

Лекція 3. Процес побудови математичної моделі

Процес математичного моделювання можна розділити на низку характерних етапів, зокрема:

1. Аналіз предметної області.

Математичне моделювання починають з аналізу предметної області. На цьому етапі визначають об'єкт дослідження, виділяють усі компоненти середовища, у якому перебуває об'єкт, аналізують вплив середовища й можливі стани об'єкта.

2. Побудова моделі предметної області.

На наступному етапі формулюють модель предметної області. Вже в цей момент об'єкт дослідження замінюють його образом – моделлю. У моделі описують, які властивості об'єкта важливі з погляду дослідника. Якщо будують структурну математичну модель, то в моделі предметної області описують структурні компоненти об'єкта, їх взаємозв'язки, типи вхідних впливів і вихідні сигнали.

3. Математичне формулювання задачі.

На основі аналізу предметної області будують математичну модель. Математична модель існує у формі записів із використанням прийнятих математичних символів і відображає властивості об'єкта – закони, яким він підпорядковується, зв'язки, які властиві його складовим частинам тощо.

4. Вибір методу досліджень. Теоретичне дослідження.

Для дослідження записаної математичної моделі дослідник підбирає відповідний математичний апарат. Використовуючи вибрані теоретичні методи, можна отримати нові знання про об'єкт.

5. Математична модель. Числовий експеримент.

Математичну модель можна будувати як на основі створеного формального опису процесу, так і прямо використовуючи модель предметної області. Математичні моделі, призначені для безпосереднього використання, називають імітаційними. Математичну модель треба адаптувати для застосування числових методів. Наприклад, для неперервної моделі будують дискретний аналог.

6. Тестування моделі.

Як для математичної, так і для кібернетичної моделі треба визначити ступінь адекватності, тобто відповідність моделі до модельованого об'єкта. Під адекватністю розуміють, з одного боку, правильний якісний опис реального об'єкта. Наприклад, стійкість динаміки моделі має підтверджуватися стійкістю оригіналу, і навпаки. З іншого боку, у випадках, коли це можливо, модель повинна правильно описувати об'єкт із кількісного погляду за заданими характеристиками з достатньою точністю.

Не для всіх моделей розумно вимагати кількісної адекватності. Наприклад, для соціологічних чи деяких економічних моделей важливим є адекватний опис принципів поведінки соціальних груп або економічних агентів,

відповідно, а не їх кількісні характеристики.

Крім того, для моделі мають виконуватися закони предметної області, про які відомо заздалегідь. Це можуть бути феноменологічні або напівемпіричні закони (закон Ньютона у фізиці) або результати, отримані з використанням інших методів дослідження.

7. Аналіз та інтерпретація результатів.

На підставі результатів теоретичного дослідження й числових експериментів у термінах предметної області треба сформулювати певні закономірності. Це можуть бути, наприклад, прогнози на майбутнє, умови ефективності тих чи інших управлінських рішень, визначення найкращих (оптимальних) параметрів функціонування об'єкта (системи) тощо. Особливо цінним є неочікуваний результат, який пощастило отримати за рахунок застосування математичного моделювання й використання методів математичного дослідження, тобто деяка нова якість моделі.

Для того, щоб бути корисною, математична модель повинна задовольняти деяким вимогам, що мають рекомендаційний і суб'єктивний характер.

Розглянемо вимоги, які зазвичай задовольняє якісна математична модель.

Вимога адекватності. Модель повинна задовольняти умову адекватності відносно вибраної системи характеристик. Під адекватністю моделі розуміють:

- а) Правильний якісний опис об'єкта за вибраними характеристиками. Наприклад, стійкість руху моделі свідчить про стійкість реального об'єкта.
- б) Правильний якісний опис за вибраними характеристиками з деякою розумною мірою точності.

Отже, адекватність визначається не тільки об'єктом і моделлю, а також заданою множиною характеристик, що моделюються. Іноді кажуть про міру адекватності моделі, розуміючи під цим частку істинності моделі відносно вибраної множини характеристик.

Невраховані фактори. Формулюючи математичну модель, дослідник завжди нехтує низкою факторів, які вважає неістотними. Інші характеристики об'єкта дослідження ідеалізуються. Існує поняття стійкості (грубості) моделі, що означає здатність моделі зберігати якісні властивості при застосуванні в реальному середовищі. Звісно, існує деякий інтервал параметрів, на якому не можна чітко визначити, яка модель адекватніша – стійка чи нестійка.

Простота та оптимальність моделі. Вимогу простоти та оптимальності складно формалізувати. Під простотою варто розуміти обсяг зусиль, що повинен докласти дослідник для вивчення моделі. У цілому простота й адекватність – суперечливі властивості. Для поліпшення адекватності може виникнути потреба у громіздкій системі з великою кількістю рівнянь, які складно досліджувати. Модель достатньо проста, якщо сучасні методи дослідження дають можливість із розумними витратами

й задовільною точністю робити якісний і кількісний аналіз вибраних характеристик та розуміти результати

Ієрархія змінних. Значущість змінних і параметрів може бути різною. Змінні, що з'являються в головних залежностях, називають основними, а інші – другорядними. Особливо важливою є класифікація змінних за темпом зміни в часі. При постановці задачі визначають деякі характерні значення – основні масштаби шкали часу та шкали простору. Виходячи із заданої часової шкали розрізняють нормальні, повільні та швидкі змінні. Повільні змінні можна брати в моделі за параметри.

Швидкі змінні поділяють на короткочасні й тривалі. Перші легко замінити середніми значеннями. Другі відіграють важливу роль при аналізі перехідних процесів, що пов'язують один усталений режим з іншим.

За аналогією змінні класифікують також за просторовим впливом: близькі, далекі, дуже далекі. Таким чином установлюють деяку ієрархію змінних. Часто ефективним методом розв'язання задач може бути перехід від складної моделі з великою кількістю мікрозмінних до простішої з невеликою кількістю макрозмінних. Прикладом такого підходу є перехід від рівнянь, що описують траєкторію руху молекул, до рівнянь із частинними похідними, що використовують поняття температури й щільності.

Інші вимоги. Різні дослідники зазначають також інші фактори, що впливають на властивості й розвиток моделі – феноменологічні й напівемпіричні закони. Ці закони існують у предметній області і від того, чи виконуються вони, залежить адекватність моделі. У класичній механіці це, наприклад, закони Ньютона й закон Гука.

Залежно від характеру процесів типи математичного моделювання поділяють на:

1. Детерміноване моделювання відображає детерміновані процеси, тобто процеси, в яких припускають повну відсутність випадкових впливів.

2. Стохастичне моделювання відображає ймовірнісні події та процеси. При моделюванні аналізують низку реалізацій випадкового процесу та оцінюють його характеристики, тобто набір однорідних реалізацій.

3. Статичне моделювання передбачає незмінність досліджуваного явища в часі. Будують математичну модель, що відображає поведінку об'єкта в цілому.

4. Динамічне моделювання служить для опису поведінки об'єкта в будь-який довільний змінний момент часу.

5. Дискретні, дискретно-неперервні й неперервні математичні моделі є конкретизацією динамічних моделей. Частіше за все використовують системи звичайних диференціальних рівнянь, рівнянь із частинними похідними, різницеві рівняння, рівняння з післядією та інтегральні рівняння.

Математичне моделювання можна поділити на такі:

Аналітичне моделювання, під яким зазвичай розуміють власне розробку математичного апарату, тобто запис функціональних

співвідношень. Отримані співвідношення вивчають формальними методами математичних досліджень.

Імітаційне моделювання, при якому на підставі вибраної математичної моделі та алгоритму її реалізації проводять обчислювальні експерименти, що дає змогу кількісно оцінювати адекватність вибраної моделі та прогнозувати поведінку реального об'єкта.

Методи побудови математичних моделей систем і процесів

Під час створення математичних моделей можна вирізнити три основні стадії підготовки такої моделі:

1. Створення уявної моделі.
2. Створення концептуальної моделі.
3. Створення формальної моделі.

Уявна модель формується в голові дослідника під час спостережень за об'єктом моделювання як його мислений образ. Формуючи таку ідеальну модель розробник звичайно намагається отримати відповіді на певні питання, зокрема, чим саме можна знехтувати в реальному і складному об'єкті, а які властивості, навпаки, варто утримати в його образі. Представлення такої уявної моделі звичайною мовою (так званий вербальний образ) називають змістовною моделлю. Такі моделі поділяють на описові, пояснюючі та прогностичні відповідно до їх функції.

Концептуальна модель є абстрактною моделлю, яка визначає структуру об'єкта моделювання, властивості його елементів, причинно-наслідкові зв'язки, які притаманні об'єкту і важливі для побудови його моделі. Розглядають три типи концептуальних моделей:

- логіко-семантичні;
- структурно-функціональні;
- причинно-наслідкові.

Перший із цих типів, логіко-семантична модель, є описом об'єкта в термінах предметної галузі знань, до якої він належить. Аналіз відбувається засобами логіки. Другий тип розглядає об'єкт як цілісну систему, яку можна розділити на певні підсистеми, або елементи. Частини системи пов'язані між собою деякими структурними співвідношеннями, які описують підлеглисть одна одній, а також логічну та часову послідовність вирішення задачі. Третій тип – причинно-наслідкові моделі, слугує для пояснень та прогнозу поведінки об'єкта.

Побудова концептуальної моделі звичайно передбачає три етапи:

1. Визначення типу системи (об'єкта моделювання).
2. Опис зовнішніх впливів на об'єкт.
3. Декомпозиція об'єкта (його аналіз, розкладання на простіші частини).

Формальна модель є презентацією концептуальної моделі за допомогою деякої формальної мови: зокрема це може бути мова математики, алгоритмічна мова, мова програмування тощо.

Іншою класифікаційною ознакою об'єкта моделювання є множина

можливих станів. Якщо об'єкт може перебувати лише в одному стані, то він відноситься до статичних систем.

Якщо кількість можливих станів системи більше одного та/або ці стани можуть змінюватися з часом, то об'єкт належить до динамічних систем. Процес зміни станів називають рухом динамічної системи. Розрізняють динамічні системи:

- □ з дискретними станами (кількість станів можна перенумерувати цілими числами);

- □ з безперервною множиною станів.

Зміна станів також може відбуватися або у дискретні фіксовані моменти часу (так звані системи з дискретним часом переходів), або ж системи з безперервним часом переходів, тобто такі, які «живуть» у реальному часі.

Умови переходів між станами поділяють системи на:

- □ детерміновані, в яких новий стан залежить лише від поточного стану та часу;

- □ стохастичні, в яких можна казати лише про ймовірність переходу з поточного стану до інших можливих станів системи.

Безперервні системи поділяють на системи з:

- □ Зосередженими параметрами. В таких системах параметри залежать лише від часу, але не залежать від координат. Описуються звичайно за допомогою звичайних диференціальних рівнянь.

- □ Розподіленими параметрами, в яких параметри системи залежать як від часу, так і від координат. Описуються за допомогою диференціальних рівнянь у частинних похідних.

Дискретні системи поділяють на:

- □ синхронні;

- □ асинхронні.

Поділ залежить від того чи прив'язані моменти переходів поміж можливими станами системи до конкретних часових моментів: якщо відповідь позитивна – маємо справу з синхронною системою, інакше – система є асинхронною. Існують альтернативні класифікації математичних моделей. Одна з таких представлена в табл. 2.1.

Таблиця 1.2.1

Класифікаційна ознака моделі	Складові класифікаційної категорії
Характер віддзеркалюваних властивостей	1. функціональні; 2. структурні.
Належність до ієрархічного рівня	1. макрорівень; 2. макрорівень; 3. мегарівень.
Ступінь деталізації в	1. повні,

межах одного рівня	2. макромоделі.
Спосіб презентації властивостей об'єкта	1. аналітичні; 2. імітаційні; 3. алгоритмічні.
Спосіб побудови моделі	1. теоретичні; 2. емпіричні.

Власна класифікація існує також у галузі економіко-математичних моделей, що видно з такої ілюстрації.

1.1. Аналітичне моделювання

Для цього методу моделювання характерним є запис процесів (або функцій системи) у вигляді деяких функціональних математичних співвідношень: алгебраїчних, диференціальних, інтегральних рівнянь, або ж їх комбінацій.

Аналітична математична модель звичайно досліджується такими методами як:

аналітичний – коли намагаються отримати явні аналітичні вирази для характеристик моделі;

числовий – якщо не вдається знайти загальні аналітичні вирази або рішення рівнянь, які описують систему, чи про цес;

якісним – коли за відсутності точних рішень знаходять та аналізують деякі їх властивості.

Утім, аналітичні рішення вдається отримати лише в обмеженій кількості випадків для відносно простих рівнянь, або їх систем. У більшості реальних досліджень точні аналітичні рішення або неможливі, або пов'язані з величезними ресурсними витратами.

Тоді вдаються до суттєвих спрощень первинної моделі, хоча зрозуміло, що такі спрощені моделі не завжди задовольняють усім потребам дослідників.

Результати аналітичних моделей презентуються у вигляді аналітичних виразів.

1.1. Імітаційне моделювання

Особливістю цього методу моделювання є те, що алгоритм, який реалізує модель, відтворює процес функціонування системи, в певному наближенні, зрозуміло. Елементарні явища, які формують процес функціонування системи, імітуються в їх логічній та часовій послідовності.

Головна перевага такого виду моделювання – можливість роботи зі складнішими системами та процесами, аніж це може дозволити аналітичне моделювання. Головним засобом такого моделювання слугують комп'ютери.

Під час імітаційного моделювання комп'ютер відтворює алгоритм – «логіку» системи, яка моделюється, її поведінку в часі за умови різних наборів зовнішніх впливів. Прикладом найпростішої імітаційної моделі

можна назвати комп'ютерні моделі різних видів руху матеріальних точок або тіл (рис. 1.2.3). У таких моделях імітується спостереження за позиціями рухомого тіла в різні моменти часу, відтворюється траєкторія руху, варіюються його параметри тощо.

Метод Монте-Карло (за назвою міста Монте-Карло, Монако, яке відоме своїми казино) – загальна назва групи числових методів, основаних на одержанні великої кількості реалізацій стохастичного (випадкового) процесу, який формується у той спосіб, щоб його ймовірнісні характеристики збігалися з аналогічними величинами задачі, яку потрібно розв'язати. Використовується для розв'язування задач у фізиці, математиці, економіці, оптимізації, теорії управління тощо.

Метод Монте-Карло – це метод імітації для приблизного відтворення реальних явищ, він є різновидом статистичного моделювання. Метод об'єднує аналіз чутливості (сприйнятливості) і аналіз розподілу ймовірностей вхідних змінних. Цей метод дає змогу побудувати модель, мінімізуючи дані, а також максимізувати значення даних, які використовуються в моделі. Побудова моделі починається з визначення функціональних залежностей у реальній системі. Після чого можна одержати кількісний розв'язок, використовуючи теорію ймовірності й таблиці, або програмні генератори, для випадкових чисел.

Метод Монте-Карло широко використовується у всіх випадках симуляції на комп'ютерах. Ідея методу полягає у підрахунку співвідношення випадковим чином генерованих комп'ютером точок, які потрапили під криву інтегрованої функції до загальної кількості генерованих випадкових точок (рис. 1.2.4). Відповідне співвідношення існує поміж невідомою площею під кривою та відомою загальною площею рисунку.

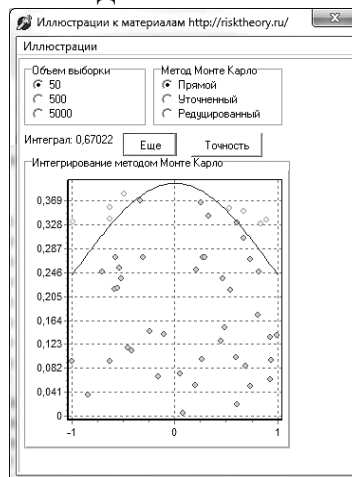


Рис. 1.2.4. Візуалізація програ програми площі під кривою методом Монте-Карло

Загальною тенденцією основних методів моделювання є скорочення часу моделювання, а також проведення досліджень у масштабі реального часу.