Лабораторна робота 1

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ГРАФІЧНИМ МЕТОДОМ

Мета: засвоїти графічний метод розв'язання задач ЛП.

1.1 Порядок виконання роботи

Графічний метод розв'язання задач лінійного програмування (ЛП):

заснований на геометричній інтерпретації задачі ЛП;

використовується для розв'язання задач ЛП, які залежать від двох або трьох змінних (на площині або у просторі відповідно);

є простим і наочним.

Розглянемо метод на прикладі такої задачі:

$$F(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 21 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 30 \\ 2x_2 \leq 16 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Спочатку побудуємо на площині, у декартовій прямокутній системі координат, область допустимих розв'язків (ОДР) задачі, що визначається системою умов-обмежень.

Кожна із нерівностей задає на площині відповідну напівплощину. Для того, щоб її визначити, потрібно побудувати відповідну пряму, яка розділяє площину на дві напівплощини та визначити, в якій з них виконуватиметься нерівність. Визначена напівплощина позначається відповідним штрихуванням.

У нашій задачі матимемо:

<u>1-ша пряма</u>

$3x_1 + x_2 = 21$

x_1	x_2
0	21
7	0

2-га пряма

$2x_1 + 3x_2 = 30$

x_1	x_2
0	10
15	0

3-тя пряма

$2x_2 = 16$

- паралельна осі $0x_1$ і проходить через точку з координатами (0;8).

Побудуємо прямі, знайдемо області, в яких виконуватимуться нерівності. ОДР являтиме собою область перетину п'яти знайдених областей – опуклу багатогранну область 0ABCD (рис. 1.1).

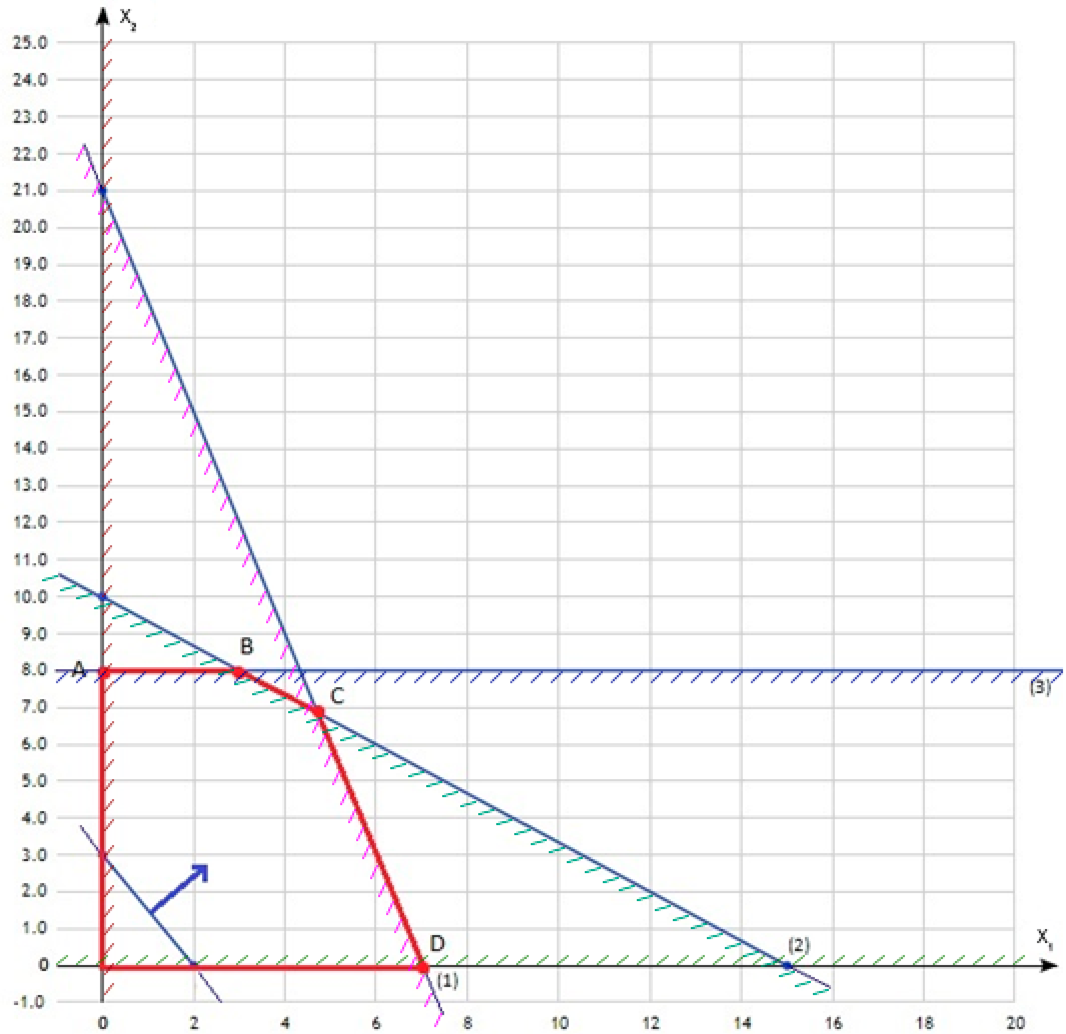

Рисунок 1.1

Далі, цільовій функції $F(x_1, x_2)$ на площині відповідає сукупність паралельних прямих відповідного нахилу.

Побудуємо для цільової функції нашої задачі $F(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2$ одну із прямих $3x_1 + 2x_2 = 6$ і визначимо напрямок, при просуванні в якому значення цільової функції зростатиме. Рухатимемося у визначеному напрямку доти, доки не вийдемо на останню спільну точку з областю допустимих розв'язків задачі – це буде вершина C багатогранника 0ABCD і в ній досягатиметься максимальне значення цільової функції.

Координати точки C будуть оптимальним розв'язком нашої задачі. Їх легко знайти, оскільки точка C є точкою перетину прямих (1) та (2). Тому розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 21 \\ 2x_1 + 3x_2 = 30' \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 2 = 7, \Delta_1 = \begin{vmatrix} 21 & 1 \\ 30 & 3 \end{vmatrix} = 63 - 30 = 33,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 21 \\ 2 & 30 \end{vmatrix} = 90 - 42 = 48,$$

$$x_1 = \frac{33}{7} = 4\frac{5}{7}, x_2 = \frac{48}{7} = 6\frac{6}{7}.$$

$$F_{max} = 3 \times \frac{33}{7} + 2 \times \frac{48}{7} = \frac{195}{7} = 27\frac{6}{7}.$$

Завдання

Розв'язати задачу лінійного програмування графічним методом.

Таблиця 1.1

№ варіанту	**Умови задачі**
1	**2**
1	$F(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 \rightarrow max$ $\begin{cases} x_1 - 2x_2 \geq 4 \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ 4x_1 - 3x_2 \leq 12 \\ 7x_1 + 4x_2 \leq 28 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$
2	$F(x_1, x_2) = 2x_1 - 4x_2 \rightarrow max$

	$\begin{cases} 8x_1 - 5x_2 \leq 16 \\ x_1 + 3x_2 \leq 2 \\ 2x_1 + 7x_2 \geq 9 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$
3	$F(x_1, x_2) = -3x_1 + 6x_2 \rightarrow min$ $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \leq 4 \\ x_1 - 2x_2 \geq -4 \\ x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$

Продовження табл. 1.1

1	**2**
4	$F(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \rightarrow max$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1 \\ -5x_1 + x_2 \leq 0 \\ -x_1 + 5x_2 \geq 0 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$
5	$F(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \rightarrow max$ $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \leq 7 \\ -x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$
6	$F(x_1, x_2) = -2x_1 + x_2 \rightarrow min$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ -3x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$
7	$F(x_1, x_2) = -3x_1 + 2x_2 \rightarrow min$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ 3x_1 + x_2 \geq 15 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$
8	$F(x_1, x_2) = 2x_1 + 2x_2 \rightarrow max$ $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \geq -6 \\ x_1 + x_2 \geq 3 \\ 0 \leq x_1 \leq 3 \\ 0 \leq x_2 \leq 5 \end{cases}$

9	$F(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 \rightarrow max$ $$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \leq 4 \\ x_1 - 2x_2 \geq -4 \\ x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Продовження табл. 1.1

1	**2**
10	$F(x_1, x_2) = 2x_1 - 4x_2 \rightarrow min$ $$\begin{cases} 8x_1 - 5x_2 \leq 16 \\ x_1 + 3x_2 \geq 2 \\ 2x_1 + 7x_2 \leq 9 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$
11	$F(x_1, x_2) = 7x_1 + 5x_2 \rightarrow max$ $$\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 \geq 7 \\ 7x_1 - 5x_2 \geq 35 \\ x_1 - x_2 \leq 0 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$
12	$F(x_1, x_2) = 2x_1 - 3x_2 \rightarrow max$ $$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$
13	$F(x_1, x_2) = -2x_1 + x_2 \rightarrow min$ $$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6 \\ -3x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$
14	$F(x_1, x_2) = 3x_1 + 3x_2 \rightarrow max$ $$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4 \\ 3x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1 + 5x_2 \geq 4 \\ 0 \leq x_1 \leq 3 \\ 0 \leq x_2 \leq 3 \end{cases}$$
15	$F(x_1, x_2) = 3x_1 + 3x_2 \rightarrow max$

	$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 8 \\ 3x_1 + 7x_2 \ge 21 \\ x_1 + 2x_2 \ge 6 \\ 0 \le x_1 \le 1 \\ 0 \le x_2 \le 1 \end{cases}$