

Розв'язування задач лінійного програмування (ЛП) графічним методом


Мета заняття: ознайомитись із змістом та особливостями розв'язування задач ЛП та засвоїти теоретичний матеріал шляхом розв'язування задачі ЛП за варіантом індивідуального завдання.

1.1. Короткі теоретичні відомості

1.1.1. Загальна постановка та формалізований опис задач ЛП

Задачі, які виникають при прийнятті певних науково та методично обґрунтованих рішень, в тому числі щодо процесів у ГВС, є типовими задачами, що відображають конкретні гаківі-практичні ситуації, які в тому чи іншому вигляді інтерпретуються як однокритеріальні задачі. Наприклад, це задачі про оптимальне використання обмежених ресурсів.

Такі задачі розв'язуються методами *лінійного програмування (ЛП)* – найбільш розробленого і широко застосовуваного розділу математики, що вивчає методи розв'язування екстремальних задач, які характеризуються лінійною залежністю між змінними і лінійним критерієм оптимальності.

 Термін "*лінійне програмування*" виник як результат неточного перекладу англійського "*linear programming*". Одне із значень слова "*programming*" – складання планів, планування. Отже, правильним перекладом англійського "*linear programming*" було б не "*лінійне програмування*", а "*лінійне планування*", що більш точно відображає сутність вирішуваних задач. Однак, терміни ЛП, математичне програмування і т.д. в наших ынформаційнихджерелах стали загальноприйнятими.

Розв'язування задач ЛП полягає у відшуванні екстремальних значень цільової функції серед множини її можливих значень при лінійних обмеженнях.

Формалізований опис будь-якої задачі ЛП передбачає формування її математичної моделі, яка містить:

- **цільову функцію** (1.1), екстремальне значення якої (максимум чи мінімум) потрібно знайти;
- **обмеження** (1.2) у вигляді системи лінійних рівнянь або нерівностей;
- **умову невід'ємності** змінних (1.2.3).

Узагальнена модель задач планування виробництва, описаних в п. 1.1.7, записується наступним чином.

1. **Цільова функція задачі, або критерій ефективності**, під яким розуміють відповідно до умов задачі, наприклад:
 - максимальну продуктивність від виробництва будь-яких видів продукції;
 - мінімальну вартість перевезень, максимальну продуктивність виробничої ділянки тощо, представляється функцією $F(x)$, що прямує до деякого оптимального значення, яке відповідно до умов задачі може дорівнювати максимальному або мінімальному значенню:

1.2. Графічний метод розв'язування задач ЛП

1.2.1. Стислий огляд методів розв'язування задач ЛП

Методи розв'язування задач ЛП, до яких відносяться задачі планування виробництва, належать до обчислювальної математики. Проте фахівцям у галузі автоматизації та комп'ютерно-інтегрованих технологій корисно знати про їх властивості.

Найбільш часто застосовуваними *методами розв'язування задач ЛП* є методи:

- графічного (або геометричного) розв'язування;
- простого перебору;
- направленного перебору;
- симплексний.

Графічний метод розв'язування задач ЛП використовується переважно з метою наочного представлення сутності задачі (рис. 1.2.1) і передбачає послідовне виконання ряду послідовних кроків.

Послідовність розв'язування задач ЛП на основі їх (задач) геометричної інтерпретації наступний.

1. Формулюють умову задачі.
2. На площині $\{x_1, x_2\}$ будують прямі, рівняння яких отримують в результаті заміни в обмеженнях знаків нерівностей на знаки точних рівностей.
3. Знаходять півплощини, які відповідають кожному з обмежень задачі.
4. Знаходять область допустимих рішень.
5. Будують пряму $c_1x_1 + c_2x_2 = h$, де h – будь-яке додатне число, бажано таке, щоб проведена пряма проходила через багатокутник рішень.
6. Переміщують знайдену пряму паралельно самій собі в напрямку збільшення (при пошуку максимуму) або зменшення (при пошуку мінімуму) цільової функції. В результаті, або знайдеться точка, в якій цільова функція приймає максимальне (мінімальне) значення, або буде встановлена необмеженість функції на множині рішень.
7. Визначають координати точки максимуму (мінімуму) функції і обчислюють значення функції в цій точці.

Доречно наголосити, що методи **простого** та **направленного перебору** застосовують переважно при розв'язуванні класичних задач оптимізації.

1.2.2. Приклад застосування графічного методу розв'язування задач ЛП



Умова задачі. Компанія спеціалізується на випуску хокейних ключок і наборів шахів. При цьому:

- кожна ключка приносить компанії прибуток в розмірі \$ 2,
- кожен шаховий набір – в розмірі \$ 4.

На виготовлення однієї ключки потрібно:

- 4 години роботи на ділянці А і 2 години роботи на ділянці В.

На виготовлення одного шахового набору потрібно:

- 6 годин на ділянці А, 6 годин на ділянці В і 1 година на ділянці С.

Доступна виробнича потужність ділянок становить:

- А – 120 нормо-годин на день;
- В – 72 нормо-години;

- С – 10 нормо-годин.

Визначити кількість ключок і шахових наборів яку повинна випускати компанія щодня, щоб *отримувати максимальний прибуток*.

Умову задачі зручно представити у табличній форм, як показано в табл. 1.1.

Таблиця 1. 1

Вихідні дані прикладу 1.1

Виробничі ділянки	Витрати часу на виготовлення одиниці продукції, нормо-годин		Доступний фонд часу, нормо-годин
	хокейні ключки x_1	набори шахів x_2	
А	4	6	120
В	2	6	72
С	-	1	10
Прибуток на одиницю продукції, \$	2	4	

Розв'язання.

1. Формулювання задачі.

За даною умовою задачі змінними є:

x_1 – кількість хокейних ключок, що виготовляються щодня;

x_2 – кількість шахових наборів, що виготовляються щодня.

Цільова функція – прибуток від виробничої діяльності компанії:

$$F(x) = (2x_1 + 4x_2) \rightarrow \max . \quad (1.3)$$

Обмеження витрат робочого часу на виготовлення продукції на виробничих ділянках А, В, С відповідно:

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 \leq 120; \\ 2x_1 + 6x_2 \leq 72; \\ x_2 \leq 10. \end{cases}$$

Умова невід'ємності змінних $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.

2. Побудова прямих, які відповідають кожному із функціональних обмежень витрат робочого часу на виготовлення продукції на виробничих ділянках А, В, С відповідно (рис. 1.1).

Прямі на рис. 1.1 позначені:

- (1) для обмеження витрат робочого часу ділянки А;
- (2) для обмеження витрат робочого часу ділянки В;
- (3) для обмеження витрат робочого часу ділянки С відповідно.

3. Знаходження півплощин, які відповідають кожному з обмежень задачі. Штрихами на прямих (1), (2), (3) позначені напівплощини, що визначаються обмеженнями задачі.

4. Область допустимих рішень включає в себе точки, для яких виконуються всі обмеження задачі. В даному випадку область являє собою п'ятикутник (на рис. 1.1 позначено ABCDO і виділено темним кольором).
5. Пряма $2x_1 + 4x_2$ (див. вираз (1.3)), що відповідає цільовій функції $F(x)$, на рис. 1.1 представлена пунктирною лінією.
6. Пряму переміщують паралельно самій собі вгору (напрямок вказано стрілкою), оскільки саме в цьому напрямку значення цільової функції збільшується. Останньою точкою багатокутника рішень, з якою перетнеться пряма, перш, ніж вийде за його межі, є точка С. Це і є точка, що відповідає оптимальному рішенню задачі.
7. Обчислення координат точки С. Вона є точкою перетину прямих (1) і (2). Розв'язавши спільно рівняння цих прямих, знаходять: $x_1^* = 24$, $x_2^* = 4$. Підставляючи знайдені величини в цільову функцію, можна знайти її значення в оптимальній точці С: $F(x) = (2x_1 + 4x_2) = 2 \cdot 24 + 4 \cdot 4 = 64$.

Таким чином, для максимізації прибутку компанії слід щодня випускати:

- 24 ключки;
- 4 наборів шахів.

Реалізація такого плану забезпечить щоденний прибуток у розмірі \$ 64.

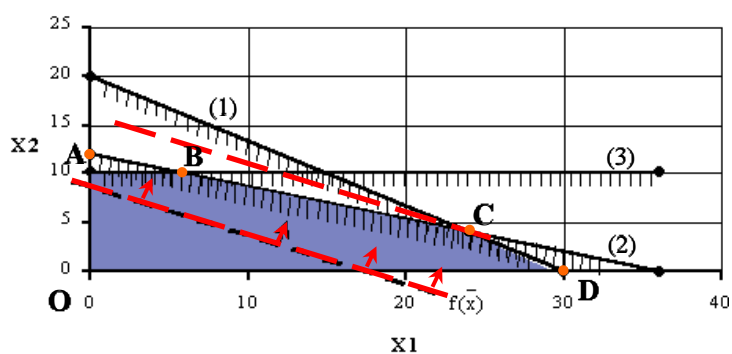


Рис. 1.1. Графічний розв'язок задачі ЛП за прикладом 1.1

1.2. Вихідні дані розв'язування транспортної задачі графічним методом ЛП

Знайти оптимальний план перевезень, тобто маршрут, який визначає, від якого постачальника яким споживачам і в якій кількості необхідно перевозити вантаж, щоб загальні транспортні витрати були мінімальними.

Вихідні дані задачі наведені в табл. 1.2.

Таблиця 1.2

Варіанти індивідуальних завдань

Варіант 1						
	Споживач 1	Споживач 2	Споживач 3	Споживач 4	Споживач 5	Об'єми запасів
Постачальник 1	5	8	7	10	3	200
Постачальник 2	4	2	2	5	6	450
Постачальник 3	7	3	5	9	2	250
Потреби	100	125	325	250	100	
Варіант 2						
	Споживач 1	Споживач 2	Споживач 3	Споживач 4	Споживач 5	Об'єми запасів
Постачальник 1	1	2	3	1	2	230
Постачальник 2	5	3	1	4	1	100
Постачальник 3	3	4	2	5	3	60
Постачальник 4	2	5	3	6	6	215

Потреби	150	200	80	75	100	
Варіант 3						
	Споживач 1	Споживач 2	Споживач 3	Споживач 4	Споживач 5	Об'єми запасів
Постачальник 1	1	2	3	1	2	70
Постачальник 2	5	3	1	4	1	80
Постачальник 3	3	4	2	5	3	250
Постачальник 4	2	5	3	6	6	180
Потреби	200	100	80	100	100	
Варіант 4						
	Споживач 1	Споживач 2	Споживач 3	Споживач 4	Споживач 5	Об'єми запасів
Постачальник 1	3	3	7	5	3	170
Постачальник 2	2	2	2	5	6	180
Постачальник 3	1	3	5	9	2	70
Потреби	75	65	95	85	100	
Варіант 5						
	Споживач 1	Споживач 2	Споживач 3	Споживач 4	Споживач 5	Об'єми запасів
Постачальник 1	5	4	8	5	3	170
Постачальник 2	7	2	2	5	6	180
Постачальник 3	8	7	10	9	2	70
Потреби	75	65	95	85	100	
Варіант 6						
	Споживач 1	Споживач 2	Споживач 3	Споживач 4	Споживач 5	Об'єми запасів
Постачальник 1	3	8	7	10	12	200
Постачальник 2	4	2	2	8	11	450
Постачальник 3	5	3	5	10	10	250
Потреби	100	125	325	250	100	
Варіант 7						
	Споживач 1	Споживач 2	Споживач 3	Споживач 4	Споживач 5	Об'єми запасів
Постачальник 1	1	4	4	7	2	230
Постачальник 2	2	3	5	6	3	100
Постачальник 3	3	2	6	5	4	60
Постачальник 4	4	1	7	4	5	215
Потреби	150	200	80	75	100	
Варіант 8						
	Споживач 1	Споживач 2	Споживач 3	Споживач 4	Споживач 5	Об'єми запасів
Постачальник 1	10	9	8	7	6	70
Постачальник 2	6	7	8	9	10	80
Постачальник 3	5	6	7	8	9	250
Постачальник 4	9	8	7	6	5	180
Потреби	200	100	80	100	100	
Варіант 9						
	Споживач 1	Споживач 2	Споживач 3	Споживач 4	Споживач 5	Об'єми запасів
Постачальник 1	10	8	6	8	5	170
Постачальник 2	9	9	7	7	4	180
Постачальник 3	8	10	8	6	3	70
Потреби	75	65	95	85	100	
Варіант 10						
	Споживач 1	Споживач 2	Споживач 3	Споживач 4	Споживач 5	Об'єми запасів
Постачальник 1	1	4	7	10	7	170
Постачальник 2	2	5	8	9	6	180
Постачальник 3	3	6	9	8	5	70
Потреби	75	65	95	85	100	
Варіант 11						

	Споживач 1	Споживач 2	Споживач 3	Споживач 4	Споживач 5	Об'єми запасів
Постачальник 1	10	9	8	7	6	100
Постачальник 2	6	7	8	9	10	180
Постачальник 3	5	6	7	8	9	70
Постачальник 4	9	8	7	6	5	55
Потреби	75	65	95	85	85	
Варіант 12						
	Споживач 1	Споживач 2	Споживач 3	Споживач 4	Споживач 5	Об'єми запасів
Постачальник 1	10	9	8	7	6	105
Постачальник 2	6	7	8	9	10	75
Постачальник 3	5	6	7	8	9	120
Постачальник 4	9	8	7	6	5	105
Потреби	75	65	95	85	85	
Варіант 13						
	Споживач 1	Споживач 2	Споживач 3	Споживач 4	Споживач 5	Об'єми запасів
Постачальник 1	10	9	8	7	6	105
Постачальник 2	6	7	8	9	10	75
Постачальник 3	5	6	7	8	9	120
Постачальник 4	9	8	7	6	5	105
Потреби	85	75	95	80	70	
Варіант 14						
	Споживач 1	Споживач 2	Споживач 3	Споживач 4	Споживач 5	Об'єми запасів
Постачальник 1	1	2	3	4	5	100
Постачальник 2	6	7	8	9	1	180
Постачальник 3	9	8	7	6	5	70
Постачальник 4	4	3	2	1	9	55
Потреби	75	65	95	85	85	
Варіант 15						
	Споживач 1	Споживач 2	Споживач 3	Споживач 4	Споживач 5	Об'єми запасів
Постачальник 1	1	5	8	5	1	105
Постачальник 2	2	6	9	4	2	75
Постачальник 3	3	7	7	3	3	120
Постачальник 4	4	8	6	2	4	105
Потреби	75	65	95	85	85	
Варіант 16						
	Споживач 1	Споживач 2	Споживач 3	Споживач 4	Споживач 5	Об'єми запасів
Постачальник 1	2	8	1	7	1	105
Постачальник 2	4	6	3	5	5	75
Постачальник 3	6	4	5	3	9	120
Постачальник 4	8	2	7	1	3	105
Потреби	85	75	95	80	70	
Варіант 17						
	Споживач 1	Споживач 2	Споживач 3	Споживач 4	Споживач 5	Об'єми запасів
Постачальник 1	2	8	1	7	1	270
Постачальник 2	4	6	3	5	5	380
Постачальник 3	6	4	5	3	9	150
Постачальник 4	8	2	7	1	3	200
Потреби	100	150	200	250	300	
Варіант 18						
	Споживач 1	Споживач 2	Споживач 3	Споживач 4	Споживач 5	Об'єми запасів
Постачальник 1	2	8	1	7	1	270
Постачальник 2	4	6	3	5	5	380
Постачальник 3	6	4	5	3	9	350

Потреби	100	150	200	250	300	
Варіант 19						
	Споживач 1	Споживач 2	Споживач 3	Споживач 4	Споживач 5	Об'єми запасів
Постачальник 1	2	8	1	7	1	200
Постачальник 2	4	6	3	5	5	270
Постачальник 3	6	4	5	3	9	100
Постачальник 4	8	2	7	1	3	97
Потреби	125	135	145	125	137	
Варіант 20						
	Споживач 1	Споживач 2	Споживач 3	Споживач 4		Об'єми запасів
Постачальник 1	1	2	3	1		200
Постачальник 2	5	3	1	4		100
Постачальник 3	3	4	2	5		130
Постачальник 4	2	5	3	6		100
Потреби	125	135	145	125		
Варіант 21						
	Споживач 1	Споживач 2	Споживач 3	Споживач 4	Споживач 5	Об'єми запасів
Постачальник 1	10	11	12	9	8	270
Постачальник 2	9	12	11	10	9	380
Постачальник 3	8	7	9	10	11	350
Потреби	100	150	200	250	300	
Варіант 22						
	Споживач 1	Споживач 2	Споживач 3	Споживач 4		Об'єми запасів
Постачальник 1	1	3	5	7		200
Постачальник 2	2	5	9	3		165
Постачальник 3	4	7	7	1		130
Постачальник 4	6	9	5	3		100
Потреби	100	225	145	125		
Варіант 23						
	Споживач 1	Споживач 2	Споживач 3	Споживач 4	Споживач 5	Об'єми запасів
Постачальник 1	1	5	1	8	1	200
Постачальник 2	2	6	3	4	4	270
Постачальник 3	3	7	5	2	7	100
Постачальник 4	4	8	7	6	5	97
Потреби	125	135	145	125	137	
Варіант 24						
	Споживач 1	Споживач 2	Споживач 3	Споживач 4		Об'єми запасів
Постачальник 1	11	4	5	6		200
Постачальник 2	3	3	3	11		100
Постачальник 3	11	5	5	6		130
Постачальник 4	3	7	3	11		100
Потреби	125	135	145	125		
Варіант 25						
	Споживач 1	Споживач 2	Споживач 3	Споживач 4	Споживач 5	Об'єми запасів
Постачальник 1	1	8	2	1	5	270
Постачальник 2	3	5	3	3	6	380
Постачальник 3	7	3	1	5	7	350
Потреби	100	150	200	250	300	
Варіант 26						
	Споживач 1	Споживач 2	Споживач 3	Споживач 4		Об'єми запасів
Постачальник 1	9	5	1	5		200
Постачальник 2	8	4	2	6		165
Постачальник 3	7	3	3	7		130

Постачальник 4	6	2	4	8	100	
Потреби	100	225	145	125		
Варіант 27						
	Споживач 1	Споживач 2	Споживач 3	Споживач 4	Об'єми запасів	
Постачальник 1	9	5	1	5	300	
Постачальник 2	8	4	2	6	350	
Постачальник 3	7	3	3	7	420	
Потреби	300	350	270	150		
Варіант 28						
	Споживач 1	Споживач 2	Споживач 3	Споживач 4	Об'єми запасів	
Постачальник 1	1	2	1	6	500	
Постачальник 2	4	5	2	7	450	
Постачальник 3	7	8	3	8	300	
Постачальник 4	9	2	4	9	150	
Постачальник 5	1	6	5	1	317	
Потреби	147	700	530	190		
Варіант 29						
	Споживач 1	Споживач 2	Споживач 3	Споживач 4	Споживач 5	Об'єми запасів
Постачальник 1	1	5	9	4	3	500
Постачальник 2	2	6	8	3	5	750
Постачальник 3	3	7	7	2	7	830
Постачальник 4	4	8	6	1	9	180
Постачальник 5	5	9	5	3	7	107
Потреби	147	700	530	190	800	
Варіант 30						
	Споживач 1	Споживач 2	Споживач 3	Споживач 4	Споживач 5	Об'єми запасів
Постачальник 1	3	5	4	4	3	500
Постачальник 2	5	6	3	3	5	750
Постачальник 3	7	7	5	2	7	830
Постачальник 4	9	8	1	1	9	180
Постачальник 5	7	9	7	3	7	107
Потреби	147	700	530	190	800	

1.3. Зміст звіту

- 1.3.1. Назва та мета заняття.
- 1.3.2. Короткі теоретичні можливості щодо змісту та методів розв'язування задач лінійного програмування.
- 1.3.3. Короткі теоретичні можливості щодо змісту графічного методу розв'язування задач лінійного програмування.
- 1.3.4. Зміст індивідуального завдання згідно визначеного варіанту за табл.1.2 та представлення вихідної інформації у вигляді табл. 1.1.
- 1.3.5. Математична постановка задачі індивідуального завдання при розв'язуванні транспортної задачі з визначеною цільовою функцією та обмеженнями.
- 1.3.6. Розв'язування задачі ЛП за варіантом індивідуального завдання. Результати представити за аналогією рис. 1.1 з відповідними коментарями.
- 1.3.7. Висновки по роботі.