## 2.3. Застосування теорії подібності для побудови математичних моделей

Мета математичного моделювання – побудова адекватної моделі. Одним із методів забезпечення адекватності є використання на етапі побудови математичної моделі теорії подібності. *Теорія подібності* – це наука, що вивчає умови подібності двох фізичних явищ. Теорія подібності забезпечує визначення критеріїв подібності по відношенню до об'єкта і моделі і методи встановлення подібності. Між моделлю і об'єктом повинно бути встановлено відношення подібності. Фундамент теорії подібності почав закладатися в середині XIX ст. Згодом теорія подібності стала широко використовуватися в архітектурі, кораблебудуванні, теплотехніці, електротехніці, теорії пружності тощо. Вчення про подібність розвивалося двома шляхами:

– аналіз рівнянь, що описують явище;

– аналіз розмірностей фізичних величин, що характеризують ці явища.

Відповідно до цього, існує два способи визначення критеріїв подібності. Перший з них полягає в зведенні рівнянь фізичного процесу до безрозмірного вигляду, тобто для його застосування потрібно мати диференціальні рівняння процесів. Другий спосіб базується на застосуванні $\pi$-теореми. Ним можна користуватися у випадку, коли відомо тільки параметри процесу, їх фізичні розмірності, але рівняння процесу невідоме.

Критерії подібності виконують подвійну роль. По-перше, з їх допомогою визначають масштаби, що зв'язують параметри моделі і оригінала. По-друге, на основі аналізу критеріальних співвідношень виявляють найбільш характерні особливості модельованих об'єктів.

### 2.3.1. Знаходження критеріїв подібності явищ за наявності математичної моделі

Під подібністю розуміють взаємооднозначну відповідність між моделлю і об'єктом, при якій функції або правила переходу від параметрів моделі до параметрів об'єкта відомі. Два об'єкти (процеси, явища), у яких подібні характерні величини, називаються *подібними*, вони відрізняються лише масштабами основних розмірних величин, причому коефіцієнти подібності по кожній з цих величин, взагалі кажучи, різні. Поняття подібності допускає широке трактування. Найбільш проста і зрозуміла – це геометрична подібність. При подібності фізичних процесів повинні бути подібні всі основні фізичні величини, що характеризують ці процеси у відповідних просторово-часових точках, що рівносильно збереженню всіх числових значень величин і заміні одиниць виміру основних розмірних величин. Наведемо кілька прикладів фізичної подібності.

1. Геометрична подібність виражається рівністю всіх відповідних кутів і пропорційністю всіх відповідних лінійних розмірів:

$$\frac{l_1'}{l_1} = \frac{l_2'}{l_2} = ... = \frac{l_n'}{l_n} = k_l = const.$$

2. Часова подібність виражається пропорційністю інтервалів між відповідними моментами часу (наприклад, пропорційними є

проміжки часу, за які дві відповідні точки об'єкта й моделі проходять геометрично схожі шляхи):

$$\frac{t_1^{'}}{t_1} = \frac{t_2^{'}}{t_2} = ... = \frac{t_n^{'}}{t_n} = k_t = const.$$

3. Подібність температур виражається пропорційністю температур у відповідних точках і у відповідні моменти часу:

$$\frac{u_1^{'}}{u_1} = \frac{u_2^{'}}{u_2} = ... = \frac{u_n^{'}}{u_n} = k_u = const.$$

4. Подібність швидкостей виражається відповідністю напрямів в пропорційністю величин швидкостей (швидкості відповідних точок у відповідні моменти часу пропорційні):

$$\frac{v_1^{'}}{v_1} = \frac{v_2^{'}}{v_2} = ... = \frac{v_n^{'}}{v_n} = k_v = const.$$

Пропорційність векторних величин визначається відповідністю напрямків і пропорційністю їх абсолютних величин або пропорційністю координат відповідних векторів.

Цей список можна продовжувати для інших фізичних величин. У цих формулах $k$ – це коефіцієнт пропорційності, коефіцієнт подібності, або стала подібності. Позначення без штриха стосуються першого фізичного явища (оригіналу), з штрихом – другого фізичного явища, або моделі. Нижні індекси 1, 2, … вказують на відповідні точки простору і моменти часу.

Для подібності фізичних явищ необхідною і достатньою умовою є незмінність (інваріантність) системи визначальних рівнянь математичної моделі при подібних перетвореннях змінних (заміні всіх змінних пропорційними їм величинами), тобто система визначальних рівнянь

$$\begin{cases} f(x_1, x_{2,}..., x_n) = 0, \\ f(k_1x_1, k_2x_2, ..., k_nx_n) = 0 \end{cases}$$

має бути сумісною, де $x_1$, $x_2$, …, $x_n$ – параметри моделі. Ця система сумісна, якщо

$$f(k_1x_1, k_2x_2, \ldots, k_nx_n) = \varphi(k_1, k_2, \ldots, k_n)f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Іншими словами, подібні перетворення аргументів приводять до подібних перетворень усієї функції. Такі функції називаються *гомогенними.* Відомо, що гомогенними є тільки степеневі функції.

Розглянемо подібне перетворення змінних у рівнянні теплопровідності. Нехай процес поширення тепла в стержні описується диференціальним рівнянням

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{2.3.1}$$

де $u$ – температура, $t$ – час, $x$ – координата точки.

Виконаємо перетворення подібності $u = k_u u'$, $t = k_t t'$, $x = k_x x'$, $a = k_a a'$. Підставивши одержані значення змінних у рівняння теплопровідності, матимемо

$$\frac{k_u \partial u^{'}}{k_t \partial t'} = k_a^2 (a^{'})^2 \frac{k_u \partial^2 u^{'}}{k_x^2 \partial x'^2}. \tag{2.3.2}$$

Для того, щоб рівняння (2.3.2) збігалося з рівнянням (2.3.1), необхідно, щоб коефіцієнти пропорційності (подібності) задовольняли умову

$$\frac{k_u}{k_t} = \frac{k_a^2 k_u}{k_x^2} \Rightarrow \frac{k_a^2 k_t}{k_x^2} = 1.$$

Якщо ввести позначення $k_{\frac{a^2 t}{x^2}} = \frac{k_a^2 k_t}{k_x^2}$, то матимемо $k_{\frac{a^2 t}{x^2}}$=1. Це означає, що масштаб безрозмірного комплексу $\dfrac{a^2 t}{x^2}$ має значення, що дорівнює одиниці, тобто для подібних процесів цей комплекс має залишатися незмінним у відповідних часово-просторових точках. Зауважимо, що тут має місце незмінність, а не сталість, оскільки одержані комплекси однакові тільки для відповідних точок і для відповідних моментів часу двох явищ. Для різних точок і різних моментів часу одержані комплекси можуть бути різними. Безрозмірні комплекси, незмінність яких є кількісною ознакою подібності фізичних явищ, називаються *критеріями подібності.*

Безрозмірний комплекс $\dfrac{a^2 t}{x^2}$ є критерієм подібності явищ теплопровідності. Як правило, цей комплекс замінюють оберненою величиною і називають критерієм подібності Фур'є. Для нього прийнято таке позначення: $F_o = \frac{x^2}{a^2 t}$. Рівність критеріїв Фур'є у відповідних точках теплових потоків – це необхідна умова подібності нестаціонарного процесу теплообміну. Можна переконатися, що ця умова і достатня.

На цьому прикладі ми проілюстрували умови подібності двох явищ теплопровідності – це незмінність критеріїв подібності. Тобто, якщо розрахувати $u(x, t)$ для деякого явища теплопровідності, то за перетворенням подібності можна знайти $u'(x', t')$ для подібного явища.

Зауважимо, що можливий формальний більш простий спосіб подібного перетворення диференціальних рівнянь: критерії подібності знаходять, якщо поділити одну частину диференціального рівняння на іншу і відкинути знаки математичних операторів.

Дійсно, критерій Фур'є можна розглядати як ділення $\frac{\partial u}{\partial t}$ на $a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ після відкидання знаків диференціала, оскільки диференціал будь-якої величини має ту ж розмірність, що й сама величина. Враховуючи, що $\dfrac{\partial u}{\partial t} \sim \dfrac{u}{t}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sim \dfrac{u}{x^2}$, одержимо

$$\frac{\frac{u}{t}}{a^2 \frac{u}{x^2}} = \frac{x^2}{a^2 t} = F_o.$$

Тут ми скористалися правилом заміщення.

**Правило заміщення.** Якщо $\frac{u_1^{'}}{u_1} = \frac{u_2^{'}}{u_2} = M_u = const$, то $\frac{du^{'}}{du} = M_u$.

Для того, щоб переконатися в справедливості цього правила, скористаємося властивістю пропорції

$$\frac{\Delta u^{'}}{\Delta u} = \frac{u_2^{'} - u_1^{'}}{u_2 - u_1} = \frac{u_1^{'}}{u_1} = M_u.$$

Тепер, якщо перейти до границі при $\Delta u \to 0$, то одержимо $\lim\limits_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta u^{'}}{\Delta u} = M_u$, тобто $\frac{du^{'}}{du} = M_u$. Звідси маємо правило: вивчаючи подібність, замість диференціала деякої величини можна розглядати саму величину.

За таким правилом можна одержати інші критерії подібності. Наприклад, для критерію Ньютона з рівняння $F = m\dfrac{dv}{dt}$ маємо

$$Ne = \frac{F}{m\frac{v}{t}} = \frac{Ft}{mv}.$$

Основні положення теорії подібності зазвичай систематизуються у вигляді теорем подібності. Розглядаючи приклад рівняння теплопровідності ми зрозуміли, що для подібних явищ можна визначити незмінні безрозмірні комплекси, які є комбінацією фізичних величин, що описують ці явища. Цей факт можна оформити у вигляді теореми.

**Перша теорема подібності.** *Явища, подібні в тому чи іншому розумінні, мають певні комбінації параметрів (вони називаються критеріями подібності), які чисельно однакові у відповідних просторово-часових точках.*

Перша теорема подібності стверджує, що для подібних явищ (об'єктів, процесів) існують однакові безрозмірні степеневі комплекси фізичних величин, які характеризують ці явища. Ця теорема формулює необхідні умови існування подібності, але вона не указує способу реалізації подібності при побудові моделей. Перша теорема подібності називається також теоремою Ньютона або теоремою Ньютона–Бертрана.

**Друга теорема подібності.** В основному формулюванні ця теорема має такий вигляд: *будь-яке повне рівняння фізичного процесу, яке зв'язує $n$ фізичних величин, що характеризують процес, може бути зображеним функціональною залежністю між критеріями подібності, які формулюються з цих величин. Причому, якщо для вимірювання фізичних величин використовується $k$ незалежних розмірностей, то критеріїв подібності має бути $n - k$.*

Ця теорема часто називається $\pi$-теоремою, оскільки критерії подібності, які характеризують подібні процеси, найчастіше позначають грецькою літерою $\pi$. Зауважимо, що зміст незалежних розмірностей буде пояснено в наступному пункті.

Проілюструємо другу теорему на подібності трикутників. Трикутник однозначно визначається за трьома сторонами $a$, $b$, $c$, тому маємо $n = 3$. Оскільки вони мають однакову розмірність, то $k = 1$. Тому подібність трикутників повинна визначатися двома $(n - k = 2)$ критеріями подібності. За критерії подібності можна вибрати відношення $b/a$, $c/a$. У подібних трикутників ці відношення будуть однаковими.

**Третя теорема подібності.** *Необхідними й достатніми умовами подібності двох явищ є пропорційність відповідних величин, що входять в умови однозначності математичних моделей цих явищ, і рівність критеріїв подібності цих явищ.*

Третя теорема подібності називається ще теоремою Кірпічова–Гухмана. До умов однозначності, що згадуються в теоремі, належать, наприклад, початковий стан системи (початкові умови), умови на межах системи (межові або крайові).

### 2.3.2. Знаходження критеріїв подібності явища за відсутності його математичної моделі

Якщо об'єкт, що вивчається, – складний, то часто важко описати його за допомогою математичної моделі, а відсутність математичної моделі робить неможливим установлення масштабів і критеріїв подібності за допомогою відповідних визначальних рівнянь оригіналу й моделі. У багатьох випадках це вдається зробити, використовуючи аналіз розмірностей усіх фізичних величин, що визначають фізичне явище, а також $\pi$-теорему, яка вказує метод установлення критеріїв подібності, коли математичні описання оригіналу й моделі невідомі.

Аналіз розмірностей і $\pi$-теорема Бекінгема дозволяють створювати розрахункові математичні моделі на основі даних, які отримуються з натурних експериментів.

**Розмірності.** Вимірювання – це порівняння вимірюваної величини з деяким її значенням, що прийнято за одиницю виміру. Нехай вимірюється деяка величина $V$. Будемо позначати через $[V]$ одиницю вимірювання величини $V$. Наприклад, для сили електричного струму – це ампер. Тоді виміряти $V$ означає знайти відношення величини $V$ до одиниці виміру $[V]$, тобто

$$v = \frac{V}{[V]}.$$

Число $v$ називається числовим значенням вимірюваної величини.

Фізичні величини можуть бути пов'язані між собою певними співвідношеннями. Тому якщо вибрати одиниці виміру деяких з них, то через ці одиниці можна визначити одиниці виміру всіх інших фізичних величин. Через це фізичні величини поділяються на *основні* та *похідні*. Що стосується механіки, то в системі СІ є три основні одиниці виміру: одиниця виміру довжини – метр (м), одиниця виміру маси – кілограм (кг), одиниця виміру часу – секунда (с). В загальному випадку [довжина] $= L$, [маса]$=M$, [час]$=T$, де $L$, $M$, $T$ – масштаби довжини, маси і часу.

Інші одиниці вимірювання є похідними. Наприклад, для сили $[F]=MLT^{-2}$, для кінетичної енергії $[E] = ML^2T^{-2}$, для частоти періодичного процесу $[\omega]=T^{-1}$. В загальному випадку $[A]=M^m \cdot L^l \cdot T^t$, де $m$, $l$, $t$ – показники, які можуть бути додатними, від'ємними, цілими, дробовими.

Покажемо, що похідні одиниці вимірювання завжди є степеневими добутками основних одиниць виміру. Припустимо, що між фізичною величиною $X$, для якої знаходиться похідна одиниця виміру $[X]$, і фізичними величинами $Y_1$, $Y_2$, $\ldots$, для яких установлені основні одиниці виміру $[Y_1]$, $[Y_2]$, $\ldots$, існує залежність $X=F(Y_1,\ Y_2,\ \ldots)$. Але, як ми уже знаємо, що залежність $F$ має бути гомогенною, тобто $X=F(Y_1,\ Y_2,\ \ldots) = a\ {Y_1}^{\alpha 1}\ {Y_2}^{\alpha 2}$..., тим самим $[X]= [Y_1]^{\alpha 1}\ [Y_2]^{\alpha 2}$... .

Розмірності у своїй сукупності можуть бути *залежними* та *незалежними*. Незалежність розмірностей у даній сукупності означає, що будь-яка розмірність не може бути представлена через розмірності інших величин, що входять у цю групу. Наприклад, величини $A$, $B$, $C$ мають незалежні розмірності, якщо $[A] \neq [B]^n[C]^m$ при будь-яких $m$, $n$. Так розмірності довжини $L$, швидкості $LT^{-1}$, енергії $ML^2T^{-2}$– незалежні, а розмірності довжини $L$, швидкості $LT^{-1}$, прискорення $LT^{-2}$ – залежні.

Щоб визначити кількість величин, які мають незалежні розмірності, потрібно виразити розмірності цих величин через розмірності основних і скласти матрицю з показників степеня. Ранг цієї матриці дає кількість незалежних розмірностей. Наприклад, для сили, довжини і часу маємо $[F]=M^1L^1T^{-2}$, $[l]=M^0L^1T^0$, $[t]=M^0L^0T^1$, при цьому матриця з показників матиме вигляд

| | $F$ | $l$ | $T$ |
|---|---|---|---|
| $M$ (кг) | 1 | 0 | 0 |
| $L$ (м) | 1 | 1 | 0 |
| $T$ (с) | -2 | 0 | 1 |

Ранг цієї матриці дорівнює трьом, тому величини $F$, $l$, $t$ мають незалежні розмірності.

Для того, щоб знаходити критерії подібності та будувати математичні моделі фізичних явищ, дамо строге формулювання $\pi$-теореми.

**$\pi$-теорема.** *Нехай математичним описанням (розрахунковою моделлю) деякої фізичної закономірності є функціональна залежність*

$$F(x_1, x_2, ...x_k, x_{k+1}, ..., x_n) = 0 \qquad (2.3.3)$$

*між $n$ визначальними розмірними величинами $x_1, x_2, \dots, x_n$, серед яких $k$ величин $x_1, x_2, \dots, x_k$, мають незалежні розмірності. Тоді залежність* (2.3.3) *може бути перетворена на співвідношення*

$$F(1, 1, \dots, 1, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m) = \varphi(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m) = 0 \qquad (2.3.4)$$

*між $m = n - k$ незалежними безрозмірними степеневими комплексами фізичних величин вигляду*

$$\pi_i = \frac{x_{k+i}}{x_1^{\alpha_{1i}} x_2^{\alpha_{2i}} \cdot ... \cdot x_k^{\alpha_{ki}}}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \qquad (2.3.5)$$

*які називаються критеріями подібності. Тут $x_{k+i}$, $i$ = 1, 2, $\dots$, $m$ – величини, що мають залежні розмірності, а показники степенів $\alpha_{1i,}\alpha_{2i,...,}\alpha_{ki}$ ті ж самі, що й у відповідних формулах розмірностей для розмірно залежних величин.*

**Доведення.** Якщо серед визначальних фізичних величин $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$ рівняння (2.3.3) незалежні розмірності мають перші $k$ величин

$$x_1,\ x_2,\ ...,\ x_k,$$

а інші $m$ величин

$$x_{k+1},\ x_{k+2},\ ...,\ x_{k+m}$$

мають залежні розмірності, причому $k + m = n$, то розмірності цих величин визначаються співвідношеннями

$$\begin{aligned}
&[x_{k+1}] = [x_1]^{\alpha_{11}} \cdot [x_2]^{\alpha_{21}} \cdot ... \cdot [x_k]^{\alpha_{k1}},\\
&[x_{k+2}] = [x_1]^{\alpha_{12}} \cdot [x_2]^{\alpha_{22}} \cdot ... \cdot [x_k]^{\alpha_{k2}},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&[x_{k+m}] = [x_1]^{\alpha_{1m}} \cdot [x_2]^{\alpha_{2m}} \cdot ... \cdot [x_k]^{\alpha_{km}}.
\end{aligned} \tag{2.3.6}$$

Показники легко можна знайти з порівняння розмірностей у правій і лівій частинах написаної рівності. На основі цих формул можна скласти $m$ безрозмірних степеневих комплексів

$$\left.\begin{aligned}
&\pi_1 = \frac{x_{k+1}}{x_1^{\alpha_{11}} \cdot x_2^{\alpha_{21}} \cdot ... \cdot x_k^{\alpha_{k1}}},\\
&\pi_2 = \frac{x_{k+2}}{x_1^{\alpha_{12}} \cdot x_2^{\alpha_{22}} \cdot ... \cdot x_k^{\alpha_{k2}}},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\pi_m = \frac{x_{k+m}}{x_1^{\alpha_{1m}} \cdot x_2^{\alpha_{2m}} \cdot ... \cdot x_k^{\alpha_{km}}}.
\end{aligned}\right\} \tag{2.3.7}$$

Ці комплекси називають *критеріями подібності* $\pi_1, \pi_2, ..., \pi_m$. Доведемо тепер, що функціональна залежність (2.3.3) може бути зведена до критеріальної форми (2.3.4). Спочатку проведемо обезрозмірювання співвідношення (2.3.3), базуючись на тому, що будь-яка розмірна величина $x_i$, $i$=1, 2,. . . , $k$ може бути подана у вигляді $x_{i=}\beta_i\ [x_i]$, де безрозмірний коефіцієнт $\beta_i$ – числове значення величини $x_i$ в обраній системі одиниць, а $[x_i]$ – розмірність величини $x_i$ (десятки кілограм, сотні метрів і т.д.).

Числові значення безрозмірних множників для розмірно залежних величин $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_{k+m}$ обчислюються за формулами:

$$\beta_{k+1} = \frac{x_{k+1}}{[x_{k+1}]} = \frac{x_{k+1}}{[x_1]^{\alpha_{11}} \cdot [x_2]^{\alpha_{21}} \cdot ... \cdot [x_k]^{\alpha_{k1}}}, \dots,$$

$$\beta_n = \frac{x_n}{[x_n]} = \frac{x_n}{[x_1]^{\alpha_{1m}} \cdot [x_2]^{\alpha_{2m}} \cdot ... \cdot [x_k]^{\alpha_{km}}},$$

що випливає з формул (2.3.6). Співвідношення (2.3.3) можна трактувати як зв'язок між числовими значеннями величин $x_1$, $x_2$,

$\ldots, x_n$ (тобто між безрозмірними величинами $\beta_1$, $\beta_{2,\ldots,}$ $\beta_n$). Це означає, що співвідношення (2.3.3) можна переписати у вигляді

$$F(\beta_1, \beta_2, ...\beta_k, \beta_{k+1}, ..., \beta_n) = 0,$$

або

$$F\Big(\frac{x_1}{[x_1]}, \ldots, \frac{x_k}{[x_k]}, \frac{x_{k+1}}{[x_1]^{\alpha_{11}} \cdot [x_2]^{\alpha_{21}} \cdot \ldots \cdot [x_k]^{\alpha_{k1}}}, \ldots$$
$$\frac{x_n}{[x_1]^{\alpha_{1m}} \cdot [x_2]^{\alpha_{2m}} \cdot \ldots \cdot [x_k]^{\alpha_{km}}}\Big) = 0.$$

Якщо тепер для розмірно незалежних величин вибрати одиниці вимірювання так, щоб $x_1 = [x_1], \ldots, x_k = [x_k]$, то з останнього співвідношення дістанемо (2.3.4). ■

Наприклад, якщо розглядуване явище описується співвідношенням

$$F(x_1, x_2, ...x_5) = 0,$$

що зв'язує п'ять фізичних величин, і ці величин виражаються через три незалежні одиниці вимірювання, то кількість критеріїв $m = n - k = 5 - 3 = 2$ і функціональна залежність може бути зображена у вигляді $\varphi(\pi_1,\ \pi_2){=}0$. Критерії подібності стають новими змінними, їх називають *узагальненими змінними*. Зауважимо, що критерії подібності залежатимуть від вибору розмірно незалежних величин.

Якщо $k = n - 1$, то для співвідношення (2.3.3), як випливає з (2.3.7), одержується простий вираз через відомі параметри, а саме

$$x_n = \pi_1 x_1^{\alpha_{11}} \cdot x_2^{\alpha_{21}} \cdot \ldots \cdot x_{n-1}^{\alpha_{n-1,1}},$$

де $\pi_1$ константа, яку можна визначити за експериментальними даними.

Зауважимо, що безрозмірні параметри, які характеризують об'єкт, при варіації одиниць вимірювання не змінюються і тому в $\pi$-теоремі не фігурують.

Конкретні вирази для критеріїв подібності (2.3.7) визначаються тим, які з визначальних величин вибираються за такі, що мають незалежні розмірності. Оскільки це може бути зроблене порізному, то форма критеріїв подібності може бути різною.

Будь-яка модель містить значну кількість параметрів і в ході моделювання необхідно вияснити вплив кожного параметра на характер розв'язку. Експериментальне встановлення залежності (2.3.3) за великих $n$ потребує великої кількості даних. Так, для табулювання функції однієї змінної необхідно два ряди даних, функції двох змінних – таблиця, при трьох аргументах – десятки, сотні таблиць і т.д. Обробка цих даних з метою отримання аналітичного виразу функції $F$ складна. Тому при дослідженні необхідно зменшити кількість величин, що впливають на процес (входять у рівняння). Одним з ефективних способів зменшення кількості параметрів є перехід до безрозмірних величин.

Той факт, що за допомогою $\pi$-теореми залежність (2.3.3) між $n$ розмірними величинами $x_1, x_2, \ldots, x_n$ можна звести до залежності між $m$ безрозмірними величинами $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m$, $m < n$, дозволяє спростити (часто дуже суттєво) знаходження математичного описання різних об'єктів, тобто здійснити розрахункове моделювання. Запис рівнянь у безрозмірній формі полегшує дослідження і надає результатам більшої універсальності. При цьому, як правило, вдається вияснити ті безрозмірні змінні і змінні параметри, від яких суттєво залежить розв'язок задачі. Експериментальне встановлення критеріальної залежності $\varphi(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m) = 0$ за малих $m$ може бути зовсім простим.
Розглянемо деякі простіші приклади застосування $\pi$-теореми.

**Приклад 2.3.1.** Нехай нам невідомий закон механіки, що визначає шлях вільного падіння тіла без опору середовища, але з дослідів ми знаємо, що пройдений шлях $S$ залежить від часу $t$ і прискорення вільного падіння $g$ та в загальному випадку $S = S(t, g)$. Виберемо систему основних одиниць вимірювання. В системі СІ довжина $S$ вимірюється в метрах, час – у секундах, прискорення – в м/с$^2$. Маємо дві незалежні розмірності та три величини, тому матимемо один критерій подібності $(3 - 2 = 1)$.

Припустимо, що незалежні розмірності мають величини $g$ і $t$. Подамо розмірність величини $S$ через розмірності величин $g$ і $t$, тобто $[S]$=$[g]^a$.$[t]^b$. Запишемо це співвідношення через розмірності м=(м/с$^2$)$^a$с$^b$. Найменування розмірностей у двох частинах рівняння мають бути однаковими. Це означає, що $a$=1, $b$=2. Тому єдиним критерієм подібності є безрозмірний комплекс

$$\pi_1 = \frac{S}{gt^2} = const.$$

Отже, $S = Cgt^2$. З експериментів можна визначити величину $C$. Відомо, що $S = gt^2/2$. ▲

**Приклад 2.3.2.** Розглянемо коливання математичного маятника без затухання (див. п. 5.4). Параметрами процесу можна вважати довжину $l$ маятника, масу $m$ тіла, прискорення $g$ вільного тяжіння, частоту коливань $\omega$ і найбільший кут $\alpha$ відхилення маятника від вертикалі, причому $[l]{=}L$, $[m]{=}M$, $[g]{=}LT^{-2}$ , $[\omega]{=}T^{-1}$, $[\alpha]{=}1$.

Функціональний зв'язок частоти $\omega$ коливань визначатимемо за формулою $\omega = \omega(l,\ g,\ m,\ \alpha)$, яка містить чотири розмірні одиниці, три з яких мають незалежні розмірності, та одну безрозмірну одиницю. Це означає, що внаслідок $\pi$-теореми маємо один критерій подібності $(n - k = 4 - 3 = 1)$.

Оскільки для розмірностей справедливе співвідношення $[\omega] = [l]^{-\frac{1}{2}}[g]^{\frac{1}{2}}[m]^0[\varphi]^0$, то $l^{\frac{1}{2}}g^{-\frac{1}{2}}\omega$ – величина безрозмірна і для подібних процесів однакова, тобто залежить тільки від $\alpha$. Звідси одержуємо формулу для частоти коливань

$$l^{\frac{1}{2}}g^{-\frac{1}{2}}\omega = C_\alpha \Rightarrow \omega = C_\alpha\sqrt{\frac{g}{l}},$$

де $C_\alpha$ – безрозмірний коефіцієнт, що залежить тільки від $\alpha$. Вид залежності $C_\alpha$ з міркувань розмірності одержати уже не можна, але значення $C_\alpha$ можна визначити експериментально або скористатися теоретичною моделлю, яка представить залежність $C_\alpha$ у вигляді еліптичного інтегралу першого роду.

Але навіть при невідомому значенні $C_\alpha$ з формули для $\omega$ можна побачити, що частота не залежить від маси $m$, і з'ясувати характер залежності частоти від довжини $l$ маятника. Крім цього, знаючи частоту для одного маятника, її можна перерахувати для іншого. А саме, якщо відоме значення частоти $\omega$ для деякого маятника довжиною $l$, то при фіксованих значеннях $g$, $\alpha$ для другого маятника довжиною $l_1$ частота коливань буде $\omega_1 = \omega\sqrt{\frac{l}{l_1}}$.

Аналогічно можна одержати формулу й для періоду коливань. ▲

**Приклад 2.3.3.** Розглянемо явище протікання електричного струму $I$ через послідовно з'єднані опір $R$ і ємність $C$ після підключення сталої напруги $U$ = const. Це явище в кожний момент часу характеризується значеннями п'яти фізичних величин $I$, $U$, $R$, $C$, $t$.

Перехідний процес, що відбувається в $RC$-контурі, описується функціональною залежністю

$$F(I, U, R, C, t) = 0.$$

Перетворимо цю залежність між незалежними безрозмірними степеневими комплексами фізичних величин (критеріями подібності). Визначимо спочатку кількість критеріїв подібності. Для цього на початку в системі одиниць СІ подамо розмірності п'яти величин через основні розмірності $L$, $M$, $T$, $I$ : $[I]=I$, $[U]=L^2M^1T^{-3}I^{-1}$, $[R] = L^2M^1T^{-3}I^{-2}$, $[C] = L^{-2}M^{-1}T^4I^2$, $[t]=T$.

Складемо матрицю з показників степені

| | $I$ | $U$ | $R$ | $C$ | $t$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $L$ (м) | 0 | 2 | 2 | -2 | 0 |
| $M$ (кг) | 0 | 1 | 1 | -1 | 0 |
| $T$ (с) | 0 | -3 | -3 | 4 | 1 |
| $I$ (а) | 1 | -1 | -2 | 2 | 0 |

Ранг цієї матриці дорівнює трьом, тобто три з п'яти фізичних величин мають незалежні розмірності. А це означає, що маємо два критерії подібності ($n - k = 5 - 3 = 2$). Будемо вважати, що величини $I$, $R$, $C$ мають незалежні розмірності. Оскільки $[U]=[R][I]$, $[t]=[R][C]$, то критерії подібності мають вигляд

$$\pi_1 = \frac{U}{RI}, \quad \pi_2 = \frac{t}{RC}.$$

Отже, згідно з аналізом розмірностей і $\pi$-теоремою, залежність $F(I,\ U,\ R,\ C,\ t)=0$ може бути зображена у вигляді залежності між двома безрозмірними змінними

$$\pi_1 = \psi(\pi_2),$$

де функція $\psi$ залишається невизначеною (її можна визначити на основі експериментальних даних).

У даному випадку можна побудувати математичну модель $RC$-контуру (див. п. 6.1.12) й розв'язати диференціальне рівняння. Аналізуючи розв'язок, можна одержати, що $\pi_1=\exp(\pi_2)$. ▲

**Приклад 2.3.4.** Прикладом відносно недавнього застосування моделювання на основі теорії подібності є визначення засекреченої енергії першого ядерного вибуху на основі відкритої демонстрації кінофільму про ядерний вибух.

Вважатимемо, що ядерний вибух точковий, а виникаюча ударна хвиля сферична. Тоді при таких спрощеннях радіус $R$ вибухової хвилі є функцією енергії $E$ ядерного вибуху, часу $t$ та початкової густини $\rho$ оточуючого повітря.

Відповідна таблиця розмірностей цих чотирьох визначальних величин має вигляд

| | $E$ | $R$ | $t$ | $\rho$ |
|---|---|---|---|---|
| $M$ (кг) | 1 | 0 | 0 | 1 |
| $L$ (м) | 2 | 1 | 0 | -3 |
| $T$ (с) | -2 | 0 | 1 | 0 |

,

оскільки $[E]=$ кг. м$^2$. с$^{-2}$, $[R]=$м, $[t]=$с, $[\rho]=$кг.м$^{-3}$.

Ця матриця має ранг, що дорівнює 3. Це означає, що з усіх визначальних величин три величини мають незалежні розмірності, а отже, маємо один критерій подібності. Вважатимемо, що величини $E$, $t$, $\rho$ мають незалежні розмірності. Подамо тепер розмірність величини $R$ через інші розмірності

$$[R] = [E]^{\frac{1}{5}}[t]^{\frac{2}{5}}[\rho]^{-\frac{1}{5}}.$$

Тому єдиним критерієм подібності є безрозмірний комплекс

$$\pi_1 = \frac{R}{E^{\frac{1}{5}}t^{\frac{2}{5}}\rho^{-\frac{1}{5}}}.$$

Відповідно до цього знаходимо, що радіус $R = CE^{\frac{1}{5}}t^{\frac{2}{5}}\rho^{-\frac{1}{5}}$, де $C$ – деяка константа, яка може бути знайдена за одиничним окремим експериментом або теоретичними розрахунками. Встановлено, що $C$=1.

Знайдена формула дозволяє знайти енергію ядерного вибуху, якщо відомий радіус вибухової хвилі в деякий момент часу $t$. Ці дані можна взяти з кінофільму про ядерний вибух. ▲

Наведемо ще приклад проектування технічних систем з використанням подібного фізичного моделювання на прикладі резервуара для води. Подібне фізичне моделювання – це заміна матеріального об'єкта, процесу чи явища фізично подібною моделлю.

**Приклад 2.3.5.** Нехай досліджується (проектується) установка для витікання рідини з резервуара великих розмірів. При цьому основним параметром є вага рідини, що витікає через квадратний отвір у резервуарі. Очевидно, що такі дослідження потрібно проводити на модельному резервуарі зменшених розмірів. Тоді задача зводиться до визначення на моделі параметрів, які необхідні для проектування оригіналу.

Опишемо параметри, які визначають процес витікання рідини:
$q$ – вага рідини, що витікає в одиницю часу, $[q]=LMT^{-3}$;
$\rho$ – густина рідини, $[\rho]=L^{-3}M$;
$h$ – висота рідини в резервуарі, $[h]=L$;
$B$ – розмір отвору $[B]=L$;
$g$ – прискорення $[g]=LT^{-2}$.

Отже, загальна кількість змінних дорівнює 5, з них 2 величини $q$, $B$ є параметрами з залежними розмірностями, а 3 ($\rho$, $g$, $h$) – з незалежними розмірностями. В результаті порівняння розмірностей одержуємо

$$[q]=[\rho][g]^{\frac{3}{2}}[h]^{\frac{5}{2}}, \quad [B]=[h].$$

Критерії подібності мають вигляд

$$\pi_1=\frac{q}{\rho g^{\frac{3}{2}}h^{\frac{5}{2}}}, \quad \pi_1=\frac{B}{h}.$$

Опишемо методику й алгоритм проектування установки. Критерії подібності однаковий для моделі й оригіналу, тому

$$\frac{\pi_1^o}{\pi_1^m}=\frac{q_o g^{\frac{3}{2}}}{q_m\frac{\rho_o}{\rho_m}g^{\frac{3}{2}}\frac{h_o^{\frac{5}{2}}}{h_m^{\frac{5}{2}}}}=1, \quad \frac{\pi_2^o}{\pi_2^m}=\frac{B_o}{B_m\frac{h_o}{h_m}}=1. \qquad (2.3.8)$$

Тут індексом $o$ позначені параметри оригіналу, а індексом $m$ – параметри моделі. Введемо тепер позначення для масштабів

$$m_q = \frac{q_o}{q_m}, \quad m_\rho = \frac{\rho_o}{\rho_m}, \quad m_B = \frac{B_o}{B_m}, \quad m_h = \frac{h_o}{h_m}.$$

Тоді (2.3.8) перепишемо у вигляді

$$\frac{m_q}{m_\rho m_h^{\frac{5}{2}}} = 1, \qquad m_B = m_h.$$

Аналіз масштабних співвідношень дозволяє реалізувати задачу проектування за умови, що експериментальна установка (модель) побудована так:

1. Вибравши масштаб $m_h$, будуємо модельний резервуар зменшених розмірів з отвором розміру $B_m$ і достатньою висотою $H_m$ так, щоб $H_m > h_m = h_o/m_h$, де $h_o$ – задана величина.

2. Вибираємо для моделі рідину з відповідною густиною і визначаємо $m_\rho = \rho_o/\rho_m$, тоді $m_q = m_\rho m_h^{\frac{5}{2}}$.

3. Проводимо експерименти й визначаємо $q_m$. Знання $q_m$ дозволить розрахувати вагу рідини в оригінальному резервуарі за формулою $q_o = q_m \cdot m_q$. ▲