 - (1{,}2)^2 = 0{,}72;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0{,}72} = 0{,}849 .$$

Приклад 13. Випадкова величина X задана функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{9} & \text{при } 0<x\le 3,\\ 1 & \text{при } x>3.\end{cases}$$

Знайти ймовірність попадання в інтервал $0;1$, щільність розподілу, математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення. Побудувати графіки функції розподілу та щільності розподілу.

Розв'язання. Ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $0;1$: $P(0<X<1)=F(1)-F(0)=\dfrac{1}{9}-0=\dfrac{1}{9}\approx 0{,}11$.

Оскільки щільність розподілу $f(x)=F'(x)$, то

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0,\\ \dfrac{2}{9}x & \text{при } 0<x\le 3,\\ 0 & \text{при } x>3.\end{cases}$$

Знайдемо математичне сподівання випадкової величини X:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x)dx=\int_0^3\frac{2}{9}x^2dx=\frac{2}{9}\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_0^3=\frac{2\cdot 27}{27}=2.$$

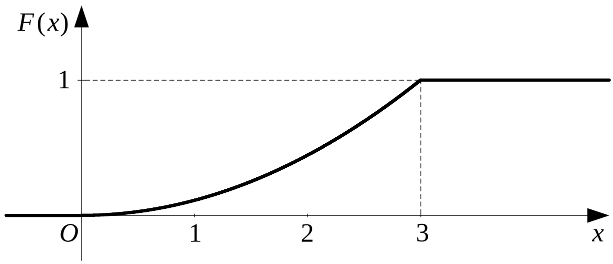
Визначимо дисперсію випадкової величини X:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx-M(X)^2=\int_0^3x^2\frac{2}{9}xdx-2^2=\frac{2}{9}\int_0^3x^3dx-4=\frac{2}{9}\cdot\frac{x^4}{4}\bigg|_0^3-4=$$

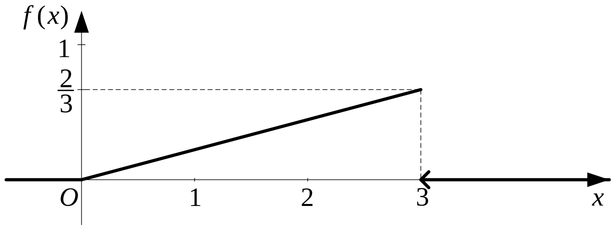
$$=\frac{2}{9}\cdot\frac{3^4}{4}-4=0{,}5.$$

Середнє квадратичне відхилення: $\sigma(x)=\sqrt{D(x)}=\sqrt{0{,}5}\approx 0{,}71$.

Будуємо графік функції розподілу:



Будуємо графік щільності розподілу:



Приклад 13. Прилад для вимірювання деякої величини працює без систематичних похибок (це означає, що математичне сподівання випадкової величини – похибки вимірювання – дорівнює нулю).

Відомо, що похибка вимірювання має нормальний розподіл. Нехай її середнє квадратичне відхилення (ще кажуть, стандартне відхилення) дорівнює $\sigma = 10$ од. Знайти ймовірність того, що вимірювання буде проведено з похибкою, яка не перевищує за абсолютною величиною а) 10 од.; б) 20 од.; в) 30 од.

Розв'язання. Ймовірність того, що значення нормально розподіленої випадкової величини X відхилиться від її математичного сподівання m (за абсолютною величиною) менше ніж на ε, знаходиться за формулою

$$P\left(|X - m| < \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right), \qquad (1)$$

де $\sigma = \sqrt{D(X)}$; $\Phi(x)$ – функція Лапласа.

За формулою (1) маємо:

а) $P\left(|X|\le 10\right)=P\left(|X|<10\right)=2\Phi\left(\dfrac{10}{10}\right)=2\Phi(1)=2\cdot 0,3413=0,6826$,

оскільки $\Phi(1)=0,3413$ (див. додаток 2);

б) $P\left(|X|\le 20\right)=2\Phi\left(\dfrac{20}{10}\right)=2\Phi(2)=0,9544\quad(\Phi(2)=0,4772)$;

в) $P\left(|X|\le 30\right)=2\Phi\left(\dfrac{30}{10}\right)=2\Phi(3)=0,9974\quad(\Phi(3)=0,4987)$.

При розв'язуванні задачі ми скористались тим, що неперервна випадкова величина X має властивість $P(X=x_0)=0$, де x_0 – довільне число.

Приклад 14. Деталь виготовляється на верстаті. Довжина X цієї деталі є випадковою величиною, розподіленою за нормальним законом з середнім значенням 20 см і середнім квадратичним відхиленням 0,2 см.

Потрібно: а) знайти відсоток деталей, відхилення довжини яких у той чи інший бік від її середнього значення не перевищить 0,3 см; б) знайти відсоток деталей, довжина яких міститься в межах від 20 см до 20,5 см; в) знайти, яку точність довжини деталі можна гарантувати з ймовірністю 0,95; г) відповісти на питання: В яких межах за правилом "трьох сигм" практично буде знаходитись довжина деталі?

Розв'язання.

а) Скористаємося формулою (1). В нашому випадку $m=20$, $\sigma=0,2$, $\varepsilon=0,3$. Тому

$$P\left(|X-20|<0,3\right)=2\Phi\left(\frac{0,3}{0,2}\right)=2\Phi(1,5)=0,8664,$$

оскільки за таблицею $\Phi(1,5)=0,4332$. Отже, приблизно 87 % всіх деталей, виготовлених на верстаті, будуть мати довжину між 19,7 см і 20,3 см. Інші 13 % деталей матимуть більші відхилення довжини від середнього значення.

б) Ймовірність того, що нормально розподілена випадкова величина X набуде значення з інтервалу (α,β), знаходиться за формулою

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-m}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-m}{\sigma}\right).$$

В нашому випадку $\alpha=20$, $\beta=21$, $m=20$, $\sigma=0,2$. Тому

$$P\ 20 < X < 20,5\ = \Phi\left(\frac{20,5-20}{0,2}\right) - \Phi\left(\frac{20-20}{0,2}\right) =$$
$$= \Phi(2,5) - \Phi(0) = 0,4938 - 0 = 0,4938\,.$$

Отже, близько 50 % всіх деталей, виготовлених на верстаті, будуть мати довжину між 20 см і 20,5 см.

в) Розв'яжемо рівняння $P\ |X-20| < \varepsilon\ = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{0,2}\right) = 0,95$ або $\Phi\left(\frac{\varepsilon}{0,2}\right) = 0,475$ відносно ε. За таблицею додатку 2 знаходимо таке значення аргументу $\frac{\varepsilon}{0,2}$, для якого функція $\Phi\ x$ приймає значення 0,475: маємо $\frac{\varepsilon}{0,2} = 1,96$ або $\varepsilon = 0,392$. Отже, з ймовірністю, навіть більшою ніж 0,95 можна гарантувати, що відхилення довжини деталі від номіналу не перевищують 0,4 см.

г) Правило "трьох сигм" виражається формулою:

$$P\ m-3\sigma < X < m+3\sigma\ = 0,9973\,.$$

У нашому випадку $m = 20,\ \ \sigma = 0,2$. Тому

$$3\sigma = 3\cdot 0,2 = 0,6\,;$$
$$m-3\sigma = 20-0,6 = 19,4\,; \qquad m+3\sigma = 20+0,6 = 20,6\,.$$

Звідси випливає, що подія $19,4 < X < 20,6$ є практично вірогідною (можливі значення випадкової величини X, розміщуються на інтервалі $19,4,\ \ 20,6$ з ймовірністю $0,9973$).

Приклад 15. Середній час безвідмовної роботи пристрою 15 год. Знайти ймовірність того, що пристрій пропрацює не менше 20 год, якщо тривалість безвідмовної роботи пристрою має показниковий розподіл.

Розв'язання. Нехай X – тривалість безвідмовної роботи пристрою. За умовою випадкова величина X має показниковий розподіл. Це означає, що її функція розподілу

$$F\ x\ = \begin{cases} 1-e^{-\lambda x}, & \text{якщо } x \ge 0, \\ 0\quad , & \text{якщо } x < 0, \end{cases}$$

де параметр $\lambda > 0$.

Для знаходження λ, скористаємося тим, що $M(X)=\frac{1}{\lambda}$. Оскільки за умовою $M(X)=15$, то $\lambda=\frac{1}{15}$.

Знайдемо шукану ймовірність

$$P(X\geq 20)=1-P(X<20)=1-F(20)=1-\left(1-e^{-\frac{20}{15}}\right)=e^{-\frac{20}{15}}\approx 0,264.$$

Приклад 16. На автоматичну телефонну станцію надходить потік викликів, інтенсивність якого $\lambda=0,8$ (викликів/хв). Знайти ймовірність того, що за дві хвилини: а) не надійде жодного виклику; б) надійде рівно один виклик; в) надійде хоча б один виклик.

Розв'язання. Випадкова величина X – (число викликів за 2 хвилини) має розподіл Пуассона з параметром $\lambda t=0,8\cdot 2=1,6$.

Як відомо, ймовірність $P_m(t)$ того, що за час t відбудеться рівно m подій, знаходиться за формулою Пуассона

$$P_m(t)=\frac{(\mu t)^m}{m!}e^{-\mu t}.$$

Тому маємо:

а) $P_0=\frac{(\lambda t)^0}{0!}e^{-\lambda t}=e^{-\lambda t}=e^{-1,6}\approx 0,202$; б) $P_1(2)=\frac{(1,6)^1}{1!}e^{-1,6}\approx 0,323$;

в) $P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-P_0\approx 0,798$.

Приклад 17. Ціна поділки шкали амперметра становить 0,1 А. Покази стрілки заокруглюють до найближчої цілої поділки. Знайти ймовірність того, що при визначенні сили струму буде зроблена помилка, що перевищує 0,02 А.

Розв'язання. Положення стрілки можна розглядати як випадкову величину, рівномірно розподілену на відрізку $[a,b]$, де a,b – дві сусідні поділки шкали.

Щільність рівномірного розподілу

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\notin [a,b],\\ \frac{1}{b-a}, & x\in [a,b].\end{cases}$$

У нашому випадку можемо взяти відрізок $[a, b] = [0, 0{,}1]$ і, отже, $b - a = 0{,}1$. Тому $f(x) = \dfrac{1}{0{,}1} = 10$, $x \in [0, 0{,}1]$. Очевидно, що помилка перевищуватиме 0,02, якщо відбудеться випадкова подія $(0{,}02 < X < 0{,}08)$.

За формулою $P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$ матимемо

$$P(0{,}02 < X < 0{,}08) = \int_{0{,}02}^{0{,}08} 10\,dx = 10x\Big|_{0{,}02}^{0{,}08} = 10(0{,}08 - 0{,}02) = 0{,}6.$$

Приклад 16. На автоматичну телефонну станцію надходить простий потік викликів, інтенсивність якого $\lambda = 0{,}8$ (викликів/хв). Знайти ймовірність того, що за дві хвилини: а) не надійде жодного виклику; б) надійде рівно один виклик; в) надійде хоча б один виклик.

Розв'язання. X – випадкова величина (число викликів за 2 хвилини), яка розподілена за законом Пуассона з параметром $\lambda t = 0{,}8 \cdot 2 = 1{,}6$.

Як відомо, ймовірність того, що за час t відбудеться рівно m подій, дорівнює

$$P_m(t) = \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t}.$$

Тому маємо:

а) $P_0(2) = \dfrac{(\lambda t)^0}{0!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t} = e^{-1{,}6} \approx 0{,}202$; б) $P_1(2) = \dfrac{(1{,}6)^1}{1!} e^{-1{,}6} \approx 0{,}323$;

в) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - P_0(2) \approx 0{,}798$.

Приклад 17. Ціна поділки шкали амперметра становить 0,1 А. Покази заокруглюють до найближчої цілої поділки. Знайти ймовірність того, що при відліку буде зроблена помилка, яка перевищує 0,02 А.

Розв'язання. Помилку заокруглення відліку можна розглядати як випадкову величину, яка розподілена рівномірно в інтервалі між двома сусідніми цілими поділками. Щільність рівномірного розподілу

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\notin (a,b),\\ \dfrac{1}{b-a}, & x\in (a,b).\end{cases}$$

У нашому випадку довжина інтервалу (a,b), який містить можливі значення величини X, дорівнює $b-a=0{,}1$, тому $f(x)=\dfrac{1}{0{,}1}=10$. Очевидно, що помилка відліку перевищуватиме 0,02, якщо вона потрапить в інтервал $(0{,}02,\ 0{,}08)$.

За формулою $P(x_1<X<x_2)=\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$ матимемо

$$P(0{,}02<X<0{,}08)=\int\limits_{0{,}02}^{0{,}08}10\,dx=10x\Big|_{0{,}02}^{0{,}08}=10(0{,}08-0{,}02)=0{,}6.$$

Приклад 18. За даним законом розподілу двовимірного випадкового вектора (X,Y) знайти:

а) закони розподілу компонент X та Y (безумовні);

б) математичні сподівання, дисперсії і коефіцієнт кореляції компонент;

в) умовні закони розподілу величини X при $Y=2$ і величини Y при $X=1$;

г) умовні математичні сподівання величини X при $Y=2$ і величини Y при $X=1$.

X	Y			
	0	2	7	10
1	0,01	0,04	0,03	0,02
4	0,03	0,2	0,1	0,06
7	0,04	0,13	0,11	0,06
8	0,02	0,06	0,06	0,03

Розв’язання. а) Додаючи ймовірності “по рядках”, запишемо закон розподілу випадкової величини X:

X	1	4	7	8
p_i	0,1	0,39	0,34	0,17

Додаючи ймовірності “по стовпчиках”, запишемо закон розподілу випадкової величини Y :

Y	0	2	7	10
p_j	0,1	0,43	0,3	0,17

б) Обчислимо числові характеристики випадкової величини X :

$$M(X)=m_x=\sum_{i=1}^{4}x_i p_i=1\cdot 0,1+4\cdot 0,39+7\cdot 0,34+8\cdot 0,17=5,4\ ;$$

$$D(X)=D_x=\sum_{i=1}^{4}x_i^{\,2} p_i-\ M(X)\ ^2=$$

$$=1^2\cdot 0,1+4^2\cdot 0,39+7^2\cdot 0,34+8^2\cdot 0,17-(5,4)^2=4,72.$$

Аналогічно для випадкової величини Y маємо:

$$M(Y)=m_y=\sum_{j=1}^{4}y_j p_j=0\cdot 0,1+2\cdot 0,43+7\cdot 0,3+10\cdot 0,17=4,66\ ;$$

$$D(Y)=D_y=\sum_{j=1}^{4}y_j^{\,2} p_j-\ M(Y)\ ^2=$$

$$=0^2\cdot 0,1+2^2\cdot 0,43+7^2\cdot 0,3+10^2\cdot 0,17-(4,66)^2=11,70.$$

Коефіцієнт кореляції випадкових величин X та Y знаходиться за формулою

$$r_{xy}=\frac{K_{xy}}{\sqrt{D_x D_y}}\ ,$$

де K_{xy} – коваріація випадкових величин X та Y .

Обчислимо коваріацію:

$$K_{xy}=\sum_i\sum_j\ \ x_i-m_x\ \ \ y_j-m_y\ \ p_{ij}=\sum_i\sum_j x_i y_j p_{ij}-m_x m_y=$$

$$=1\cdot\ \ 0\cdot 0,01+2\cdot 0,04+7\cdot 0,03+10\cdot 0,02\ \ +$$

$$+4\cdot\ \ 0\cdot 0,03+2\cdot 0,2+7\cdot 0,1+10\cdot 0,06\ \ +$$

$$+7\cdot\ \ 0\cdot 0,04+2\cdot 0,13+7\cdot 0,11+10\cdot 0,06\ \ +$$

$$+8\cdot\ \ 0\cdot 0,02+2\cdot 0,06+7\cdot 0,06+10\cdot 0,03\ \ -5,4\cdot 4,66=$$

$$=25,42-5,4\cdot 4,66=0,256.$$

Отже, коефіцієнт кореляції випадкових величин X та Y :

$$r_{xy}=\frac{0,256}{\sqrt{4,72\cdot 11,7}}=0,03\ .$$

в) Знайдемо умовні ймовірності можливих значень випадкової величини X за умови, що складова Y набула значення $Y = y_2 = 2$:

$$p\left(x_1 \middle| y_2\right) = \frac{p\left(x_1, y_2\right)}{p\left(y_2\right)} = \frac{0,04}{0,43} = \frac{4}{43}, \quad p\left(x_2 \middle| y_2\right) = \frac{p\left(x_2, y_2\right)}{p\left(y_2\right)} = \frac{0,2}{0,43} = \frac{20}{43},$$

$$p\left(x_3 \middle| y_2\right) = \frac{p\left(x_3, y_2\right)}{p\left(y_2\right)} = \frac{0,13}{0,43} = \frac{13}{43}, \quad p\left(x_4 \middle| y_2\right) = \frac{p\left(x_4, y_2\right)}{p\left(y_2\right)} = \frac{0,06}{0,43} = \frac{6}{43}.$$

Запишемо шуканий умовний закон розподілу X:

X	1	4	7	8
$p\left(X \middle| y_2\right)$	$\frac{4}{43}$	$\frac{20}{43}$	$\frac{13}{43}$	$\frac{6}{43}$

Аналогічно знаходимо умовний закон розподілу Y при $X = x_1 = 1$:

Y	0	2	7	10
$p\left(Y \middle| x_1\right)$	0,1	0,4	0,3	0,2

г) Знайдемо умовні математичні сподівання випадкової величини X при $Y = 2$ і випадкової величини Y при $X = 1$:

$$M[X \mid y_2] = \sum_i x_i p\left(x_i \middle| y_2\right) = 1 \cdot \frac{4}{43} + 4 \cdot \frac{20}{43} + 7 \cdot \frac{13}{43} + 8 \cdot \frac{6}{43} = 5,19,$$

$$M[Y \mid x_1] = \sum_j y_j p\left(y_j \middle| x_1\right) = 0 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,2 + 7 \cdot 0,3 + 10 \cdot 0,2 = 4,9.$$

МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Приклад 1. Дано вибірку: 1, 3, 4, 5, 1, 3, 4, 3, 5, 1, 3, 4, 1, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3. Потрібно:
1) побудувати варіаційний ряд;
2) побудувати статистичний розподіл вибірки;
3) побудувати полігон відносних частот;
4) знайти емпіричну функцію розподілу і побудувати її графік.

Розв'язання.

1) Побудуємо варіаційний ряд

1, 1, 1, 1, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5.

2) Порахуємо частоти з якими варіанти x_i входять у вибірку та запишемо статистичний розподіл вибірки:

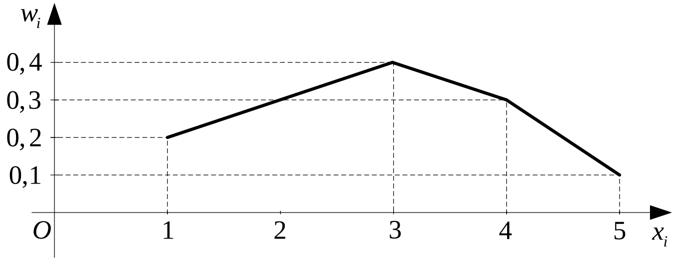
x_i	1	3	4	5
n_i	4	8	6	2

3) Знайдемо відносні частоти. Оскільки об'єм вибірки $n = 4+8+6+2 = 20$, то $w_1 = \dfrac{4}{20} = 0,2$; $w_2 = \dfrac{8}{20} = 0,4$; $w_3 = \dfrac{6}{20} = 0,3$; $w_4 = \dfrac{2}{20} = 0,1$.

Отже розподіл відносних частот має вигляд:

x_i	1	3	4	5
w_i	0,2	0,4	0,3	0,1

На площині $x_i; w_i$ зобразимо точки з координатами (1;0,2), (3;0,4), (4;0,3), (5;0,1) та з'єднаємо їх відрізками. Отримаємо шуканий полігон відносних частот.



4) Емпіричну функцію розподілу $F^*(x)$ знаходимо за формулою: $F^*(x) = \frac{n_x}{n}$; $x \in (-\infty; +\infty)$, де n – об'єм вибірки ; n_x – число варіант, які менші x. В даній задачі $n = 20$.

При $x \le 1$ $n_x = 0$, оскільки найменша варіанта $x_1 = 1$. Тому $F^*(x) = 0$, при $x \le 1$.

При $1 < x \le 3$ лише варіанта $x_1 = 1 < x$, причому $n_x = 4$. Тому $F^*(x) = \frac{4}{20} = 0,2$, при $1 < x \le 3$.

При $3 < x \le 4$ варіанти $x_1 = 1$ та $x_2 = 3$ менші x, причому $n_x = 4 + 8 = 12$. Тому $F^*(x) = \frac{12}{20} = 0,6$ при $3 < x \le 4$.

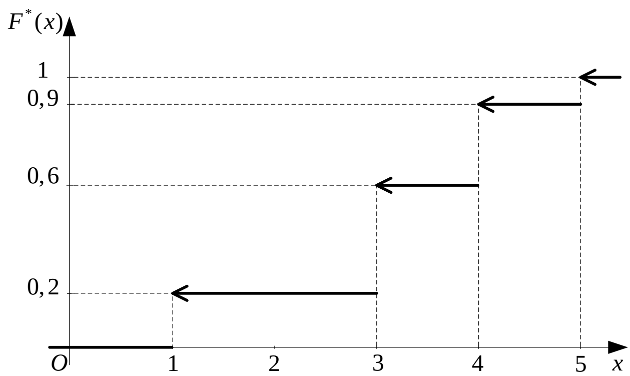
При $4 < x \le 5$ варіанти $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ та $x_3 = 4$ менші x, причому $n_x = 4 + 8 + 6 = 18$. Тому $F^*(x) = \frac{18}{20} = 0,9$ при $4 < x \le 5$.

При $x > 5$ $n_x = 20$ і отже $F^*(x) = 1$.

Таким чином емпірична функція розподілу має вигляд:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 1 \\ 0,2 & \text{при } 1 < x \le 3 \\ 0,6 & \text{при } 3 < x \le 4 \\ 0,9 & \text{при } 4 < x \le 5 \\ 1 & \text{при } x > 5 \end{cases}.$$

Будуємо графік цієї функції.



Приклад 2. Дано інтервальний варіаційний ряд

$a_{i-1}-a_i$	1-3	3-5	5-7	7-9	9-11
n_i	7	10	20	8	5

Побудувати гістограму відносних частот.

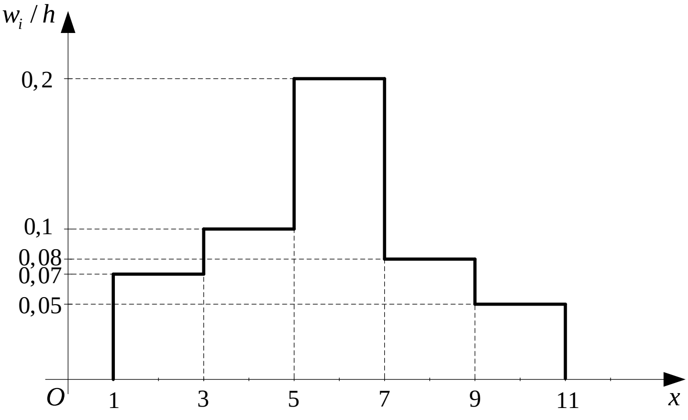
Розв'язання. Об'єм вибірки $n=7+10+20+8+5=50$, довжина часткового інтервалу h =2.

Знаходимо щільності відносних частот w_{i} за формулою $\dfrac{w_i}{h}=\dfrac{n_i}{n\cdot h}$:

$\dfrac{w_1}{h}=\dfrac{7}{50\cdot 2}=0{,}07$; $\dfrac{w_2}{h}=\dfrac{10}{50\cdot 2}=0{,}1$; $\dfrac{w_3}{h}=\dfrac{20}{50\cdot 2}=0{,}2$;

$\dfrac{w_4}{h}=\dfrac{8}{50\cdot 2}=0{,}08$; $\dfrac{w_5}{h}=\dfrac{5}{50\cdot 2}=0{,}05$.

Відкладемо на осі абсцис часткові інтервали $a_{i-1}-a_i$ і проведемо над цими інтервалами відрізки, які паралельні осі абсцис і знаходяться від неї на відстанях рівних відповідно w_{i}/h. Отримаємо шукану гістограму відносних частот.



Приклад 3.

1) Задано статистичний розподіл вибірки

x_i	1	2	5	6
n_i	2	3	4	1

Знайти вибіркове середнє $\overline{x}$, вибіркову дисперсію $\sigma_{в}^2$, виправлену вибіркову дисперсію s^2 і вибіркове середнє квадратичне відхилення $\sigma_{в}$.

2) Задано інтервальний варіаційний ряд

$a_{i-1}-a_i$	2 - 4	4 - 6	6 - 8	8 - 10	10 - 12
n_i	42	73	154	205	26

Знайти вибіркове середнє $\bar{x}$ та вибіркову дисперсію $\sigma_в^2$.

Розв'язання. 1) Об'єм вибірки $n=2+3+4+1=10$.

Вибіркове середнє $\bar{x}$ знаходимо за формулою

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}x_i\cdot n_i\ .$$

Отримаємо: $\bar{x}=\frac{1}{10}(1\cdot 2+2\cdot 3+5\cdot 4+6\cdot 1)=3{,}4$.

Вибіркову дисперсію знаходимо за формулою

$$\sigma_в^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}x_i^2\cdot n_i-(\bar{x})^2\ .$$

Отримаємо: $\sigma_в^2=\frac{1}{10}(1^2\cdot 2+2^2\cdot 3+5^2\cdot 4+6^2\cdot 1)-(3{,}4)^2=3{,}44$.

Знаходимо s^2 та $\sigma_в$: $\quad s^2=\frac{n}{n-1}\sigma_в^2=\frac{10}{9}\cdot 3{,}44\approx 3{,}82$,

$$\sigma_в=\sqrt{\sigma_в^2}=\sqrt{3{,}44}\approx 1{,}85\ .$$

2) Знаходимо середини часткових інтервалів: $x_1=3$, $x_2=5$, $x_3=7$, $x_4=9$, $x_5=11$. Аналогічно попередньому отримаємо:

$$\bar{x}=\frac{1}{500}(3\cdot 42+5\cdot 73+7\cdot 154+9\cdot 205+11\cdot 26)=7{,}4\ ;$$

$$\sigma_в^2=\frac{1}{500}(3^2\cdot 42+5^2\cdot 73+7^2\cdot 154+9^2\cdot 205+11^2\cdot 26)-(7{,}4)^2=4{,}24\ .$$

Приклад 4. Побудувати надійний інтервал для оцінки з надійністю $\gamma=0{,}99$ невідомого математичного сподівання a нормально розподіленої генеральної сукупності X, якщо $\sigma=2$, $\bar{x}=15{,}35$ і $n=16$.

Розв'язання. Шуканий надійний інтервал має вигляд

$$\bar{x}-\frac{t_\gamma\sigma}{\sqrt{n}}<a<\bar{x}+\frac{t_\gamma\sigma}{\sqrt{n}}\ , \qquad (2)$$

де t_γ – значення аргументу функції Лапласа $\Phi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}}dx$, при якому $\Phi(t_\gamma)=\frac{\gamma}{2}$.

Знаходимо t_γ зі співвідношення $\Phi\left(t_\gamma\right)=\frac{0,99}{2}=0,495$: за таблицею значень функції Лапласа (додаток 2) маємо $t_\gamma=2,58$.

Підставляючи $\sigma=2$, $\overline{x}=15,35$, $n=16$, $t_\gamma=2,58$ в (2), отримаємо надійний інтервал: $14,06<a<16,64$.

Приклад 5. Побудувати надійний інтервал для оцінки з надійністю $\gamma=0,95$ невідомого середнього квадратичного відхилення σ нормально розподіленої генеральної сукупності *X*, якщо $s=0,7$ і $n=20$.

Розв'язання. Шуканий надійний інтервал має вигляд:

$$\begin{aligned} &s(1-q)<\sigma<s(1+q), \text{ якщо } q<1; \\ &0<\sigma<s(1+q), \quad\quad \text{ якщо } q\ge 1; \end{aligned} \tag{3}$$

де $q=q(\gamma,n)$ знаходиться за таблицею додатку 3 за заданими γ і n.

При $\gamma=0,95$ і $n=20$ за таблицею знаходимо $q=0,37$.

Підставляючи $q=0,37$, $s=0,7$, $n=20$ в (3), отримаємо надійний інтервал: $0,441<\sigma<0,959$.

Приклад 6. Знайти вибіркове рівняння прямої регресії $y=a\,x+b$ за даними шести спостережень $\left(x_i;\,y_i\right)$: (1,5;1,3), (2;2), (3;2,1), (3,5;2,7), (4,5;2,6), (5;3,3). Зробити рисунок, на якому вказати експериментальні дані та побудувати пряму регресії.

Розв'язання. Невідомі параметри регресії a і b знаходять із системи рівнянь

$$\begin{cases} a\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+b\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i, \\ a\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}x_i+b\cdot n=\sum\limits_{i=1}^{n}y_i. \end{cases} \tag{4}$$

З умови задачі знаходимо: $n=6$,

$\sum\limits_{i=1}^{6}x_i=1,5+2+3+3,5+4,5+5=19,5$,

$$\sum_{i=1}^{6} y_i = 1,3+2+2,1+2,7+2,6+3,3=14,$$

$$\sum_{i=1}^{6} x_i^2 = 1,5^2+2^2+3^2+3,5^2+4,5^2+5^2 = 74,75,$$

$$\sum_{i=1}^{6} x_i y_i = 1,5\cdot 1,3+2\cdot 2+3\cdot 2,1+3,5\cdot 2,7+4,5\cdot 2,6+5\cdot 3,3= 49,9.$$

Підставляючи в (4), одержимо систему рівнянь

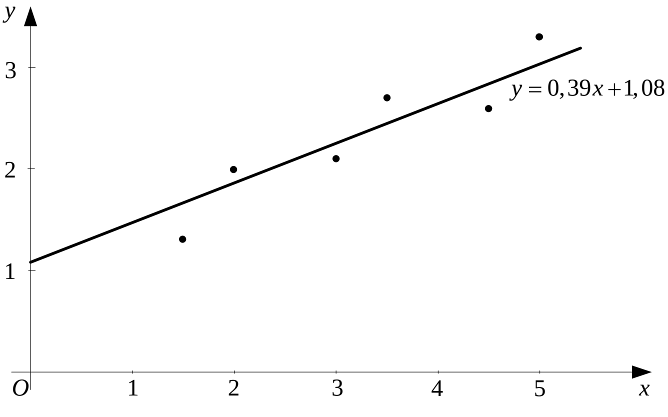
$$\begin{cases} 74,75a+19,5b = 49,9; \\ 19,5a+6b=14. \end{cases}$$

Розв’язуючи систему, отримуємо $a \approx 0,39$ і $b \approx 1,08$.

Запишемо шукане рівняння прямої лінії регресії:

$$y = 0,39x+1,08.$$

Зробимо рисунок, на якому вкажемо експериментальні дані та побудуємо пряму регресії.



Приклад 7. Використовуючи критерій Пірсона, при рівні значущості α перевірити, чи узгоджується гіпотеза про нормальний розподіл генеральної сукупності X зі статистичними даними, які подані у вигляді інтервального варіаційного ряду (в першому рядку вказано часткові інтервали $a_{i-1}-a_i$, в другому – відповідні частоти n_i).

$\alpha = 0,05$;

$a_{i-1}-a_i$	–20-(–10)	–10-0	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
n_i	20	47	80	89	40	16	8

Розв'язання. Знайдемо середини часткових інтервалів $x_i = (a_{i-1}+a_i)/2$ та складемо таблицю

x_i	–15	–5	5	15	25	35	45
n_i	20	47	80	89	40	16	8

Обчислимо вибіркове середнє $\overline{x}$ та вибіркове середнє квадратичне відхилення $\sigma_в$ (див. приклад 3 на стор.):
об'єм вибірки

$$n=\sum_{i=1}^{k} n_i = 20+47+80+89+40+16+8=300;$$

вибіркове середнє

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot n_i =$$

$$=\frac{1}{300}\left(-15\cdot 20-5\cdot 47+5\cdot 80+15\cdot 89+25\cdot 40+35\cdot 16+45\cdot 8\right)=10{,}40;$$

вибіркова дисперсія

$$\sigma_в^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 \cdot n_i - \left(\overline{x}\right)^2 =$$

$$=\frac{1}{300}\left((-15)^2\cdot 20+(-5)^2\cdot 47+5^2\cdot 80+15^2\cdot 89+25^2\cdot 40+35^2\cdot 16+45^2\cdot 8\right)-$$

$$-\left(10{,}40\right)^2=186{,}87;$$

вибіркове середнє квадратичне відхилення

$$\sigma_в=\sqrt{\sigma_в^2}=\sqrt{186{,}87}=13{,}67.$$

Перейдемо від інтервалів (a_{i-1}, a_i) до інтервалів (z_{i-1}, z_i) за формулами: $z_{i-1} = (a_{i-1}-\overline{x})/\sigma_в$; $z_i = (a_i-\overline{x})/\sigma_в$, причому найменше значення z_0 покладемо рівним $-\infty$, а найбільше значення z_k покладемо рівним $+\infty$.

Обчислимо теоретичні ймовірності p_i потрапляння випадкової величини X в інтервали (a_{i-1}, a_i) за формулою $p_i=\Phi(z_i)-\Phi(z_{i-1})$, де $\Phi(x)$ – функція Лапласа, та теоретичні частоти $n_i'=np_i$ (тут $n=\sum_{i=1}^{k} n_i=300$ – об'єм вибірки). Для цього заповнимо розрахункову таблицю $\Phi(-\infty) = -0,5;\ \Phi(+\infty) = 0,5$:

i	$z_{i-1}; z_i$	$\Phi\ z_{i-1}$	$\Phi\ z_i$	p_i	$n_i' = 300 p_i$
1	$-\infty; -1,49$	–0,5000	–0,4319	0,0681	20,43
2	$-1,49; -0,76$	–0,4319	–0,2764	0,1555	46,65
3	$-0,76; -0,03$	–0,2764	–0,0120	0,2644	79,32
4	$-0,03; 0,70$	–0,0120	0,2580	0,2700	81,00
5	$0,70; 1,43$	0,258	0,4236	0,1656	49,68
6	$1,43; 2,16$	0,4236	0,4846	0,0610	18,30
7	$2,16; +\infty$	0,4846	0,5000	0,0154	4,62
				$\sum p_i = 1$	$\sum n_i' = 300$

Обчислимо вибіркове значення критерію $\chi_в^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i - n_i'^{\ 2}}{n_i'}$. Для цього заповнимо наступну розрахункову таблицю:

i	n_i	n_i'	$n_i - n_i'$	$n_i - n_i'^{\ 2}$	$\frac{n_i - n_i'^{\ 2}}{n_i'}$
1	20	20,43	–0,43	0,1849	0,0091
2	47	46,65	0,35	0,1225	0,0026
3	80	79,32	0,68	0,4624	0,0058
4	89	81,00	8,00	64,0000	0,7901
5	40	49,68	–9,68	93,7024	1,8861
6	16	18,30	–2,30	5,2900	0,2891
7	8	4,62	3,38	11,4244	2,4728
			$\sum\ n_i - n_i' = 0$		$\chi_в^2 = 5,46$

За таблицею критичних точок розподілу χ^2 (додаток 4) при рівні значущості $\alpha = 0,05$ та числі ступенів свободи $r = k - 3 = 7 - 3 = 4$ знаходимо критичну точку $\chi_{кр}^2 = \chi_{кр}^2\ 0,05;\ 4\ = 9,5$.

Оскільки $\chi_в^2 < \chi_{кр}^2$, то немає підстав відхилити нульову гіпотезу. Отже, статистичні дані узгоджуються з гіпотезою про нормальний розподіл генеральної сукупності.

ДОДАТКИ

Додаток 1. Таблиця значень функції $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

x	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3725	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0045
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034

Додаток 2. Таблиця значень функції $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,52	0,1985	1,04	0,3508	1,56	0,4406	2,16	0,4846
0,01	0,0040	0,53	0,2019	1,05	0,3531	1,57	0,4418	2,18	0,4854
0,02	0,0080	0,54	0,2054	1,06	0,3554	1,58	0,4429	2,20	0,4861
0,03	0,0120	0,55	0,2088	1,07	0,3577	1,59	0,4441	2,22	0,4868
0,04	0,0160	0,56	0,2123	1,08	0,3599	1,60	0,4452	2,24	0,4875
0,05	0,0199	0,57	0,2157	1,09	0,3621	1,61	0,4463	2,26	0,4881
0,06	0,0239	0,58	0,2190	1,10	0,3643	1,62	0,4474	2,28	0,4887
0,07	0,0279	0,59	0,2224	1,11	0,3665	1,63	0,4484	2,30	0,4893
0,08	0,0319	0,60	0,2257	1,12	0,3686	1,64	0,4495	2,32	0,4898
0,09	0,0359	0,61	0,2291	1,13	0,3708	1,65	0,4505	2,34	0,4904
0,10	0,0398	0,62	0,2324	1,14	0,3729	1,66	0,4515	2,36	0,4909
0,11	0,0438	0,63	0,2357	1,15	0,3749	1,67	0,4525	2,38	0,4913
0,12	0,0478	0,64	0,2389	1,16	0,3770	1,68	0,4535	2,40	0,4918
0,13	0,0517	0,65	0,2422	1,17	0,3790	1,69	0,4545	2,42	0,4922
0,14	0,0557	0,66	0,2454	1,18	0,3810	1,70	0,4554	2,44	0,4927
0,15	0,0596	0,67	0,2486	1,19	0,3830	1,71	0,4564	2,46	0,4931
0,16	0,0636	0,68	0,2517	1,20	0,3849	1,72	0,4573	2,48	0,4934
0,17	0,0675	0,69	0,2549	1,21	0,3869	1,73	0,4582	2,50	0,4938
0,18	0,0714	0,70	0,2580	1,22	0,3888	1,74	0,4591	2,52	0,4941
0,19	0,0753	0,71	0,2611	1,23	0,3907	1,75	0,4599	2,54	0,4945
0,20	0,0793	0,72	0,2642	1,24	0,3925	1,76	0,4608	2,56	0,4948
0,21	0,0832	0,73	0,2673	1,25	0,3944	1,77	0,4616	2,58	0,4951
0,22	0,0871	0,74	0,2704	1,26	0,3962	1,78	0,4625	2,60	0,4953
0,23	0,0910	0,75	0,2734	1,27	0,3980	1,79	0,4633	2,62	0,4956
0,24	0,0948	0,76	0,2764	1,28	0,3997	1,80	0,4641	2,64	0,4959
0,25	0,0987	0,77	0,2794	1,29	0,4015	1,81	0,4649	2,66	0,4961
0,26	0,1026	0,78	0,2823	1,30	0,4032	1,82	0,4656	2,68	0,4963
0,27	0,1064	0,79	0,2852	1,31	0,4049	1,83	0,4664	2,70	0,4965
0,28	0,1103	0,80	0,2881	1,32	0,4066	1,84	0,4671	2,72	0,4967
0,29	0,1141	0,81	0,2910	1,33	0,4082	1,85	0,4678	2,74	0,4969
0,30	0,1179	0,82	0,2939	1,34	0,4099	1,86	0,4686	2,76	0,4971
0,31	0,1217	0,83	0,2967	1,35	0,4115	1,87	0,4693	2,78	0,4973
0,32	0,1255	0,84	0,2995	1,36	0,4131	1,88	0,4699	2,80	0,4974
0,33	0,1293	0,85	0,3023	1,37	0,4147	1,89	0,4706	2,82	0,4976
0,34	0,1331	0,86	0,3051	1,38	0,4162	1,90	0,4713	2,84	0,4977
0,35	0,1368	0,87	0,3078	1,39	0,4177	1,91	0,4719	2,86	0,4979
0,36	0,1406	0,88	0,3106	1,40	0,4192	1,92	0,4726	2,88	0,4980
0,37	0,1443	0,89	0,3133	1,41	0,4207	1,93	0,4732	2,90	0,4981
0,38	0,1480	0,90	0,3159	1,42	0,4222	1,94	0,4738	2,92	0,4982
0,39	0,1517	0,91	0,3186	1,43	0,4236	1,95	0,4744	2,94	0,4984
0,40	0,1554	0,92	0,3212	1,44	0,4251	1,96	0,4750	2,96	0,4985
0,41	0,1591	0,93	0,3238	1,45	0,4265	1,97	0,4756	2,98	0,4986
0,42	0,1628	0,94	0,3264	1,46	0,4279	1,98	0,4761	3,00	0,49865
0,43	0,1664	0,95	0,3289	1,47	0,4292	1,99	0,4767	3,20	0,49931
0,44	0,1700	0,96	0,3315	1,48	0,4306	2,00	0,4772	3,40	0,49966
0,45	0,1736	0,97	0,3340	1,49	0,4319	2,02	0,4783	3,60	0,499841
0,46	0,1772	0,98	0,3365	1,50	0,4332	2,04	0,4793	3,80	0,499928
0,47	0,1808	0,99	0,3389	1,51	0,4345	2,06	0,4803	4,00	0,499968
0,48	0,1844	1,00	0,3413	1,52	0,4357	2,08	0,4812	4,50	0,499997
0,49	0,1879	1,01	0,3438	1,53	0,4370	2,10	0,4821	5,00	0,499997
0,50	0,1915	1,02	0,3461	1,54	0,4382	2,12	0,4830		
0,51	0,1950	1,03	0,3485	1,55	0,4394	2,14	0,4838		

Додаток 3.

Таблиця значень функції $q = q(\gamma, n)$

n	γ		
	0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64
6	1,09	2,01	3,88
7	0,92	1,62	2,98
8	0,80	1,38	2,42
9	0,71	1,20	2,06
10	0,65	1,08	1,80
11	0,59	0,98	1,60
12	0,55	0,90	1,45
13	0,52	0,83	1,33
14	0,48	0,78	1,23
15	0,46	0,73	1,15
16	0,44	0,70	1,07
17	0,42	0,66	1,01
18	0,40	0,63	0,96
19	0,39	0,60	0,92
20	0,37	0,58	0,88
25	0,32	0,49	0,73
30	0,28	0,43	0,63
35	0,26	0,38	0,56
40	0,24	0,35	0,50
45	0,22	0,32	0,46
50	0,21	0,30	0,43
60	0,188	0,269	0,38
70	0,174	0,245	0,34
80	0,161	0,226	0,31
90	0,151	0,211	0,29

Додаток 4.

Критичні точки розподілу χ^2

Число ступенів свободи r	Рівень значущості α		
	0,01	0,025	0,05
1	6,6	5,0	3,8
2	9,2	7,4	6,0
3	11,3	9,4	7,8
4	13,3	11,1	9,5
5	15,1	12,8	11,1
6	16,8	14,4	12,6
7	18,5	16,0	14,1
8	20,1	17,5	15,5
9	21,7	19,0	16,9
10	23,2	20,5	18,3
11	24,7	21,9	19,7
12	26,2	23,3	21,0
13	27,7	24,7	22,4
14	29,1	26,1	23,7
15	30,6	27,5	25,0
16	32,0	28,8	26,3
17	33,4	30,2	27,6
18	34,8	31,5	28,9
19	36,2	32,9	30,1
20	37,6	34,2	31,4
21	38,9	35,5	32,7
22	40,3	36,8	33,9
23	41,6	38,1	35,2
24	43,0	39,4	36,4
25	44,3	40,6	37,7

ЗМІСТ