Лабораторна робота № 1.
МОДЕЛЮВАННЯ ОСНОВНИХ ОПЕРАЦІЙ ДЛЯ ДВОХ ЧИСЛОВИХ МНОЖИН

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ТА ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Множина – це сукупність деяких об'єктів (елементів множини), виділених за певною ознакою з інших об'єктів. При цьому повинно бути дано повний опис класу всіх об'єктів, які розглядаються (універсальна множина U). Факт належності елемента a множині A позначається $a \in A$. Запис $a \notin A$ означає, що елемент a універсальної множини не належить множині A. Якщо для всіх елементів множини A і тільки для них виконується властивість P, то це позначають $A = \left\{ a \mid P(a) \right\}$. Інколи вдається перелічити всі елементи множини A. Тоді наводять повний перелік усіх різних елементів множини: $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

Множина, яка не має жодного елемента, називається *порожньою* і позначається $\varnothing$.

Якщо кожен елемент множини A є елементом множини B, то A називається *підмножиною* множини B, що позначають $A \subset B$. Вважається, що порожня множина є підмножиною будь-якої множини, а також $A \subset A$.

Множина всіх підмножин множини A називається *булеаном* і позначається $P(A)$. Потужність скінченної множини дорівнює кількості її елементів, позначається $|A|$. Потужність порожньої множини дорівнює 0.

Якщо $|A| = n$, то $|P(A)| = 2^n$.

<u>Приклад.</u> $\{1, 4, 5\} \subset \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 7\}$, але
$\{1, 4, 5\} \notin \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 7\}$

<u>Приклад.</u> Знайти булеан множини $A = \{ a, b, c \}$.

Розв'язання.

Потужності множин $\left|A\right| = 3$, $\left|P(A)\right| = 8$. Булеан має вигляд

$$P(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}.$$

Дві множини A і B *рівні* між собою, якщо $A \subset B$ і $B \subset A$.

Над множинами можна виконувати дії: об'єднання, переріз, доповнення, різницю, симетричну різницю, декартів добуток.

Об'єднання - $A \cup B = \left\{ x \mid x \in A \vee x \in B \right\}$,

переріз - $A \cap B = \left\{ x \mid x \in A \wedge x \in B \right\}$,

доповнення - $\overline{A} = \left\{ x \mid x \notin A \right\}$,

різниця - $A \setminus B = \left\{ x \mid x \in A \wedge x \notin B \right\}$,

симетрична різниця - $A \Delta B = \left\{ x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A) \right\}$.

Тут використано логічні знаки: $\vee$ - «або», $\wedge$ - «і».

<u>Приклад.</u> Виконати дії над множинами $A = \{1,2,3,4\}$ і $B = \{3,4,5,6,7\}$.

Розв'язання.

$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $A \cap B = \{3,4\}$, $A \setminus B = \{1,2\}$, $A \Delta B = \{1,2,5,6,7\}$.

<u>Приклад.</u> Довести логічним методом, що для довільних множин A і B виконується тотожність $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Розв'язання.

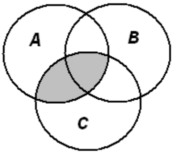
Нехай $x \in \overline{A \cup B} \Rightarrow x \notin (A \cup B) \Rightarrow (x \notin A) \wedge (x \notin B) \Rightarrow$ $\Rightarrow x \in \overline{A} \wedge x \in \overline{B} \Rightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Таким чином, доведено, що $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. Повторюючи міркування в зворотному порядку, одержимо $\overline{A} \cap \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$, що доводить тотожність.

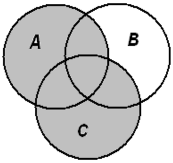
Пріоритет виконання операцій у спадному порядку – доповнення, переріз, об'єднання, різниця, симетрична різниця.

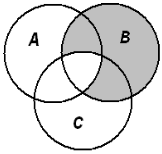
<u>Приклад.</u> Зобразити на діаграмі Ейлера-Вена множину, яку задано за допомогою операцій: $A \cup C \,\Delta\, B \setminus A \cap C$.

Розв’язання.

З врахуванням порядку виконання операцій: 1) $A \cap C$ (рис.1.1), 2) $A \cup C$ (рис.1.2), 3) $B \setminus A \cap C$ (рис.1.3), 4) $A \cup C \,\Delta\, B \setminus A \cap C$ (рис.1.4).







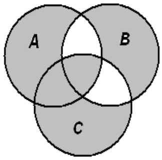


Рисунок 1.1 Рисунок 1.2 Рисунок 1.3 Рисунок 1.4

<u>Приклад.</u> За допомогою дій над множинами описати множину, зображену на рис.1.5.

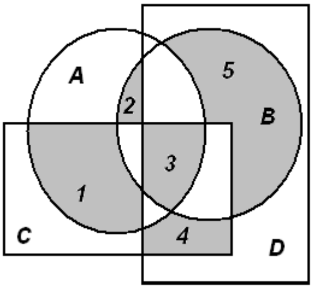


Рисунок 1.5

Розв’язання.

Виділена частина є об’єднанням п’ятьох частин. Опишемо кожну окремо: 1) $A \cap C \setminus B \setminus D$, 2) $A \cap B \setminus D \setminus C$, 3) $A \cap B \cap C \cap D$, 4) $C \cap D \setminus A \setminus B$, 5) $B \setminus A \setminus C$. Тому результат буде мати вигляд $(A \cap C \setminus B \setminus D) \cup (A \cap B \setminus D \setminus C) \cup (A \cap B \cap C \cap D) \cup (C \cap D \setminus A \setminus B) \cup (B \setminus A \setminus C)$.

<u>Закони алгебри множин</u>:

1. $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ комутативність;
2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ асоціативність;
3. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$,
   $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times D) \cap (B \times C)$ дистрибутивність;
4. $A \cup \varnothing = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$ властивості порожньої множини;
5. $A \cup U = U$, $A \cap U = A$ властивості універсума;

6. $A \cup \overline{A} = U$, $\quad A \cap \overline{A} = \varnothing$ властивості доповнення;
7. $A \cup A = A$, $\quad A \cap A = A$ ідемпотентність;
8. $\overline{\overline{A}} = A$ інволюція;
9. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ закони де Моргана;
10. $(A \cup B) \cap A = A$, $\quad (A \cap B) \cup A = A$ закон поглинання;
11. $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ заміна різниці;
12. $A \Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$ заміна симетричної різниці.

<u>Приклад.</u> Спростити вираз, використовуючи закони алгебри множин $\overline{A \setminus B \cup C} \cap A \cup B$.

Розв’язання.

$\overline{A \setminus B \cup C} \cap A \cup B = \overline{A \cap \overline{B \cup C}} \cap A \cup B =$
$(\overline{A} \cup \overline{\overline{B \cup C}}) \cap A \cup B = (\overline{A} \cup B \cup C) \cap A \cup B =$
$[(\overline{A} \cap A) \cup ((B \cup C) \cap A)] \cup B = [\varnothing \cup (B \cap A) \cup (C \cap A)] \cup B =$
$(B \cap A) \cup (C \cap A) \cup B \; ((B \cap A) \cup B) \cup (C \cap A) = B \cup (C \cap A)$.

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Завдання №1. Використовуючи теоретичні відомості, розв’язати наступні задачі за своїм варіантом:

Варіант № 1

1. Для даних скінчених множин $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $C = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ та універсума $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ знайти множину, яку задано за допомогою операцій: а) $(A \cap B) \cup C$; б) $(A \cup C) \setminus \overline{B}$.

2. На множинах задачі 1 побудувати булеан множини $\overline{(B \setminus \overline{A}) \cup C}$. Знайти його потужність.

3. Нехай маємо множини: N - множина натуральних чисел, Z - множина цілих чисел, Q - множина раціональних чисел, R - множина