Правила обробки результатів вимірювання

Цей додаток містить правила оцінювання похибок прямих та непрямих вимірювань. Ці правила є спільними для всіх лабораторних робіт.

Прямі вимірювання

1. Після виконання n вимірювань фізичної величини x дістають деякі її значення $x_1, x_2, \dots, x_n$. Кількість вимірювань n залежить від природи вимірюваної величини, точності вимірювальних інструментів та в кожному конкретному випадку визначається окремо.

2. Знаходять середнє арифметичне значення вимірюваної величини:
$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

3. Визначають випадкові абсолютні похибки вимірювання:
$$\Delta x_1 = x_1 - \bar{x},\ \Delta x_2 = x_2 - \bar{x},\ \dots\ \Delta x_n = x_n - \bar{x}.$$

4. Оцінюють середню квадратичну похибку $S_{\bar{x}}$ середнього арифметичного:
$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \dots + \Delta x_n^2}{n(n-1)}}.$$

5. Беруть значення довірчої ймовірності p. Найчастіше вибирається значення $p = 0{,}95$.

6. За числом вимірювань n та довірчою імовірністю p з таблиці знаходять коефіцієнт Стьюдента $t_p(n)$.

	p						
n	**0,60**	**0,70**	**0,80**	**0,90**	**0,95**	**0,98**	**0,99**
2	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,159
11	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
20	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
30	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
∞	0,842	1,037	1,282	1,646	1,962	2,330	2,581

7. Визначають *абсолютну випадкову похибку*:

$$\Delta x_{\text{вип}} = t_p(n) \cdot S_{\bar{x}}. \qquad (1^*)$$

8. Визначають межу основної похибки δ, яку допускає засіб вимірювання[1] (наприклад, для штангенциркуля $\delta_{\text{ш}} = 0{,}1$ мм, для електронних вагів $\delta_{\text{в}} = 0{,}01$ г тощо).

9. Із таблиці знаходять коефіцієнт Стьюдента для нескінченно великого числа вимірювань $t_p(\infty)$.

[1] По великому рахунку, це те ж саме, що і ціна поділки пристрою.

10. Визначають *інструментальну похибку*:

$$\Delta x_{\text{інстр}} = \frac{t_p(\infty)\delta}{\sqrt{3}}. \tag{2*}$$

11. Визначають межу похибки відліку υ як половину ціни поділки вимірювального пристрою:

$$\upsilon = \frac{\delta}{2}.$$

12. Визначають *похибку відліку*:

$$\Delta x_{\text{відл}} = p\upsilon. \tag{3*}$$

13. На основі результатів формул (1*), (2*) і (3*) знаходять повну *абсолютну похибку* прямого вимірювання:

$$\Delta x = \sqrt{\Delta x_{\text{вип}}^2 + \Delta x_{\text{інстр}}^2 + \Delta x_{\text{відл}}^2}.$$

Записують остаточний результат у формі

$$\boxed{x = \bar{x} \pm \Delta x}$$

Приклад. Під час вимірювання довжини бруска штангенциркулем п'ять разів були отримані наступні результати: $l_1 = 12{,}0$ мм; $l_2 = 11{,}9$ мм; $l_3 = 12{,}1$ мм; $l_4 = 12{,}0$ мм; $l_5 = 11{,}9$ мм. Довірча ймовірність $p = 0{,}95$.

1. Середнє:

$$\bar{l} = \frac{12{,}0 + 11{,}9 + 12{,}1 + 12{,}0 + 11{,}9}{5} = 11{,}98 \text{ мм}.$$

2. Відхилення:

$$\Delta l_1 = 12{,}0 - 11{,}98 = 0{,}02 \text{ мм},$$

$$\Delta l_2 = 11{,}9 - 11{,}98 = -0{,}08 \text{ мм},$$

$$\Delta l_3 = 12{,}1 - 11{,}98 = 0{,}12 \text{ мм},$$

$$\Delta l_4 = 12{,}0 - 11{,}98 = 0{,}02 \text{ мм},$$

$$\Delta l_5 = 11{,}9 - 11{,}98 = -0{,}08 \text{ мм}.$$

3. Середня квадратична похибка:

$$S_{\bar{l}} = \sqrt{\frac{0{,}02^2 + (-0{,}08)^2 + 0{,}12^2 + 0{,}02^2 + (-0{,}08)^2}{5 \cdot 4}} = 0{,}037.$$

4. З таблиці Стьюдента для $n = 5$ та $p = 0{,}95$ знаходять коефіцієнт Стьюдента $t_{0{,}95}(5) = 2{,}571$.

5. Випадкова похибка

$$\Delta l_{\text{вип}} = 2{,}571 \cdot 0{,}037 = 0{,}095 \text{ мм}.$$

6. Ціна поділки штангенциркуля $\delta_{\text{ш}} = 0{,}1$ мм.

7. Коефіцієнт Стьюдента для нескінченно великого числа вимірювань при $p = 0{,}95$ $t_{0{,}95}(\infty) = 1{,}962$.

8. Інструментальна похибка

$$\Delta l_{\text{інстр}} = \frac{1{,}962 \cdot 0{,}1}{\sqrt{3}} = 0{,}113 \text{ мм}.$$

9. Похибка відліку

$$\Delta l_{\text{відл}} = 0{,}95 \cdot \frac{0{,}1}{2} = 0{,}0475 \text{ мм}.$$

10. Повна абсолютна похибка

$$\Delta l = \sqrt{0{,}095^2 + 0{,}113^2 + 0{,}0475^2} = 0{,}155 \text{ мм}.$$

Кінцевий результат: $l = (11{,}98 \pm 0{,}155)$ мм.

Непрямі вимірювання

1. З'ясовують, який вигляд має функція вимірювання $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ та від яких конкретно змінних $x_1, x_2, \dots, x_k$ вона залежить:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_k).$$

2. Знаходять похибки прямих вимірювань всіх змінних, які входять до складу функції f:

$$x_1 = \bar{x_1} \pm \Delta x_1,$$

$$x_2 = \bar{x_2} \pm \Delta x_2,$$

$$\dots$$

$$x_k = \bar{x_n} \pm \Delta x_k.$$

3. Визначають середнє значення невідомої величини

$$\bar{y} = f(\bar{x_1}, \bar{x_2}, \dots, \bar{x_k}).$$

4. Знаходять відносну похибку

$$\varepsilon_y = \sqrt{\left(\frac{\partial(\ln y)}{\partial x_1}\Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial(\ln y)}{\partial x_2}\Delta x_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial(\ln y)}{\partial x_k}\Delta x_k\right)^2}$$

5. Визначають абсолютну похибку

$$\Delta y = \varepsilon_y \bar{y}.$$

Записують остаточний результат у формі

$$\boxed{y = \bar{y} \pm \Delta y}$$

Приклад. Під час вимірювання густини зразка з деякого матеріалу у формі прямокутного паралелепіда були отримані такі величини його геометричних розмірів та маси:

$$a = (120{,}3 \pm 0{,}15)\text{мм},$$

$$b = (18{,}4 \pm 0{,}15)\text{мм},$$

$$c = (10{,}3 \pm 0{,}15)\text{мм},$$

$$m = (61{,}55 \pm 0{,}04)\text{г}.$$

Тоді середній об'єм зразка:

$$\bar{V} = \bar{a}\bar{b}\bar{c} = 120{,}3 \cdot 18{,}4 \cdot 10{,}3 = 22799 \text{ мм}^3 \text{ або } 22{,}799 \text{ см}^3.$$

Функція вимірювання має вигляд

$$\rho = \frac{m}{abc},$$

тобто вона залежить від змінних a, b, c і m.

Знаходимо середню густину

$$\bar{\rho} = \frac{61{,}55}{120{,}3 \cdot 18{,}4 \cdot 10{,}3} \approx 2{,}7 \text{ г/см}^3.$$

Для оцінки середньої похибки визначимо частинну похідну $\frac{\partial(\ln\rho)}{\partial a}$:

$$\frac{\partial(\ln\rho)}{\partial a} = \left(\ln\frac{m}{abc}\right)'_a = \frac{abc}{m} \cdot \frac{m}{bc} \cdot \left(-\frac{1}{a^2}\right) = -\frac{1}{a}.$$

Аналогічно можливо визначити, що

$$\frac{\partial(\ln\rho)}{\partial b} = -\frac{1}{b},$$

$$\frac{\partial(\ln\rho)}{\partial c} = -\frac{1}{c},$$

$$\frac{\partial(\ln\rho)}{\partial m} = \frac{1}{m}.$$

Таким чином, формула для розрахунку відносної похибки густини прийме вигляд:

$$\varepsilon_\rho = \sqrt{\left(-\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(-\frac{\Delta b}{b}\right)^2 + \left(-\frac{\Delta c}{c}\right)^2 + \left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2}.$$

Для того, щоб за цією формулою отримати число, необхідно в неї підставити *середні* значення:

$$\varepsilon_\rho = \sqrt{\left(-\frac{\Delta a}{\bar{a}}\right)^2 + \left(-\frac{\Delta b}{\bar{b}}\right)^2 + \left(-\frac{\Delta c}{\bar{c}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta m}{\bar{m}}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(-\frac{0{,}15}{120{,}3}\right)^2 + \left(-\frac{0{,}15}{18{,}4}\right)^2 + \left(-\frac{0{,}15}{10{,}3}\right)^2 + \left(\frac{0{,}04}{61{,}55}\right)^2} \approx$$

$$\approx 0,017, \quad \text{або} \quad 1{,}7\%.$$

Таким чином, абсолютна похибка буде дорівнювати

$$\Delta\rho = 0{,}017 \cdot 2{,}7 = 0{,}05 \text{ г/см}^3.$$

Кінцевий результат: $\rho = (2{,}7 \pm 0{,}05)$ г/см^3.