

Задача 1.

Вантаж масою 400 г здійснює коливання на пружині з жорсткістю 250 Н/м. Амплітуда коливань 15 см. Знайти повну механічну енергію коливань і найбільшу швидкість руху вантажу. Тертям знехтувати.

Дано:
 $m = 400$ г
 $k = 250$ Н/м
 $x_{max} = 15$ см

СІ:
 $m = 0,4$ кг
 $x_{max} = 0,15$ м

$E_{мех} = ?$
 $v_{max} = ?$

Розв'язання:

Згідно із законом збереження механічної енергії

$$E_{мех} = E_{пmax} = E_{кmax},$$

За означенням,

$$E_{пmax} = \frac{kx_{max}^2}{2}, \quad E_{кmax} = \frac{mv_{max}^2}{2},$$

тобто $\frac{kx_{max}^2}{2} = \frac{mv_{max}^2}{2}$. Звідси $v_{max} = x_{max} \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Обчислення:

$$[v_{max}] = \text{м} \sqrt{\frac{\text{Н}}{\text{м} \cdot \text{кг}}} = \text{м} \sqrt{\frac{\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot \text{кг}}{\text{м} \cdot \text{кг}}} = \text{м} \sqrt{\frac{1}{\text{с}^2}} = \frac{\text{м}}{\text{с}},$$

$$\{v_{max}\} = 0,15 \sqrt{\frac{250}{0,4}} = 0,15 \cdot 25 \approx 3,8,$$

$$E_{мех} = E_{пmax} \approx 2,8 \text{ Дж.}$$

Відповідь: $v_{max} \approx 3,8 \text{ м/с}$, $E_{мех} \approx 2,8 \text{ Дж}$.

Задача 2.

Людина масою 80 кг гойдається на гойдальці. Амплітуда її коливань 1 м. За 1 хв людина здійснює 15 коливань. Знайти кінетичну й потенціальну енергію через 1/12 періоду від початку коливань. Тертям знехтувати.

Дано:

$$x_{max} = 1 \text{ м}$$

$$m = 80 \text{ кг}$$

$$t_1 = 1 \text{ хв} = 60 \text{ с}$$

$$t = \frac{1}{12} T$$

$$N = 15$$

$$E_k \text{ — ?}$$

$$E_{п} \text{ — ?}$$

Розв'язання:

Приймаємо за нульовий рівень потенціальної енергії системи «Земля — людина на гойдальці» положення гойдалки в рівновазі. Тоді за законом збереження механічної енергії (рис. 314):

$$E = E_{kmax} = E_{пmax} = mgh + \frac{mv^2}{2}.$$

Оскільки даних для відшукування $E_{п}$ немає, то визначаємо E_k :

$$E_k = \frac{mv^2}{2}, \quad v = x_{max} \omega \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = -x_{max} \omega \sin \omega t, \quad E_{п} = E - E_k.$$

Повна енергія

$$E = E_{kmax} = \frac{mv_{max}^2}{2}, \quad v_{max} = x_{max} \omega,$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad T = \frac{t_1}{N};$$

$$T = \frac{60}{15} \text{ с} = 4 \text{ с}, \quad \omega t = \frac{2\pi}{T} \frac{1}{12} T = \frac{2\pi}{12} = 30^\circ;$$

$$E_k = \frac{m}{2} (-x_{max} \omega \sin 30^\circ)^2,$$

$$E = \frac{m}{2} (x_{max} \omega)^2, \quad E_{п} = E - E_k.$$

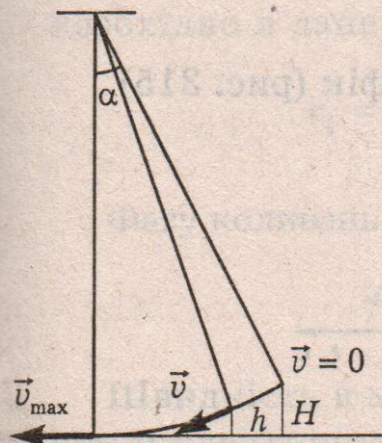


Рис. 314

Відповідь: $E_k \approx 25 \text{ Дж}$, $E \approx 100 \text{ Дж}$, $E_{п} \approx 75 \text{ Дж}$.

Задача 3.

Амплітуда коливань 10 см, а частота $0,5 \text{ с}^{-1}$. Записати рівняння гармонічного коливання і побудувати графік $x = x(t)$.

Дано:

$$A = 10 \text{ см} = 0,1 \text{ м}$$

$$\nu = 0,5 \text{ Гц}$$

$x(t) = ?$

Розв'язання:

Запишемо рівняння гармонічних коливань в загальному вигляді:

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Визначимо циклічну частоту ω та початкову фазу коливань φ_0 :

$$\omega = 2\pi\nu, \quad \omega = 2\pi \cdot 0,5 \frac{1}{\text{с}} = \pi \frac{1}{\text{с}}; \quad \varphi_0 = 0.$$

Рівняння гармонічних коливань в задачі буде мати вигляд

$$x = 0,1 \cos \pi t.$$

Для побудови графіка визначимо:

1) період коливань

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{0,5} \text{ с} = 2 \text{ с};$$

2) значення зміщення x через кожні 0,5 с в інтервалі (0...2) с;

t	0	0,5	1	1,5	2
x	0,1	0	-0,1	0	0,1

Обравши масштаб для x і t , побудуємо графік (рис. 315).

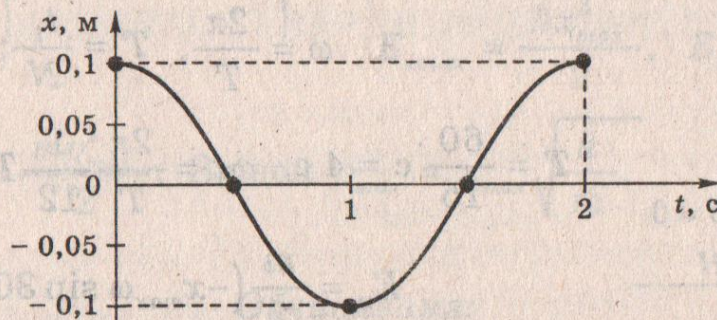


Рис. 315

Відповідь: $x = 0,1 \cos \pi t$.

Задача 4.

Тіло здійснює гармонічні коливання за законом

$$x = 0,1 \cos \left(20\pi t + \frac{\pi}{3} \right) \text{ м.}$$

Визначити амплітуду, період, частоту, зміщення, фазу, швидкість та прискорення в момент часу 0,05 с. В який момент часу прискорення буде максимальне?

Дано:

$$x = 0,1 \cos \left(20\pi t + \frac{\pi}{3} \right) \text{ м}$$

$$t_1 = 0,05 \text{ с}$$

A — ?

T — ?

ν — ?

x_1 — ?

φ_1 — ?

v_1 — ?

a_1 — ?

t_2 — ?

Розв'язання:

1) Досліджуючи дане рівняння гармонічних коливань і порівнюючи його з рівнянням гармонічних коливань у загальному вигляді $x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$, знаходимо значення A , ω , φ_0 .

$$A = 0,1 \text{ м}; \quad \omega = 20\pi \frac{1}{\text{с}}; \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{3} \text{ рад.}$$

Формула зв'язку циклічної частоти з періодом дозволяє визначити період коливань

$$T = \frac{2\pi}{\omega}; \quad T = \frac{2\pi}{20\pi} \cdot \text{с} = 0,1 \text{ с.}$$

З формули $T = \frac{1}{\nu}$ визначимо $\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,1 \text{ с}} = 10 \text{ Гц.}$

2) Для визначення зміщення тіла від положення рівноваги необхідно в дане рівняння підставити значення часу $t_1 = 0,05 \text{ с}$:

$$x_1 = 0,1 \cos \left(20\pi \cdot 0,05 + \frac{\pi}{3} \right) \text{ м} = -0,05 \text{ м.}$$

Фазу коливань в момент часу $t_1 = 0,05 \text{ с}$ знаходимо за формулою:

$$\varphi = \omega t + \varphi_0; \quad \varphi = 20\pi \cdot 0,05 + \frac{\pi}{3} = \frac{4}{3} \pi.$$

Швидкість в момент часу $t_1 = 0,05 \text{ с}$ знаходимо як першу похідну координати за часом

$$v = x'_t = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Виконавши підстановку значень A , ω , t_1 , φ_0 , отримаємо

$$v = -0,1 \cdot 20\pi \sin \left(20\pi \cdot 0,05 + \frac{\pi}{3} \right) = 5,44 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Прискорення в момент часу $t_1 = 0,05$ с знаходимо як першу похідну швидкості за часом:

$$a = -A\omega^2 \cos(\omega t_1 + \varphi_0) = -20^2 \cdot 3,14^2 \cdot 0,1 \cos\left(20\pi \cdot 0,05 + \frac{\pi}{3}\right) = 197 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

3) Прискорення тіла буде максимальним, коли $\cos(\omega t_2 + \varphi_0) = 1$. Розв'яжемо рівняння відносно t_2 :

$$t_2 = \frac{\arccos 1 - \varphi_0}{\omega}, \quad t_2 = \frac{2\pi - \frac{\pi}{3}}{20\pi} = 0,083 \text{ (с)}.$$

Відповідь: $A = 0,1$ м, $\omega = 20\pi \frac{1}{\text{с}}$, $\varphi_0 = \frac{\pi}{3}$ рад, $\nu = 10$ Гц,

$$x_1 = -0,05 \text{ м}, \quad \varphi = \frac{4}{3}\pi, \quad v_1 = 5,44 \frac{\text{м}}{\text{с}}, \quad a_1 = 197 \frac{\text{м}}{\text{с}^2},$$

$$t_2 = 0,083 \text{ с} = 83 \text{ мс}.$$

Задача 5.

За графіком гармонічних коливань, поданим на рис. 316, записати рівняння цього коливання. Знайти швидкість точки в момент часу, коли зміщення дорівнює $0,05$ м.

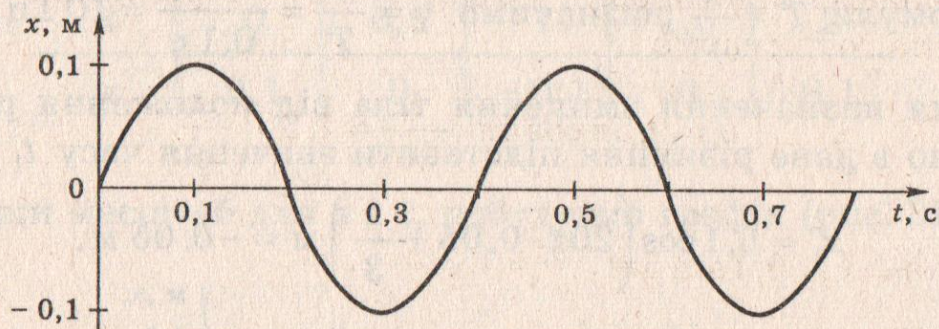


Рис. 316

Розв'язування:

Запишемо в загальному вигляді рівняння гармонічних коливань

$$x = A \sin \omega t.$$

За графіком визначимо амплітуду A , період T , початкову фазу коливань φ_0 :

$$x_m = A = 0,1 \text{ м}, \quad T = 0,4 \text{ с}.$$

Розрахуємо циклічну частоту коливань:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,4} = 5\pi \frac{1}{\text{с}}.$$

Тоді отримаємо рівняння гармонічного коливання, поданого на рисунку:

$$x = 0,1 \sin 5\pi t.$$

Для визначення швидкості точки знайдемо залежність швидкості від часу

$$v = x' = 0,5\pi \cos 5\pi t,$$

а також момент часу, коли зміщення точки від положення рівноваги дорівнює 0,05 м:

$$0,05 = 0,1 \sin 5\pi t,$$

звідси $\sin 5\pi t \approx 0,5$, тобто $5\pi t = \frac{\pi}{6}$.

Визначимо момент часу t

$$t = \frac{1}{30} \text{ с}.$$

Виконаємо підстановку моменту часу t в рівняння для швидкості тіла, отримаємо

$$v = 0,5\pi \cos 5\pi \cdot \frac{1}{30} \approx 1,36 \left(\frac{\text{м}}{\text{с}} \right).$$

Відповідь: $x = 0,1 \sin 5\pi t$, $v = 1,36 \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Задача 6.

Матеріальна точка масою 20 г здійснює гармонічні коливання з амплітудою 10 см. Знайти максимальну силу, що діє на точку, якщо коефіцієнт пружності $0,18 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$. Знайти прискорення, швидкість та потенціальну енергію точки в момент часу, коли її зміщення дорівнює 6 см. Силою тертя знехтувати.

Дано:

$$A = 10 \text{ см}$$

$$k = 0,18 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$$

$$x = 6 \text{ см}$$

$$m = 20 \text{ г}$$

$$F_{\text{max}} \text{ — ?}$$

$$a_x \text{ — ?}$$

$$v \text{ — ?}$$

$$W_{\text{п}} \text{ — ?}$$

СІ:

$$A = 0,1 \text{ м}$$

$$k = 0,18 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$$

$$x = 0,06 \text{ м}$$

$$m = 0,02 \text{ кг}$$

Розв'язання:

Очевидно, на точку діє найбільша сила в момент часу, коли її зміщення дорівнює амплітуді, тобто при $x = A$.

Отже,

$$F_{\text{max}} = kA; F_{\text{max}} = 0,018 \text{ Н} = 18 \text{ мН.}$$

Проекція прискорення

$$a_x = -k \frac{x}{m}; a_x = -0,54 \frac{\text{М}}{\text{с}^2}.$$

Потенціальна енергія дорівнює роботі зовнішніх сил, яку треба виконати, щоб вивести матеріальну точку зі стану спокою і відхилити її на величину зміщення x . Робота пружної сили чисельно дорівнює $\frac{1}{2} kx^2$. Отже, потенціальна енергія

$$W_{\text{п}} = \frac{1}{2} kx^2; W_{\text{п}} = 3,24 \cdot 10^{-4} \text{ Дж.}$$

Швидкість визначається з формули кінетичної енергії

$$v = \sqrt{\frac{2W_{\text{к}}}{m}}.$$

Кінетична енергія дорівнює різниці повної і потенціальної енергії, але оскільки повна енергія для будь-якого моменту часу дорівнює потенціальній у крайньому положенні, то

$$W_{\text{к}} = \frac{kA^2}{2} - \frac{kx^2}{2} = \frac{k}{2} (A^2 - x^2).$$

$$\text{Отже, } v = \sqrt{\frac{k(A^2 - x^2)}{m}}; v \approx 0,24 \frac{\text{М}}{\text{с}}.$$

Відповідь: $F_{\text{max}} = 18 \text{ мН}$, $a_x = -0,54 \frac{\text{М}}{\text{с}^2}$, $W_{\text{п}} = 0,32 \text{ мДж}$,

$$v = 0,24 \frac{\text{М}}{\text{с}}.$$