

Лабораторна робота 2

Вимірювання модуля Юнга

Мета роботи:

- отримати уявлення про деформації твердих тіл;
- навчитися вимірювати модуль Юнга.

Обладнання:

- сталевий стрижень круглого поперечного перерізу;
- кріплення;
- чаша терезів та набір грузиків;
- електронні ваги, рулетка, лінійка, штангенциркуль.

2.1 Короткі теоретичні відомості

Під дією зовнішніх сил тіла деформуються. *Деформація* — це зміна форми та розмірів твердого тіла під дією зовнішньої сили. Всі види деформацій можна представити за допомогою двох типів елементарних деформацій — *деформації розтягнення (стиснення)* та *деформації зсуву* (рис. 2.1).

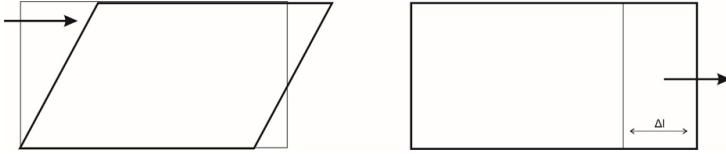


Рис. 2.1

У цій роботі розглянута деформація згину. Згин являє собою комбінацію деформації зсуву та деформацію розтягання/стискання.

Зв'язок між деформацією та прикладеною силою визначається за допомогою *закону Гука*. По закону Гука зміна довжини (деформація) прямо пропорційна прикладеній силі:

$$|F| = k\Delta l,$$

де F — розтягуюча або стискаюча сила, k — коефіцієнт жорсткості, Δl — абсолютне видовження. Коефіцієнт жорсткості k залежить від матеріалу, з якого зроблене тверде тіло, а також від його геометрії. Тому часто закон Гука записується в такому вигляді:

$$\sigma = E\varepsilon,$$

де σ — механічна напруженість, E — модуль Юнга, ε — відносне видовження, тобто відношення абсолютного видовження до початкової довжини:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}.$$

Величина σ називається механічним напруженням і є відношенням сили до площі, на яку вона діє:

$$\sigma = \frac{F}{S}.$$

Розмірність цієї величини така сама, як і у тиску — Па.

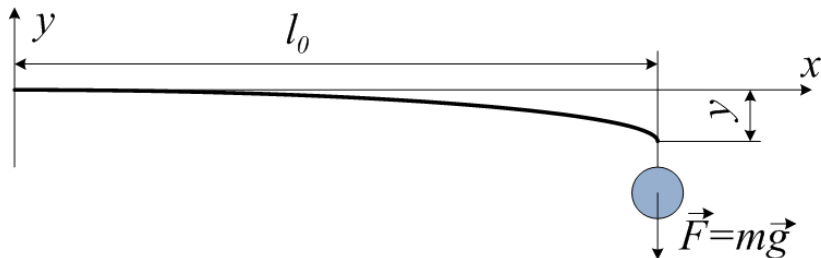


Рис. 2.2

Величина E — *модуль Юнга* — характеризує властивості механічної міцності (чи скоріше пружності) самої *речовини* незалежно від геометрії твердого тіла. Модуль Юнга також вимірюється у паскалях (Па). Фізичний зміст модуля Юнга полягає в тому, що він дорівнює механічній напруженості, при якій довжина стрижня збільшується удвічі.

В даній роботі необхідно визначити модуль Юнга для сталевого стрижня. Для цього стрижень закріплюють в одній точці та навантажують грузами різної маси та вимірюють деформацію. Деформація вимірюється вздовж вертикалі та називається *стрілою прогину* — рис. 2.2.

Отримаємо формулу для обчислення модуля Юнга за відомими довжиною стрижня l_0 , його діаметром d , масою груза m та величиною прогину y .

Якщо стрижень закріплений в одній точці, як показано на рис. 2.2, то для такого випадку відоме диференціальне рівняння *вигнутої балки*:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}, \quad (2.1)$$

де M — момент згинаючої сили, E — модуль Юнга, а I — величина, яка визначається геометрією поперечного перерізу балки (стрижня), яка чимось схожа на момент інерції (у тому розумінні, що вона також рахується по табличній формулі), але насправді вона такою не є, хоча у багатьох літературних джерелах її так називають.

Загальний розв'язок рівняння (2.1) має вигляд

$$y = \frac{mg}{2EI} \left(\frac{x^3}{3} - l_0 x^2 \right), \quad (2.2)$$

де l_0 — початкова довжина стрижня (а точніше, це довжина від точки кріплення до точки прикладення груза). Рівняння (2.2) математично виражає формулу кривої, вздовж якої прогинається стрижень в системі координат, показаній на рис. 2.2. Якщо точка прикладення груза (тобто точка прикладення сили) співпадає із кінцем стрижня, то можна припустити, що $x = l_0$ і підставити його у рівняння (2.2). Тоді

$$y = \frac{mg}{2EI} \left(\frac{l_0^3}{3} - 3l_0^3 \right) = \frac{mg}{2EI} \cdot \frac{-2l_0^3}{3} = -\frac{mgl_0^3}{3EI}. \quad (2.3)$$

Для балки круглого поперечного перетину (стрижня)

$$I = \frac{\pi d^4}{64}, \quad (2.4)$$

де d — діаметр стрижня.

Якщо підставити вираз (2.4) у рівняння (2.3), то отримаємо

$$y = -\frac{mgl_0^3}{3E \frac{\pi d^4}{64}} = -\frac{64mgl_0^3}{3\pi E d^4}.$$

З цього виразу знаходимо вираз для модуля Юнга:

$$\boxed{E = -\frac{64mgl_0^3}{3\pi y d^4}} \quad (2.5)$$

Оскільки знак величини прогину y буде «-» (див. систему координат на рис. 2.2), то в кінцевому підсумку знак модуля Юнга буде «+».

Перевірка розмірності виразу (2.5):

$$\text{Па} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \frac{\text{кг} \cdot \frac{\text{Н}}{\text{кг}} \cdot \text{м}^3}{\text{м} \cdot \text{м}^4} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \text{Па}.$$

2.2 Порядок виконання роботи

Нижче описані дії, які необхідно виконати для формування звіту по лабораторній роботі.

1. За допомогою кріплення (струбцини) жорстко закріпити сталевий стрижень горизонтально. За допомогою лінійки виміряти проміжок y_0 між стрижнем та горизонтальною площиною, яка слугуватиме для візуального контролю того, що після зняття навантаження стрижень повертається у початкове положення. Якщо не повертається — то необхідно його випрямити та взяти в якості навантаження груз із меншою масою. При подальших вимірюваннях деформації y від нього потрібно віднімати y_0 .

2. За допомогою штангенциркуля виміряти діаметр стрижня у кількох місцях, а за допомогою рулетки — довжину стрижня від точки кріплення до кінця. Всі вимірювання повторити не менше п'яти разів. Результати вимірювання занести у таблицю 2.1.

Таблиця 2.1.

№	d , мм	l_0 , мм	m_1 , г	y_1 , мм
1				
2				
3				
4				
5				

3. Вибрати груз деякої маси. Покласти його на чашу терезів та зважити на електронних вагах РАЗОМ із чашею, оскільки саме чаша із грузом буде підвішуватися до стрижня. Вимірювання маси також провести не менше п'яти разів і результати занести до таблиці 2.1 у колонку m_1 .

4. Послідовно підвішуючи та знімаючи чашу із грузом до кінця стрижня, п'ять разів виміряти деформацію y_1 . Результати заносити до таблиці 2.1.

ВАЖЛИВО: слідкуйте, щоб після кожного знімання груза стрижень повертався у горизонтальне положення, оскільки закон Гука справедливий лише для пружних деформацій.

5. Аналогічно повторити пп. 2, 3 і 4 для деякого груза з масою $m_2 > m_1$. Для даного циклу дослідів скласти таблицю 2.2, яка буде такою самою, як і таблиця 2.1, але для груза масою m_2 та, відповідно, деформації y_2 .

6. Аналогічно повторити пп. 2, 3 і 4 для деякого груза з масою $m_3 > m_2$. Для даного циклу дослідів скласти таблицю 2.3, яка буде такою самою, як і таблиці 2.1 та 2.2, але для груза масою m_3 та, відповідно, деформації y_3 .

7. За середніми величинами \bar{d} , \bar{l}_0 , \bar{m} та \bar{y} оцінити модуль Юнга для всіх трьох циклів вимірювань за формулою (2.5). В усіх трьох випадках повинно получитися приблизно одне і те саме число.

8. Оцінити похибку вимірювання модуля Юнга.

2.3 Зміст звіту

Оформлювати звіт рекомендується в наступній послідовності.

1. Титульна сторінка.
2. Назва та мета роботи; обладнання, що використовується для даної роботи.
3. Результати вимірювання деформації стрижня під час навантаженням його грузом масою m_1 (таблиця 2.1).
4. Результати вимірювання деформації стрижня під час навантаженням його грузом масою m_2 (таблиця 2.2).
5. Результати вимірювання деформації стрижня під час навантаженням його грузом масою m_3 (таблиця 2.3).
6. Формула для розрахунку модуля Юнга.

7. Розрахунок модуля Юнга для трьох циклів вимірювання (для різних мас грузів).
8. Результати оцінки похибок прямих вимірювань довжини та діаметра стрижня, а також маси груза та деформації стрижня.
9. Формула для оцінки відносної похибки непрямого вимірювання модуля Юнга матеріалу, з якого виготовлений стрижень.
10. Висновки. Чи співпадають обчислені значення модуля Юнга сталі з довідниковими? Наскільки велика похибка оцінки модуля Юнга для кожного циклу вимірювання та чи відрізняються ці похибки для різних циклів?

2.4 Контрольні запитання

1. Що таке деформація?
2. Що таке коефіцієнт жорсткості?
3. Що таке модуль Юнга?
4. Які ви можете назвати види деформацій твердих тіл?
5. Як пов'язані між собою коефіцієнт жорсткості стрижня з круглим поперечним перетином та модуль Юнга?
6. Чому модуль Юнга називають ще «модулем пружності першого роду»?
7. Як формулюється закон Гука?
8. Чи є якісь обмеження для застосування закону Гука? Чи завжди він виконується?