

Лабораторна робота 8

Гармонічний аналіз періодичних несинусоїдних сигналів

1. Мета роботи

Вивчення взаємозв'язку структури сигналу та його спектра на прикладі аналізу періодичної послідовності прямокутних імпульсів.

2. Основні теоретичні положення

Для багатьох електротехнічних пристроїв робочим режимом роботи є такий режим, при якому форми кривих струмів та напруг суттєво відрізняються від синусоїдних. Періодичні сигнали у вигляді імпульсів різної форми знаходять широке застосування у різноманітних пристроях телекомунікацій, електроніки, автоматики та управління. Нарешті, у нелінійних колах навіть при синусоїдній формі вхідних сигналів виникають сигнали – відгуки несинусоїдної форми.

З курсу математики відомо, що періодичні несинусоїдні функції, які задовольняють умовам Дирихле, можна розкласти у тригонометричний ряд Фур'є, тобто представити несинусоїдну функцію сумою гармонічних складових.

Нехай періодична функція $f(t)$ має період T , тобто:

$$f(t) = f(t + T)$$

Позначимо $\omega_1 = 2\pi/T$ і будемо називати ω_1 основною кутовою частотою. Гармонічні складові ряду з такою частотою створюють основну гармоніку. Складові $\omega_n = n\omega_1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) з більш високими кутовими частотами називаються вищими гармоніками.

Гармонічний ряд Фур'є у тригонометричній формі записується у вигляді:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t)), \quad (8.1)$$

де $\frac{a_0}{2}$ – постійна складова або нульова гармоніка ($n = 0$). Вона дорівнює середньому значенню функції $f(t)$ за її період.

Інші складові ряду (8.1) визначають набір гармонічних складових, частоти яких кратні основній частоті ω_1 :

a_n – амплітуда косинусної складової n -ї гармоніки;

b_n – амплітуда синусної складової n -ї гармоніки.

Коефіцієнти a_0 , a_n , b_n ряду (8.1) визначаються за співвідношеннями:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt; \quad (8.2)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega_1 t) dt; \quad (8.3)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega_1 t) dt. \quad (8.4)$$

Об'єднавши синусну та косинусну складову кожної гармоніки у одну еквівалентну синусоїду, ряд Фур'є можна записати більш зручному вигляді.

Така форма зручна у випадках, коли, наприклад, потрібно знати відсотковий зміст кожної гармоніки:

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n)), \quad (8.5)$$

де

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} - \text{амплітуда } n\text{-ї гармоніки}; \quad (8.6)$$

$$\varphi_n = \arctg \frac{b_n}{a_n} - \text{фаза } n\text{-ї гармоніки}; \quad (8.7)$$

$$A_0 = \frac{a_0}{2} - \text{постійна складова.} \quad (8.8)$$

Таким чином, періодичний сигнал довільної форми може бути однозначно представлений його спектром, що складається з ряду гармонійних коливань з амплітудами і фазами, залежними від номера відповідних гармонік. Сукупність c_n утворює спектр амплітуд, а сукупність φ_n – спектр фаз. Спектр амплітуд можна представити у вигляді графіка, на якому значення амплітуд зображуються відрізками, довжина яких пропорційна їх амплітуді (рис. 8.1 а).

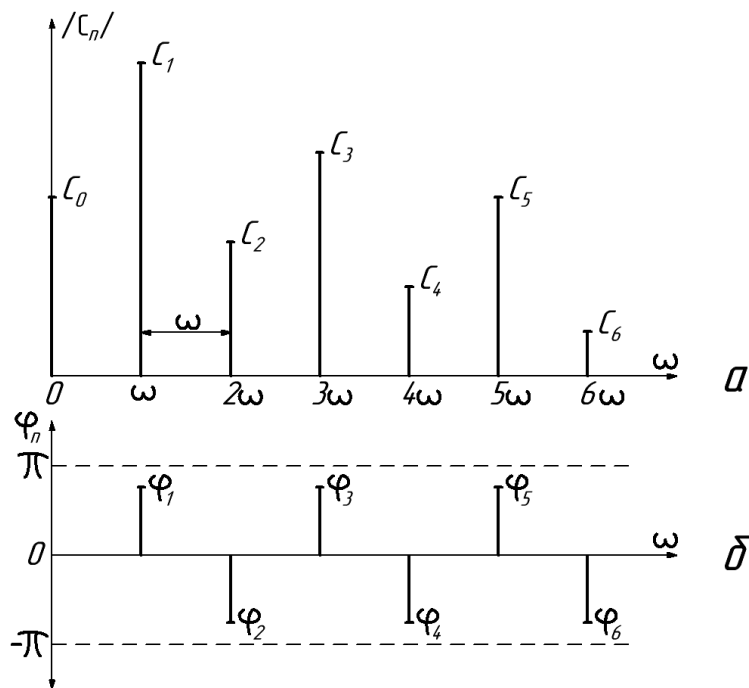


Рис. 8.1 – Амплітудний спектр (а) і фазовий спектр (б).

Ясно, що чим більше буде період функції, тим менше будуть частотні інтервали між гармоніками, тобто тим густіше буде спектр. Подібні спектри, що складаються з дискретних частот, називають лінійчатими. Аналогічним чином можна побудувати і спектр фаз (рис. 8.1 б), відновлюючи в точках осі абсцис $\omega, 2\omega, 3\omega, \dots$ перпендикулярні до неї відрізки, що пропорційні початковим фазам φ_n (із врахуванням їх знаку).

Періодичні несинусоїдальні функції, що зображують електричні та магнітні величини, мають зазвичай будь-який вид симетрії, і це полегшує їх розкладання в ряд Фур'є.

Дані про коефіцієнти ряду Фур'є, які стосуються різноманітних випадків симетрії, зведені в таблицю 8.1.

Таблиця 8.1 – Дані про коефіцієнти ряду Фур'є

Симетрія відносно	Математична умова	Коефіцієнти		
		a_0	a_n	b_n
осі ординат (парна функція)	$f(t) = f(-t)$	є	є	рівні нулю
початку координат (непарна функція)	$f(t) = -f(-t)$	рівні нулю	рівні нулю	є
осі абсцис при поєднанні двох напівперіодів	$f(t) = -f(t + \pi)$	рівні нулю	є тільки непарні	є тільки непарні

Розглянемо класичний приклад розкладення в ряд Фур'є періодичної послідовності прямокутних імпульсів виду, як на рис. 8.2 — так званого меандру.

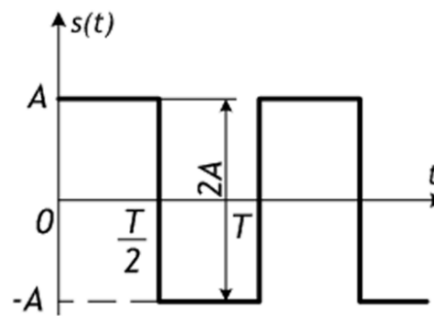


Рис. 8.2 – Меандр

Знайдемо для цього сигналу коефіцієнти ряду Фур'є. Меандр можна задати аналітичним виразом

$$f(t) = \begin{cases} A, & 0 < t < \frac{T}{2}; \\ -A, & \frac{T}{2} < t < T. \end{cases} \quad (8.9)$$

Для простоти припустимо, що $A=1$, $T=2\pi$. Тоді

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \pi; \\ -1, & \pi < t < 2\pi. \end{cases} \quad (8.10)$$

Якщо такий сигнал розкласти у ряд Фур'є, то, внаслідок того, що він є непарною функцією, в ньому будуть присутні лише синусні (непарні) складові, і відповідний ряд Фур'є буде мати наступний вигляд:

$$f(t) = b_1 \sin(\omega t) + b_2 \sin(2\omega t) + b_3 \sin(3\omega t) + b_4 \sin(4\omega t) + \dots, \quad (8.11)$$

а його коефіцієнти будуть визначатися за формулою (8.4):

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot \sin(nt) dt = -\frac{2}{\pi n} \cos(nt) \Big|_0^{\pi} = -\frac{2}{\pi n} ((-1)^n - 1) \quad (8.12)$$

Тоді відповідні коефіцієнти ряду будуть такі:

$$\begin{aligned} b_1 &= -\frac{2}{\pi}(-2) = \frac{4}{\pi}, \\ b_2 &= -\frac{2}{\pi}(1 - 1) = 0, \\ b_3 &= -\frac{2}{3\pi}(-2) = \frac{4}{3\pi}, \\ b_4 &= 0 \\ b_5 &= -\frac{2}{5\pi}(-2) = \frac{4}{5\pi}, \end{aligned} \quad (8.13)$$

і т.д. Коефіцієнти з парними індексами дорівнюють нулю внаслідок того, що -1 у парному степені дорівнює 1 . Таким чином, якщо винести за дужки спільний множник $\frac{4}{\pi}$, отримаємо

$$s(t) = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin(t)}{1} + \frac{\sin(3t)}{3} + \frac{\sin(5t)}{5} + \frac{\sin(7t)}{7} + \dots \right) \quad (8.12)$$

3. Розрахункова частина

1. Розрахувати та побудувати амплітудно-частотний спектр періодичної послідовності прямокутних імпульсів згідно варіанту. По осі ординат відкладати значення співвідношення $\frac{A_n}{A_1}$.

4. Експериментальна частина

Робота виконується з використанням програмного середовища LTSpice.

1. Запустити програму LTSpice. Отримати зображення стандартного вікна програми. Зібрати схему для проведення досліджень (рис.8.3).

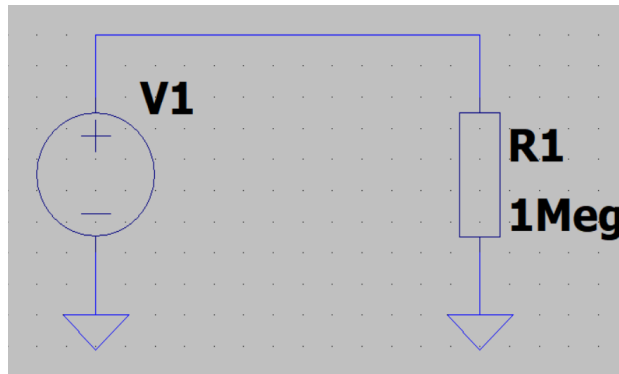


Рис.8.3 – Схема для проведення досліджень

Як видно з рис.8.1, на схемі розміщено резистор, умовне графічне позначення якого виконано як прямокутник. Для розміщення на схемі цього резистора з більш звичним позначенням слід з вікна вибору компонентів (клавіша F2) вибрати в меню Misc компонент EuropeanResistor.

Далі на схемі розміщується джерело напруги (клавіша F2 – кореневий каталог – voltage) та заповнюються параметри джерела сигналу в розширеному режимі (натиснути праву кнопку миші над джерелом напруги і далі натиснути кнопку advanced) (рис.8.4):

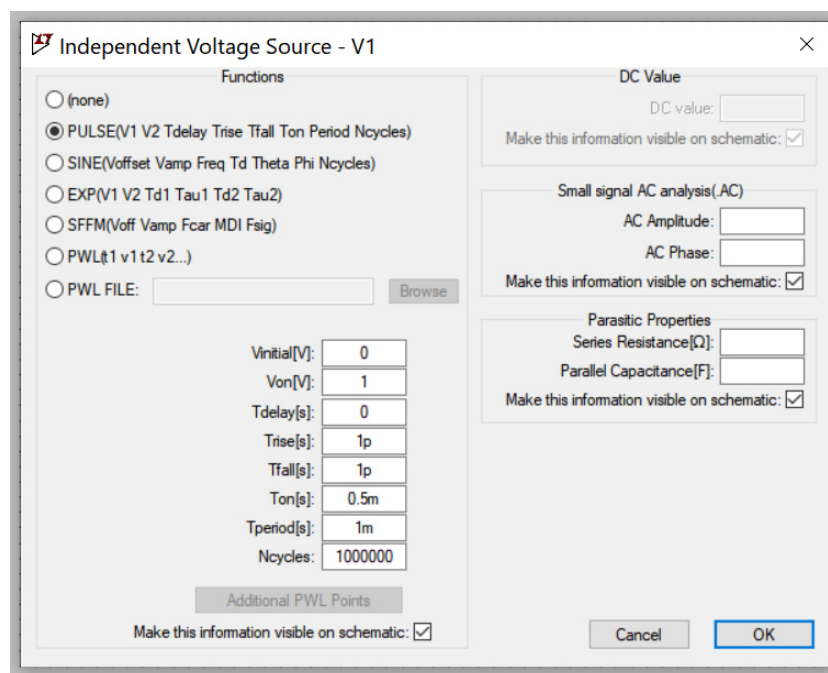


Рис.8.4 – Розширений режим налаштування параметрів джерела сигналу

(PULSE (0 1 0 1p 1p 0.5m 1m 1000000))

Напруга сигналу (V_{on}) = 1 вольт, частота (T_{period}) = $1/1 \text{ m} = 1 \text{ кГц}$, тривалість імпульсів (T_{on}) = 0.5 м. Часові параметри сигналу встановити згідно свого варіанту.

Запустити схему з такими параметрами симуляції (рис.8.5):

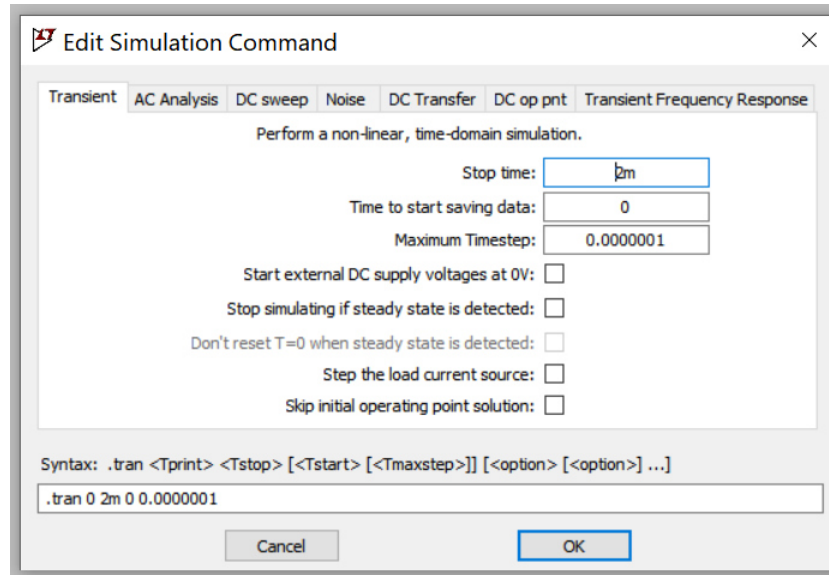


Рис.8.4 – Меню налаштування параметрів симуляції

`.tran 0 2m 0 0.0000001`

Час зупинення аналізу перехідного процесу (Stop Time) = 2 мс. (Необхідно обирати значення $1 \div 2T$).

Слід зазначити невелику величину параметра Maximum Timestep = 0.0000001. Чим вона менша, тим точніше буде отриманий результат, хоча розрахунок відбудуватиметься довше. Для підвищення точності обчислень можна відключити стиснення даних, оскільки компресія відбувається з втратами (в меню Simulate/Control panel/Compression прибрати всі галочки - але ці налаштування не запам'ятовуються, так що їх потрібно змінювати при кожному запуску LTSpice), при цьому швидкість симуляції істотно зросте, але знадобиться набагато більше місця на диску (в 50 разів більше!) для часових файлів. Щоб не змінювати налаштування програми, стиснення можна відключити, додавши на схему Spice-директиву – `.options plotwinsize=0`. Ще більше збільшити точність розрахунків можна шляхом додавання на схему іншої Spice-директиву – `.options numdgt=7`. Ця команда з

будь-яким параметром, більшим за шість, включає режим обчислень з подвійною точністю.

2. Досліджування спектру амплітуд імпульсного сигналу. Запустивши симуляцію та встановивши курсор у точку вимірювання напруги на опорі, у вікні розрахунків з'явиться періодичний прямокутний сигнал (рис.8.5).

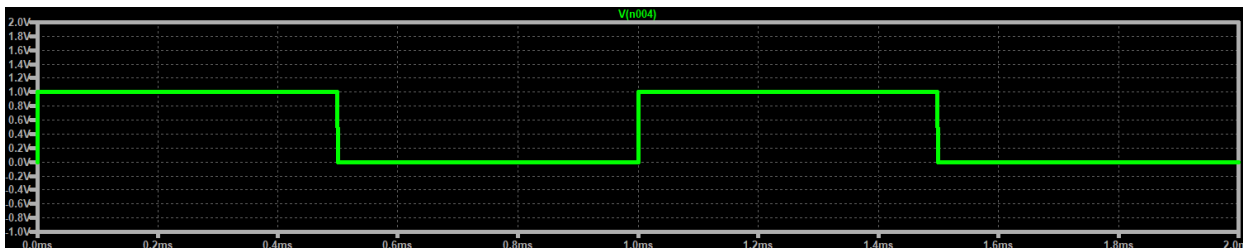


Рис.8.5 – Осцилограма періодичного прямокутного сигналу

Навівши курсор на вікно розрахунку та натиснувши праву клавішу миші, вибрати з пункту меню *View* пункт *FFT* (Швидке перетворення Фур'є):

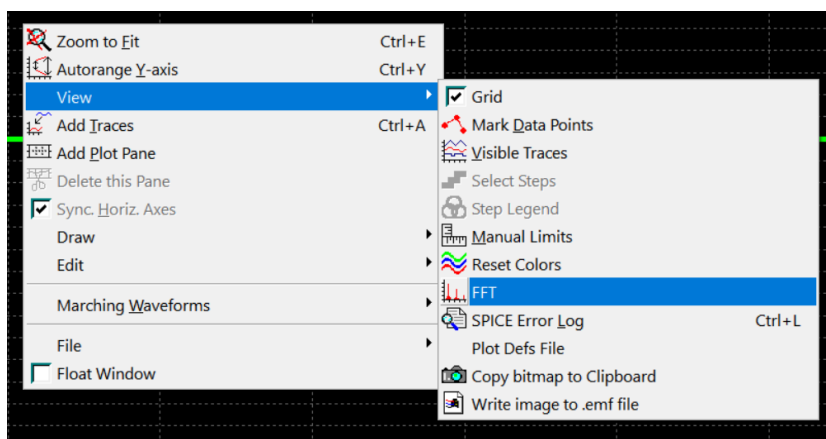


Рис.8.6 – Вибір режиму швидкого перетворення Фур'є (FFT)

Далі з'явиться вікно налаштувань, у якому слід вибрати ту точку на схемі, для якої буде проводитися розрахунок, в даному випадку це V(n004).

Натиснувши ОК, з'явиться вікно аналізатора спектру FFT (рис.8.7):

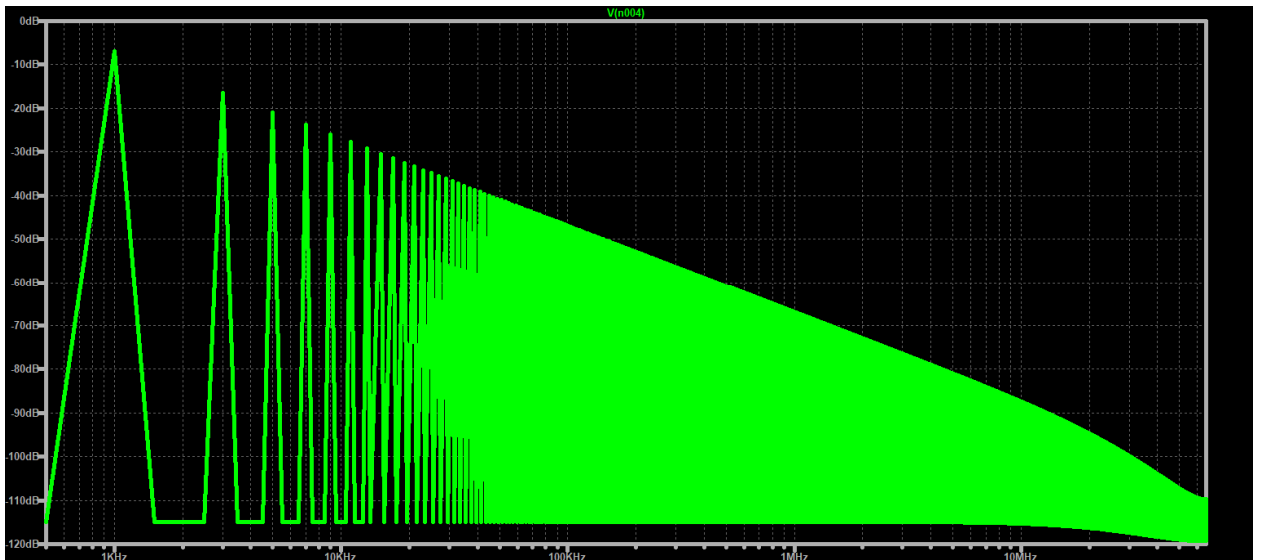


Рис.8.7 – Вікно аналізатора спектру FFT

Клікнувши по лівій шкалі правою кнопкою миші, з'явиться вікно з налаштуваннями вертикальної осі, вибрати лінійне масштабування (Linear).

Необхідно визначити амплітуди перших десяти гармонік. Для цього треба навести курсор на вершину кожної гармоніки, внизу в рядку станів програми відобразиться положення курсору на графіку (осі X – частота (Гц), осі Y – амплітуда (дБ або Вольт)).

3. Досліджування спектру амплітуд імпульсного сигналу через Spice-директиву (**FOUR 1000 13 V(n004)**).

Цю директиву слід розмістити на схемі (клавша S). Перший параметр директиви (в даному випадку 1000) задає частоту основної гармоніки, другий параметр (13) – число аналізованих компонентів (гармонік), і третій параметр – V(n004) вказує, що в якому вузлі розраховувати (у даному випадку розраховується напруга вузла n004).

Після завершення симуляції результати розрахунку виводяться в .log-файл, що у тієї директорії, як і .asc файл зі схемою. Цей файл можна переглянути з меню View/Spice Error log (або натиснувши комбінацію клавіш Ctrl+L). Нижче наведено приклад із фрагментом .log-файлу з результатами розрахунку спектра амплітуд та фаз (рис.8.8):

.OP point found by inspection.
 N-Period=1
 Fourier components of V(n004)
 DC component:0.5

Harmonic Number	Frequency [Hz]	Fourier Component	Normalized Component	Phase [degree]	Normalized Phase [deg]
1	1.000e+3	6.366e-1	1.000e+0	90.00°	0.00°
2	2.000e+3	1.500e-9	2.357e-9	-27.14°	-117.14°
3	3.000e+3	2.122e-1	3.333e-1	90.00°	0.00°
4	4.000e+3	8.632e-8	1.356e-7	-49.40°	-139.40°
5	5.000e+3	1.273e-1	2.000e-1	90.00°	-0.00°
6	6.000e+3	2.816e-8	4.423e-8	-94.77°	-184.77°
7	7.000e+3	9.095e-2	1.429e-1	90.00°	-0.00°
8	8.000e+3	2.129e-7	3.344e-7	107.51°	17.51°
9	9.000e+3	7.074e-2	1.111e-1	90.00°	0.00°
10	1.000e+4	2.700e-7	4.241e-7	108.46°	18.46°
11	1.100e+4	5.788e-2	9.091e-2	90.00°	0.00°
12	1.200e+4	3.569e-7	5.607e-7	-43.09°	-133.09°
13	1.300e+4	4.897e-2	7.693e-2	90.00°	-0.00°

Partial Harmonic Distortion: 44.502979%
 Total Harmonic Distortion: 48.342467%

Рис.8.8 – Результати розрахунку перших 13-ти гармонік спектра амплітуд та фаз

5. Обробка результатів

5.1. По отриманим теоретичним розрахункам спектрів амплітуд і фаз періодичної послідовності прямокутних імпульсів побудувати графіки;

5.2 Порівняти графіки розрахованих та експериментальних амплітудно-частотних спектрів;

5.3 Сформулювати висновки по виконаній роботі.

6. Контрольні питання

1 Як впливає зміна тривалості імпульсів на спектр періодичної послідовності прямокутних імпульсів?

2 Як зміниться спектр періодичної послідовності прямокутних імпульсів при зміні частоти проходження імпульсів?

3 Що зміниться в спектрі періодичної послідовності прямокутних імпульсів при зміні амплітуди імпульсів?

6 Що відбувається із спектром періодичної послідовності прямокутних імпульсів при зміні форми імпульсів?

7 Для чого визначають спектри періодичної послідовності прямокутних імпульсів на практиці?

8 В чому переваги і недоліки програмного методу аналізу спектрів?

9 Що називається спектром фаз?