

ТЕМА 12. Економетричні моделі динаміки

План

- 12.1. Основні поняття і попередній аналіз рядів динаміки*
 - 12.1.1. Поняття часового ряду*
 - 12.1.2. Основні характеристики динаміки часового ряду*
 - 12.1.3. Систематичні та випадкові компоненти часового ряду*
- 12.2. Перевірка гіпотези про існування тренду*
- 12.3. Методи фільтрації сезонної компоненти*
 - 12.3.1. Проблема аналізу сезонності*
 - 12.3.2. Фільтрація сезонної компоненти за допомогою індексу сезонності*
 - 12.3.3. Метод декомпозиції часового ряду*
- 12.4. Методи прогнозування часових рядів*
 - 12.4.1. Методи соціально-економічного прогнозування*
 - 12.4.2. Прогнозування тенденції часового ряду за середніми характеристиками*
 - 12.4.3. Прогнозування тенденції часового ряду за механічними методами*
 - 12.4.4. Прогнозування тенденції часового ряду за аналітичними методами.*

12.1. Основні поняття і попередній аналіз рядів динаміки

12.1.1. Поняття часового ряду

$$y = y_1, y_1, \dots, y_n$$

$$t_1, t_1, \dots, t_n$$

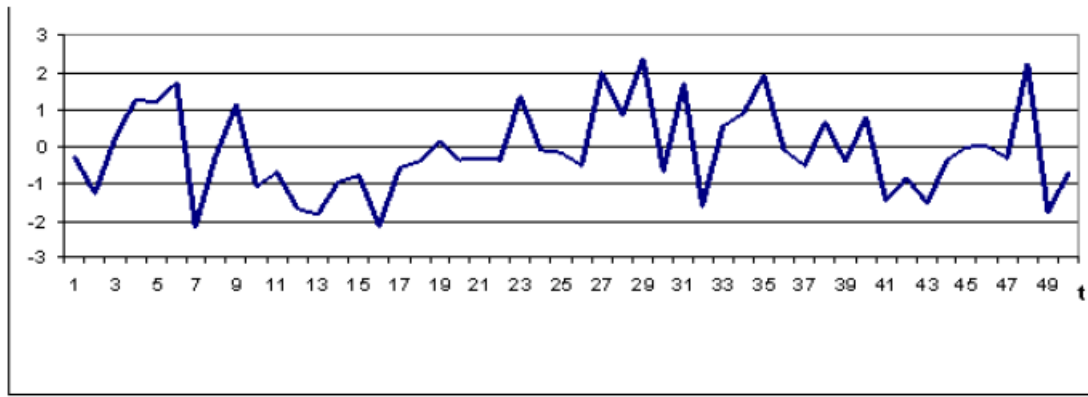


Рис. 12.1. Приклад стаціонарного ряду динаміки
В них середнє значення та дисперсія приблизно постійні для всіх t

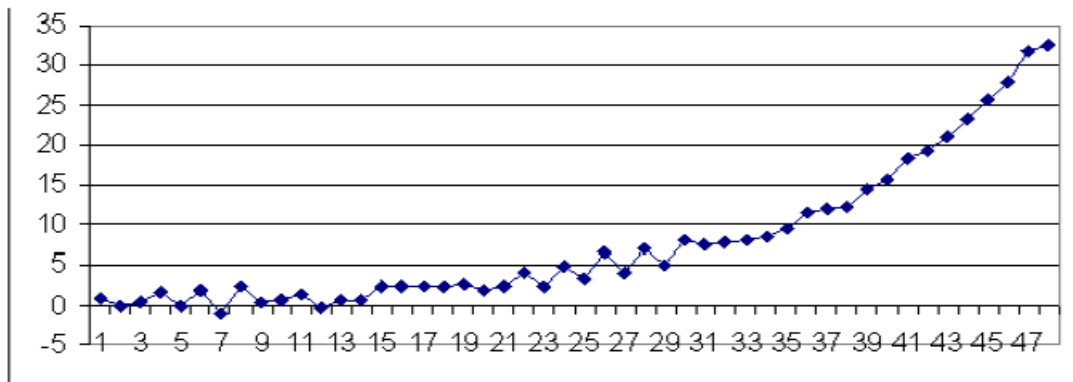


Рис. 12.2. Приклад нестаціонарного ряду динаміки
В них спостерігається зростаючий тренд та зростання дисперсії в часі

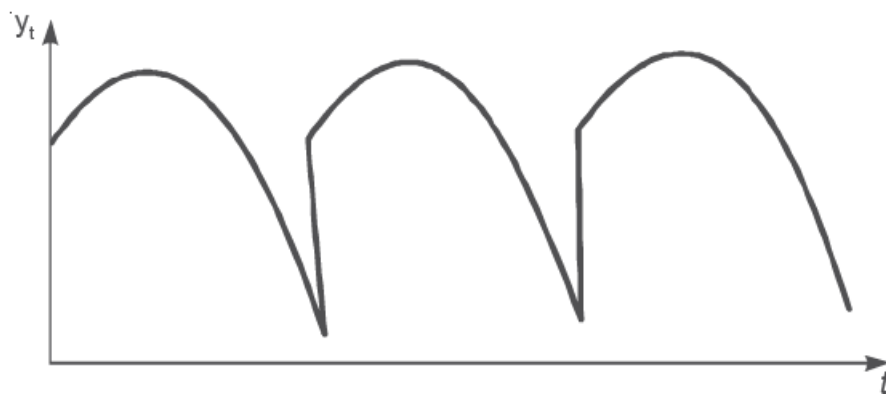


Рис. 12.3. Часовий ряд, що містить тільки сезонну компоненту

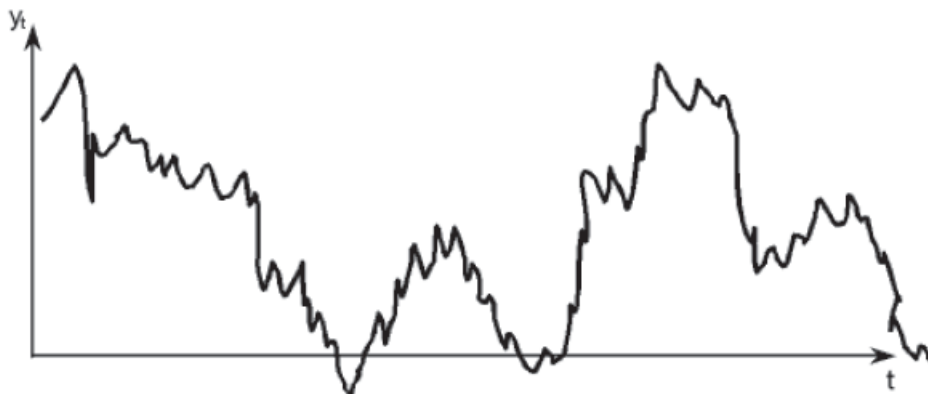


Рис. 12.4. Часовий ряд, що містить випадкову компоненту

12.1.2. Основні характеристики динаміки часового ряду

Таблиця 12.1.

Характеристики динаміки часового ряду

Характеристики	Розрахункові формули
Абсолютний приріст	$\Delta y_i = y_i - y_{i-k}$
Коефіцієнт зростання	$K_{i(зр)} = \frac{y_i}{y_{i-k}}$
Коефіцієнт приросту	$K_{i(нр)} = \frac{y_i - y_{i-k}}{y_{i-k}}$
Темп зростання	$T_{i(зр)} = \frac{y_i}{y_{i-k}} \cdot 100\% = K_{i(зр)} \cdot 100\%$
Темп приросту	$T_{i(нр)} = T_{i(зр)} - 100\% , \text{ або } T_{i(нр)} = \frac{y_i - y_{i-k}}{y_{i-k}} \cdot 100\%$
Середня арифметична	$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n}$
Середня хронологічна	$\bar{y} = \frac{\sum y_i t}{\sum t}$
Середній абсолютний приріст	$\overline{\Delta y}_k = \frac{y_i - y_{i-k}}{k}$
Середній темп зростання	$\bar{T}(зр) = n \sqrt[n]{\frac{y_n}{y_1}}$
Середній темп приросту	$\bar{T}(нр) = \bar{T}(зр) - 100\%$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n},$$

$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{2}y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n}{n-1},$$

12.1.3. Систематичні та випадкові компоненти часового ряду

$$Y_t = d_t + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, n; \quad (12.1)$$

$$Y_t = d_t \cdot \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, n, \quad (12.2)$$

де n – кількість спостережень;

d_t – детермінована складова;

ε_t – випадкова складова (випадкові перешкоди), що впливає на значення рівнів.

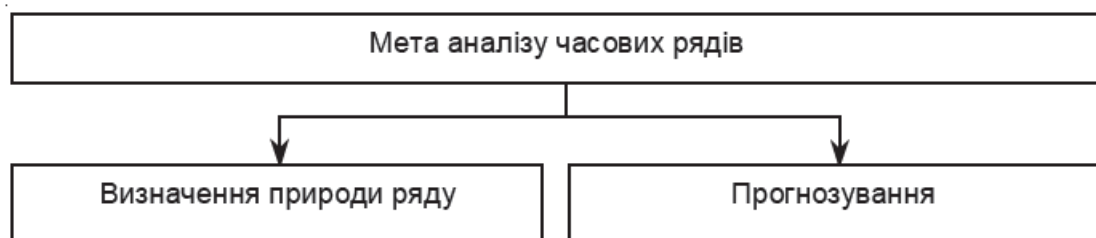


Рис. 12.5. Складові мети аналізу часових рядів

Аддитивна модель – застосовують для стаціонарних рядів,
В них середнє значення та дисперсія приблизно постійні для всіх t

$Y_t = U_t + S_t + V_t + E_t, \quad t = 1, 2, \dots, n$	(12.3)
---	--------

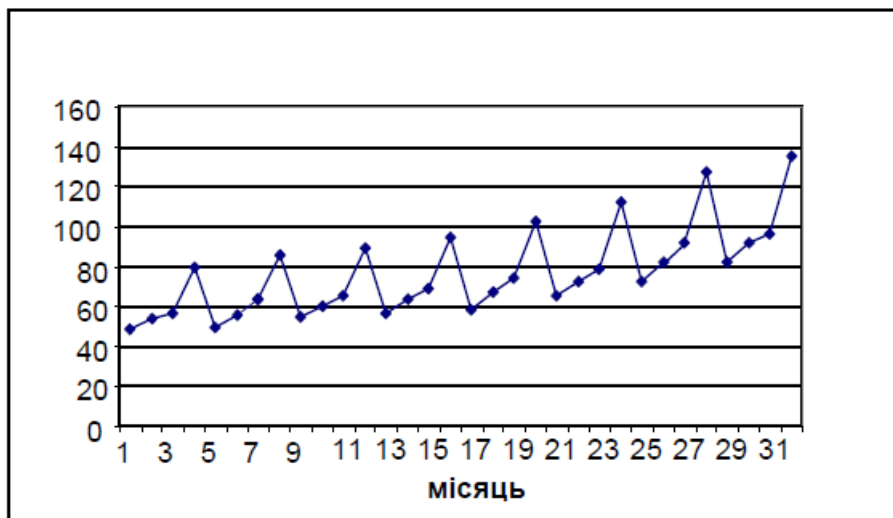


Рис. 12.6. Приклад адитивної моделі часового ряду

Мультиплікативна модель — застосовують для нестационарних рядів

В них спостерігається зростаючий тренд та зростання дисперсії в часі

$$Y_t = U_t \cdot S_t \cdot V_t \cdot E_t, t = 1, 2, \dots, n \quad (12.4)$$

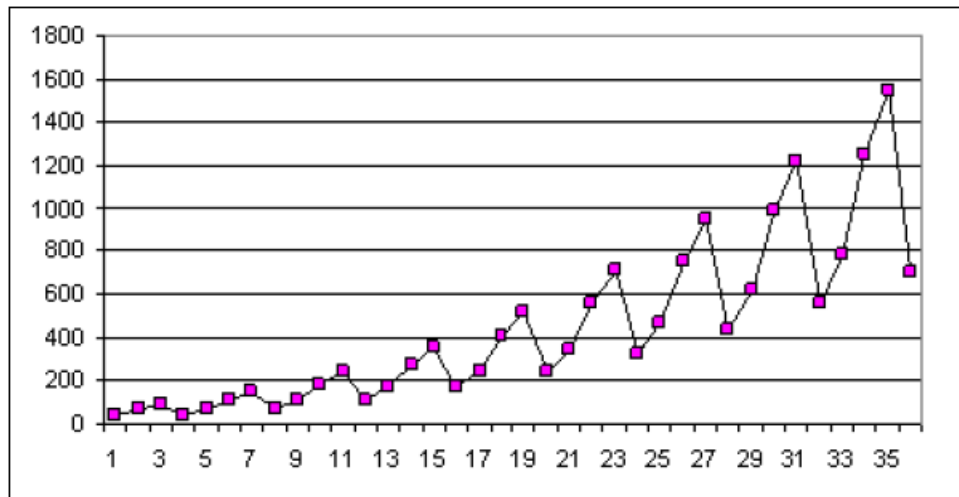
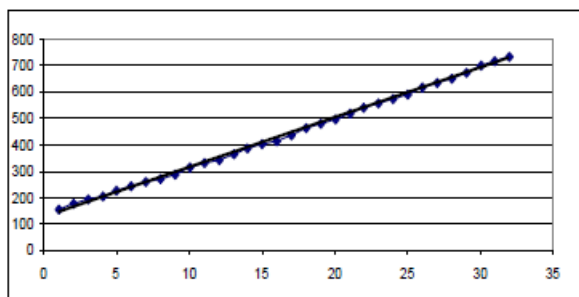
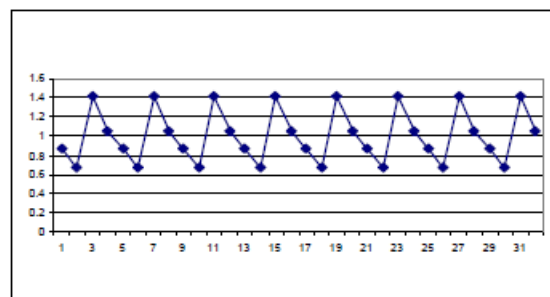


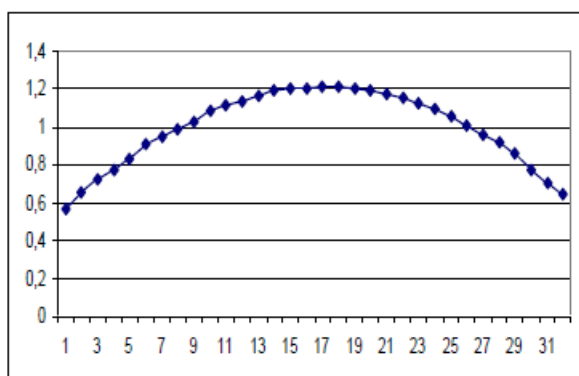
Рис. 12.7. Приклад мультиплікативної моделі часового ряду



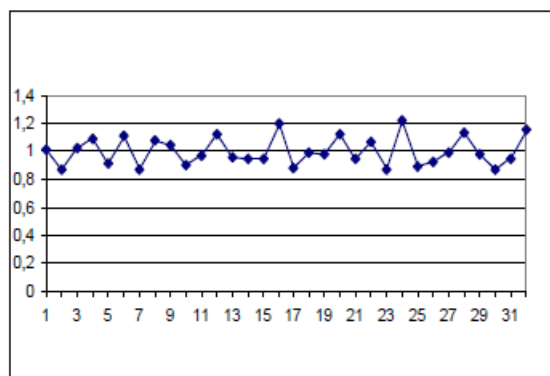
а) трендова компонента



б) сезонна компонента



в) циклічна компонента



г) випадкова компонента

Рис. 12.8. Приклад основних компонент часового ряду

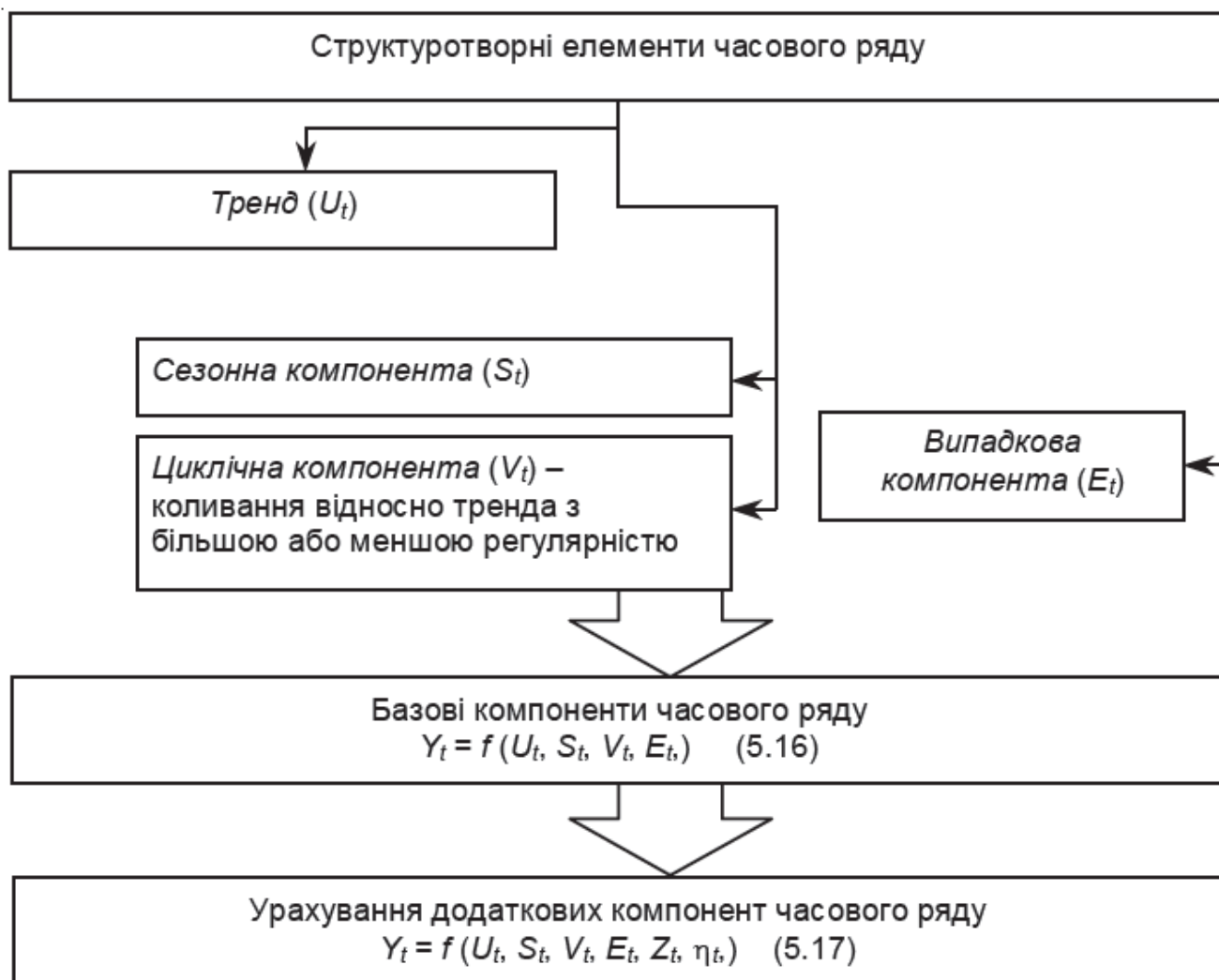


Рис. 12.9. Послідовність визначення елементів часового ряду

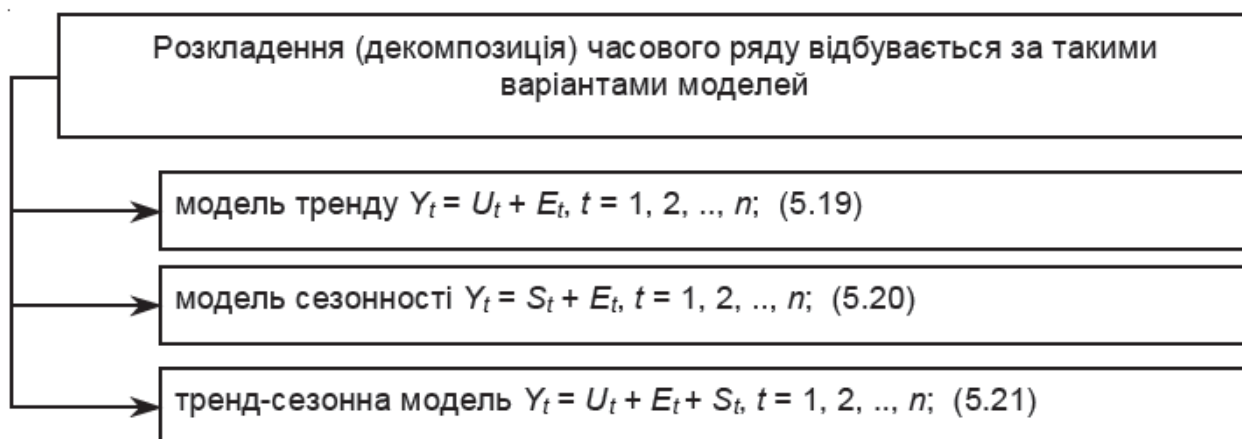


Рис. 12.10. Види моделей часового ряду

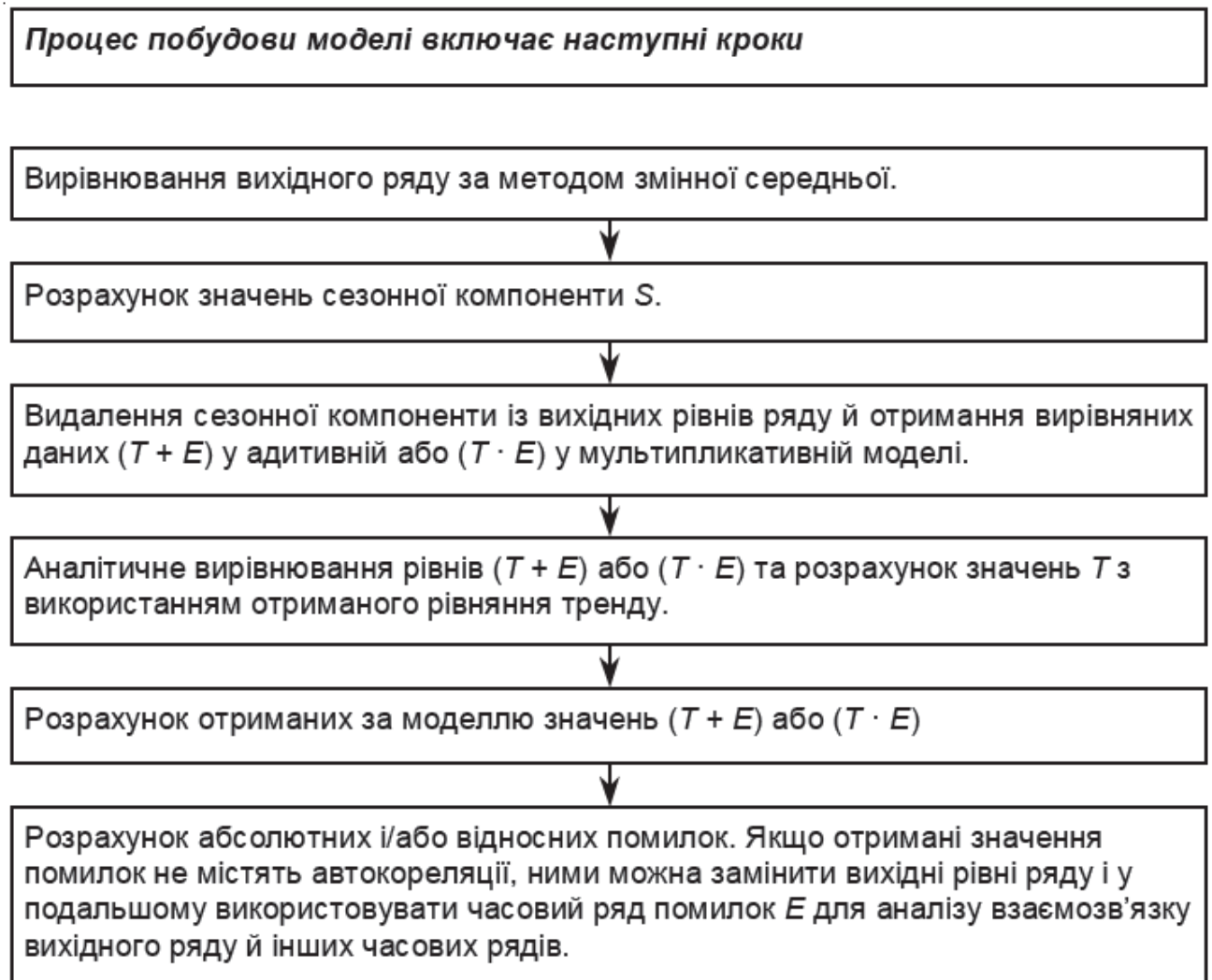


Рис. 12.11. Алгоритм побудови адитивної та мультиплікативної моделі часового ряду

12.2. Перевірка гіпотези про існування тренду

$r_1 = \frac{\sum_{t=2}^n (y_t - \bar{y}_1)(y_{t-1} - \bar{y}_2)}{\sqrt{\sum_{t=2}^n (y_t - \bar{y}_1)^2 \sum_{t=2}^n (y_{t-1} - \bar{y}_2)^2}},$	(12.5)
---	--------

де $\bar{y}_1 = \frac{1}{n-1} \sum_{t=2}^n y_t, \quad \bar{y}_2 = \frac{1}{n-1} \sum_{t=2}^n y_{t-1}.$

$r_1 = \frac{\sum_{t=3}^n (y_t - \bar{y}_3)(y_{t-2} - \bar{y}_4)}{\sqrt{\sum_{t=3}^n (y_t - \bar{y}_3)^2 \sum_{t=3}^n (y_{t-2} - \bar{y}_4)^2}},$	(12.6)
---	--------

де $\bar{y}_3 = \frac{1}{n-2} \sum_{t=3}^n y_t, \quad \bar{y}_4 = \frac{1}{n-2} \sum_{t=3}^n y_{t-2}$

12.3. Методи фільтрації сезонної компоненти

12.3.1. Проблема аналізу сезонності



Рис. 12.12. Схема алгоритму дослідження тренд-сезонного часового ряду

12.3.2. Фільтрація сезонної компоненти за допомогою індексу сезонності

$y_{ij} = u_{ij} \cdot I_j + \varepsilon_{ij},$	(12.7)
---	--------

де u_{ij} – «річна» складова (тренд);
 I_j – індекс сезонності, або стала пропорційності для j -го кварталу (місяця), яка є безрозмірною величиною та не змінюється з року в рік.

$I_j = \frac{\sum_{i=1}^k I_{ij}}{k} \text{ або } I_j = \frac{\sum_{i=1}^k I_{ij}}{k} \cdot 100\%,$	(12.8)
де $I_{ij} = \frac{y_{ij}}{\bar{y}_i}$ та $\bar{y}_i = \frac{\sum_{j=1}^m y_{ij}}{m}$.	

$I_{ij} = \frac{\hat{u}_{ij} + \hat{s}_{ij}}{\hat{u}_{ij}} = \frac{\hat{y}_{ij}}{\hat{u}_{ij}}.$	(12.9)
--	--------

12.3.3. Метод декомпозиції часового ряду

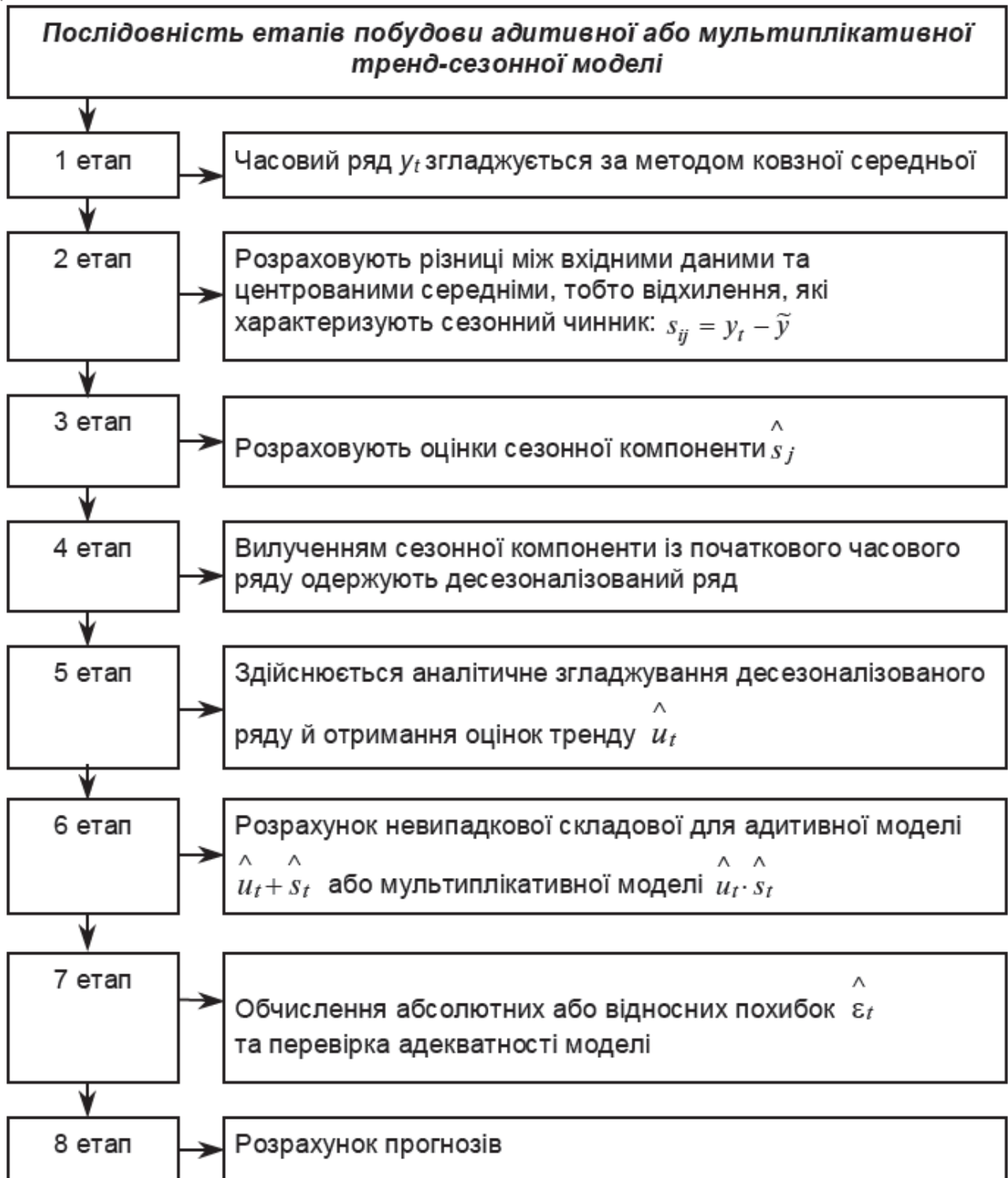


Рис. 12.13. Етапи побудови адитивної або мультиплікативної тренд-сезонної моделі

$\overline{s_j} = \frac{\sum_{j=1}^k s_{ij}}{k}, \quad j = 1, 2, \dots, m$	(12.10)
--	---------

$\overline{s} = \sum_{j=1}^m \overline{s_j}.$	(12.11)
---	---------

$\sum_{j=1}^m \overline{s_j} = 0$	(12.12)
-----------------------------------	---------

$\sum_{j=1}^m \overline{s_j} = m$	(12.13)
-----------------------------------	---------

$\wedge \overline{s_j} = \overline{s_j} - a, \quad a = \frac{\overline{s}}{m}$	(12.14)
--	---------

$\wedge \overline{s_j} = \overline{s_j} \cdot a, \quad a = \frac{m}{\overline{s}}$	(12.15)
--	---------

12.4. Методи прогнозування часових рядів

12.4.1. Методи соціально-економічного прогнозування

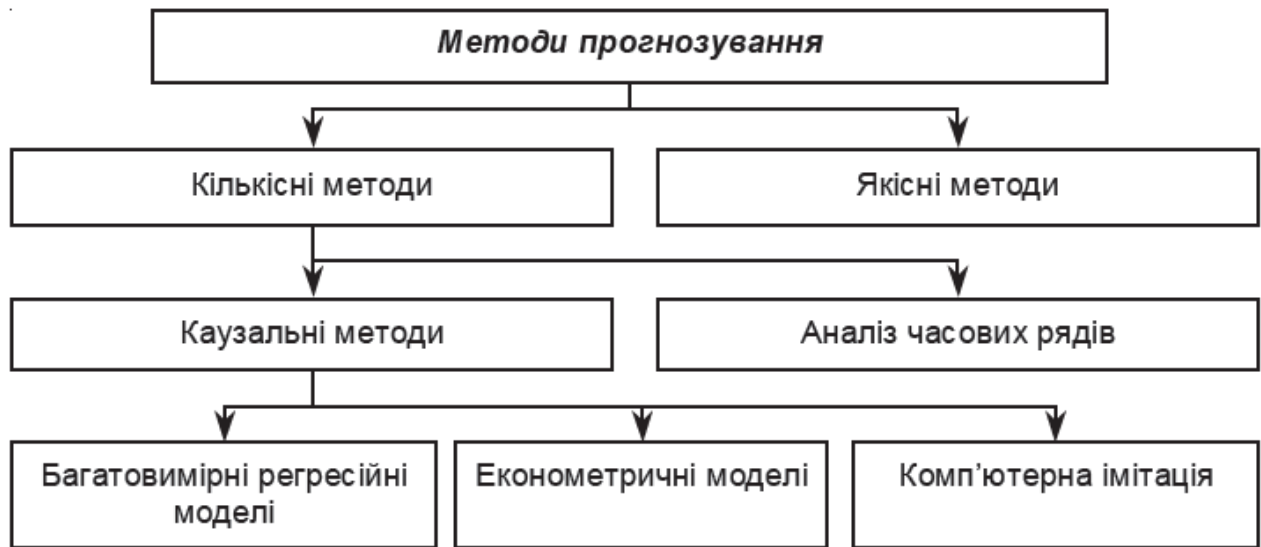


Рис. 12.14. Методи складання прогнозів

12.4.2. Прогнозування тенденції часового ряду за середніми характеристиками

Екстраполяція на основі середнього рівня ряду

$\hat{y}_n(\tau) = \bar{y}$	(12.16)
-----------------------------	---------

$\hat{y}_n(\tau) \pm t_\alpha \hat{\sigma} \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$	(12.17)
--	---------

Екстраполяція за середнім абсолютним приростом

$\hat{y}_n(\tau) = y_n + \tau \cdot \overline{\Delta y},$ де $\overline{\Delta y}$ – середній абсолютний приріст.	(12.18)
---	---------

Екстраполяція за середнім темпом зростання

$\hat{y}_n(\tau) = y_n \cdot \bar{T}_{зр}^\tau,$ де $\bar{T}_{зр}$ – середній темп зростання,	(12.19)
---	---------

12.4.3. Прогнозування тенденції часового ряду за механічними методами

Метод ковзної середньої

$\hat{y}_t = \frac{\sum_{i=-k}^k y_{t+i}}{m}$	(12.20)
---	---------

$\hat{y}_t = a_0 + \sum_{i=1}^p a_i t^i$	(12.21)
--	---------

Метод експоненціального згладжування

$\hat{y}_n(1) = \alpha(y_n + (1-\alpha)y_{n-1} + (1-\alpha)^2 y_{n-2} + \dots), 0 < \alpha < 1,$ де підсумок усіх ваг дорівнює 1, а α – параметр згладжування.	(12.22)
---	---------

$\hat{y}_t(1) = \alpha y_t + (1-\alpha) \hat{y}_t$ або $\hat{y}_t(1) = \hat{y}_t + \alpha(y_t - \hat{y}_t),$	(12.23)
---	---------

Медіанне згладжування

12.4.4. Прогнозування тенденції часового ряду за аналітичними методами.

Регресійний аналіз

$y_t = v_t + \varepsilon_t \quad t = 1, 2, \dots, n,$ де v_t – функція тренду (крива зростання); ε_t – невідомі випадкові похибки.	(12.24)
---	---------

Метод послідовних різниць (Тінтнера)

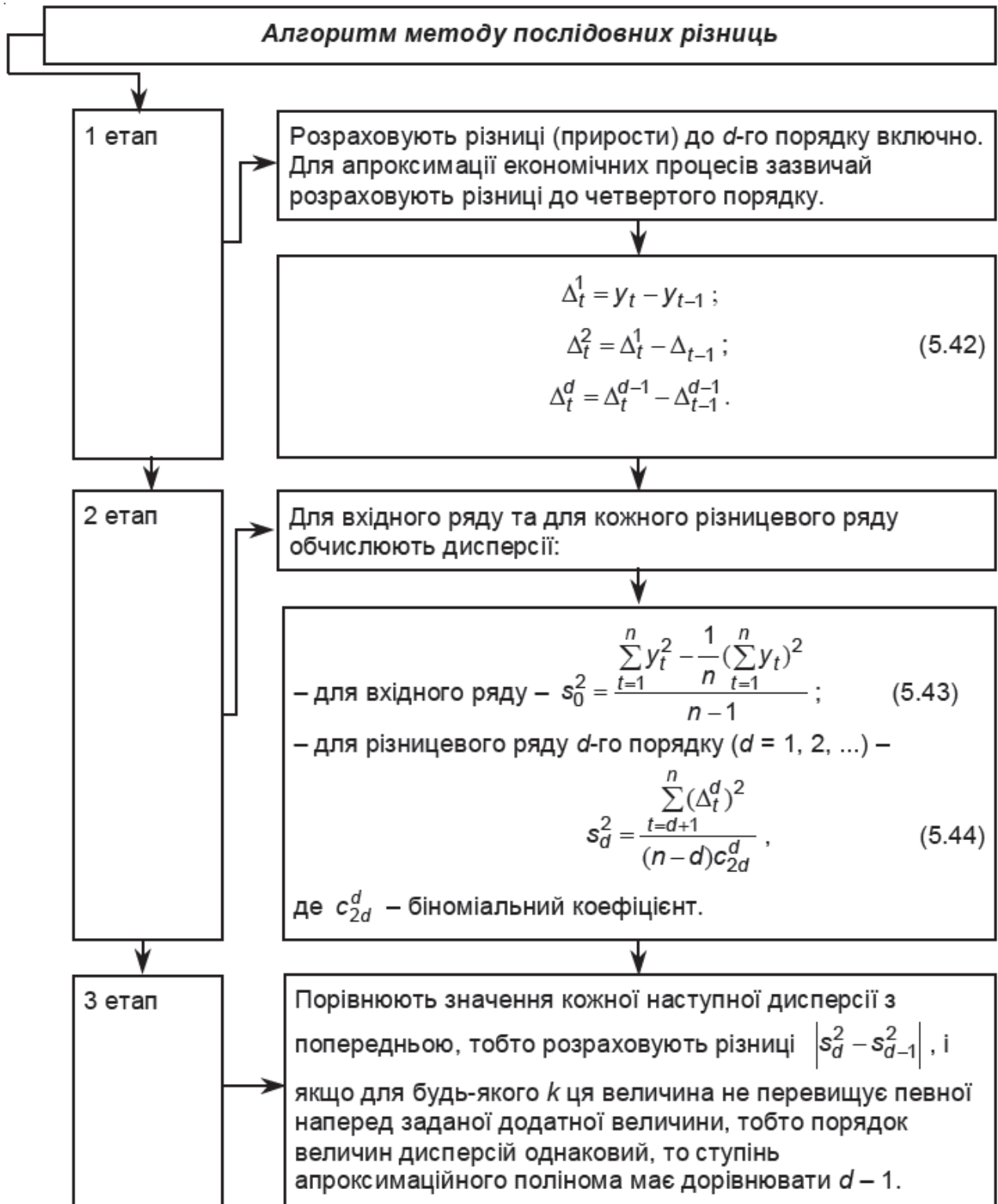


Рис. 12.15. Алгоритм методу послідовних різниць

$$\bar{y}_t = \frac{y_{t-1} + y_t + y_{t+1}}{3} ;$$

(12.25)

$\bar{y}_1 = \frac{5y_1 + 2y_2 - y_3}{6} \quad \text{та} \quad \bar{y}_n = \frac{-y_{n-2} + 2y_{n-1} + 5y_n}{6}$	(12.26)
--	---------

$\bar{\Delta}_t = \frac{y_{t+1} - y_{t-1}}{2} \quad t = 2, 3, \dots, n-1,$	(12.27)
--	---------

$\bar{\Delta}_t^{(2)} = \frac{\bar{\Delta}_{t+1} - \bar{\Delta}_{t-1}}{2}$	(12.28)
--	---------

Таблиця 12.2.

Вибір кривої зростання за характером зміни показника

Показник	Характер зміни показника з часом	Вид кривої зростання
Перший середній приріст $\bar{\Delta}_t$	Майже однаковий	Поліном першого порядку (пряма)
Перший середній приріст $\bar{\Delta}_t$	Змінюється лінійно	Поліном другого порядку (парабола)
Другий середній приріст $\bar{\Delta}_t^{(2)}$	Змінюється лінійно	Поліном третього порядку (кубічна парабола)
Відношення першого середнього приросту до середнього рівня ряду $\frac{\bar{\Delta}_t}{\bar{y}_t}$	Майже однаковий	Проста експонента
τ	Змінюється лінійно	Модифікована експонента
$\log \frac{\bar{\Delta}_t}{y_t}$	Змінюється лінійно	Крива Гомперця
$\log \frac{\bar{\Delta}_t}{y_t^2}$	Змінюється лінійно	Логістична крива

Адаптивні методи прогнозування



Рис. 12.16. Схема побудови адаптивних моделей

$$[0 \leq |\gamma| \leq 1]$$

$$y_t - y_{t-1} = \gamma (\hat{y}_t - y_{t-1})$$