

Лабораторна робота 1. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРАНСПОРТНИХ ЗАДАЧ

1.1. Вихідні дані

Транспортні задачі є одними із найбільш розповсюджених задач та знаходять широке практичне застосування.

Під **транспортними задачами** розуміють цілий ряд задач, що мають певну специфічну структуру. Найбільш простими транспортними задачами є задачі про перевезення деякого продукту з пунктів відправлення до пунктів призначення при мінімальних витратах на перевезення.

В загальній *постановці* транспортні задачі є наступними.

Деякий однорідний продукт, що зосереджений у m постачальників A_i в кількості a_i ($i = 1, \dots, m$) одиниць, необхідно доставити n споживачам B_j в кількості b_j ($j = 1, \dots, n$) одиниць. Відома вартість c_{ij} перевезення одиниці вантажу від i -го постачальника до j -го споживача.

Необхідно знайти схему (або план) оптимальних перевезень із мінімальними транспортними витратами для вивезення всіх вантажів та повного забезпечення потреб у вантажі всіх споживачів.

1.2. Короткі теоретичні відомості та математичне моделювання транспортних задач

Існує три типи транспортних задач:

I тип – так звані **транспортні задачі закритого типу** (задачі з правильним

балансом), в яких передбачається, що **сумарні запаси** $\sum_{i=1}^m a_i$

дорівнюють **сумарним потребам** $\sum_{j=1}^m b_j$ всіх споживачів:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^m b_j ;$$

II тип – так звані **транспортні задачі відкритого типу** (задачі з неправильним балансом), в яких передбачається, що **сумарні**

запаси $\sum_{i=1}^m a_i$ можуть перевищувати **сумарні потреби** $\sum_{j=1}^m b_j$ всіх

споживачів:

$$\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^m b_j ;$$

III тип – так звані **транспортні задачі відкритого типу** (задачі з неправильним балансом), в яких передбачається, що **сумарні потреби** $\sum_{i=1}^m b_j$ всіх споживачів можуть перевищувати **сумарні запаси** $\sum_{i=1}^m a_i$:

$$\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{i=1}^m b_j .$$

Відкриті транспортні задачі (тип II та III) розв'язуються шляхом приведення їх до закритих.

Цільова функція задач – мінімальна вартість плану перевезень, може бути записана наступним виразом:

$$f(x) = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij} \right) \rightarrow \min , \quad (1.1)$$

де x_{ij} – кількість одиниць вантажу, запланованого до перевезення від i -го постачальника до j -го споживача;

c_{ij} – витрати на перевезення одиниці вантажу від i -го постачальника до j -го споживача;

$c_{ij} \cdot x_{ij}$ – вартість перевезення x_{ij} одиниць вантажу від i -го постачальника до j -го споживача.

Система обмежень отримується із наступних умов задачі:

1. всі вантажі повинні бути перевезені, тобто

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1, m} , \quad (1.2)$$

де a_i – кількість одиниць продукції, що зосереджений у i -го постачальника;

2. всі вимоги споживачів повинні бути задоволені, тобто

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1, n} , \quad (1.3)$$

де b_j – кількість одиниць продукції, яку необхідно доставити j -му споживачу.

Таким чином, *загальний формалізований опис задачі* може бути представлений виразами (1.1) – (1.3), а її короткий зміст сформульований наступним чином:

знайти мінімальне значення цільової функції за виразом (1.1) при обмеженнях на перевезення вантажів за виразом (1.2) та обмеженнях на задоволення вимог споживачів за виразом (1.3) з врахуванням типу транспортної задачі.

Так для транспортної задачі **I типу**, в якій передбачається, що сумарні запаси дорівнюють сумарним потребам всіх споживачів $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$, загальна математична модель має вигляд:

$$f(x) = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij} \right) \rightarrow \min ;$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, i = \overline{1, m}; \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, j = \overline{1, n}; \\ x_{ij} \geq 0, i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (1.4)$$

Для транспортної задачі **II типу**, в якій передбачається, що сумарні запаси можуть перевищувати сумарні потреби всіх споживачів $\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$, загальна математична модель має вигляд:

$$f(x) = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij} \right) \rightarrow \min ;$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, i = \overline{1, m}; \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, j = \overline{1, n}; \\ x_{ij} \geq 0, i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (1.5)$$

Для розв'язування задачі цього типу необхідно додатково ввести одного фіктивного споживача B_{n+1} , потреби якого становлять $b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$. При цьому вартість перевезення одиниці вантажу до фіктивного споживача дорівнює нулю, тому що вантаж насправді не перевозиться.

Для транспортної задачі **III типу**, в якій передбачається, що сумарні потреби всіх споживачів можуть перевищувати сумарні запаси $\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$, загальна математична модель має вигляд:

$$f(x) = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij} \right) \rightarrow \min ;$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, i = \overline{1, m}; \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} \leq b_j, j = \overline{1, n}; \\ x_{ij} \geq 0, i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (1.6)$$

Для розв'язування задачі цього типу необхідно додатково ввести одного фіктивного постачальника A_{m+1} , запаси якого становлять $a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i$. При цьому вартість перевезення одинці вантажу від фіктивного постачальника дорівнює нулю, тому що вантаж насправді не перевозиться.

1.3. Приклад розв'язування транспортної задачі



Деякий однорідний вантаж перевозиться від чотирьох постачальників чотирьом споживачам із певними транспортними витратами. Необхідно знайти оптимальний план перевезень, тобто маршрут, який визначає, від якого постачальника яким споживачам і в якій кількості необхідно перевозити вантаж, щоб загальні транспортні витрати були мінімальними. При цьому передбачається, що сумарні запаси вантажу дорівнюють сумарним потребам споживачів.

Вихідні дані задачі приведені у табл. 1.1.

Таблиця 1.1

Вихідні дані для вирішення транспортної задачі

№ з/п поставачальника	Об'єм вантажу у поставачальника, тис. один	№ з/п споживача				Сумарний об'єм замовлення, тис. одиниць
		1	2	3	4	
		Об'єм замовленого вантажу споживачем, тис. один				
		250	100	150	50	
1	80	6	6	1	4	Витрати на перевезення одиниці вантажу від i -го поставачальника j -му споживачу, грн
2	320	8	30	6	5	
3	100	5	4	3	30	
4	50	9	9	9	9	
Сумарний об'єм вантажу у поставачальників, тис. одиниць	550					

Розв'язування.

1. Математичне моделювання задачі

Вирішувана задача є транспортною задачею I типу, тому математична модель відповідає моделі за виразом (1.4).

1.1. Витрати кожного i -го поставачальника на перевезення вантажу споживачам складають:

$$C_{\Sigma} = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_j \right),$$

де C_{Σ} – сумарні витрати перевезення одиниці вантажу від i -го поставачальника до j -го споживача;

x_j – кількість одиниць вантажу, запланованого до перевезення j -му споживачу;

c_{ij} – витрати на перевезення одиниці вантажу від i -го поставачальника до j -го споживача.

Витрати поставачальника 1:

$$C_{\Sigma 1} = \sum_{j=1}^4 c_{1j} x_j = c_{11} x_1 + c_{12} x_2 + c_{13} x_3 + c_{14} x_4 = 6x_1 + 6x_2 + 1x_3 + 4x_4.$$

Витрати поставачальника 2:

$$C_{\Sigma 2} = \sum_{j=1}^4 c_{2j} x_j = c_{21} x_1 + c_{22} x_2 + c_{23} x_3 + c_{24} x_4 = 8x_1 + 30x_2 + 6x_3 + 5x_4.$$

Витрати поставачальника 3:

$$C_{\Sigma 3} = \sum_{j=1}^4 c_{3j} x_j = c_{31} x_1 + c_{32} x_2 + c_{33} x_3 + c_{34} x_4 = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 30x_4.$$

Витрати постачальника 4:

$$C_{\Sigma 4} = \sum_{j=1}^4 c_{4j} x_j = c_{41} x_1 + c_{42} x_2 + c_{43} x_3 + c_{44} x_4 = 9x_1 + 9x_2 + 9x_3 + 9x_4.$$

1.2. Цільова функція задачі – мінімізація сумарних витрат перевезення вантажу споживачам – визначається із попередніх розрахунків сумарних витрат кожного постачальника:

$$f(x) = (C_{\Sigma 1} + C_{\Sigma 2} + C_{\Sigma 3} + C_{\Sigma 4}) = \left(\sum_{j=1}^4 (c_{1j} x_j + c_{2j} x_j + c_{3j} x_j + c_{4j} x_j) \right) \rightarrow \min.$$

1.3. Формування функціональних обмежень здійснюється за виразами (1.2), (1.3).

1.3.1. Функціональні обмеження на перевезення всіх вантажів від постачальників за виразом (1.2) передбачає визначення об'єму перевезень:

– постачальника 1:

$$a_1 = x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 80 \text{ (тис. одиниць продукції);}$$

– постачальника 2:

$$a_2 = x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 320 \text{ (тис. одиниць продукції);}$$

– постачальника 3:

$$a_3 = x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 100 \text{ (тис. одиниць продукції);}$$

– постачальника 4:

$$a_4 = x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 50 \text{ (тис. одиниць продукції).}$$

1.3.2. Функціональні обмеження на задоволення потреб всіх споживачів за виразом (1.3) передбачає визначення об'єму постачання:

– споживачу 1:

$$b_1 = x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 250 \text{ (тис. одиниць продукції);}$$

– споживачу 2:

$$b_2 = x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 100 \text{ (тис. одиниць продукції);}$$

– споживачу 3:

$$b_3 = x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 150 \text{ (тис. одиниць продукції);}$$

– споживачу 4:

$$b_4 = x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 50 \text{ (тис. одиниць продукції).}$$

2. Автоматизоване розв’язування задачі за допомогою надбудови "Пошук рішення"

2.1. Створення форми для введення умов задачі.

Стисла методика роботи з програмою “Пошук рішення” (в оригіналі Excel Solver), що являє собою додаткову надбудову табличного процесора Microsoft Excel, приведена в рекомендованому навчально-методичному посібнику на С. 68-74. При цьому необхідно користуватись актуальною версією програми.

Форма для введення умов задачі створена в MS Excel приведена на рис. 1.1.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	ВИХІДНІ ДАНІ							
2			Споживачі				Сумарна величина потреб	
3	Постачальники	Потужності постачальників (запаси вантажу)	Споживач 1	Споживач 2	Споживач 3	Споживач 4		
4			Потужності (потреби у вантажі) споживачів					
5			250	100	150	50	550	
6	Постачальник 1	80	6	6	1	4	Витрати на перевезення одиниці вантажу від і-го постачальника до j-го споживача	
7	Постачальник 2	320	8	30	6	5		
8	Постачальник 3	100	5	4	3	30		
9	Постачальник 4	50	9	9	9	9		
10	Сумарна величина запасів	550	Витрати на перевезення одиниці вантажу від і-го постачальника до j-го споживача					

Рис. 1.1. Форма для введення вихідних даних за прикладом п. 1.3

2.2. Створення форми для виведення рішення задачі.

Форма для виведення рішення задачі створена в MS Excel приведена на рис. 1.2.

	A	B	C	D	E	F	G	H
12	МАТРИЦЯ ПЕРЕВЕЗЕНЬ (ЗМІНЮВАНІ КОМІРКИ)							
13	Постачальник 1	0	0	0	0	0	Оптимальні об'єми перевезень вантажу від і-го постачальника до j-го споживача	
14	Постачальник 2	0	0	0	0	0		
15	Постачальник 3	0	0	0	0	0		
16	Постачальник 4	0	0	0	0	0		
17	Цільова функція - вартість плану перевезень = min	0	0	0	0	0	Потужності споживачів	
18			Споживач 1	Споживач 2	Споживач 3	Споживач 4		
19								

Рис. 1.2. Форма для виведення рішення задачі

2.3. Введення залежностей із математичної моделі та призначення цільової функції.

Форма для виведення рішення задачі з введеними залежностями, визначеними в п. 1 даного розв'язку задачі, приведена на рис. 1.3.

1) В комірку "Цільова функція", що відображає вартість плану перевезень і яка в перспективі має бути мінімізована, вводиться вираз для розрахунку загальних витрат перевезень, зокрема сума добутків потреб у вантажах

відповідних споживачів на транспорті витрати на їх перевезення $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij}$,

наприклад, наступним чином:

$$=\text{СУММПРОИЗВ}(C6:F9;C13:F16)$$

2) в комірки, що відображають запаси вантажу у кожного постачальника, вводиться формула для розрахунку суми об'ємів перевезень вантажу від *i*-го постачальника до *j*-го споживача, наприклад, наступним чином:

$$\begin{aligned} &=\text{СУММ}(C13:F13) \\ &=\text{СУММ}(C14:F14) \\ &=\text{СУММ}(C15:F15) \\ &=\text{СУММ}(C16:F16) \end{aligned}$$

3) в комірки, що відображають потреби у вантажі відповідного споживача, вводиться формула для розрахунку суми об'ємів перевезень *j*-му споживачу від *i*-их постачальників, наприклад, наступним чином:

$$\begin{aligned} &=\text{СУММ}(C13:C16) \\ &=\text{СУММ}(D13:D16) \\ &=\text{СУММ}(E13:E16) \\ &=\text{СУММ}(F13:F16) \end{aligned}$$

	A	B	C	D	E	F	G	H
12	МАТРИЦЯ ПЕРЕВЕЗЕНЬ (ЗМІНЮВАНІ КОМІРКИ)							
13	Постачальник 1	=СУММ(C13:F13)	0	0	0	0	Оптимальні об'єми перевезень вантажу від і-го постачальника до j-го споживача	
14	Постачальник 2	=СУММ(C14:F14)	0	0	0	0		
15	Постачальник 3	=СУММ(C15:F15)	0	0	0	0		
16	Постачальник 4	=СУММ(C16:F16)	0	0	0	0		
17			=СУММ(C13:C16)	=СУММ(D13:D16)	=СУММ(E13:E16)	=СУММ(F13:F16)		Потужності споживачів
18	Цільва функція - вартість плану перевезень = min	=СУММПРОИЗВ(C6:F9;C13:F16)	Споживач 1	Споживач 2	Споживач 3	Споживач 4		
19								

Рис. 1.3. Форма з введеними залежностями із математичної моделі за виразом (1.4)

2.4. Запуск надбудови "Пошук рішення" та отримання розв'язку. Результати приведені на рис. 1.4.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	ВИХІДНІ ДАНІ							
2	Споживачі						Сумарна величина потреб	
3	Постачальники	Потужності постачальників (запаси вантажу)	Споживач 1	Споживач 2	Споживач 3	Споживач 4		
4			Потужності (потреби у вантажі) споживачів					
5			250	100	150	50	550	
6	Постачальник 1	80	6	6	1	4	Витрати на перевезення одиниці вантажу від і-го постачальника до j-го споживача	
7	Постачальник 2	320	8	30	6	5		
8	Постачальник 3	100	5	4	3	30		
9	Постачальник 4	50	9	9	9	9		
10	Сумарна величина запасів	550	Витрати на перевезення одиниці вантажу від і-го постачальника до j-го споживача					
11	МАТРИЦЯ ПЕРЕВЕЗЕНЬ (ЗМІНЮВАНІ КОМРКІ)							
13	Постачальник 1	80	0	0	80	0	Оптимальні об'єми перевезень вантажу від і-го постачальника до j-го споживача	
14	Постачальник 2	320	200	0	70	50		
15	Постачальник 3	100	0	100	1,4211E-14	0		
16	Постачальник 4	50	50	0	0	0		
17	Цільва функція - вартість плану перевезень = min	3200	250	100	150	50	Потужності споживачів	
18			Споживач 1	Споживач 2	Споживач 3	Споживач 4		
19								

Поиск решения

Установить целевую ячейку:

Равной: максимальному значению значению:

минимальному значению

Изменяя ячейки:

Ограничения:

Рис. 1.4. Вікно надбудови "Пошук рішення" та отримане рішення транспортної задачі

В результаті вирішення задачі отриманий наступний оптимальний план перевезень (табл. 1.2)

Таблиця 1.2

№ постачальника	Об'єми перевезень, тис. одиниць				
	Споживач 1	Споживач 2	Споживач 3	Споживач 4	Сумарно
Постачальник 1	80	0	0	80	0
Постачальник 2	320	200	0	70	50
Постачальник 3	100	0	100	0	0
Постачальник 4	50	50	0	0	0
Вартість плану перевезень, грн.	3200	250	100	150	50
		Споживач 1	Споживач 2	Споживач 3	Споживач 4

Відповідь.

Відповідно до отриманого рішення задачі (табл. 1.2) мінімальні транспортні витрати в розмірі 3200 грн. будуть отримані, якщо здійснювати наступні перевезення:

- постачальник 1 повинен перевезти 80 тис. одиниць вантажу споживачу 3;
- постачальник 2 повинен перевезти 200 тис. одиниць вантажу споживачу 1; 70 тис. одиниць вантажу споживачу 3 та 50 тис. одиниць вантажу споживачу 4;
- постачальник 3 повинен перевезти 100 тис. одиниць вантажу споживачу 2;
- постачальник 4 повинен перевезти 50 тис. одиниць вантажу споживачу 1.