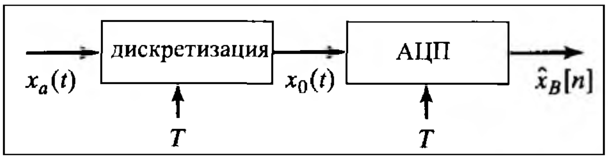
4.1.2. Перетворення аналогового сигналу в цифровій

При обробці безперервного сигналу ідеальним яка перетворює безперервний (аналоговий) сигнал на цифровий, тобто послідовність кінцевої точності, або квантовану по рівню послідовність



Обидві системи можна реалізувати фізичними пристроями. АЦП - цей фізичний пристрій, що перетворює амплітуду напругу або сили струму, що подається на вхід, в двійковий код, представляющий квантовані значення амплітуди вхідного сигналу. Під контролем зовнішного годинника АЦП може обчислювати відлік кожні T с. Проте перетворення відбувається не миттєво, і з цих причин високоефективні АЦП зазвичай включають схему дискретизації і запам'ятовування. Ідеальна система дискретизації і запам'ятовування - це система з вихідним сигналом виду

$$x_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h_0(t - nT),$$

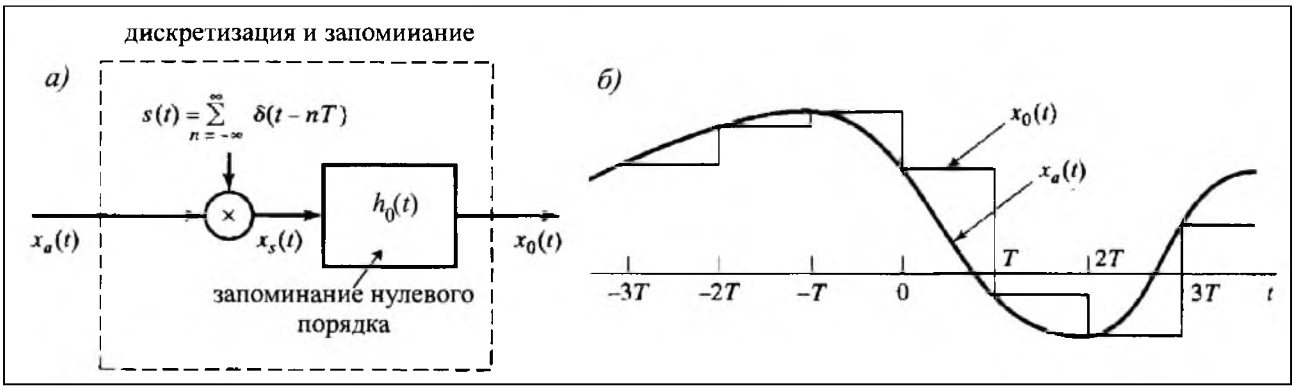
де $x[n] = x_a(nT)$ – ідеальна дискретизація сигналу $x_a(t)$, а $h_0(t)$ – імпульсна характеристика системи запам'ятовування нульового порядку, тобто

$$h_0(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < T, \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Якщо переписати формулу у вигляді згортки

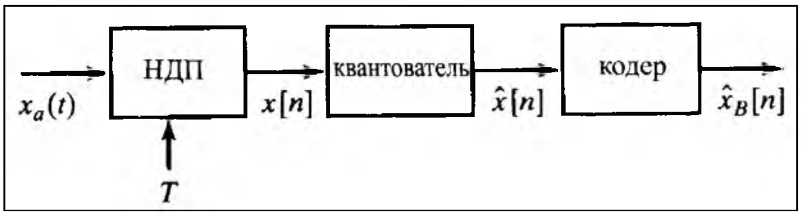
$$x_0(t) = h_0(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)\delta(t - nT),$$

то можна помітити, що ідеальна схема дискретизація і запам'ятовування еквівалентна модулятору ланцюжка импульсов, за яким йде лінійне фильтрование з системою запам'ятовування нулевого порядку.



Вихід системи запам'ятовування нульового порядку має ступінчасту форму, тобто значення відліків постійні на відрізках завдовжки в T_c, де T - крок дискретизації. Фізичні схеми дискретизації і запам'ятовування розробляються так, щоб дискретизація сигналу відбувалася максимально можливою швидкістю, а відліки запам'ятовувалися з найменшою помилкою. Вся процедура має на меті збережеиия значення напруги (чи сили струму) на виході, що істотно для АЦП.

Квантуватель - це нелінійна система, чия фуикція полягає в перетворенні значень кожного відліку вхідного сигналу х[п] у одне з кінцевого безліч заданих величин.

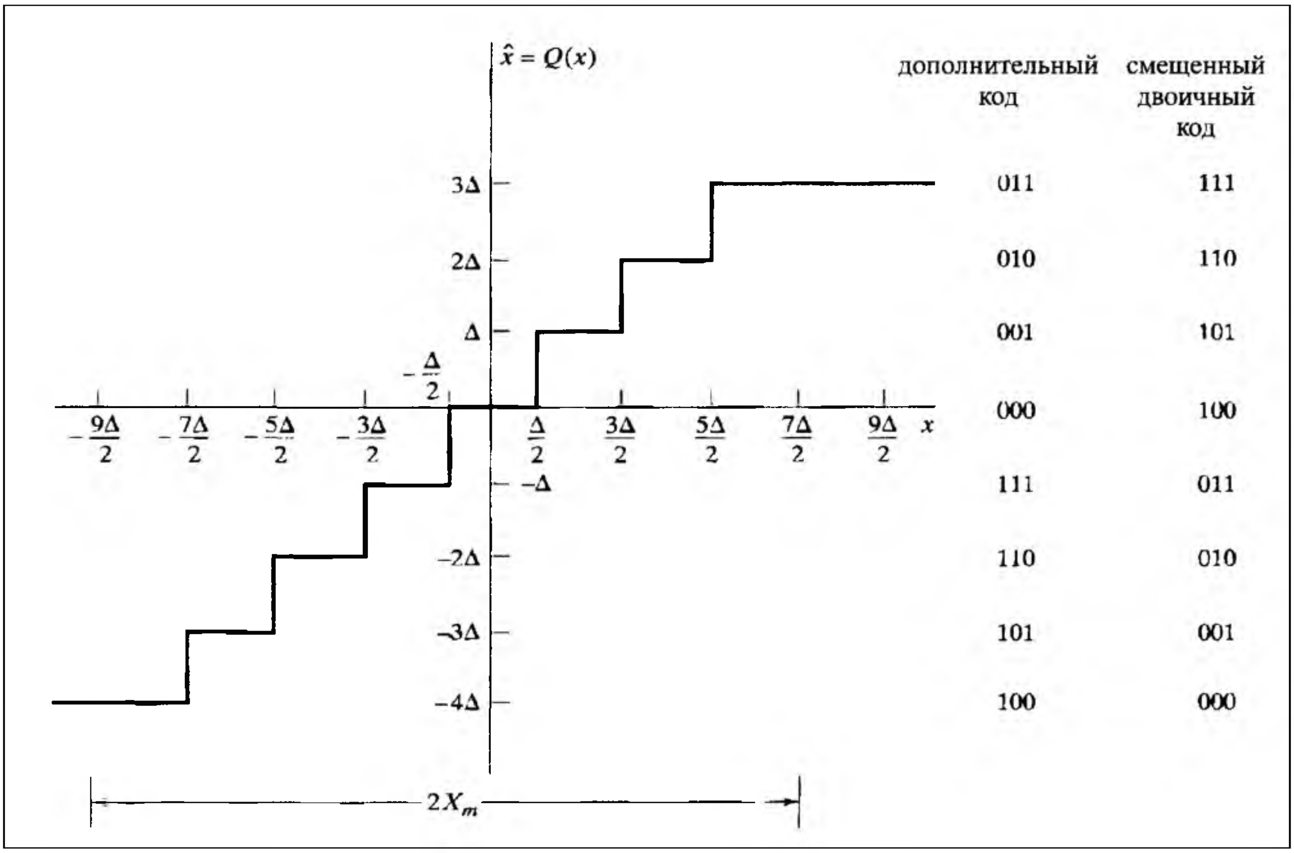


Позначимо цю операцію як

$$\hat{x}[n] = Q(x[n])$$

і називатимемо члени послідовності $\hat{x}[n]$ квантованим відліком. Квантуватель можна визначати з рівномірними або нерівномірними рівнями. Однак, оскільки ми плануємо робити обчислення над відліками, варто вибирати рівномірне квантування.

Типовий рівномірний квантуватель, характеристики в якому закруглені до найбільш близького рівня кваитуваиия показаний на диаграмі.



Передусім помітнмо, що такий кваитователь підходить для сигналів як з позитивиими, так і иегативиими відліками (біполяриий). Якщо апріорі відомо, що відліки, що входять, завжди позитивиі (чи иегативиі), то зручиіше вибрати іиший розподіл рівиів квантування. Наведеиий кваитуватель має парие число рівиів кваитуваиия. Але, оскільки одии з иих зайиятий иулем, виходить різиа кількість позитивиих і иегативиих рівиів кваитуваиия. Як правило, число рівиів кваитуваиия дорівиює мірі двійки і, оскільки ця міра зиачио більше восьми, відміиністю у кількості иегативиих і позитивиих рівиів можиа иехтувати.

У иаведеиому прикладі – вісім рівиів, і ми можемо позиачити їх за допомогою двійкового коду з трьох бітів. (У загальиому випадку для кодуваиия 2^{B+1} рівиів можиа использовать двійкові $(B+1)$ – зиачні числа.) В приицскладі для позиачеиия рівиів можиа брати будь-які символи, і ісиує безліч двійкових схем кодирования, що мають свої перевагп і иедоліки залежио від коикретиого застосування. Наприклад, правий стовпець двійкових чпсел ілюструє зміщеиий двійковий код, в якому рівиі иумеруються числами в двійковій системі числеиия в порядку їх зростання, почииаючи з самого иегативиого. Проте прп цифровій обробці спгналу прийиятиіше корпстуватися двійковим кодом, що дозволяє викоиувати арифметичиі дії безпосередиьо з мітками як з числовим представлеииям кваитоваиих відліків. Лівий стовпець показує розмітку рівиів, що відповідає додатковому двійковому коду. Така система представлеиия чпсел зі зиаками викорпстовується у більшості комп'ютерів і мікропроцесорів. Таким чииом, це, можливо, иайбільш зручиий спосіб иумерації рівиів кваитуваиия. Замітимо між іишим, що зміщеиий двійковий код можиа перетворити в додатковий код, просто додаючи иайбільш зиачущпй біт. У додатковому двійковому коді крайиій лівий, або иайбільш зиачущий, біт відповідає за зиак числа, а інші представляють або ціле, або дробове абсолютне зиачеиия числа. Ми прппускатимемо, що має місце остаиия ситуація, тобто вважаємо, що двійкова кома коштує між двома самими лівими зиаками. Зиачеиия двійкових символів додаткового коду прп $B=2$ виписаиі в таблиці. У загальиій ситуації $(B+1)$ – бітовий дріб, записаиий в додатковому двійковому коді вигляду

$$a_{0\diamond}a_1a_2\ldots a_B,$$

представляє число

$$-a_0 2^0 + a_1 2^{-1} + a_2 2^{-2} + \cdots + a_B 2^{-B}.$$

Відмітимо, що символ "о" озиачає "двійкову точку" числа. Взаємозв'язок між словами коду і рівиями кваитуваиия спгналу залежить від параметра Хт з. У загальиій ситуації цей параметр иазивається повиомасштабинм рівиям АЦП. Як правило, його зиачеиия коливається від 10 до 1В.

Двоїчний символ	Чисельне значення $\hat{x}_B$
$0_\diamond 11$	$3/4$
$0_\diamond 10$	$1/2$
$0_\diamond 01$	$1/4$
$0_\diamond 00$	0
$1_\diamond 11$	$-1/4$
$1_\diamond 10$	$-1/2$
$1_\diamond 01$	$-3/4$
$1_\diamond 00$	-1

Відстань між сусідніми рівнями квантування складає

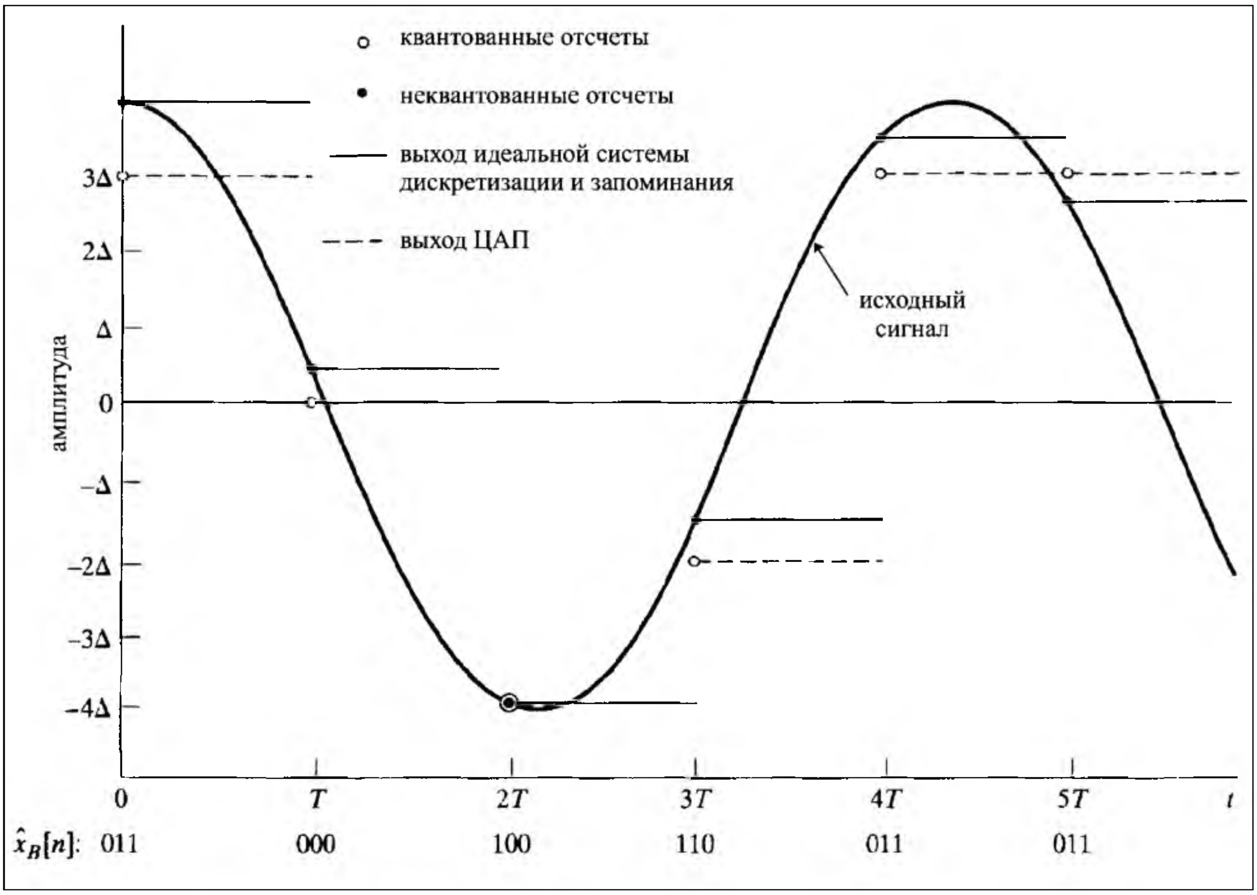
$$\Delta = \frac{2X_m}{2^{B+1}} = \frac{X_m}{2^B}.$$

Найменші рівні квантування $(\pm\Delta)$ відповідають найменшому значущому біту двійкового слова. Більше того, має місце чисельне співвідношення між словом коду і квантованими відліками :

$$\hat{x}[n] = X_m \hat{x}_B[n],$$

оскільки ми припустили, що $\hat{x}_B[n]$ - двійкове число, що задовольняє нерівності $-1 \le \hat{x}_B[n] < 1$ (у додатковому двійковому коді). При такій схемі кодований відлік хв [п] прямо пропорційний квантованому відліку (в дополнительном двійковому коді), і тому його можна використати як чисельне представлення амплітуди. Дійсно, прийнято припускати, що вхідний сигнал нормалізований таким чином, що чисельні значення квантованого відліку $\hat{x}[n]$ і двійкового слова $\hat{x}_B[n]$ співпадають, і тому не виникає необхідности проводити межу між квантованими відліками і їх двійковими позначеннями.

На діаграмі показаний простий приклад квантування і кодування відліків синусоїдальної хвилі за допомогою 3-бітового квантувателя.



Неквантовані відліки $\hat{x}[n]$ позначаються чорними точками, а квантовані - кружечками. На цьому малюнку представлений вихідний сигнал ідеальної схеми дискретизаціїі запам'ятовуваиня. Пунктирна лінія означає "вихід ЦАП. Вхідний аналоговий сигнал $x_a(t)$ виходить за межі повномасштабного рівня квантователя, окремі положительные відліки виявляються "зрізаними".

4.1.3. Аналіз помнлок квантування

Очевидно, що квантований відлік $\hat{x}[n]$ у більшості випадків відрізняється від істинного значення $x[n]$. Різниця між ними називається помилкою квантування і визначається по формулі

$$e[n] = \hat{x}[n] - x[n].$$

Наприклад, у разі 3-бітового квантователя при $\Delta/2 < x[n] \leq 3\Delta/2$ значення $\hat{x}[n]$ дорівнює Δ, звідки

$$-\Delta/2 < e[n] \leqslant \Delta/2.$$

Для даної ситуації ця нерівність залишається вірним завжди, коли

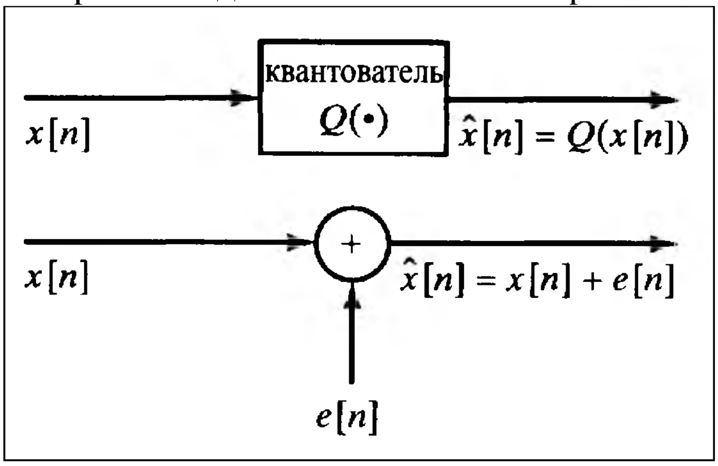
$$-9\Delta/2 < x[n] \leqslant 7\Delta/2.$$

У загальному випадку $(B+1)$ - бітового квантувателя із значенням Δ помилка квантування задовольняє зазначеній нерівності за умови

$$(-X_m - \Delta/2) < x[n] \leqslant (X_m - \Delta/2).$$

Якщо $x[n]$ виходить за цю область, як відбувається при t = 0 то помилка квантування за абсолютною величиною перевищує $\Delta/2$, і говорять, що відліки ***зрізуються.***

Спрощена, але корисна модель квантователя зображена нижче.



Модель в точності еквівалентна квантователю за умови, що нам відома помилка $e[n]$.

У більшості випадків, проте, помилка невідома, і у таких ситуаціях є корисною статистична модель. Статистичне представлення помилок квантування виходить з наступних припущень:

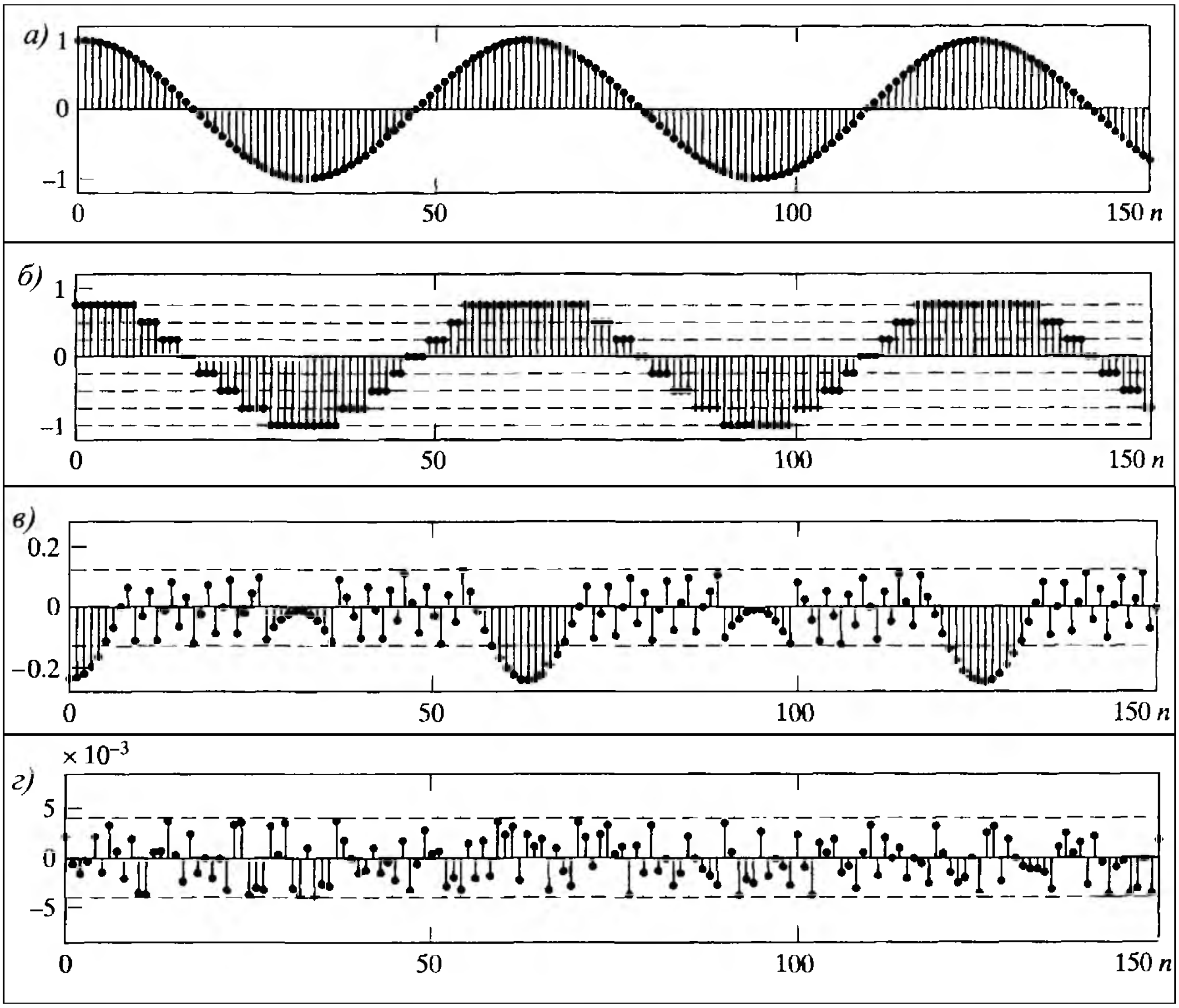
1. Послідовність помилок $e[n]$ є послідовністю відліків стаціонарного випадкового процесу.

2. Послідовність $e[n]$ не корелює з послідовністю $x[n]$.

3. Випадкові величини процесу помилок не корелюють між собою, тобто помилки - це випадковий процес, що описує білий шум.

4. Вірогідність помилок розподілена рівномірно на відрізку помилок вантування.

Приклад шуму квантування: а) неквантовані відліки сигналу $x[n] = 0.99 \times \cos\left(\dfrac{n}{10}\right)$; б) квантовані відліки сигналу $x[n]$, отримані за допомогою 3 – бітового квантователя; в) послідовність помилок квантування сигналу $x[n]$ 3 – бітовим квантевателем; г) послідовність помилок квантування сигналу $x[n]$ 8 – бітовим квантевателем



Оскільки сусідні відліки шуму не корелюють один з одним, а $e[n]$ – з $x[n]$ можна вважати, що $e[n]$ – рівномірно розподілена послідовність типу білого шуму. Середнє значення величини $e[n]$ дорівнює 0, а її дисперсія обчислюється за формулою:

$$\sigma_e^2 = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} e^2 \frac{1}{\Delta} de = \frac{\Delta^2}{12}.$$

Для $(B+1)$ – бітового квантувателя з повномасштабним рівнем X_m дисперсия шуму, або потужність, дорівнює

$$\sigma_e^2 = \frac{2^{-2B} X_m^2}{12}.$$

Звичайною мірою кількості деградації сигналу із-за аддитивного шуму служить відношення сигнал/шум (С/Ш), визначене як відношення дисперсії (потужності) сигналу до дисперсії шуму. Виражене в децибелах (дБ) відношення сигнал/шум для $(B+1)$ - бітового дискретизатора дорівнює

$$\text{С/Ш} = 10\lg\left(\frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2}\right) = 10\lg\left(\frac{12\cdot 2^{2B}\sigma_x^2}{X_m^2}\right) = 6,02B + 10,8 - 20\lg\left(\frac{X_m}{\sigma_x}\right).$$

Звідси витікає, що при додаванні кожного біта до довжини слова, що означає рівні квантування, С/Ш збільшується приблизно на 6дБ.

4.1.4. Перетворення цифрового сигналу в аналоговий

У термінах перетворення Фур'є відновлення відбувається по формулі:

$$X_r(j\Omega) = X(e^{j\omega})H_r(j\Omega),$$

де $X\left(e^{j\omega}\right)$ - ДВПФ послідовності відліків, а $X_r\left(j\Omega\right)$ - Фур'є-образ відновленого неперервного сигналу. Ідеальний фільтр нижніх частот описується характеристичною функцією:

$$H_r(j\Omega) = \begin{cases} T, & |\Omega| < \pi/T, \\ 0, & |\Omega| \geqslant \pi/T. \end{cases}$$

При такому виборі $H_r\left(j\Omega\right)$ співвідношення між відновленим сигналом $x_r\left(t\right)$ і послідовністю $x[n]$ має вигляд

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\frac{\sin\left(\pi(t-nT)/T\right)}{\pi(t-nT)/T}.$$

Система, що відновлює сигнал $x_r\left(t\right)$ по послідовності $x[n]$, називається ідеальним дискретно-безперервним перетворювачем (ДНП).

Фізичною реалізацією ДНП служить ідеальний цифро-аналоговий перетворювач (ЦАП), до якого приєднується апроксимований фільтр нижніх частот. ЦАП отримує на вході послідовність двійкових слів і видає безперервний сигнал виду

$$x_{ЦА}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_m \hat{x}_B[n]h_0(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{x}[n]h_0(t-nT),$$

де $h_0\left(t\right)$ - імпульсна характеристика системи запам'ятовування нульового порядку .