Лабораторна робота № 2.
ПОБУДОВА МАТРИЦІ БІНАРНОГО ВІДНОШЕННЯ

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ТА ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Декартів добуток множин A і B (позначається $A \times B$) – це множина всіх упорядкованих пар елементів (a,b), де $a \in A$, $b \in B$. При цьому вважається, що $(a_1,b_1)=(a_2,b_2)$ тоді і тільки тоді, коли $a_1=a_2$, $b_1=b_2$.

Потужність декартова добутку дорівнює $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

Приклад. Довести тотожність $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.

Розв'язання.

Нехай $(x,y) \in (A \times B) \cap (C \times D) \Leftrightarrow$

$(x,y) \in (A \times B)\ \&\ (x,y) \in (C \times D) \Leftrightarrow$

$(x \in A\ \&\ y \in B)\ \&\ (x \in C\ \&\ y \in D) \Leftrightarrow$

$(x \in A\ \&\ x \in C)\ \&\ (y \in B\ \&\ y \in D) \Leftrightarrow$

$(x \in A \cap C)\ \&\ (y \in B \cap D) \Leftrightarrow (x,y) \in (A \cap C) \times (B \cap D)$.

Бінарним відношенням R називається підмножина декартова добутку $A \times B$ (тобто $R \subset A \times B$).

Якщо пара (a,b) належить відношенню R, то пишуть $(a,b) \in R$, або aRb.

Областю визначення бінарного відношення $R \subset X \times Y$ називається множина $\delta_R = \{x \mid \exists y\ (x,y) \in R\}$, а *областю значень* – множина $\rho_R = \{y \mid \exists x\ (x,y) \in R\}$ ($\exists$ - існує).

Для скінчених множин бінарне відношення $R \subset A \times B$ зручно задавати за допомогою *матриці відношення* $R_{m \times n} = (r_{ij})$, де $m = |A|$, $n = |B|$. Елементами матриці є значення $r_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } (a_i,b_j) \in R \\ 0, \text{ якщо } (a_i,b_j) \notin R \end{cases}$.

Приклад. Знайти матрицю відношення $R \subset M \times 2^M$, де $R = \{(x, y) \mid x \in M \;\&\; y \subset M \;\&\; x \in y \;\&\; |y| > x+1\}$,

$M = \{x \mid x \in Z \;\&\; |x| \le 1\}$, Z - множина цілих чисел.

Розв'язання.

Згідно з означенням матриці відношення, розв'язок має вигляд

	$\varnothing$	{-1}	{0}	{1}	{-1,0}	{-1,1}	{0,1}	{-1,0,1}
-1	0	1	0	0	1	1	0	1
0	0	0	0	0	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	1

Приклад. Зобразити відношення графічно, де R - множина дійсних чисел, та знайти його область визначення та область значень:

1. $\alpha_1 = \{(x, y) \mid (x, y) \in R^2 \;\&\; |2x + y| \le 4 \;\&\; x \ge 0\}$;

2. $\alpha_2 = \{(x, y) \mid (x, y) \in R^2 \;\&\; x^2 + 2x - y^2 \le 0\}$.

Розв'язання.

Зображення відношення α_1 зводиться до графічного розв'язання системи нерівностей $\begin{cases} 2x + y \le 4 \\ 2x + y \ge -4 \end{cases}$. Розв'язок цієї системи з врахуванням останньої умови зображено на рис. 2.1. Область визначення $\delta_{\alpha_1} = [0; \infty)$, область значень $\rho_{\alpha_1} = (-\infty; 4]$.

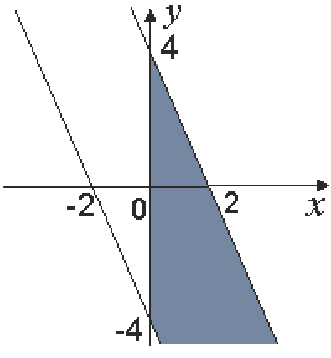

Рисунок 2.1

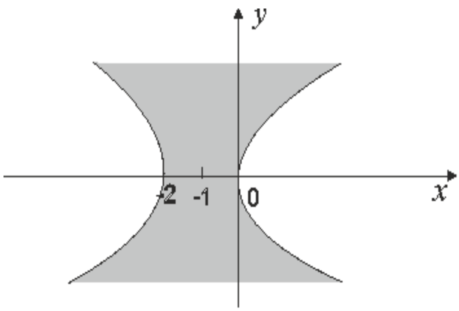

Рисунок 2.2

Для побудови області, яка відповідає відношенню α_2, знаходимо границю цієї області $x^2 + 2x - y^2 = 0$, або $(x+1)^2 - y^2 = 1$. Це є рівняння гіперболи з центром симетрії в точці (-1; 0) та дійсною та уявною піввісями, рівними 1. Тому відношенню α_2 відповідає частина площини, зображена на рис. 2.2. Область визначення $\delta_{\alpha_2} = R$, область значень $\rho_{\alpha_2} = R$.

Види бінарних відношень.

Нехай задано бінарне відношення R на множині A^2: $R \subseteq A \times A = \{(a,b) \mid a \in A, b \in A\}$.

1. Бінарне відношення R на множині A називається *рефлексивним*, якщо для будь якого $a \in A$ виконується aRa, тобто $(a,a) \in \mathrm{R}$. Головна діагональ матриці рефлексивного відношення складається з одиниць. Граф рефлексивного відношення обов'язково має петлі у кожній вершині.

2. Бінарне відношення R на множині A називається *антирефлексивним*, якщо для будь якого $a \in A$ не виконується aRa, тобто $(a,a) \notin R$. Головна діагональ матриці антирефлексивного відношення складається з нулів. Граф антирефлексивного відношення не має петель.

3. Бінарне відношення R на множині A називається *симетричним*, якщо для будь яких $a, b \in A$ з aRb слідує bRa, тобто якщо $(a,b) \in R$ то і $(b,a) \in R$. Матриця симетричного відношення симетрична відносно головної діагоналі. Граф симетричного відношення не є орієнтованим.

4. Бінарне відношення R на множині A називається *антисиметричним*, якщо для будь яких $a, b \in A$ з aRb та bRa слідує що $a = b$. Тобто якщо $(a,b) \in R$ і $(b,a) \in R$, то $a = b$. Матриця антисиметричного відношення не має жодної пари одиниць, які знаходяться на симетричних місцях по відношенню до головної діагоналі. У графа антисиметричного відношення вершини з'єднуються тільки однією напрямною дугою.

5. Бінарне відношення R на множині A називається *транзитивним*, якщо для будь яких $a, b, c \in A$ з aRb та bRc слідує, що aRc. Тобто якщо $(a,b) \in R$ і $(b,c) \in R$, то $(a,c) \in R$. Матриця транзитивного відношення характеризується тим, що якщо елемент матриці $\sigma_{ij} = 1$ та $\sigma_{jm} = 1$, то обов'язково $\sigma_{im} = 1$. Граф транзитивного відношення такий, що якщо з'єднані дугами, наприклад, перша-друга та друга-третя вершини, то обов'язково є дуга з першої в третю вершину.

6. Бінарне відношення R на множині A називається *антитранзитивним*, якщо для будь яких $a, b, c \in A$ з aRb та bRc слідує що не виконується aRc. Тобто якщо $(a,b) \in R$ і $(b,c) \in R$, то $(a,c) \notin R$. Матриця антитранзитивного відношення характеризується тим, що якщо елемент матриці $\sigma_{ij} = 1$ та $\sigma_{jm} = 1$, то обов'язково $\sigma_{im} = 0$. Граф транзитивного відношення такий, що якщо з'єднані дугами, наприклад, перша-друга та друга-третя вершини, то обов'язково немає дуги з першої в третю вершину.

Приклад. На множині $A = \{1,2,3,4,5\}$ задано відношення $R = \{(a,b) \mid a, b \in A,\ a + b - \textit{парне число}\}$. Визначити тип даного відношення.

Розв'язання.

Матриця даного відношення має вигляд: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Вочевидь, що дане відношення є:

- рефлексивним (вздовж головної діагоналі знаходяться одиниці);
- симетричним ($\sigma_{13} = \sigma_{31}, \sigma_{24} = \sigma_{42}$ та інші);
- транзитивним ($(1,3) \in R, (3,5) \in R \Rightarrow (1,5) \in R$; $(1,5) \in R$, $(5,3) \in R \Rightarrow (1,3) \in R$ та інші).

<u>Приклад.</u> Які властивості на множині $A = \{a, b, c, d\}$ має бінарне відношення $R = \{(a, b), (b, d), (a, d), (b, a), (b, c)\}$.

Розв'язання.

Матриця даного відношення має вигляд: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Дане відношення є:

- антирефлексивним (вздовж головної діагоналі знаходяться нулі);
- не симетричним, так як $\sigma_{23} = 1$, а $\sigma_{32} = 0$;
- не антисиметричним, так як $\sigma_{12} = \sigma_{21} = 1$;
- не транзитивним, тому що $\sigma_{12} = 1$, $\sigma_{23} = 1$ та $\sigma_{13} = 0$.

Функцією з множини X на множину Y називається всюди визначена бінарна відповідність, при якому кожен елемент множини X зв'язаний з єдиним елементом множини Y. Функція записується наступним чином: якщо $f \subseteq X \times Y$, то $f : X \to Y$. Множину X називають областю визначення, а Y – множиною значень функції.

Областю значень функції називається підмножина в Y, яка складається з образів всіх елементів $x \in X$. Вона позначається символом $f(X)$.

Оскільки для кожного $x \in X$ існує єдиним образом визначений $y \in Y$, такий що $(x, y) \in f$, то записують $y = f(x)$ та говорять, що функція f відображує множину X на множину Y, а $f(x)$ називають образом *x* при відображенні f або значенням функції, яка відповідає аргументу *x*.

<u>Види функціональних відношень</u>

1. Функція називається ін'єктивною (ін'єкцією), якщо з умови $f(x_1) = f(x_2)$ слідує, що $x_1 = x_2$ для будь-яких $x_1, x_2 \in X$. Функція ін'єктивна тоді і тільки тоді, коли для будь-яких $x_1, x_2 \in X$

якщо $x_1 \neq x_2$, то $f(x_1) \neq f(x_2)$, тобто для різних аргументів функція f приймає різні значення.

2. Функція називається сюр'єктивною (сюр'єкцією), якщо для кожного $y^* \in Y$ знайдеться такий $x^* \in X$, що $y^* = f(x^*)$.

3. Функція називається бієктивною (бієкцією), якщо вона ін'єктивна та сюр'єктивна одночасно. Таку функцію ще називають взаємно-однозначним відображенням.

<u>Приклад.</u> Визначити, які з зображених функцій ін'єктивні, сюр'єктивні або бієктивні.

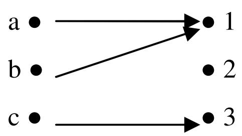

Рисунок 2.3

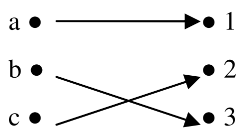

Рисунок 2.4

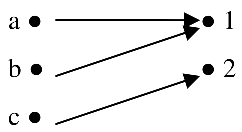

Рисунок 2.5

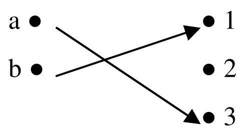

Рисунок 2.6

Розв'язання.

1. Рисунок 2.3. Дана функція не ін'єктивна, тому що значення $1 \in Y$ відповідає a та $b \in X$. Функція не є сюр'єктивною, тому що у елемент $2 \in Y$ нічого не переходить;

2. Рисунок 2.4. Дана функція ін'єнивна, тому що різним аргументам відповідають різні значення. Функція сюр'єктивна, тому що множина її значень співпадає з областю значень. У даному випадку маємо бієктивну функцію;

3. Рисунок 2.5. Дана функція не інє'ктивна, тому що значення 1 функція приймає як для a так і для b. Функція сюр'єктивна, тому що множина Y співпадає з областю значень функції, тобто для кожного $y \in Y$ існує відповідний аргумент x з області визначення, що $y = f(x)$;

4. Рисунок 2.6. Дана функція ін'єктивна, но не сюр'єктивна.