Вступ. Основні поняття теоретичної механіки. Постулати (закони) Ньютона. Основні аксіоми та теореми статики

Механіка – це наука про механічну взаємодію матеріальних тіл.

Механічною взаємодією тіл називаються такі дії матеріальних тіл одне на друге, в результаті яких виникає рух цих тіл або зміна їхньої форми (деформація). За основну міру цих дій прийнято брати умовну величину, яка називається силою.

Механіка вивчає тверді тіла, рідини та гази (теорія пружності, теорія пластичності, гідромеханіка, аеромеханіка, газова динаміка) і використовує багато понять і методів, спільних для всіх них, які є основою так званої **теоретичної** (або загальної) **механіки**: розділу механіки, в якому вивчається механічний рух абсолютно твердих (недеформівних) матеріальних тіл.

Рис. 1. Схематичне зображення структурно-логічної схеми теоретичної механіки

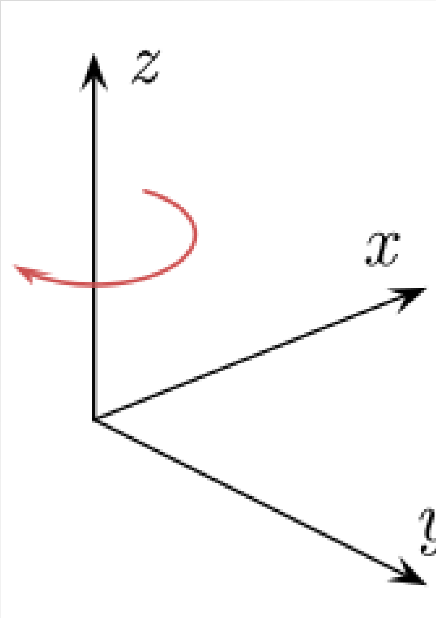
У багатьох випадках форма і розміри тіла, що рухається (або перебуває у спокої) не відіграють істотної ролі. Тому вводиться поняття **матеріальної точки**, якою (або матеріальної частинки) зветься тіло настільки малих розмірів, що відмінностями в русі окремих його частин можна знехтувати. **Ізольованою матеріальною точкою** називається така точка, дією на яку інших тіл або точок можна знехтувати.

Механічною системою матеріальних точок називається система (сукупність, множина) матеріальних точок, рух кожної з яких залежить від положення та руху решти точок системи. Всяке матеріальне тіло (тверде, рідке, газоподібне) є механічною системою, що складається з дуже великої кількості матеріальних частинок (точок). Довільна сукупність матеріальних тіл, так чи інакше зв'язаних між собою, також утворює механічну систему (ферма, механізм, машина).

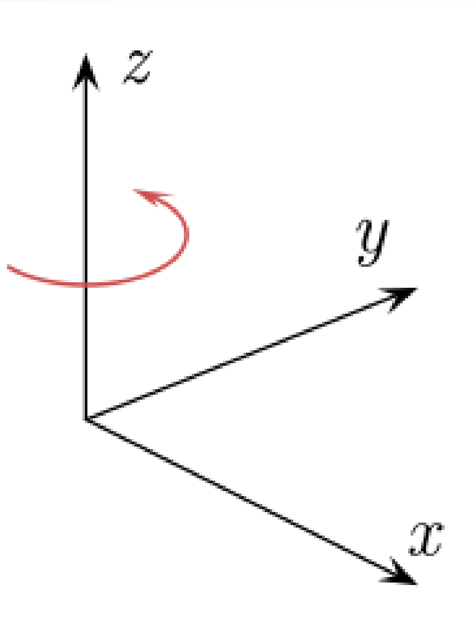
Якщо точки системи або тіла зв’язані між собою так, що відстань між двома довільними точками залишається сталою, то така система називається незмінюваною системою, а тіло – **абсолютно твердим тілом**. Інакше система зветься змінюваною, а тіло – таким, що деформується (деформівним).

Три принципи класичної механіки:

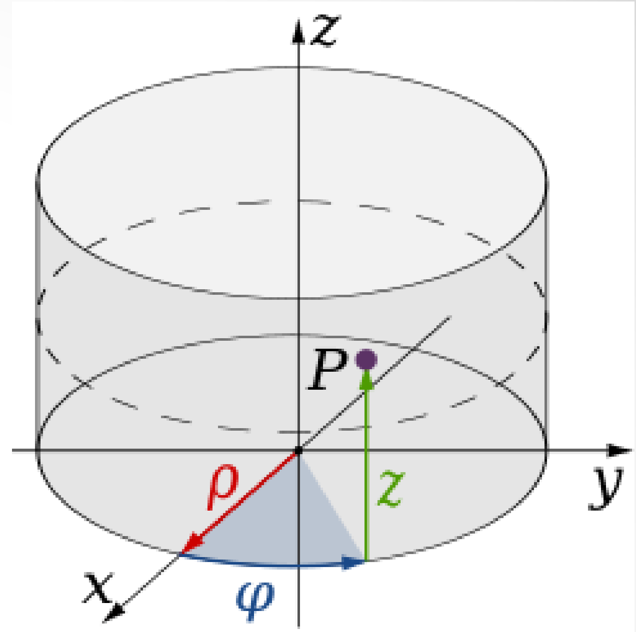
1. Динаміку механічної системи можна описати за допомогою координат матеріальних точок у тривимірному просторі у вигляді векторних функцій, залежних від часу t (принцип інерції).
2. Будь-яка інша система відліку, що рухається щодо якоїсь обраної інерціальної системи з постійною швидкістю, також є інерціальною, а закони руху в усій нескінченній сукупності таких інерціальних систем відліку виглядають однаково (принцип відносності Галілея).
3. Закони механічного руху такі, що вибір координат і швидкостей усіх матеріальних точок системи в якийсь конкретний момент часу визначає всю подальшу еволюцію механічної системи (принцип механічного детермінізму, або детермінізму Ньютона).



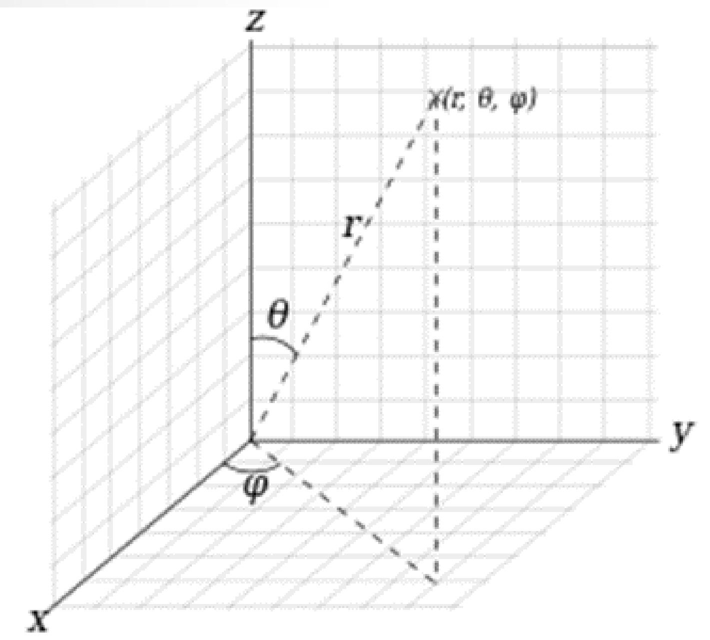
а)



б)



в)



г) д)

Рис. 2. Системи координат: прямокутна Декартова (а – ліва, б – права), в – полярна циліндрична, г – полярна сферична

Постулати (закони) Ньютона

Історично першим формулюванням цих принципів було формулювання Ньютона, у вигляді трьох законів (постулатів).

1. Існують інерціальні системи відліку, щодо яких тіло, на яке не діють сили, рухається прямолінійно й рівномірно. Довільна система відліку, яка рухається щодо інерціальної системи з постійною швидкістю, також є інерціальною;
2. Сила, яка діє на тіло, викликає зміну його кількості руху (імпульсу $\vec{p} = m\vec{v}$), тобто

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

Оскільки в класичній механіці маса тіла не залежить від його швидкості, маємо

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F},$$

тобто прискорення тіла, помножене на його сталу масу, дорівнює прикладеній силі. Звідси випливає, якщо F = 0 маємо *V =const*, тобто другий закон Ньютона не суперечить першому закону Ньютона;

3. Механічна взаємодія тіл одне з одним зводиться до парних сил. Якщо тіло ***a*** діє на тіло ***b*** із силою $\vec{F}_{ab}$, то тіло ***b*** діє на тіло ***a*** з силою $\vec{F}_{ba}$, причому $\vec{F}_{ab} = -\vec{F}_{ba}$

Аксіоми та базові теореми статики

Статикою називається розділ теоретичної механіки, в якому:

1) викладається загальне вчення про сили;
2) вивчаються умови рівноваги систем сил, що прикладені до твердих тіл;
3) перетворюються одні системи сил в інші, їм еквівалентні.

Говорячи коротко, статика – це наука про сили.

Сила в механіці – основна міра механічної взаємодії матеріальних тіл, в результаті чого тіла, що взаємодіють, можуть надавати одне одному прискорення або деформуватись (змінювати свою форму). Сила – векторна величина: характер її дії на тіло визначається модулем, напрямом і точкою прикладання. Напрямом сили є той напрям, вздовж якого вільна матеріальна точка, яка перебуває в спокої, починає рухатись під дією сили.

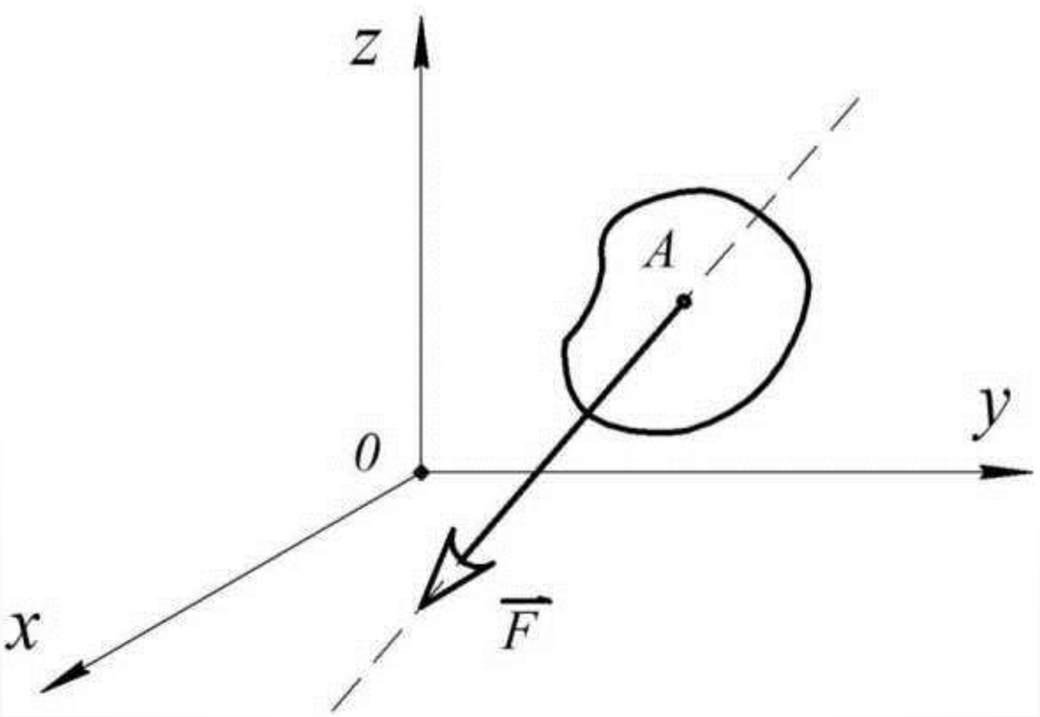


Рис. 3. Зосереджена сила у статиці

Сили, які прикладаються до тіла у будь-якій його точці, називаються **зосередженими силами**.

Розподіленими силами називаються сили, що діють на всі точки тіла (**масові, або об'ємні сили**) чи на всі точки певної частини поверхні тіла (**поверхневі сили**). До об'ємних сил належать сили далекодії (наприклад сили тяжіння). Поверхневі сили виникають при дії одного тіла на інше безпосереднім співдотиком і прикладені до тієї частини поверхні тіла, в якій тіла, що взаємодіють, дотикаються одне до одного.

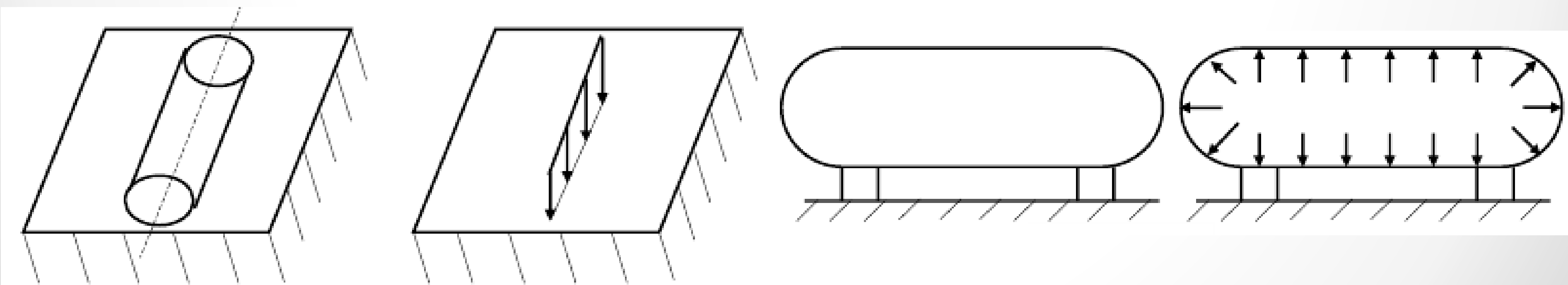
Система сил – сукупність усіх сил, що діють на тіло.

Якщо одну систему сил, що діє на тіло, можна замінити іншою, не порушуючи механічного стану твердого тіла, то такі системи називаються еквівалентними.

Якщо система сил еквівалентна одній силі, то така сила називається рівнодійною.

Зрівноважені системи сил (системи сил еквівалентні нулю) – це такі системи сил під дією яких матеріальна точка або тверде тіло перебувають у стані рівноваги відносно інерціальної системи відліку.

Рівновага матеріальної точки або твердого тіла – їх стан, за якого вони, перебуваючи під дією системи сил, залишаються у спокої відносно інерціальної системи відліку.



а) б)

Рис. 4. Розподілені сили по лінії (а), та по площі (б)

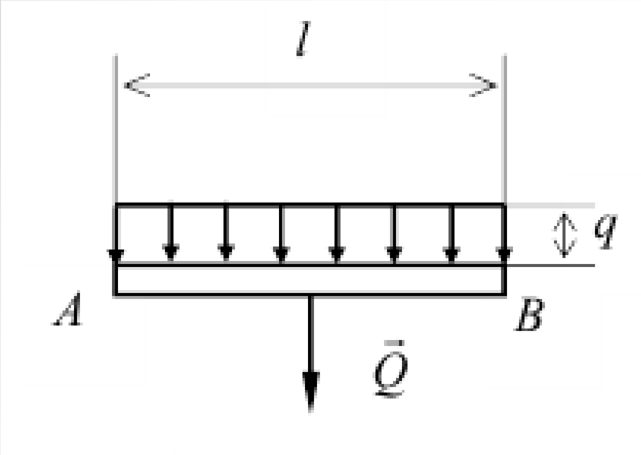


Рис. 5. Приклад задання розподіленої сили по лінії

Сили, що діють на матеріальну систему (тіло), можна розділити також на **зовнішні** і **внутрішні**. Внутрішніми силами називаються сили, що виникають внаслідок взаємодії частинок (тіл), які належать самій системі. Зовнішніми називаються сили, що виникають від дії тіл, які не належать системі.

АКСІОМИ СТАТИКИ

Аксіоми – це деякі твердження, що приймаються без доказу.

Всього аксіом – три. Перша встановлює умови, при виконанні яких найпростіша система сил є зрівноваженою. Дві наступні аксіоми встановлюють найпростіші дії з силами, при яких стан тіла (системи) не змінюється.

Аксіома 1. Дві сили, прикладені до абсолютно твердого тіла, будуть зрівноважені (тобто еквівалентні нулеві) тоді і тільки тоді, коли їхні модулі рівні, сили діють вздовж однієї прямої і направлені в протилежні сторони (рис. 6).

Вказані дві сили звуться також такими, що зрівноважуються (взаємно зрівноважуються).

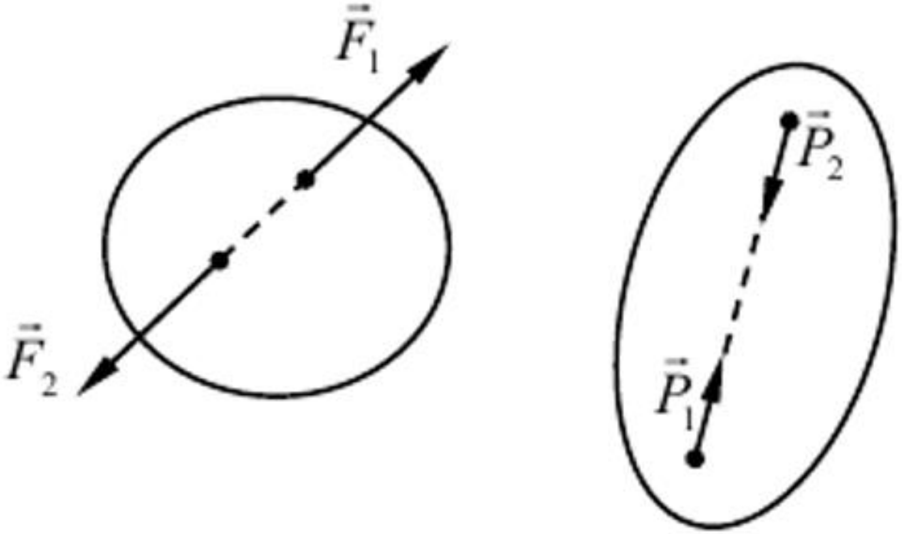


Рис. 6

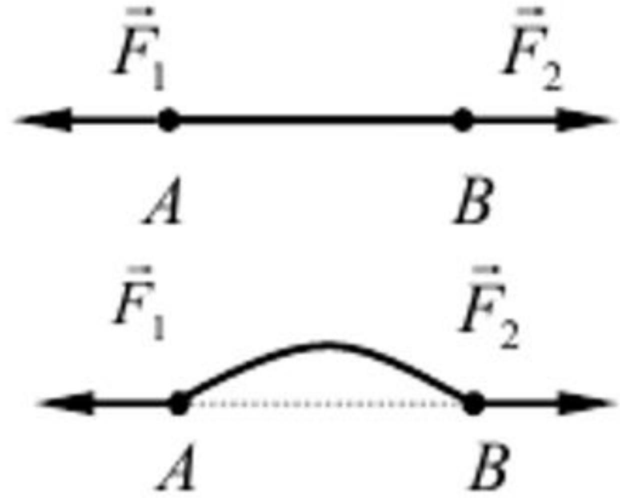


Рис. 7

Аксіома 2. Не порушуючи стану абсолютно твердого тіла, до нього можна прикладати або від нього відкидати сили тоді і тільки тоді, коли вони складають зрівноважену систему.

Іншими словами: дві системи сил, що відрізняються на зрівноважену систему, еквівалентні одна одній.

Наслідок: Дія сили на абсолютно тверде тіло не зміниться, якщо перенести точку прикладання сили вздовж лінії її дії в довільну іншу точку тіла (тобто сила, прикладена до абсолютно твердого тіла, є ковзним вектором).

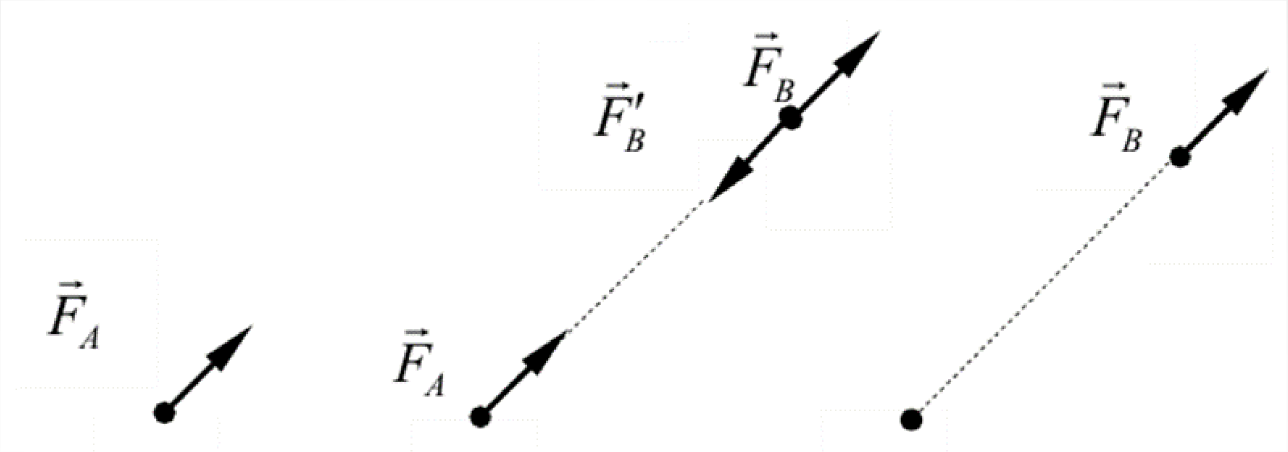


Рис. 8.

Обидві аксіоми та наслідок не можна застосовувати до деформівних тіл.

Аксіома 3 (аксіома паралелограма сил). Не змінюючи стан тіла, дві сили, прикладені в одній його точці, можна замінити однією рівнодійною силою, прикладеною в тій же точці і рівною їхній векторній сумі.
Ця аксіома встановлює особливості: сили, прикладені в одній точці А, мають рівнодійну і їх сума визначає модуль, напрям і точку прикладання рівнодійної сили.

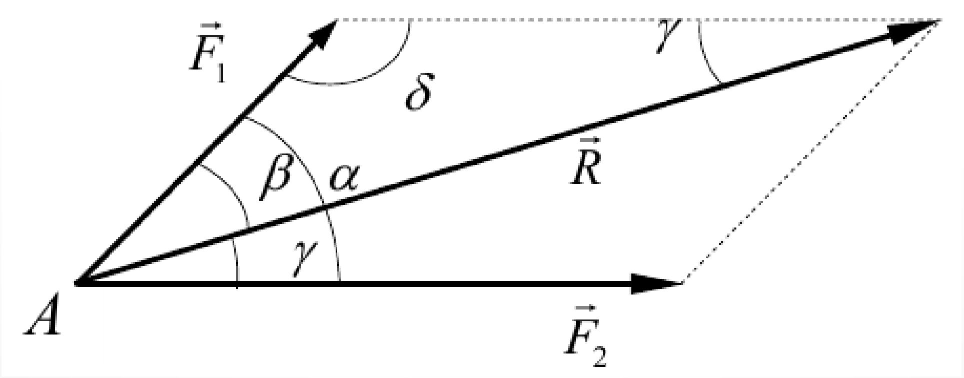


Рис. 9. Паралелограм сил

Наслідки з аксіоми про паралелограм сил:

1. Дві сили прикладені в одній точці твердого тіла під кутом одна до одної, мають рівнодійну, тобто еквівалентні одній силі.

2. Аксіома визначає модуль, точку прикладення та напрям рівнодійної як геометричної суми двох сил:

$$\vec{R} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}.$$

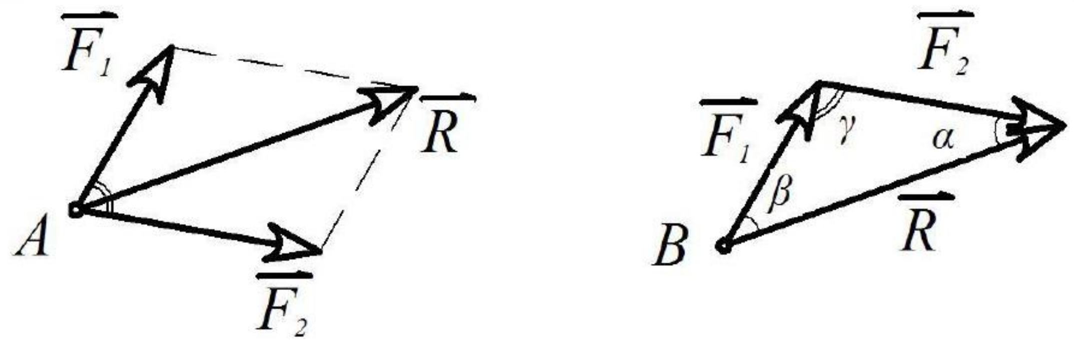


Рис. 10. Визначення напрямку та модуля рівнодійної з паралелограма сил

Числове значення (модуль) рівнодійної двох сил визначають графічно, як довжину діагоналі паралелограма або довжину замикаючої сторони трикутника або аналітично, як діагональ паралелограма за допомогою теореми косинусів:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 \cdot F_2 cos\widehat{F_1 \cdot F_2}},$$

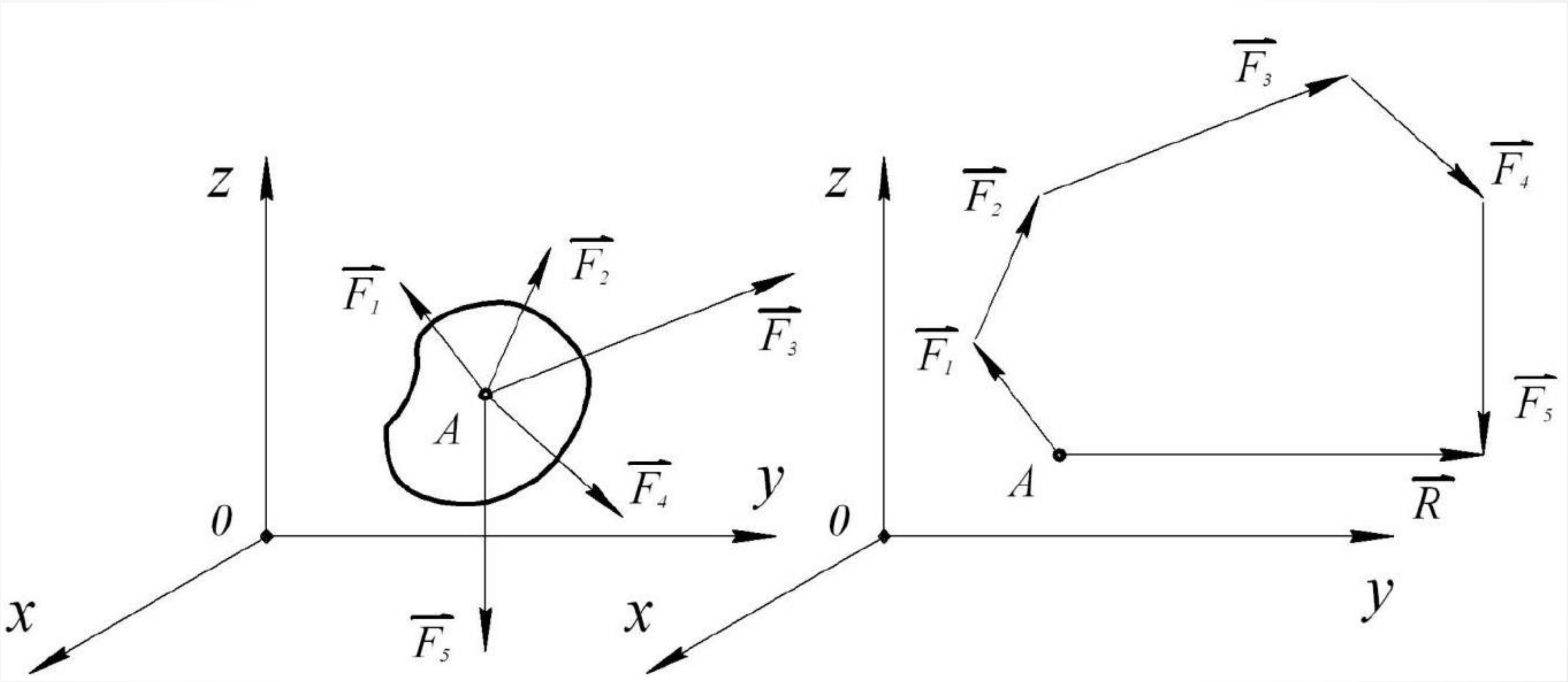
Або з трикутника за теоремою синусів:

$$\frac{R}{sin\gamma} = \frac{F_1}{sin\alpha} = \frac{F_2}{sin\beta}.$$

3. Аксіома визначає загальне правило геометричного складання сил, прикладені до тіла в одній точці.

Рівнодіюча сил прикладених до тіла в одній точці визначається як замикаюча сторона багатокутника (рис 11) іншими сторонами якого є прикладені сили:

$$\vec{R}=\sum_{k=0}^{n}\overrightarrow{F_k}$$



а) б)

Рис. 11. Схема прикладення сил (а) та силовий багатокутник (б)

4. Аксіома визначає правило розкладання сил за заданими напрямами:

а) за двома заданими напрямками

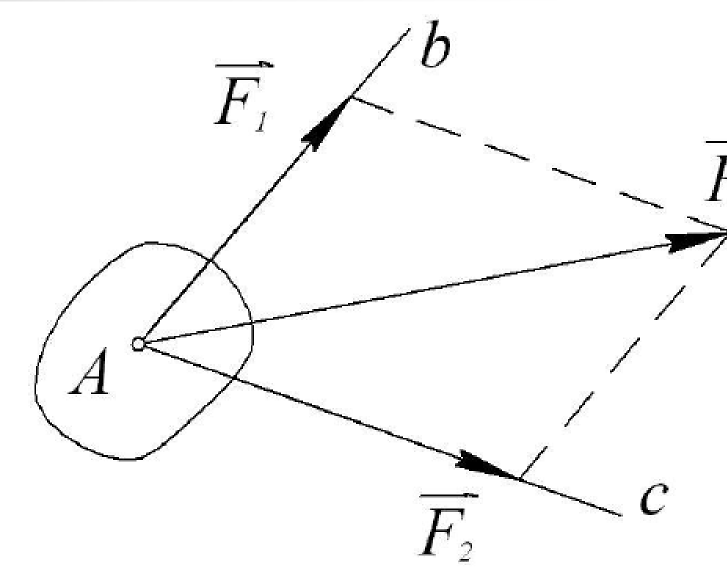


Рис. 13. Побудова паралелограма за діагоналлю

б) за трьома заданими напрямками

Побудова прямокутного паралелепіпеда, в якого діагональ – вектор сили R, а ребра – складові сили $(\vec{F_x}, \vec{F_y}, \vec{F_z})$

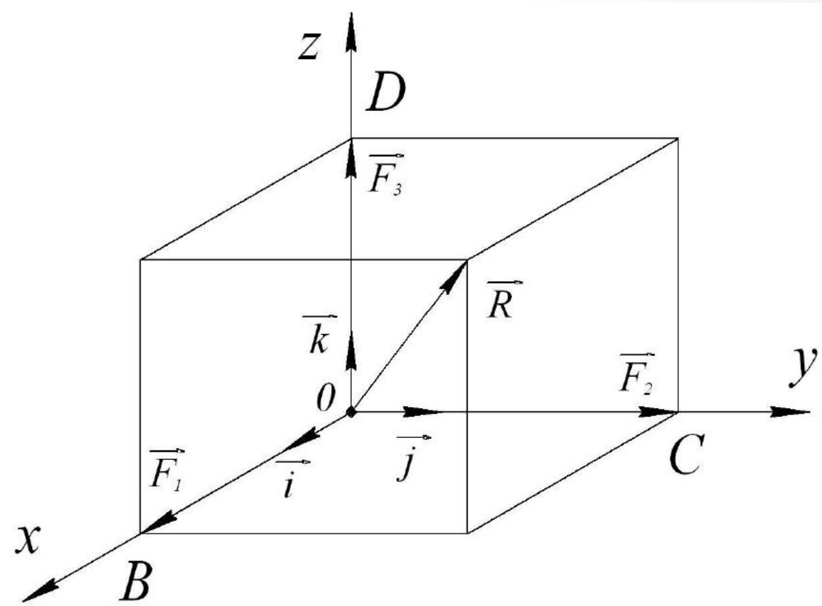


Рис. 14. Розкладання сили на три проекції

БАЗОВІ ТЕОРЕМИ СТАТИКИ

1. Теорема про три сили

Якщо тверде тіло перебуває у стані рівноваги під дією трьох непаралельних сил, що розташовані в одній площині, то лінії дії цих сил перетинаються в одній точці.

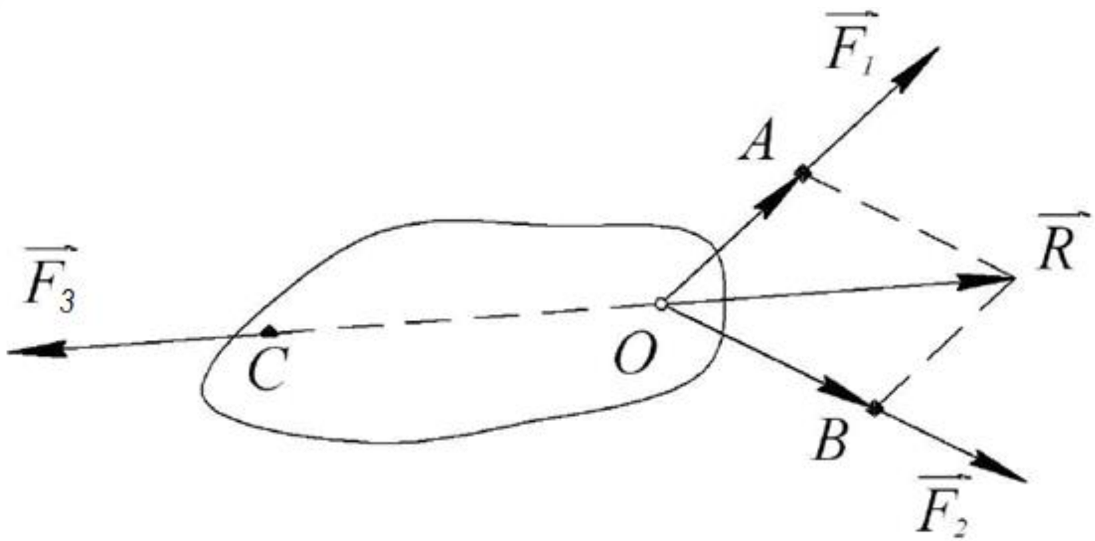


Рис. 15. Теорема про три сили

3. Аналітичне задання сили (в системі координат)

Розглянемо довільний вектор сили F в декартовій системі координат, прикладений в т. А з координатами x, y, z (рис. 3).

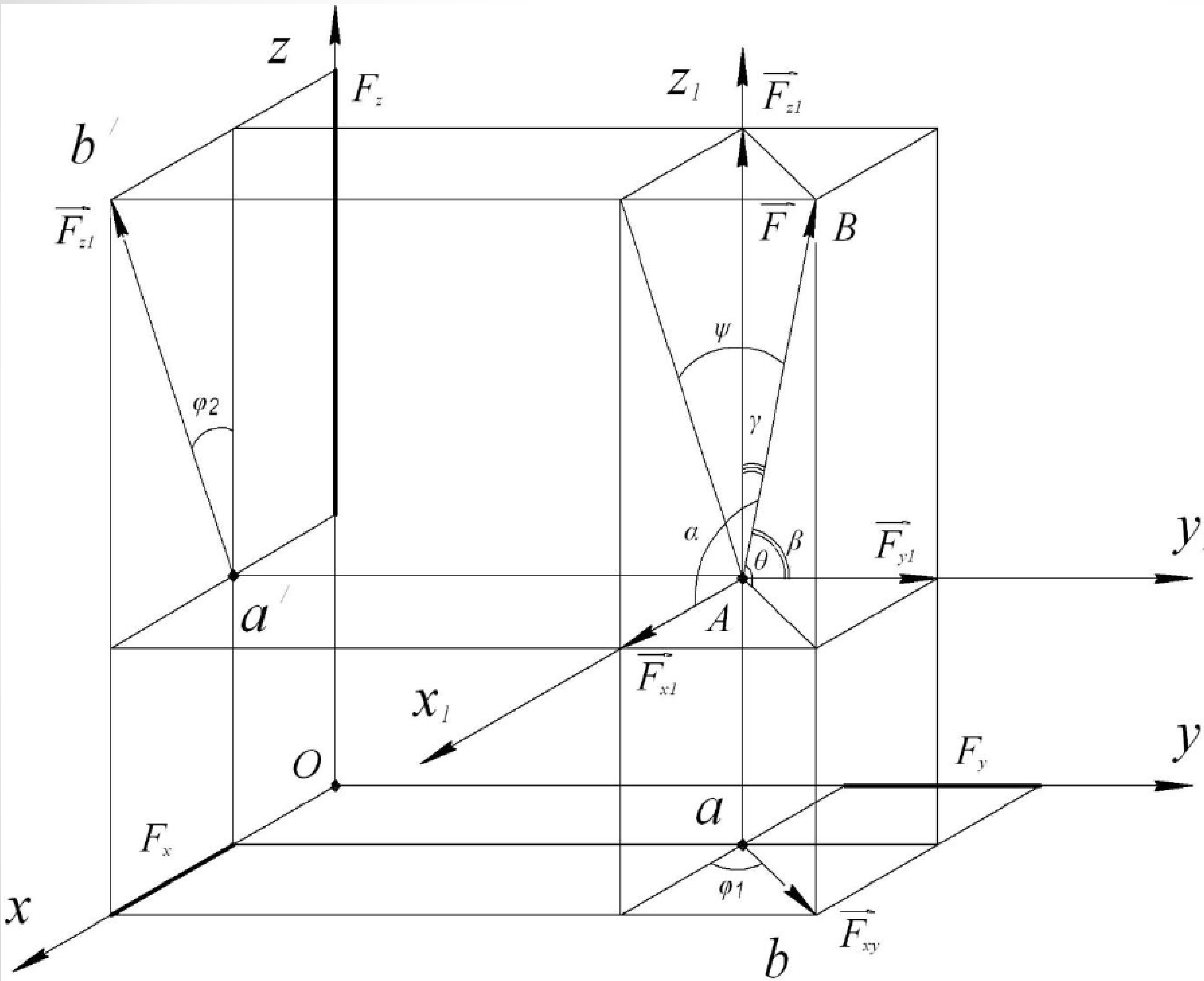


Рис. 16.

Введемо додаткову систему координат $Ax_1y_1x_1$ з початком в т. А. Так, що осі Ax_1, Ay_1, Az_1 *є* паралельними осями Ох, Оу і Ох. Розкладемо вектор сили по осях Ax_1, Ay_1, Az_1. Довжини ребер паралелепіпеда, взяті з відповідним знаком, є проекціями вектору сили на осі Ax_1, Ay_1, Az_1, і на осі Ох, Оу та Ох.

Тоді:

$$F_x = F \cdot \cos\alpha\ ;$$
$$F_y = F \cdot \cos\beta\ ;$$
$$F_z = F \cdot \cos\gamma\ ;$$

Величина модуля вектору сили визначатиметься за формулою:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

Напрямні косинуси вектору сили:

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{F} = \frac{F_x}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}};$$

$$\cos\beta = \frac{F_y}{F} = \frac{F_y}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}};$$

$$\cos\gamma = \frac{F_z}{F} = \frac{F_z}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}};$$

Тобто аналітично задати силу – це задати проекції цієї сили на осі координат і координати точки прикладання сили. Тоді є можливість визначити числове значення сили (модуль) та напрям сили відносно даної системи координат.

4. Момент сили відносно точки та осі

Момент сили відносно точки та відносно осі – це фізичні величини, що визначають властивості сили надавати твердому тілу обертальний рух відносно довільної точки або осі.

4.1. Момент сили відносно точки О – це фізична величина, що дорівнює векторному добутку радіус-вектору r , проведеного з т. О у точку прикладання сили, на цю силу (рис. 4):

$$\overrightarrow{M_0}(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}$$

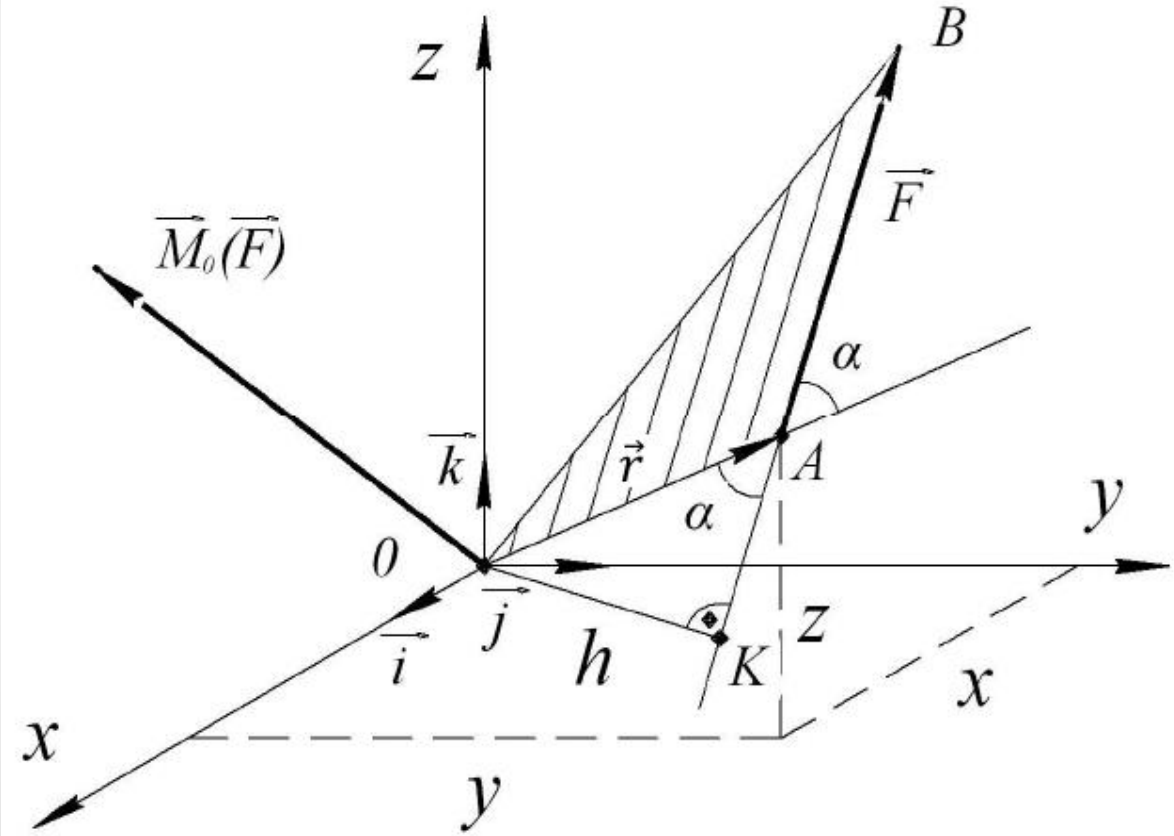


Рис. 4.

Модуль векторного добутку:

$$\left|\vec{r} \times \vec{F}\right| = r \cdot F \cdot \sin\alpha$$

$$\mathrm{h = OK;}$$

Момент сили відносно довільної точки О є вектором, перпендикулярним до площини, що містить у собі точку та силу (площина дії моменту), який дорівнює за модулем добутку модуля сили на найкоротшу відстань між точкою та частиною дії сили (плече моменту сили) і направлений у ту частину простору, звідки обертання тіла під дією сили відносно точки відбувається проти руху стрілки годинника.

Аналітичне задання моменту сили відносно точки

Задаються проекції сили на осі декартової системи координат та координати точки прикладання сили (або будь-якої точки на лінії дії сили). Тоді векторний добуток можна подати у вигляді (див. рис. 4):

$$\overrightarrow{\mathrm{M}_0}(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{bmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{bmatrix} = (yF_z - zF_y)\vec{\imath} + (zF_x - xF_z)\vec{\jmath} + (xF_y - yF_x)\vec{k}$$

де $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ – орти системи координат;

x, y, z – координати точки прикладання сили;

F_x, F_y, F_z – проекції сили на осі координат.

Тоді модуль моменту сили відносно точки визначитися за формулою:

$$\overrightarrow{\mathrm{M}_0}(\vec{F}) = \sqrt{(yF_z - zF_y)^2 + (zF_x - xF_z)^2 + (xF_y - yF_x)^2}$$

Напрям вектору моменту сили відносно даної системи координат визначається кутами:

$$\cos\left(\widehat{\vec{\imath}, \overrightarrow{M_0}(\vec{F})}\right) = \frac{yF_z - zF_y}{\sqrt{(yF_z - zF_y)^2 + (zF_x - xF_z)^2 + (xF_y - yF_x)^2}}$$

$$\cos\left(\widehat{\vec{\jmath}, \overrightarrow{M_0}(\vec{F})}\right) = \frac{zF_x - xF_z}{\sqrt{(yF_z - zF_y)^2 + (zF_x - xF_z)^2 + (xF_y - yF_x)^2}}$$

$$\cos\left(\widehat{\vec{k}, \overrightarrow{M_0}(\vec{F})}\right) = \frac{xF_y - yF_x}{\sqrt{(yF_z - zF_y)^2 + (zF_x - xF_z)^2 + (xF_y - yF_x)^2}}$$

(Напрямні косинуси вектору моменту сили відносно точки)

Властивості моменту сили відносно точки:

а) при переміщенні точки прикладання сили вздовж її лінії дії момент сили відносно точки не змінюється;

б) якщо лінії дії сили проходять через точку, відносно якої визначається момент сили, то момент сили відносно цієї точки дорівнює нулю;

в) момент сили відносно точки чисельно дорівнює подвоєній площі трикутника ΔOAB, тобто: $\overrightarrow{M_0}(\vec{F}) = F \cdot h = 2 \cdot S_{OAB}$

4.2. Момент сили відносно осі є фізичною скалярною алгебраїчною величиною, що дорівнює моменту проекції цієї сили на площину, перпендикулярну до осі, відносно точки перетину осі з площиною

$$M_z(\vec{F}) = M_o(\overrightarrow{F_{xy}}) = \pm F_{xy} \cdot h$$

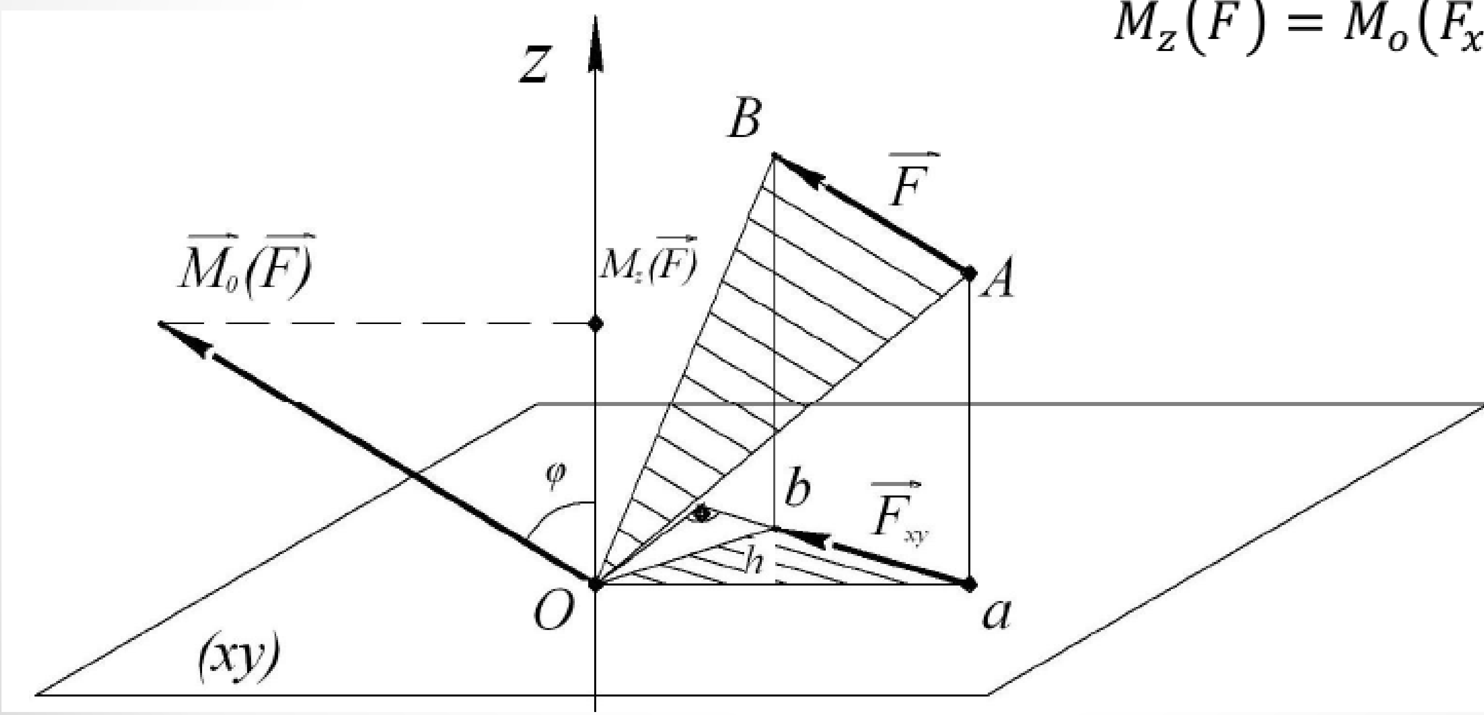


Рис. 4.

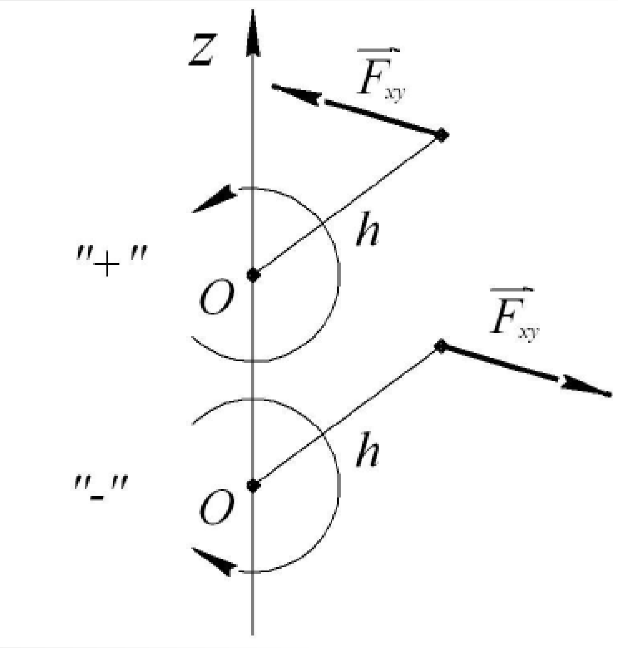


Рис. 5. Визначення знаку моменту сили відносно осі

Властивості моменту сили відносно осі:
момент дорівнює нулю у двох випадках:

- якщо лінії дії сили паралельні осі;
- якщо лінія дії сили перетинає вісь;

5. Еквівалентні перетворення систем паралельних сил

5.1. Складання двох однонаправлених паралельних сил

$\overrightarrow{F_1} || \overrightarrow{F_2}$

$\{\overrightarrow{Q_1}, \overrightarrow{Q_2}\} \sim 0; \{\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{Q_1}\} \sim \overrightarrow{R_1}; \{\overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{Q_2}\} \sim \overrightarrow{R_2};$

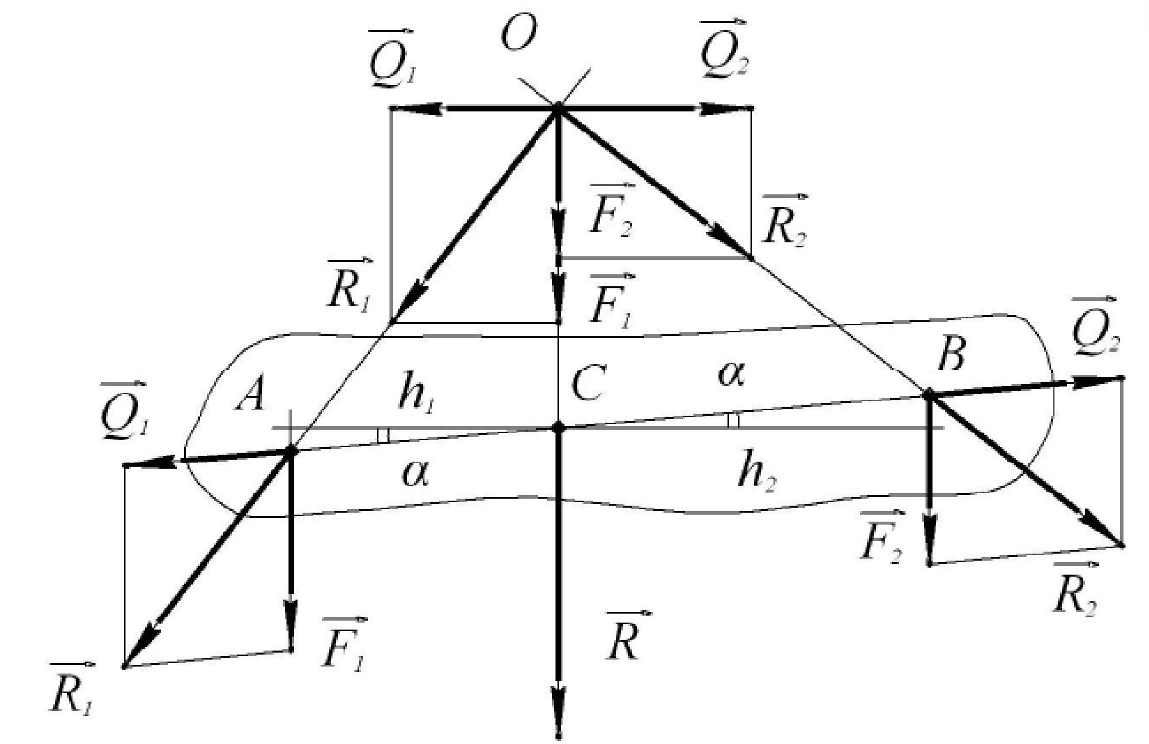


Рис. 6.

$$\frac{AC}{BC} = \frac{F_2}{F_1}$$

Дане співвідношення називається правилом важеля

6. Умови рівноваги системи збіжних сил

Сили, лінії дії яких перетинаються в одній точці, утворюють систему збіжних сил. Складаючи сили за правилом силового багатокутника можна знайти рівнодійну, як геометричну суму сил системи.

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k$$

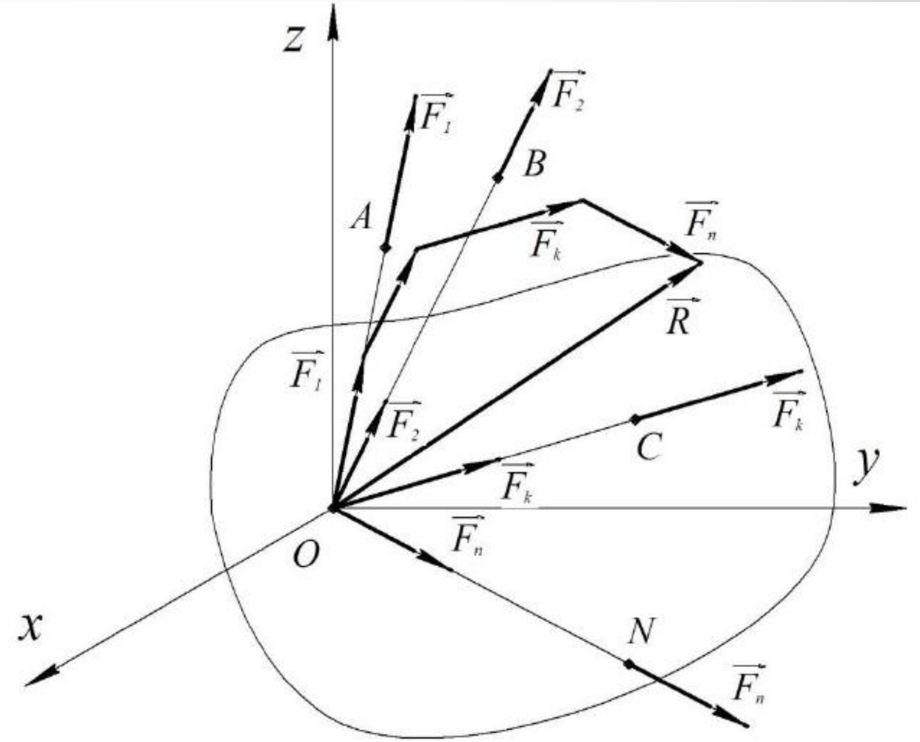


Рис. 7.

Механічна умова рівноваги.

Для рівноваги системи збіжних сил, що діють на тверде тіло, необхідно і достатньо, щоб рівнодійна цієї системи сил дорівнювала нулю:

$$R = \sum_{k=1}^{n} F_k = 0$$

Геометрична умова рівноваги. Для рівноваги системи збіжних сил, що діють на тверде тіло, необхідно і достатньо, щоб багатокутник, побудований із сил системи, був замкненим.

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0; \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0; \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0;$$

Аналітична умови рівноваги. Для рівноваги системи збіжних сил, що діють на тверде тіло, необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми проекцій усіх сил системи на осі декартової системи координат дорівнювали нулю.

$$R = \sqrt{(\sum_{k=1}^{n} F_{kx})^2 + (\sum_{k=1}^{n} F_{ky})^2 + (\sum_{k=1}^{n} F_{kz})^2} = 0;$$