

Результат

Виробнича складова

A	Цех (продукт) 1	Цех (продукт) 2	Цех (продукт) 3	Випуск (B)	X (вал)
Цех (продукт) 1	0,014	0,20	0,11	200	321,18
Цех (продукт) 2	0,270	0,09	0,17	150	342,10
Цех (продукт) 3	0,025	0,10	0,22	300	438,77
Коеф. прямих (міжцехових) витрат продуктів					
X (вал)	321,18	342,10	438,77		
Коеф. повних витрат продуктів					
	Цех (продукт) 1	Цех (продукт) 2	Цех (продукт) 3	AX	
Цех (продукт) 1	1,09	0,26	0,21	121,18	
Цех (продукт) 2	0,34	1,21	0,31	192,10	
Цех (продукт) 3	0,08	0,16	1,33	138,77	
Витрати продуктів на вн. потреби					

	Цех (продукт) 1	Цех (продукт) 2	Цех (продукт) 3
Ресурс-1	2,40	3,40	2,10
Ресурс-2	0,33	0,99	2,31
Ресурс-3	2,97	3,06	3,91
Ресурс-4	19,25	30,05	34,90
Витрати ресурсів на кожен продукт			
	Цех (продукт) 1	Цех (продукт) 2	Цех (продукт) 3
Ресурс-1	449,65	821,04	351,01
Ресурс-2	0,00	205,26	702,03
Ресурс-3	642,36	615,78	965,29
Ресурс-4	3211,81	6841,97	8775,37
Повні витрати ресурсів			

Ресурсна складова

	Цех (продукт) 1	Цех (продукт) 2	Цех (продукт) 3
Вартість ресурсів	7387,16	16010,20	22640,45
Вартість доставки	8576,17	17975,21	23562,74
Разом	15963,32	33985,41	46203,19
по цехах			
	Цех (продукт) 1	Цех (продукт) 2	Цех (продукт) 3
Вартість ресурсів	45,00	70,98	87,97
Вартість доставки	51,15	79,24	93,33
Разом	96,14	150,22	181,30
на одиницю продукту			

Вартісна складова

Аналіз результату

Валовий випуск $X = (321,18; 342,10; 438,77)$.

Загальні витрати коштів на ресурсне забезпечення:

$$15963,32 + 33985,41 + 46203,19 = 96151,92.$$

Ресурсна складова цін продуктів $(96,14; 150,22; 181,30)$.

Висновок

- 1) Завдяки застосуванню апарату матричної алгебри без застосування будь-яких допоміжних програмних продуктів ця модель дозволяє розв'язувати задачі будь-якого розміру
- 2) Згідно технології «Що-якщо» будь-які зміни початкових даних автоматично приводять до зміни значень результату, тому ця модель може бути складовою будь-якого бізнес-плану.

Розв'язання перевизначеної системи лінійних рівнянь

Перевизначена система з m рівнянь й n невідомих ($m > n$) не може мати єдиного загального розв'язку, який би точно задовольняв усі рівняння,

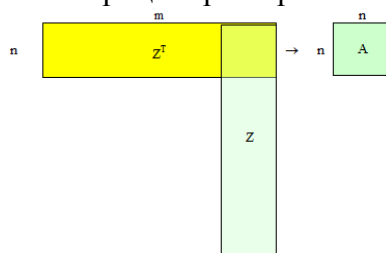
перетворюючи їх у тотожності підстановкою знайдених значень невідомих. Тому методом Гаусса-Маркова знаходять такий один розв'язок, який би у *середньому* найкращим чином задовольняв би усі частинні розв'язки.



Метод Гаусса-Маркова – це математично обґрунтований А. А. Марковим «метод найменших квадратів», визначений К. Гауссом, ці методи широко застосовуються, зокрема, у математичній статистиці.

Схематично ідею розв'язання такої системи за цим методом можна показати таким чином: задану систему із прямокутною («високою», бо рівнянь більше, чим невідомих) матрицею Z (із «зайвими» рядками) й такою ж «висоти» стовпцем правих частин B відповідними матричними обчисленнями зводять до визначеної системи із квадратною матрицею A (зафарбована) й відповідним стовпцем.

Наприклад, якщо задана система із матрицею Z розміром 9×3 , то після матричних обчислень $A = Z^T Z$ лишається квадратна матриця A розміром 3×3 :



аналогічно, «вкорочують» й вектор B .

Задача 1.14. Розв'язати перевизначену СЛР матричним методом

Матричний метод (три таблиці: A , B , X)

Правила матричних перетворень:

- 1) Задана «висока» матриця $Z(m, n)$, треба побудувати квадратну матрицю $A(n, n) = Z^T Z$.
- 2) Задано вектор-стовпець правих частин $V(m)$ з m елементів, треба побудувати вектор-стовпець правих частин $B(n)$ з n елементів: $B(n) = Z^T V$.
- 3) Розв'язується визначена система $AX = B$: розв'язок $X = A^{-1}B$.

Для реалізації цих перетворень й розв'язання перевизначеної системи використовуються функції Excel: ТРАНСП(A), МУМНОЖ(A ; B), МОБР(A).

Приклад ($m = 8$, $n = 4$)

Порядок роботи

- 1) Увести початкові дані: матрицю $Z(8, 4)$ та вектор-стовпець $V(8)$
- 2) Сформувані транспоновану матрицю $Z^T(4, 8)$
- 3) Обчислити матрицю $A(4, 4)$ та вектор-стовпець $B(4)$
- 4) Перемножити матрицю A^{-1} на вектор B й отримати шуканий вектор $X(4)$.

Результат

BE2		fx {=МУМНОЖ(МОБР(AV2:AY5);BB2:BB5)}																									
AB	AC	AD	AE	AF	AG	AH	AI	AJ	AK	AL	AM	AN	AO	AP	AQ	AR	AS	AT	AU	AV	AW	AX	AY	BA	BB	BD	BE
Z=	5	8	2	3			12		5	4	-9	0	3	6	8	9				312	121	19	84		105		-0,44
	4	0	8	4			-9		8	0	2	1	2	7	3	3				121	140	52	87		199		1,56
	-9	2	4	5			6		2	8	4	3	5	3	2	-4				19	52	147	88		45		-0,65
	0	1	3	2			5		3	4	5	2	8	2	1	6				84	87	88	159		165		0,78
	3	2	5	8			10																				
	6	7	3	2			6																				
	8	3	2	1			3																				
	9	3	-4	6			5																				

Матричний метод (одна таблиця X)

Задачу можна розв'язати за допомогою однієї складеної матричної формули, щоб ця формула була менш громіздкою й зрозумілою, рекомендується надати імена матриці коефіцієнтів й стовпцю вільних членів (команда *Вставка* → *Имя* → *Присвоить*), Z та V, відповідно:

BH2					fx {=МУМНОЖ(МОБР(МУМНОЖ(ТРАНСП(Z);Z));МУМНОЖ(ТРАНСП(Z);V)))}												
	AB	AC	AD	AE	AF	A	AH	AI	A	BD	BH	BK	BL	BM	BN	BO	BP
1																	
2	Z=	5	8	2	3			12		X=	-0,44						
3		4	0	8	4			-9	1,56								
4		-9	2	4	5			6	-0,65								
5		0	1	3	2			5	0,78								
6		3	2	5	8			10									
7		6	7	3	2			6									
8			8	3	2	1			3								
9		9	3	-4	6			5									

Задача 1.15. Розв'язати перевизначену СЛАР графічним методом

З метою наочної ілюстрації методу Гаусса-Маркова розв'язок формується побудовою графіків m лінійних функцій, $m > n$ ($n = 2$).

Постановка економічної задачі

У 5 торговельних закладах міста за заданими цінами (C_1 , C_2) зроблено контрольні закупівлі двох товарів у заданих вагових кількостях (B_1 , B_2), обчислено виторг (V):

	C1	C2	B1	B2	V
1	8,26	12,23	2	4	65,44
2	8,02	12,11	5	3	76,43
3	8,23	12,00	1	12	152,23
4	8,21	12,56	3	1	37,19
5	7,99	12,12	5	1	52,07

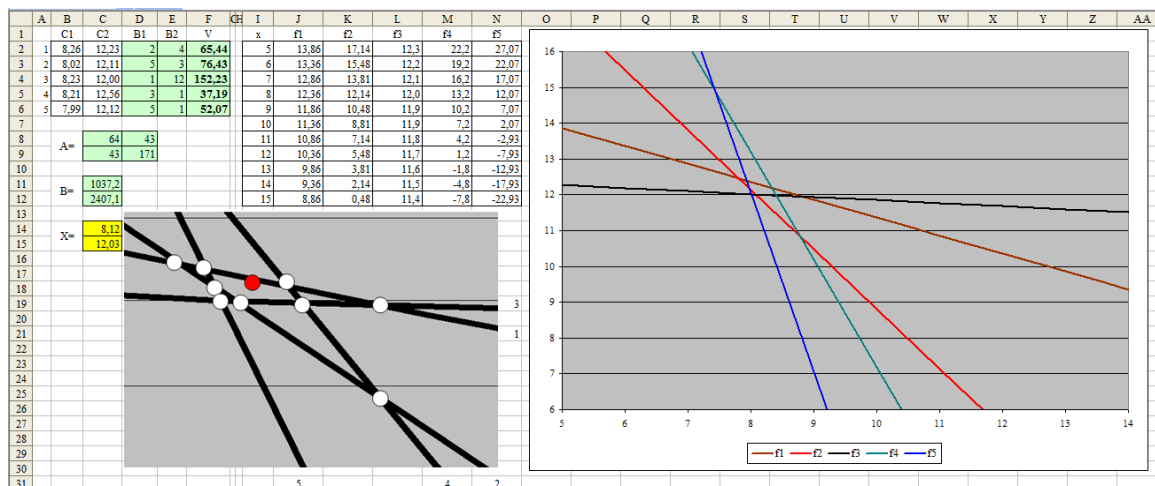
Треба визначити «центровані» ціни (x_1 , x_2) цих двох товарів в межах міста, згідно яких можна було б оцінити відхилення заданих цін п'яти товарів у ту чи іншу сторону, щоб сума квадратів відхилень заданих цін була мінімальною (це суть методу найменших квадратів).

Інтуїтивно цю ситуацію можна представити таким чином: задані ціни – це розкидані точки на площині, кожна з парою координат (C_1 , C_2), треба знайти таку «центральною точку» із шуканими координатами (x_1 , x_2), щоб сума відстаней від центру до усіх заданих точок була мінімальною. Знайдені координати центру (x_1 , x_2) дадуть відповідь щодо осереднених цін на два продукти.

Задача зводиться до розв'язання перевизначеної системи з $m = 5$ та $n = 2$:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 &= 65,44 \\ 5x_1 + 3x_2 &= 76,43 \\ 1x_1 + 12x_2 &= 152,23 \\ 3x_1 + 1x_2 &= 37,19 \\ 5x_1 + 1x_2 &= 52,07. \end{aligned}$$

Результат



Завдяки лише двом невідомим у системі є можливість зробити графічну ілюстрацію, побудувавши 5 графіків залежностей $x_2 = f(x_1)$, на них треба знайти точки перетину ліній й знайдену центральну точку серед них.

Знаючи знайдені «центровані» ціни: $X = (8,12; 12,03)$, тепер можна оцінити відхилення заданих цін й відповідних виторгів:

	B1	B2	V2	V-V2	C1-x1	C2-x2
	2	4	64,38	1,06	0,14	0,20
	5	3	76,70	-0,27	-0,10	0,08
	1	12	152,53	-0,30	0,11	-0,03
	3	1	36,40	0,79	0,09	0,53
	5	1	52,64	-0,57	-0,13	0,09

Зі стовпця V – V2 видно, що заклади 2, 3 та 5 втратили б, а заклади 1 та 4 – отримали би більше, якби торгували за визначеними «центрованими» цінами.

Перевизначені системи лінійних алгебраїчних рівнянь в художній літературі¹²

У повісті Ф. М. Достоевського «Ігрок» можна знайти сім цитат, у яких зашифровані курси 5 європейських валют за часів написання твору (2-га половина XIX ст.):

Цитата 1

— Вы их немедленно получите, — ответил генерал, покраснев немного, порывлся у себя в бюро, справился в книжке, и оказалось, что за ним моих денег около **ста двадцати рублей**.

— Как же мы сосчитаемся, — заговорил он, — надо переводить на талеры. Да вот возьмите **сто талеров**, круглым счетом, — остальное, конечно, не пропадет.

и далее

Вам следует дополнить с меня эти **четыре фридрихсдора и три флорина** на здешний расчет.

Цитата 2

Полина просто рассердилась, когда я передал ей всего только **семьсот гульденов**.

и далее

Слушайте и запомните: возьмите эти **семьсот флоринов** и ступайте играть, выиграйте мне на рулетке сколько можете больше; мне деньги во что бы ни стало теперь нужны.

Цитата 3

Я начал с того, что вынул **пять фридрихсдоров**, то есть **пятьдесят гульденов**, и поставил их на четку.

Цитата 4

— Да-с, вот взяла да и выиграла двенадцать тысяч флоринов! Какое двенадцать, а золото-то? С золотом почти что **тринадцать** выйдет. Это сколько по-нашему? Тысяч шесть, что ли, будет?

Я доложил, что и за семь перевалило, а по теперешнему курсу, пожалуй, и до **восьми** (тысяч рублей) дойдет.

Цитата 5

— Oui, madame, — вежливо подтвердил крупер, — равно как всякая единичная ставка не должна превышать разом **четырёх тысяч флоринов**, по уставу, — прибавил он в пояснение.

¹² Очков В. Mathcad и некоторые тайны художественной литературы // Домашний компьютер, №5, 2000 г.

Я поставил самую большую позволенную ставку, в **четыре тысячи гульденов**, и проиграл.

Цитата 6

Ей проходило получать ровно **четыреста двадцать фридрихсдоров**, то есть **четыре тысячи флоринов** и **двадцать фридрихсдоров**.

Цитата 7

— Полина, вот **двадцать пять тысяч флоринов** — это **пятьдесят тысяч франков**, даже больше.

У 7 цитатах повісті не задано, а зашифровано 7 рівнянь з 5-ма невідомими (курсами валют):

- 1) 120 рублей = 100 талеров + 4 фридрихсдора + 3 флорина (цитата 1)
- 2) 700 гульденов = 700 флоринов (цитата 2)
- 3) 5 фридрихсдоров = 50 гульденов (цитата 3)
- 4) 13 000 флоринов = 8 000 рублей (цитата 4)
- 5) 4 000 флоринов = 4 000 гульденов (цитата 5)
- 6) 420 фридрихсдора = 4 000 флоринов + 20 фридрихсдоров (цитата 6)
- 7) 25 000 флоринов = 50 000 франков (цитата 7),

які треба спочатку упорядкувати, щоб задати ЛЧ й ПЧ системи (5 невідомих значень валют приймають участь у 7 ситуаціях).

Сформована відповідна перевизначена СЛАР (7 рівнянь й 5 невідомих) з цх неофіційних (й не точних) джерел:

	Талер	Фридрихсдор	Флорин	Гульден	Франк	Рубль
Цитата 1	100	4	3	0	0	120
Цитата 2	0	0	0	700	-700	0
Цитата 3	0	5	0	-50	0	0
Цитата 4	0	0	13000	0	0	8000
Цитата 5	0	0	4000	-4000	0	0
Цитата 6	0	400	-4000	0	0	0
Цитата 7	0	0	25000	0	-50000	0

Її розв'язанням матричним методом можна визначити «центровані» курси 5 валют (талер, фридрихсдор, флорин, гульден и франк) по відношенню до рубля (імена діапазонів: А – матриця В2:F8 розміром 7×5, В – вектор G2:G8 з 7 елементів):

В10		{=ТРАНСП(МУМНОЖ(МОБР(МУМНОЖ(ТРАНСП(А);А));МУМНОЖ(ТРАНСП(А);В)))}						
	А	В	С	Д	Е	Ф	Г	Н
1		Талер	Фридрихсдор	Флорин	Гульден	Франк	Рубль	
2	Цитата 1	100	4	3	0	0	120	
3	Цитата 2	0	0	0	700	-700	0	
4	Цитата 3	0	5	0	-50	0	0	
5	Цитата 4	0	0	13000	0	0	8000	
6	Цитата 5	0	0	4000	-4000	0	0	
7	Цитата 6	0	400	-4000	0	0	0	
8	Цитата 7	0	0	25000	0	-50000	0	
9								
10	Курс к руб.	0.94	6.15	0.61	0.61	0.31		

Результат: талер (94 коп.), фридрихсдор (6,15 руб.), флорин и гульден (по 61 коп.), франк (31 коп.).

Глава 2.

Лінійне програмування: графічний та симплекс-метод.

Моделі векторних задач лінійної оптимізації

Приголомиуюча сила симплекс-методу завжди вражає мене.
Дж. Данциг

Лінійне програмування (ЛП) – популярний й найбільш розвинений апарат (задачі, теорія, моделі та методи) математичного моделювання задач оптимального використання обмежених ресурсів, що став основою математичного програмування.

Математична модель загальної задачі оптимізації

Незалежно від типу математична модель будь-якої задачі оптимізації має єдину узагальнену структуру, що складається з трьох частин:

- **План** (програма або рішення, яке треба знайти, *decisions*)
- **Цільова функція** (з якою метою і за яким критерієм, *objective*)
- **Обмеження** на невідомі плану та граничні умови (*constraints*).

Якщо шуканий план має форму вектора (рядка чи стовпця), задачі оптимізації будемо називати **векторними**, інакше, **матричними** чи **змішаними** (векторно-матричними).

Апарат ЛП спочатку під невиразною назвою «Програмування у лінійній структурі»¹³, пізніше під сучасною назвою¹⁴ «Лінійне програмування» (ЛП) виник в 1947 р. в дослідженнях американського математика Дж. Данцига (1914-2005) для вдосконалення планування у ВПС США (US Air Force), хоча, як з'ясувалося пізніше, відповідна строга математична теорія була розроблена раніше у нас Л. В. Канторовичем (1939 р.), пріоритет якого був визнаний Данцигом¹⁵ й підтверджений світовим науковим товариством присудженням Канторовичу Нобелівської премії з економіки за 1975 р.



На цей винахід Данцига надихнула ефектна й ефективна матрична модель міжгалузевого балансу В. В. Леонтьєва, який вперше успішно застосував апарат лінійної алгебри в економіці (1936 р.), а також співпраця з видатними дослідниками – математиком Дж. фон Нейманом та економістом Т. Купмансом (відзначеним Нобелівською премією з економіки разом з Канторовичем), дослідження яких стосувалися оптимізації в економіці, на виробництві та транспорті, в теорії прийняття управлінських рішень¹⁶.

Цінність цієї розробки Дж. Данцига полягає не лише в результатах з області обчислювальної математики, отриманих при розв'язанні систем лінійних нерівностей, але й у суто прикладному та користувацькому сенсі: для розв'язання різноманітних задач планування ним одразу був запропонований чіткий і ефективний машинний алгоритм пошуку оптимального плану, названий симплекс-методом, який спочатку досліджувався на перфорацийній техніці та калькуляторах, а із серійним випуском перших ЕОМ (з 1950-их рр.) сим-

¹³ Dantzig G. B. Programming in linear structure, Washington, Comptroller, USAF, 1948 (Лінійна структура – обмеження у формі системи лінійних нерівностей й рівнянь та лінійна ЦФ)

¹⁴ слово «програмування» походить від широко уживаного в США, а тепер і у нас слова «програма», яке є синонімом понять «план» та «планування», визначаючи орієнтацію цього апарату на прикладні задачі з прийняття рішень у плануванні та управлінні; математичний термін «лінійне» означає, що мова йде про пошук екстремуму лінійної функції при лінійних обмеженнях на невідомі, які визначають шуканий план (програму)

¹⁵ «... в СРСР у 1939 р. Канторовичем були оприлюднені ідеї лінійного програмування, віддані забуттю на ті два десятиріччя, які ознаменувалися відкриттям лінійного програмування й рішучим та повсюдним його впровадженням» [40]

¹⁶ Neumann von J. On a maximization problem. Inst. for Adv. Study, Princeton, 1947

Koormans T. C. (ed.) Activity analysis of production and allocation, N-Y, Wiley, 1951, 404 p. (збірник фундаментальних матеріалів першої конференції з математичної оптимізації, 1949 р.), уведений Купмансом термін activity відповідає поняттям: операція, процес, вид діяльності, продукт тощо, підкреслюючи універсальний характер їх оптимізаційного моделювання та аналізу для прийняття рішень

плекс-метод був реалізований у вигляді комп'ютерних програм для розв'язання реальних задач великого розміру (тепер вбудований в Excel).

Умови лінійності задач лінійного програмування:

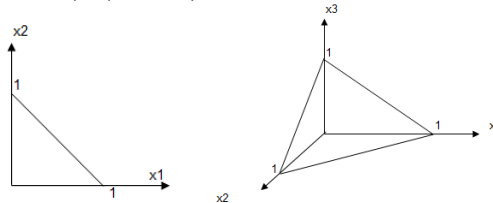
1. **Пропорційність** (дохід = ціна*кількість)
2. **Адитивність** (Загальний дохід = сума доходів)
3. **Подільність** (невідомі дійсного типу, можуть мати дробові значення)
4. **Невід'ємність** шуканих невідомих.

Симплекс-метод

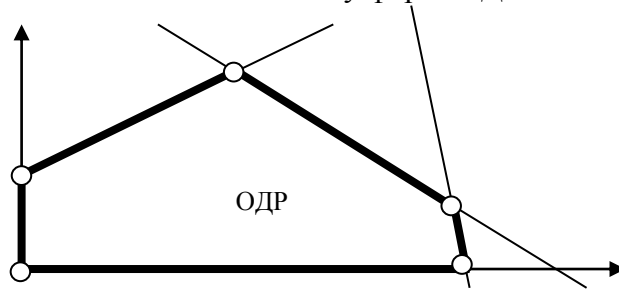
Математичний термін “симплекс” (лат. – *простий*) стосується найпростішої опуклої геометричної фігури, побудованої на осях координат – саме таку фігуру нагадує багатогранна область допустимих розв'язків чи рішень (ОДР) графічного розв'язку систем нерівностей, що й стало причиною назви методу (реальна ОДР не є симплексом).

Симплекс для:

- двовимірного простору ($n = 2$) це трикутник, створений перетином прямої з осями x_1 та x_2 у точках $(1, 0)$ та $(0, 1)$
- тривимірного простору ($n = 3$) це тетраедр, створений перетином трикутника з осями x_1, x_2 та x_3 у точках $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$

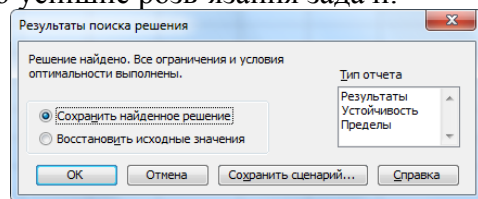


Для лінійних задач характерна опуклість ОДР, цю властивість симплекс-метод з успіхом використовує, бо Данциг довів, що всі допустимі й оптимальне, у тому числі, значення цільової функції (плани, рішення) – це опорні розв'язки недовизначеної СЛАР, що знаходяться саме в кутових точках ОДР, яких не так вже й багато (їх перебір досить швидкий, що й забезпечило ефективність методу). Таким чином, симплекс-методом відшукують кутові точки на множинах у формі ОДР:

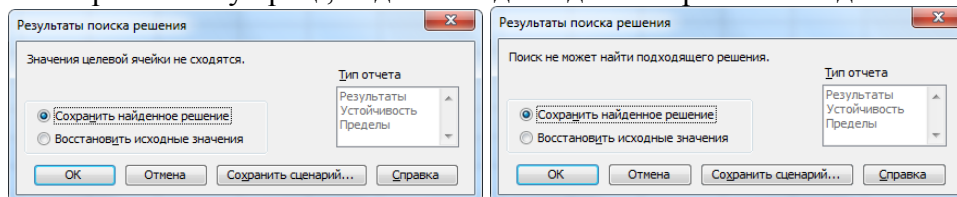


Багатокроковий алгоритм пошуку оптимуму побудований таким чином, що спочатку визначається опорний план (скажімо, у початку системи координат, де всі координати нульові), а далі на кожному наступному кроці формується кутова точка (допустимий план), яка перевіряється на оптимум.

При його досягненні знайдено оптимальний план і процес обчислень завершується із виведенням повідомлення про успішне розв'язання задачі:



інакше на шляху до оптимуму відшукується наступна кутова точка, краща за попередню. Таким чином, симплекс-метод використав властивості об'єктів лінійної алгебри і визначив принципово новий клас обчислювальних методів ітераційного типу для задач лінійної оптимізації. Якщо математична модель некоректна, алгоритм може не розпочатися чи зупинитися десь на проміжному кроці, видавши відповідне «аварійне» повідомлення:



Теорія двоїстості та її економічний смисл

Смисл і походження двоїстості – суто математична проблема, для користувачів (економістів, менеджерів) же формально вона визначається таким чином: є задача ЛП, яку називають прямою (чи основною). На тих же початкових даних – технологічній матриці A , векторах B (запаси) і C (ціни) – формується інша задача ЛП, яка по відношенню до *прямой* називається *двоїстою* задачею.

Таким чином, набір початкових даних A, B, C визначає пару пов'язаних між собою (спряжених) задач лінійного програмування – прямої та двоїстої до неї задач. Цікаво, що двоїстий симплекс-метод, вбудований в Excel, діє таким чином, що результатом обчислень є розв'язок одночасно цих двох задач, й це дуже ефективно, бо значення двоїстої задачі суттєво доповнюють оптимальний план прямої задачі.

Економічний зміст невідомих змінних двоїстої задачі (Канторович досить справедливо назвав їх «об'єктивно обумовленими оцінками»), це т. зв. *тіньові ціни*, *shadow price*, де термін «тіньова ціна» – це умовна й зрозуміла вартісна оцінка обмежувального показника, заданого у кількісній формі, це «цінність» цього показника (наприклад, запасу ресурсу, заданого у тоннах) у грошовому вимірі. І ці об'єктивно обумовлені оцінки, саме як тінь, невідступно супроводжують реальні кількісні показники, даючи змогу однозначно оцінити їх «вагу» й вплив на кінцевий показник, скажімо, на очікуваний прибуток чи вимушені витрати.

Ефективність двоїстих оцінок отриманого оптимального плану полягає в тому, що, поняття «об'єктивно обумовлені» вказують на безпосередню залежність результату – оптимального плану – лише від початкових даних задачі (отримуємо щось з того, що маємо), а слово «оцінка» стосується, зокрема, *вартісного* оцінювання наявних ресурсів у відповідній плановій задачі, де ці ресурси витрачаються для виготовлення продукції і задані *кількісно*.

Наприклад, нижче це буде показано детальніше, маємо два ресурси (паливо і сировину), їх запаси (100 та 245 ваг. од.), отримано оптимальний план, який забезпечує максимальний дохід, при його реалізації обидва запаси вичерпано. Ясно, що дефіцит цих ресурсів є «вузьким місцем», бо не дозволяє збільшити об'єм виробництва, для їх запасів отримано співвідношення у формі:

$$\frac{\text{запас (кількісна оцінка)}}{\text{тіньова ціна (вартісна оцінка)}} \text{ наприклад, це два співвідношення: } \frac{100}{3,6} \text{ та } \frac{245}{3,1} \text{ відповідно.}$$

Величини 3,6 та 3,1 якраз є точними вартісними оцінками з позицій отримання майбутнього доходу при збільшенні наявних запасів відповідних ресурсів (100 та 245) на одиницю (до 101 та до 246) – однозначно видно, що перший ресурс (паливо) «цінніший» за другий (сировина), бо $3,6 > 3,1$.

Пряма і двоїста задачі лінійного програмування

Зобразимо схематично структуру даних початкової – *прямой* – задачі ЛП, де: m – кількість обмежень, n – кількість невідомих (план), $(m \times n)$ – розмір задачі

$A(m \times n)$ – технологічна матриця (норми витрат)

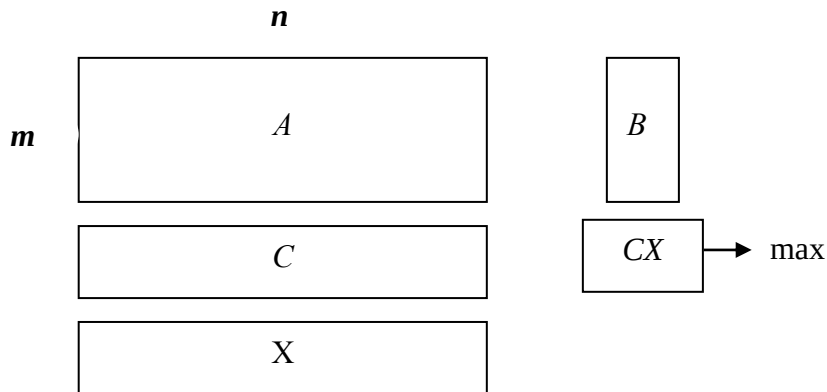
$B(m)$ – вектор обмежень (запаси ресурсів), знак обмежень ($\leq$)

$C(n)$ – вектор коефіцієнтів цільової функції (ціни)

$X(n)$ – шуканий вектор невідомих (план)

CX – загальний дохід (цільова функція, ЦФ), критерій оптимізації – максимум ЦФ.

Структура даних прямої задачі:



Тепер, для порівняння, зобразимо схематично структуру даних *двоїстої* до прямої задачі, де структури даних «розвернулися», а саме:

m – кількість невідомих (план), n – кількість обмежень, $(n \times m)$ – розмір задачі

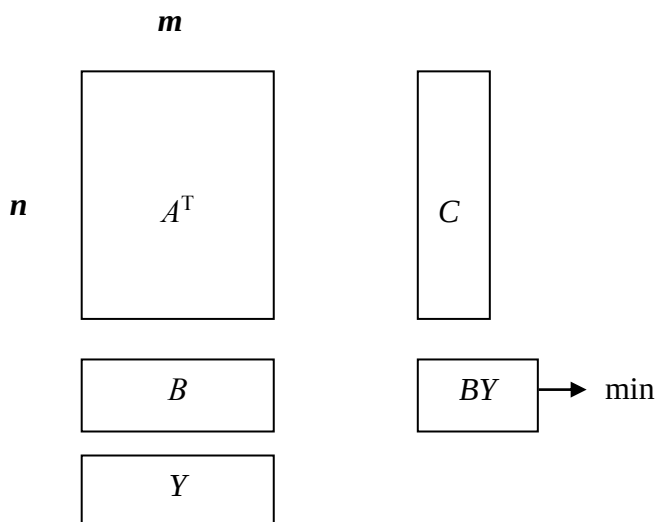
$A^T(n \times m)$ – транспонована технологічна матриця (норми витрат)

$B(n)$ – вектор коефіцієнтів цільової функції

$C(m)$ – вектор обмежень (запаси ресурсів), знак обмежень ($\geq$)

$Y(n)$ – вектор невідомих (двоїстий план)

BY – загальні витрати (цільова функція, ЦФ), критерій оптимізації – мінімум ЦФ.



Взаємозв'язки між цими двома задачами

Пряма задача

I. Знайти план $X(n)$

II. щоб ЦФ $CX \rightarrow \max$

III. при обмеженнях $AX \leq B$
і граничних умовах $X \geq 0$

де:

- кожному обмеженню прямої задачі відповідає невідома змінна двоїстої задачі і навпаки

Двоїста задача

I. Знайти план $Y(m)$

II. щоб ЦФ $BY \rightarrow \min$

III. при обмеженнях $A^T Y \geq C$
і граничних умовах $Y \geq 0$

- матриця коефіцієнтів обмежень прямої задачі змінюється на транспоновану
- вільні члени прямої задачі є коефіцієнтами ЦФ двоїстої
- знаки нерівностей прямої задачі ($\leq$) змінюються на зворотні ($\geq$) у двоїстій
- максимізація у прямій задачі змінюється на мінімізацію у двоїстій задачі
- співвідношення двоїстості взаємне, тобто, задача, двоїста до двоїстої задачі, є прямою.

Доведені наступні й дуже важливі властивості моделі лінійного програмування (теореми двоїстості):

- якщо одна з задач двоїстої пари має оптимум, то й інша його має, при цьому значення цільових функцій обох задач співпадають, тобто, максимум прямої задачі дорівнює мінімуму двоїстої задачі і навпаки;
- якщо в прямій задачі певне i -те обмеження виконується як строга нерівність (зі знаком " $<$ ", наприклад, Використано $<$ Запас, це означає, що *кількість* використаного i -го ресурсу менша його запасу), відповідна двоїста змінна $y_j = 0$. В економічному сенсі це значить, що нульову *вартісну* оцінку має ресурс, у якого є залишок і поповнювати цей запас не треба;
- якщо в прямій задачі певне i -те обмеження виконується як рівняння (знак " $=$ ", Використано = Запас, тобто, використано все, що було), відповідна двоїста змінна є позитивним числом ($y_j > 0$). В економічному сенсі це означає, що позитивну *вартісну* оцінку має ресурс, запаси якого повністю використані. Це число (y_j) показує "цінність" ресурсу, тобто, на скільки збільшиться ЦФ при збільшенні цього (дефіцитного) ресурсу на одиницю;
- якщо невідома x_i в прямій задачі (на максимум) має додатне значення, відповідне обмеження двоїстої задачі виконується як рівняння, якщо ж $x_i = 0$, то як строга нерівність. З точки зору економіки це означає: якщо i -ий продукт увійшов в оптимальний план (не нуль), двоїста *вартісна* оцінка всіх ресурсів, витрачених на його виготовлення, точно дорівнює його ціні – його виготовлення вигідне (рентабельне), інакше (якщо $x_i = 0$) витрати на ресурси вищі, ніж продажна ціна – виготовлення такого продукту не вигідне, воно буде збитковим (збитки дорівнюють різниці між продажною ціною і умовною вартістю ресурсів). Саме на величину цієї різниці:
 - зменшиться дохід (значення ЦФ) при вимушеному випуску одиниці не вигідної продукції. Ця різниця називається (за некоректним перекладом) нормованою (приведеною, в Excel 2010) вартістю оригіналу – *reduced cost (to reduce* – зменшувати) або
 - треба збільшити задану ціну, щоб його випуск став рентабельним (це важлива складова задачі оптимального ціноутворення).

Задачі ЛП

1) Векторні задачі оптимізації:

- пошук n невідомих змінних дійсного типу у формі **вектора** $X = (x_1, \dots, x_n)$, таких, щоб
- лінійна цільова функція $CX = c_1x_1 + \dots + c_nx_n$ цих n невідомих досягла:
 - максимуму
 - мінімуму чи
 - заданого значення

де $C = (c_1, \dots, c_n)$ – заданий **вектор** коефіцієнтів ЦФ;

- на шукані невідомі накладено m обмежень у вигляді системи m лінійних нерівностей і рівнянь з n невідомими, її коефіцієнти утворюють прямокутну матрицю $A(m \times n)$, а права частина задана вектором $B(m)$
- задовольняються граничні умови невід’ємності невідомих: всі $x_i \geq 0$;

2) Матричні задачі оптимізації:

- пошук mn невідомих змінних дійсного типу у формі **матриці** $X = (x_{11}, \dots, x_{mn})$, таких, щоб
- лінійна цільова функція $CX = c_{11}x_{11} + \dots + c_{mn}x_{mn}$ цих mn невідомих досягла:
 - максимуму
 - мінімуму чи
 - заданого значення

де $C = (c_{11}, \dots, c_{mn})$ – задана **матриця** коефіцієнтів ЦФ;

- на шукані невідомі накладено m обмежень у вигляді системи m лінійних нерівностей і рівнянь з mn невідомими, її коефіцієнти утворюють прямокутну матрицю $A(m \times n)$, а права частина задана вектором $B(m)$
- задовольняються граничні умови невід'ємності невідомих: всі $x_{ij} \geq 0$.

3) Змішані задачі оптимізації

Сюди відносять задачі, шукані невідомі яких утворюють комбінації векторів й матриць одного чи різного розміру й форми (стовпець, рядок, матриця), у полі *Изменяя ячейки* розв'язувача *Поиск решения* відповідні діапазони даних розділяють знаком «;».

Табличне моделювання задач лінійної оптимізації

Таблиці найкраще відповідають структурі моделей оптимізації завдяки традиційному й компактному представленню даних і відповідних математичних конструкцій (ЦФ, обмежень) у вигляді нерівностей, рівнянь та їх систем, тому на практиці саме табличні моделі, реалізовані в середовищі табличного процесора, є основним засобом для пошуку оптимуму.

Правила побудови табличних моделей:

1) Організація й уведення початкових даних таким чином, щоб візуально визначити їх призначення, а згодом оформити логічні зв'язки з невідомими, обмеженнями та ЦФ таким чином, щоб таблична модель задачі оптимізації органічно відтворювала властивості відповідного робочого документа.

1) Не вводити числові константи в формули, краще їх значення задавати в окремих клітинках з відповідними позначеннями. Це дасть змогу швидко і зручно модифікувати модель, пристосовуючи її до реальної ситуації.

2) Логічно зв'язані величини рекомендується розміщувати поруч. Наприклад, ліві і праві частини обмежень розміщувати одне біля одного, в паралельних колонках чи рядках.

3) Однорідні структури даних (матриці, вектори) задавати у вигляді діапазонів клітинок, діапазонам рекомендується надавати змістовні імена.

4) Використовувати колір, заливку та границі для виокремлення початкових даних і результатів, а також текстові коментарі та підказки до клітинок, щоб модель була зрозумілою і зручною для користування.

5) Для реалізації табличної моделі застосовується програмний модуль *Поиск решения* (в оригіналі Excel Solver) у вигляді додаткової компоненти (надбудови, рос. - *надстройка*, англ. - *add-in*) табличного процесора MS Excel, яка призначена для розв'язання визначених систем рівнянь, лінійних та нелінійних задач оптимізації, використовується з 1991 року.

Розмір задачі, яку можна розв'язати за допомогою стандартної версії цієї програми, обмежується такими граничними показниками:

- кількість невідомих (*decision variable*) – **200**
- кількість формульних обмежень (*explicit constraint*) на невідомі – **100**
- кількість граничних умов (*simple constraint*) на невідомі – **400**.

Задача про оптимальний план виробництва (про оптимальне використання обмежених ресурсів)

Постановка задачі

Підприємство має обмежені запаси m видів ресурсів, які розподіляються для виготовлення n видів продуктів.

Ставиться задача:

- про оптимальний план виробництва – ЩО й СКІЛЬКИ виготовити з цих запасів або
- про оптимальний розподіл запасів – КУДИ й СКІЛЬКИ направити, щоб обмежені ресурси найкраще використати.

Задано:

- запаси m видів ресурсів
- ціни n видів продуктів
- питомі витрати ресурсів для кожного продукту (визначені технологією у вигляді технологічної матриці розміром $m \times n$).

Треба знайти такий план розподілу ресурсів для виробництва продукції у формі шуканого вектора-рядка, щоб забезпечити максимальний дохід від реалізації виготовленої продукції із врахуванням обмежень на наявні обсяги ресурсів.

Математична модель

Позначення

m – кількість ресурсів

n – кількість продуктів

i – поточний номер (індекс) ресурсу, $i = 1, \dots, m$

j – поточний номер (індекс) продукту, $j = 1, \dots, n$

a_{ij} – питомі витрати i -го ресурсу для виготовлення j -го продукту, $A = \{a_{ij}\}$ – технологічна матриця

z_i – запас i -го ресурсу, $Z = \{z_i\}$ – вектор-стовпець запасів ресурсів

c_j – ціна одиниці j -го продукту, $C = \{c_j\}$ – вектор-рядок цін продуктів

x_j – шукана кількість j -го продукту, $X = \{x_j\}$ – план випуску продукції

$v_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$ – загальні витрати i -го ресурсу, використаного для випуску x_j одиниць j -ої продукції

$z_i - v_i$ – залишки i -го ресурсу

$d_j = c_j x_j$ – дохід від реалізації j -го продукту, $D = \sum_{j=1}^n d_j$ – загальний дохід (ЦФ).

Задача оптимізації

I. Знайти план $X = \{x_j\}$, за яким

II. ЦФ $D = \sum_{j=1}^n d_j \rightarrow \max$

III. за обмежень $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq z_i$ (використано $\leq$ запас)

та граничних умов: усі $x_j \geq 0$.

Початкові дані:

- список-стовпець назв m ресурсів ($i = 1, \dots, m$)
- список-рядок назв n продуктів ($j = 1, \dots, n$)
- питомі витрати кожного ресурсу для кожного продукту (матриця V розміром $m \times n$)
- запаси ресурсів (стовпець Z з m значень)
- ціни продуктів (рядок C з n значень).

Задача 2.1. Про оптимальний план ($n = 2$): графічний метод

Постановка задачі

Для виготовлення двох продуктів (П-1 та П-2) використовуються три види ресурсів, задано: технологічна матриця питомих витрат ресурсів розміром 3×2 , стовпець запасів ресур-