

- про оптимальний план виробництва – ЩО й СКІЛЬКИ виготовити з цих запасів або
- про оптимальний розподіл запасів – КУДИ й СКІЛЬКИ направити, щоб обмежені ресурси найкраще використати.

Задано:

- запаси m видів ресурсів
- ціни n видів продуктів
- питомі витрати ресурсів для кожного продукту (визначені технологією у вигляді технологічної матриці розміром $m \times n$).

Треба знайти такий план розподілу ресурсів для виробництва продукції у формі шуканого вектора-рядка, щоб забезпечити максимальний дохід від реалізації виготовленої продукції із врахуванням обмежень на наявні обсяги ресурсів.

Математична модель

Позначення

m – кількість ресурсів

n – кількість продуктів

i – поточний номер (індекс) ресурсу, $i = 1, \dots, m$

j – поточний номер (індекс) продукту, $j = 1, \dots, n$

a_{ij} – питомі витрати i -го ресурсу для виготовлення j -го продукту, $A = \{a_{ij}\}$ – технологічна матриця

z_i – запас i -го ресурсу, $Z = \{z_i\}$ – вектор-стовпець запасів ресурсів

c_j – ціна одиниці j -го продукту, $C = \{c_j\}$ – вектор-рядок цін продуктів

x_j – шукана кількість j -го продукту, $X = \{x_j\}$ – план випуску продукції

$v_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$ – загальні витрати i -го ресурсу, використаного для випуску x_j одиниць j -ої продукції

$z_i - v_i$ – залишки i -го ресурсу

$d_j = c_j x_j$ – дохід від реалізації j -го продукту, $D = \sum_{j=1}^n d_j$ – загальний дохід (ЦФ).

Задача оптимізації

I. Знайти план $X = \{x_j\}$, за яким

II. ЦФ $D = \sum_{j=1}^n d_j \rightarrow \max$

III. за обмежень $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq z_i$ (використано $\leq$ запас)

та граничних умов: усі $x_j \geq 0$.

Початкові дані:

- список-стовпець назв m ресурсів ($i = 1, \dots, m$)
- список-рядок назв n продуктів ($j = 1, \dots, n$)
- питомі витрати кожного ресурсу для кожного продукту (матриця V розміром $m \times n$)
- запаси ресурсів (стовпець Z з m значень)
- ціни продуктів (рядок C з n значень).

Задача 2.1. Про оптимальний план ($n = 2$): графічний метод

Постановка задачі

Для виготовлення двох продуктів (П-1 та П-2) використовуються три види ресурсів, задано: технологічна матриця питомих витрат ресурсів розміром 3×2 , стовпець запасів ресур-

сів та рядок цін продуктів. Треба визначити оптимальний план виробництва (що й скільки виготовити), щоб дохід від реалізації продукції був максимальним із врахуванням обмежень на запаси ресурсів.

Два продукти й, відповідно, дві шукані невідомі, вибрано з метою побудови шуканого плану графічним методом.

Приклад 1.

Початкові дані

	П-1	П-2	Запас (Z)
Ресурс 1	2	0,3	23
Ресурс 2	1,2	0,9	60
Ресурс 3	2,9	1,1	50
Ціна	12	10	

Задача оптимізації

I. Знайти план $X = (x_1, x_2)$, такий, щоб

II. ЦФ $D = 12x_1 + 10x_2 \rightarrow \max$

III. за обмежень:

$$2,0x_1 + 0,3x_2 \leq 23$$

$$1,2x_1 + 0,9x_2 \leq 60$$

$$2,9x_1 + 1,1x_2 \leq 50$$

та граничних умов: $x_1, x_2 \geq 0$.

Графічний розв'язок задачі ЛП є наочною ілюстрацією процесу лінійної оптимізації: шляхом побудови графіків лінійних функцій, визначених з нерівностей системи обмежень, формується ОДР у формі багатокутника, далі будують графік ЦФ у вигляді прямої лінії, точка дотику якої до певної кутової точки ОДР визначає шуканий план (X).

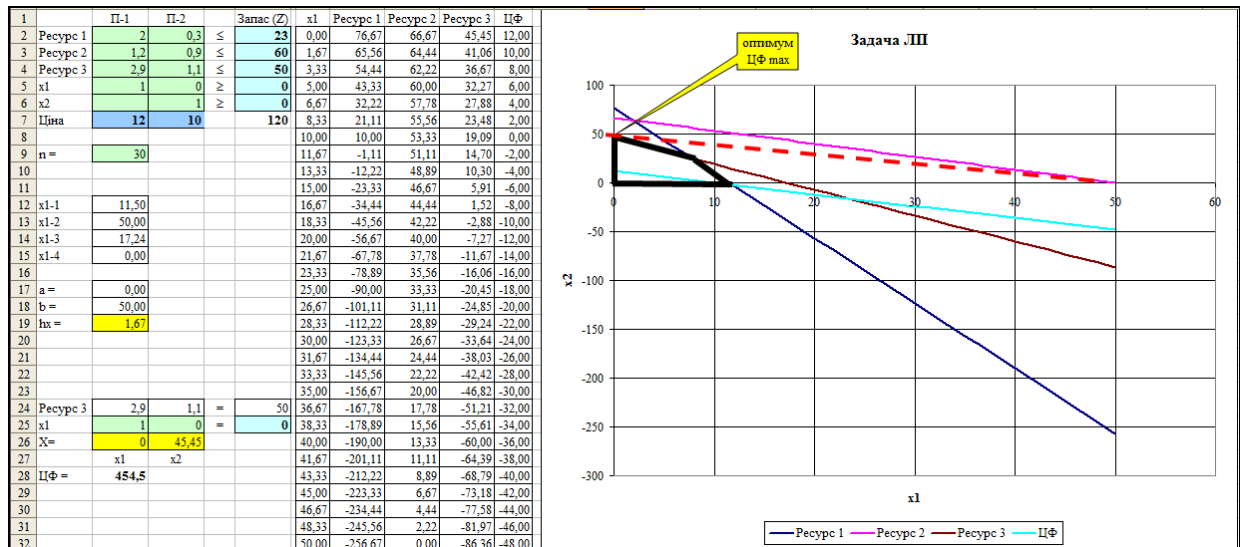
Будемо вважати змінну x_1 аргументом, а змінну x_2 – функцією, відповідно, кожна нерівність на графіку – напівплощина, обмежена з одного боку (в залежності від знака нерівності) прямою лінією, яка є, у свою чергу, графіком відповідного лінійного рівняння.

Пояснення: є нерівність $2,0x_1 + 0,3x_2 \leq 23$ (обмеження для ресурсу 1), перетвореннями маємо функцію $x_2 = f(x_1)$: $x_2 = -6,6x_1 + 76,6$, її графік – пряма лінія, що обмежує зверху (не більше, ніж) напівплощину. Аналогічно формуються інші напівплощини, загалом їх п'ять: три нерівності для ресурсів й дві – для осей x_1 та x_2 , їх перетин формує ОДР.

Порядок роботи

- 1) Увести початкові дані: технологічну матрицю, стовпець запасів та рядок цін
- 2) Для побудови графіків функцій ввести число n – кількість проміжків на осі x_1
- 3) Обчислити граничні значення діапазону $x_1 \in [a, b]$ і крок h_{x_1} для побудови графіків функцій
- 4) Побудувати таблицю зі значеннями: аргументу x_1 , трьох функцій (для ресурсів) та ЦФ
- 5) За табличними даними побудувати ОДР, окресливши її товстими лініями
- 6) Зробити пунктирну копію лінії ЦФ й паралельним її переносом визначити кутову точку її дотику з ОДР, де ЦФ набуває максимального значення. Визначити наближене значення ЦФ для знайденої точки оптимуму.

Результат 1



Лінія ЦФ (пунктир) доторкнулася ОДР (окреслена товстою лінією) у кутовій точці, чийі координати є розв'язком задачі.

Аналіз результату 1

I. $X \approx (0; 45,45)$

II. ЦФ $D \approx 454,45$

III. Обмеження:

$2,0 \cdot 0 + 0,3 \cdot 45,45 = 13,64 < 23$ (нерівність, є залишки)

$1,2 \cdot 0 + 0,9 \cdot 45,45 = 40,91 < 60$ (нерівність, є залишки)

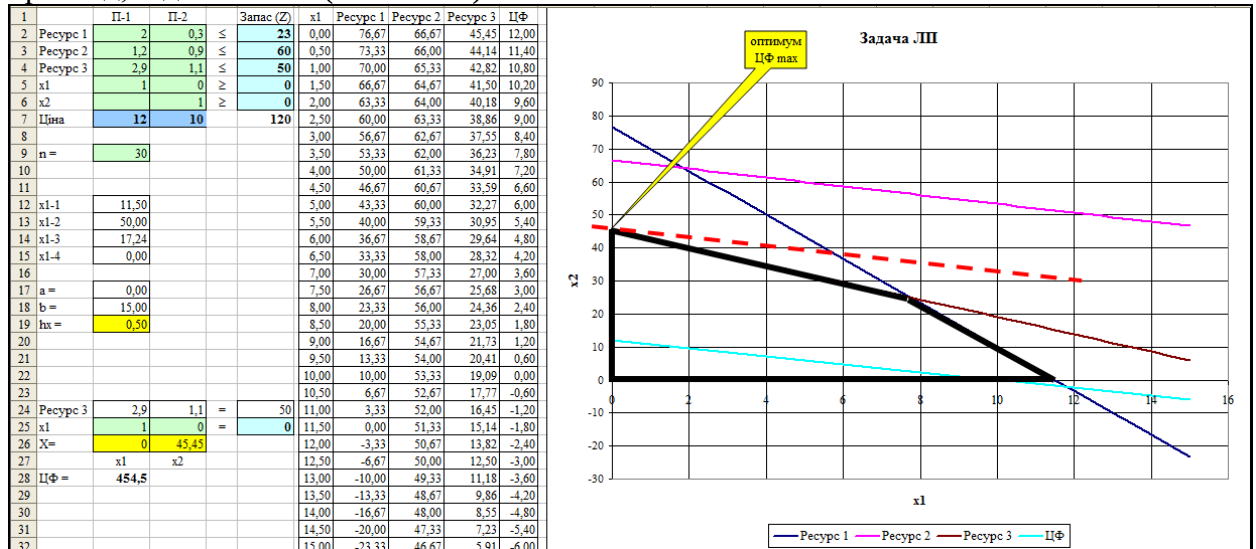
$2,9 \cdot 0 + 1,1 \cdot 45,45 = 50,00 = 50$ (тотожність, ресурс 3 – дефіцитний, його запаси вичерпані).

Оптимум знаходиться у точці, утвореній перетином графіків $x_1 = 0$ та $2,9x_1 + 1,1x_2 = 50$ (3-го ресурсу).

Виходить, що «вузьким місцем», що стримує загальний дохід, є запас 3-го ресурсу (50 од.) – збільшення цього запасу автоматично приведе до збільшення ЦФ (загального доходу).

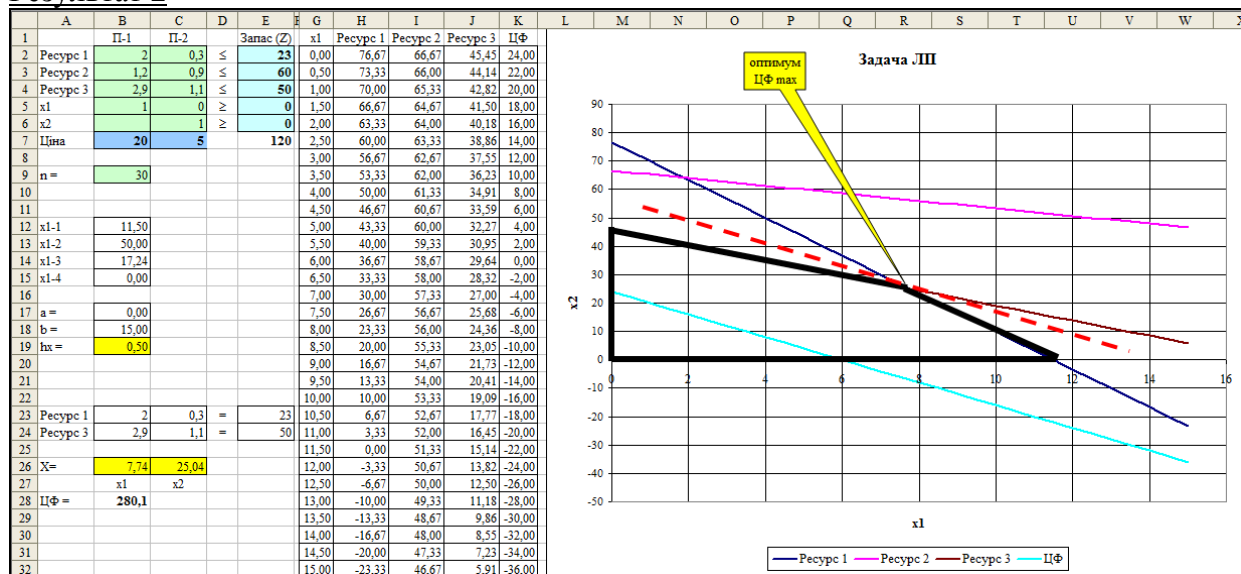
Це – обґрунтований й зважений сигнал менеджру щодо шляху до зростання доходу.

Щоб графік був більш наочним, достатньо змінити праву границю – значення $b = x_p$, наприклад, задати $b = 15$ (замість 50):



Достоїнство графічного методу, реалізованого за технологією наукової графіки – зміна значень початкових даних приводить до автоматичних змін на графіку.
Змінімо значення цін продуктів: $c_1 = 20$, $c_2 = 5$.

Результат 2



Оптимум знаходиться у точці, утвореній перетином графіків для рівнянь $2,0x_1 + 0,3x_2 = 23$ та $2,9x_1 + 1,1x_2 = 50$ (1-го та 3-го ресурсів).

Аналіз результату 2

I. $X \approx (7,74; 25,07)$

II. ЦФ $D \approx 280,10$

III. Обмеження:

$2,0 \cdot 7,74 + 0,3 \cdot 25,07 = 23,00 = 23$ (Ресурс 1 – дефіцитний, його запаси вичерпані)

$1,2 \cdot 7,74 + 0,9 \cdot 25,07 = 31,83 < 60$ (є залишки)

$2,9 \cdot 7,74 + 1,1 \cdot 25,07 = 50,00 = 50$ (Ресурс 3 – дефіцитний, його запаси вичерпані).

«Вузьким місцем», що стримує загальний дохід, є запаси 1-го й 3-го ресурсу (23 та 50 од.) – збільшення будь-якого з цих запасів автоматично приведе до збільшення ЦФ (загально-го доходу).

Висновок

Графічний метод є наочною ілюстрацією симплекс-методу – оптимум знаходиться у кутовій точці ОВФ (ОДР), яка побудована за заданою системою лінійних обмежень-нерівностей й відповідає тим обмеженням, що із заданих нерівностей стали рівняннями (відповідні ресурси використані повністю).

Приклад 2. (тестова задача [46], с. 23).

Розв'язати геометрично задачу ЛП:

1.2

$$F = 3x_1 - 2x_2 \rightarrow \max$$

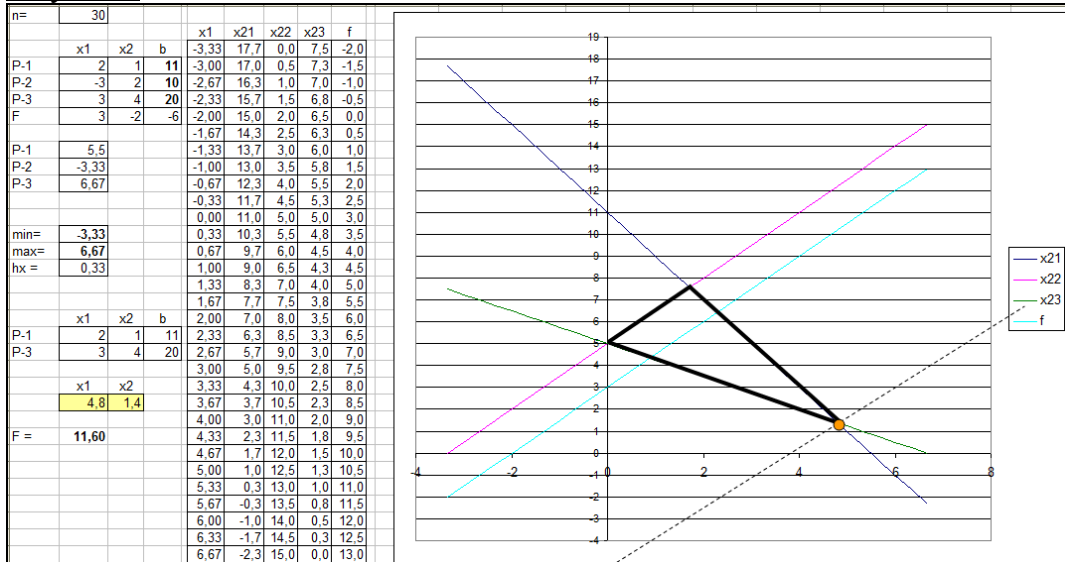
$$2x_1 + x_2 \leq 11$$

$$-3x_1 + 2x_2 \leq 10$$

$$3x_1 + 4x_2 \geq 20$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$$1.2. F = 11\frac{3}{5}; X = \left\{ 4\frac{4}{5}; 1\frac{2}{5} \right\}.$$



	Стілець	Парта	Стіл письм.	Стіл комп.	Кафедра	Запас ресурсів
ДСП (м ²)	0,0	2,0	4,0	3,5	2,1	34
Фанера (м ²)	2,2	0,5	1,5	2,9	2,4	78
Кріплення (шт)	6	12	18	24	8	105
Фарба (кг)	0,2	0,3	0,6	0,4	0,1	56
Мет. труба (м)	2,6	3,4	1,4	1,8	0	190
Лак (кг)	0,08	0,4	0,1	0,3	0,2	2,3
Ціна продукту	216,78	340,93	544,84	633,52	386,89	

Математична модель

Позначення:

План

x_1 – шукана кількість 1-го продукту (стільці)

x_2 – шукана кількість 2-го продукту (парти)

x_3 – шукана кількість 3-го продукту (столи письмові)

x_4 – шукана кількість 4-го продукту (столи комп'ютерні)

x_5 – шукана кількість 5-го продукту (кафедри)

$X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ або $X = \{x_j\}, j = 1, \dots, 5$ – шуканий план виробництва.

Цільова функція

Доходи:

$d_1 = c_1x_1$ у прикладі: $216,78x_1$ – дохід від реалізації 1-го продукту (стільці)

$d_2 = c_2x_2$ у прикладі: $340,93x_2$ – дохід від реалізації 2-го продукту (парти)

$d_3 = c_3x_3$ у прикладі: $544,84x_3$ – дохід від реалізації 3-го продукту (столи письмові)

$d_4 = c_4x_4$ у прикладі: $633,52x_4$ – дохід від реалізації 4-го продукту (столи комп'ютерні)

$d_5 = c_5x_5$ у прикладі: $386,89x_5$ – дохід від реалізації 5-го продукту (кафедри)

$D = d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5$ або $D = CX$ – цільова функція, критерій оптимізації – максимум цільової функції (суми доходів).

Обмеження

Використано ресурсів (ліва частина обмежень, ЛЧ):

$v_1 = 0x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3,5x_4 + 2,1x_5$, 1-ий ресурс (ДСП)

$v_2 = 2,2x_1 + 0,5x_2 + 1,5x_3 + 2,9x_4 + 2,4x_5$, 2-ий ресурс (Фанера)

$v_3 = 6x_1 + 12x_2 + 18x_3 + 24x_4 + 8x_5$, 3-ий ресурс (Кріплення)

$v_4 = 0,2x_1 + 0,3x_2 + 0,6x_3 + 0,4x_4 + 0,1x_5$, 4-ий ресурс (Фарба)

$v_5 = 2,6x_1 + 3,4x_2 + 1,4x_3 + 1,8x_4 + 0x_5$,

5-ий ресурс (Мет. труба)

$v_6 = 0,08x_1 + 0,4x_2 + 0,1x_3 + 0,3x_4 + 0,2x_5$, 6-ий ресурс (Лак)

$V = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$ – ліва частина обмежень (ЛЧ)

$Z = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6)$ – задані запаси ресурсів, права частина обмежень (ПЧ)

Система нерівностей-обмежень

$v_1 \leq z_1$ у прикладі: $v_1 \leq 34$ (ДСП)

$v_2 \leq z_2$ у прикладі: $v_2 \leq 78$ (Фанера)

$v_3 \leq z_3$ у прикладі: $v_3 \leq 105$ (Кріплення)

$v_4 \leq z_4$ у прикладі: $v_4 \leq 56$ (Фарба)

$v_5 \leq z_5$ у прикладі: $v_5 \leq 190$ (Мет. труба)

$v_6 \leq z_6$ у прикладі: $v_6 \leq 2,3$ (Лак).

$V \leq Z$ (Використано $\leq$ Запаси)

Задача оптимізації

I. Знайти план $X = \{x_j\}, j = 1, \dots, 5$, щоб

II. Загальний дохід (ЦФ) $D = CX \rightarrow \max$

III. за обмежень: $V \leq Z$ (Використано ресурсів $\leq$ Запаси ресурсів)

та граничних умов (невід'ємності): усі $x_j \geq 0, j = 1, \dots, 5$.

Порядок роботи

1. Увести початкові дані:

	Стілець	Парта	Стіл письм.	Стіл комп.	Кафедра	Запас ресурсів
ДСП (м ²)	0,0	2,0	4,0	3,5	2,1	34
Фанера (м ²)	2,2	0,5	1,5	2,9	2,4	78
Кріплення (шт)	6	12	18	24	8	105
Фарба (кг)	0,2	0,3	0,6	0,4	0,1	56
Мет. труба (м)	2,6	3,4	1,4	1,8	0	190
Лак (кг)	0,08	0,4	0,1	0,3	0,2	2,3
Ціна продукту	216,78	340,93	544,84	633,52	386,89	

2. Сформувати рядок План (X)

	Стілець	Парта	Стіл письм.	Стіл комп.	Кафедра	Запас ресурсів
ДСП (м ²)	0,0	2,0	4,0	3,5	2,1	34
Фанера (м ²)	2,2	0,5	1,5	2,9	2,4	78
Кріплення (шт)	6	12	18	24	8	105
Фарба (кг)	0,2	0,3	0,6	0,4	0,1	56
Мет. труба (м)	2,6	3,4	1,4	1,8	0	190
Лак (кг)	0,08	0,4	0,1	0,3	0,2	2,3
Ціна продукту	216,78	340,93	544,84	633,52	386,89	
План (X)						

3. Обчислити доходи від реалізації плану та їх суму (ЦФ)

G10		fx = СУММ(B10:F10)					
	A	B	C	D	E	F	G
1		Стілець	Парта	Стіл письм.	Стіл комп.	Кафедра	Запас ресурсів
2	ДСП (м ²)	0,0	2,0	4,0	3,5	2,1	34
3	Фанера (м ²)	2,2	0,5	1,5	2,9	2,4	78
4	Кріплення (шт)	6	12	18	24	8	105
5	Фарба (кг)	0,2	0,3	0,6	0,4	0,1	56
6	Мет. труба (м)	2,6	3,4	1,4	1,8	0	190
7	Лак (кг)	0,08	0,4	0,1	0,3	0,2	2,3
8	Ціна продукту (C)	216,78	340,93	544,84	633,52	386,89	
9	План (X)						
10	Дохід (CX)	0	0	0	0	0	0
11							ЦФ

4. Обчислити кількість використаних ресурсів (Використано) та їх залишків (Залишки):

H2		fx =СУММПРОИЗВ(B2:F2;\$B\$9:\$F\$9)							
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		Стілець	Парта	Стіл письм.	Стіл комп.	Кафедра	Запас ресурсів	Використано	Залишки
2	ДСП (м ²)	0,0	2,0	4,0	3,5	2,1	34	0	34
3	Фанера (м ²)	2,2	0,5	1,5	2,9	2,4	78	0	78
4	Кріплення (шт)	6	12	18	24	8	105	0	105
5	Фарба (кг)	0,2	0,3	0,6	0,4	0,1	56	0	56
6	Мет. труба (м)	2,6	3,4	1,4	1,8	0	190	0	190
7	Лак (кг)	0,08	0,4	0,1	0,3	0,2	2,3	0	2,3
8	Ціна продукту (C)	216,78	340,93	544,84	633,52	386,89			
9	План (X)								
10	Дохід (CX)	0	0	0	0	0	0		
11							ЦФ		

Отже, на підготовчому етапі сформовано:

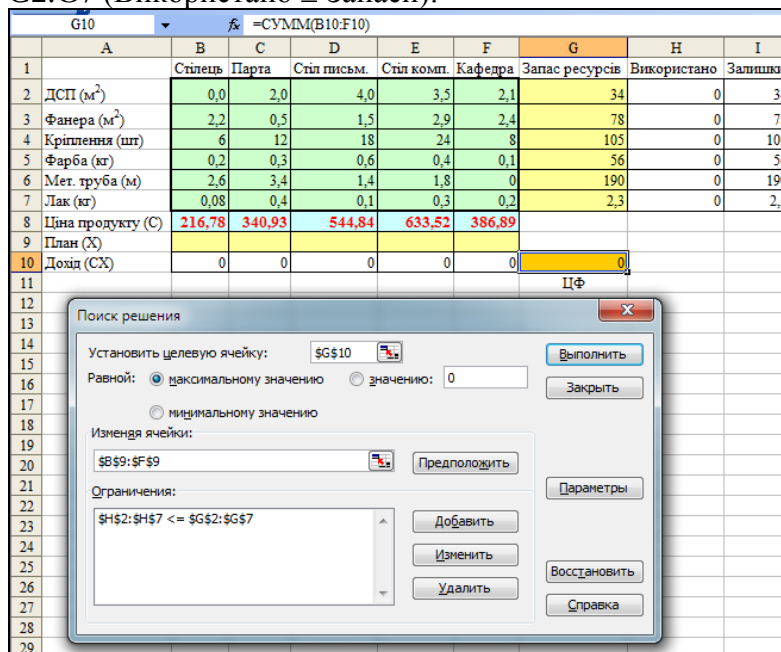
- формулу для обчислення значення ЦФ (цільова клітинка G10),
- вектор шуканих невідомих (діапазон B9:F9)
- ліву (діапазон H2:H7) та праву (діапазон G2:G7) частини обмежень.

5. Курсор встановити на клітинку G10 (з формулою ЦФ) і виконати команду *Сервис*→*Поиск решения*, з'явиться вікно програми-надбудови *Поиск решения*, де у полі:

- **Установить целевую ячейку** – вже вказана адреса G10
- **Равной:** *максимальному значению* (критерій оптимізації)
- **Изменяя ячейки:** вказати діапазон шуканого плану (B9:F9)

далі

- натиснути кнопку **Добавить**, з'явиться вікно *Добавление ограничения*,
- у лівому віконці вказати діапазон H2:H7, далі знак «≤», у правому віконці – діапазон G2:G7 (Використано ≤ Запаси):



далі

- натиснути на кнопку *Параметры*, у вікні *Параметры поиска решения* поставити дві «галочки» у позиціях:
- **Линейная модель** (умови лінійності)
- **Неотрицательные значения** (граничні умови невід'ємності для невідомих)
- **OK**
- у вікні *Поиск Решения* натиснути на кнопку *Выполнить*

- після повідомлення «Решение найдено...» про успішний розв'язок прямої задачі сформулювати звіт *Устойчивость* для отримання двоїстих оцінок
 - двоїсті оцінки (нормовані вартості, тіньові ціни та допустиме збільшення запасів) перенести в основний документ.
- Отримано розв'язок прямої та двоїстої задач ЛП.

Результат:

	Стілець	Парта	Стіл письм.	Стіл комп.	Кафедра	Запас ресурсів	Використано	Залишки	Т-ціна	Доп. зб.
ДСП (м ²)	0,0	2,0	4,0	3,5	2,1	34	26,89	7,11	0,0	1E+30
Фанера (м ²)	2,2	0,5	1,5	2,9	2,4	78	27,88	50,12	0,0	1E+30
Кріплення (шт)	6	12	18	24	8	105	105,00	0	25,1	33,75
Фарба (кг)	0,2	0,3	0,6	0,4	0,1	56	1,66	54,34	0,0	1E+30
Мет. труба (м)	2,6	3,4	1,4	1,8	0	190	1,30	188,70	0,0	1E+30
Лак (кг)	0,08	0,4	0,1	0,3	0,2	2,3	2,30	0	930,5	0,33
Ціна продукту (С)	216,78	340,93	544,84	633,52	386,89					
План (Х)	0	0	0,93	0	11,04					
Дохід (СХ)	0	0	505,92	0	4269,58	4775,50				
Н-варт.	-8,3	-332,5	0,0	-248,0	0,0	ЦФ				

Аналіз отриманого результату

Пряма задача

	Стілець	Парта	Стіл письм.	Стіл комп.	Кафедра
I. План:	0	0	0,93	0	11,04

4775,50
ЦФ

II. Максимальний дохід (ЦФ):

III. Обмеження:

	Запас ресурсів	Використано	Залишки	Т-ціна	Доп. зб.
ДСП (м ²)	34	26,89	7,11	0,0	1E+30
Фанера (м ²)	78	27,88	50,12	0,0	1E+30
Кріплення (шт)	105	105,00	0	25,1	33,75
Фарба (кг)	56	1,66	54,34	0,0	1E+30
Мет. труба (м)	190	1,30	188,70	0,0	1E+30
Лак (кг)	2,3	2,30	0	930,5	0,33

де: для 3-го (Кріплення) й 6-го (Лак) ресурсів нерівності стали рівняннями (їх запаси вичерпані повністю), інші ресурси представлені нерівностями (є залишки).

Отже, Кріплення й Лак – дефіцитні ресурси, поповнення запасів певного з них – шлях до збільшення загального доходу (ЦФ).

Виникає запитання: який з цих двох ресурсів вибрати для поповнення?

Двоїста задача

Оцінка цін продуктів (їх нормовані вартості)

	Стілець	Парта	Стіл письм.	Стіл комп.	Кафедра
Ціна продукту (С)	216,78	340,93	544,84	633,52	386,89
План (Х)	0	0	0,93	0	11,04
Н-варт.	-8,25	-332,45	0,00	-248,00	0,00

Від'ємні числа під назвою «нормована вартість» у рядку Н-варт. вказують на:

- зменшення значення ЦФ (загального доходу) при вимушеному випуску одиниці відповідного продукту (стілці, парти, столи комп'ютерні)
- збільшення заданої ціни, щоб випуск став рентабельним.

Зауваження. Нормовані (приведені) вартості (*reduced cost*) – побічний результат двоїстої задачі, який можна самому обчислити як різницю між заданою ціною й множенням стовп-

ця технологічної матриці на стовпець тінювих цін ресурсів (який є основним результатом двоїстої задачі), й ця різниця дає:

- 0 для «вигідного» продукту (ціна = витрати ресурсів) й
- від'ємне число для «невигідних» продуктів (ціна < витрати ресурсів).

Так, для «невигідних» стільців це: $216,78 - (6 \cdot 25,1 + 0,08 \cdot 930,5) = -8,25$, з точки зору економіки, це фактичне перевищення витрат ресурсів (225,03) заданої ціни (216,78), яку можна вважати «нормою» й до якої приводяться витрати ресурсів.

Оцінка запасів ресурсів (їх тінюві ціни)

Запас ресурсів	Використано	Залишки	Т-ціна	Доп. зб.
34	26,89	7,11	0,0	1E+30
78	27,88	50,12	0,0	1E+30
105	105,00	0	25,1	33,75
56	1,66	54,34	0,0	1E+30
190	1,30	188,70	0,0	1E+30
2,3	2,30	0	930,5	0,33

Додатні числа у стовпці Т-ціна для нульових залишків вказують на збільшення ЦФ при збільшенні запасу ресурсу на 1.

Відповідь:

- додаткова одиниця кріплень збільшить значення ЦФ на 25,1, а додаткова одиниця лаку – на 930,5 гр. од.
- на першому кроці запас кріплень збільшити на 33-34 шт., лаку – на 0,33 кг.

Вибір – Що і Скільки придбати (щодо дефіцитних ресурсів) – робить менеджер, враховуючи ринкові ціни на ці два ресурси.

Модифікація моделі

Умова 1: прийнято рішення обмежити кількість «вигідних» кафедр числом 2, уводиться додаткове обмеження: $x_5 \leq 2$, результат:

	Стілець	Парта	Стіл письм.	Стіл комп.	Кафедра	Запас ресурсів	Використано	Залишки
ДСП (м ²)	0,0	2,0	4,0	3,5	2,1	34	4,20	29,80
Фанера (м ²)	2,2	0,5	1,5	2,9	2,4	78	37,43	40,57
Кріплення (шт)	6	12	18	24	8	105	105,00	0
Фарба (кг)	0,2	0,3	0,6	0,4	0,1	56	3,17	52,83
Мет. труба (м)	2,6	3,4	1,4	1,8	0	190	38,57	151,43
Лак (кг)	0,08	0,4	0,1	0,3	0,2	2,3	1,59	0,7
Ціна продукту (С)	216,78	340,93	544,84	633,52	386,89			
План (X)	15	0	0,00	0	2	3989,38		
Дохід (СХ)	3216	0	0,00	0	773,77	ЦФ		

Загальний дохід зменшився (проти 4775,50 гр. од.), дефіцитом є лише лак, вивільнені ресурси направлені на інші продукти, так вигідними стали стільці.

Умова 2: додатково обмежити кількість «вигідних» стільців числом 8, додаткове обмеження: $x_1 \leq 8$, результат:

	Стілець	Парта	Стіл письм.	Стіл комп.	Кафедра	Запас ресурсів	Використано	Залишки
ДСП (м ²)	0,0	2,0	4,0	3,5	2,1	34	13,31	20,69
Фанера (м ²)	2,2	0,5	1,5	2,9	2,4	78	25,82	52,18
Кріплення (шт)	6	12	18	24	8	105	105,00	0
Фарба (кг)	0,2	0,3	0,6	0,4	0,1	56	3,17	52,83
Мет. труба (м)	2,6	3,4	1,4	1,8	0	190	23,99	166,01
Лак (кг)	0,08	0,4	0,1	0,3	0,2	2,3	1,27	1,0
Ціна продукту (C)	216,78	340,93	544,84	633,52	386,89			
План (X)	8	0	2,28	0	2	3749,05		
Дохід (CX)	1734	0	1241,02	0	773,77	ЦФ		

Із кожним новим обмеженням значення ЦФ зменшується, план випуску змінюється з-за перерозподілу наявних ресурсів.

Умова 3: ставший «вигідним» стіл письмовий вирішено не виготовляти, замість нього виготовити 1 комп'ютерний стіл, для цього уведено два додаткових обмеження: $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, результат:

	Стілець	Парта	Стіл письм.	Стіл комп.	Кафедра	Запас ресурсів	Використано	Залишки
ДСП (м ²)	0,0	2,0	4,0	3,5	2,1	34	10,53	23,47
Фанера (м ²)	2,2	0,5	1,5	2,9	2,4	78	26,01	51,99
Кріплення (шт)	6	12	18	24	8	105	105,00	0
Фарба (кг)	0,2	0,3	0,6	0,4	0,1	56	2,63	53,37
Мет. труба (м)	2,6	3,4	1,4	1,8	0	190	27,42	162,58
Лак (кг)	0,08	0,4	0,1	0,3	0,2	2,3	1,91	0,4
Ціна продукту (C)	216,78	340,93	544,84	633,52	386,89			
План (X)	8	1	0	1	2	3624,54		
Дохід (CX)	1734,26	482,98	0,00	633,52	773,77	ЦФ		

Самостійна робота:

- 1) розв'язати задачу ($n = 2$) симплекс-методом для отримання точних значень шуканих невідомих
- 2) розв'язати задачу ($n \approx 30$, $m \approx 15$), організувавши табличну модель по формату продукти-ресурси.

Приклад 2. (тестова задача [46], с. 60).

Розв'язати задачу ЛПП двоїстим симплекс-методом:

1.90

$$F_{\max} = 5x_1 + 4x_2 + 6x_3$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 6$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 \geq 9$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 11$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

$$\mathbf{1.90.} \quad F = 33; \quad X = \{3; 0; 3\}.$$

(Розв'язується лише пряма задача)

Результат

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1		x_1	x_2	x_3	ЛЧ	ПЧ	Y								
2	P-1	1	1	1	6	6	7								
3	P-2	2	1	1	9	9	-1								
4	P-3	3	1	2	15	11	0								
5	F	5	4	6	33										
6	X	3	0	3											
7															
8															
9															
10															
11															
12															
13															
14															
15															
16															
17															

Пряма задача: $X = (3, 0, 3)$, $F = 33$.

Двоїста задача: $Y = (7, -1, 0)$.

Задача 2.3. Розв'язання прямої й двоїстої задач (без звіту Устойчивость)

Фундаментальну теорію двоїстості й поняття «аналіз чутливості» оптимального плану можна краще зрозуміти й засвоїти, розв'язавши за допомогою розв'язувача *Поиск решения* пряму й двоїсту задачу, не звертаючись до побудови звіту *Устойчивость*.

Приклад.

Задана пряма задача про оптимальний план виробництва розміром 3×5 (3 види ресурсів й 5 видів продуктів), відомі запаси, ціни й технологічна матриця.

Порядок роботи

1. Блок даних – діапазон A2:G6 розміром 5×7 транспонувати в діапазон M2:Q8 розміром 7×5 для двоїстої задачі
2. Визначенням вище способом розв'язати пряму задачу (система обмежень: Витрати $\leq$ Запас, критерій: **max** ЦФ)
3. Розв'язати двоїсту задачу:
 - Сформувати ліву частину обмежень (Витрати)
 - Обчислити стовпець Н-варт (Переплата) = Витрати – Ціна
 - Задати систему обмежень: Витрати $\geq$ Ціна
 - Критерій: **min** ЦФ.

Результат

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
1																			
2		Пряма задача												Двоїста задача					
3		Продукт 1	Продукт 2	Продукт 3	Продукт 4	Продукт 5	Запас	Витрати	Залишок	0	Ресурс 1	Ресурс 2	Ресурс 3	Ціна	Витрати	Н-варт			
4	Ресурс 1	2	6	0,9	12	0,6	15	15,0	0,0	Продукт 1	2	4	3	7,0	7,00	0,00			
5	Ресурс 2	4	7	0,5	0,02	0,8	69	29,6	39,4	Продукт 2	6	7	1	7,9	12,79	-4,89			
6	Ресурс 3	3	1	9	0,11	11	25	25,0	0,0	Продукт 3	0,9	0,5	9	11,0	11,00	0,00			
7	Ціна	7,0	7,9	11,0	8,8	9,5		55,07		Продукт 4	12	0,02	0,11	8,8	23,64	-14,84			
8	План	7,35	0,00	0,33	0,00	0,00				Продукт 5	0,6	0,8	11	9,5	12,46	-2,96			
9										Запас	15	69	25	0	55,07				
										План	1,96	0,00	1,03						

Аналіз результату

Пряма задача

I. План $X = (7,35; 0; 0,33; 0; 0)$, продукти 1-ий й 3-ій – вигідні, їх випуск.

II. ЦФ (максимальний загальний дохід) = **55,07**

III. Обмеження:

Ресурс 1: $15 = 15$ (дефіцит)

Ресурс 2: $29,6 < 69$

Ресурс 3: $25 = 25$ (дефіцит).