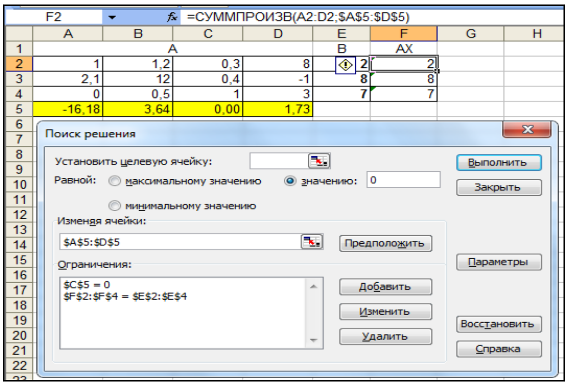
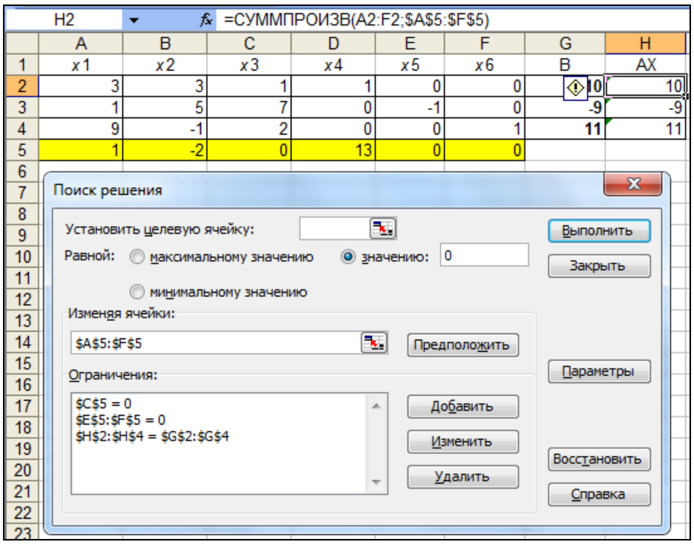


Приклад 2

Розв'язати недовизначену систему лінійних рівнянь (m = 3, n = 6)

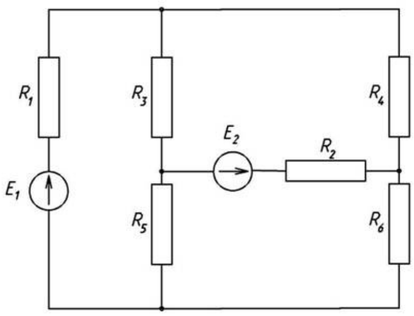
$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \qquad &= 10 \\ x_1 + 5x_2 + 7x_3 \qquad - x_5 \qquad &= -9 \\ 9x_1 - x_2 + 2x_3 \qquad + x_6 &= 11 \end{aligned}$$



Результат (один із 20-ти можливих): X = (1; -2; 0; 13; 0; 0), де x_3, x_5, x_6 – вільні змінні, базис (124) або (x_1, x_2, x_4)

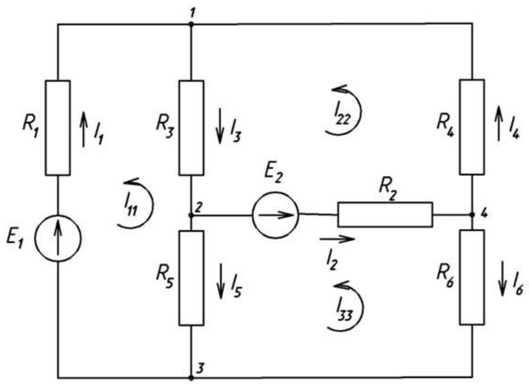
Задача 1.9. Розрахунок електричного ланцюга

Задано: схему ланцюга, значення опорів R_1, …, R_6 та ЕРС джерел E_1 та E_2, треба розрахувати 6 значень струмів I_1, …, I_6, що протікають опорами ланцюга.



Порядок роботи

1) У довільному порядку позначити вузли, напрями струмів у гілках й напрями обходу контурів:



2) За першим законом Кірхгофа сформувати три рівняння (на1 менше числа вузлів) для шуканих струмів для вузлів 1, 2, 3:

$I_1 + I_4 – I_3 = 0$

$I_3 – I_2 – I_5 = 0$

$I_5 + I_6 – I_1 = 0.$

3) За другим законом Кірхгофа сформувати три рівняння для струмів у трьох контурах I_{11}, I_{22}, I_{33}:

$–R_1I_1 – R_5I_5 – R_3I_3 = –E_1$

$R_2I_2 + R_4I_4 + R_3I_3 = E_2$

$–R_2I_2 + R_5I_5 – R_6I_6 = –E_2.$

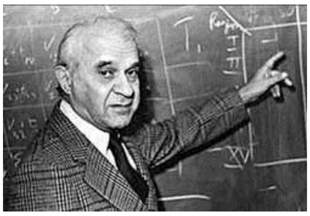
4) Маємо визначену СЛАР 6-го порядку, яку розв'язуємо матричним способом.

5) Перевірка балансу потужностей: $E_1I_1 + E_2I_2 = R_1I_1^2 + R_2I_2^2 + R_3I_3^2 + R_4I_4^2 + R_5I_5^2 + R_6I_6^2$

Результат:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1				I1	I2	I3	I4	I5	I6	E			
2	R1 =	4		1	0	-1	1	0	0	**0**			
3	R2 =	8		0	-1	1	0	-1	0	**0**			
4	R3 =	21		-1	0	0	0	1	1	**0**			
5	R4 =	16		-4	0	-21	0	-19	0	**-130**			
6	R5 =	19		0	8	21	16	0	0	**110**			
7	R6 =	16		0	-8	0	0	19	-16	**-110**			
8													
9	E1 =	130		5,89	4,13	4,62	-1,26	0,49	5,39			765,06	E_1I_1
10	E2 =	110										454,56	E_2I_2
11		R		4	8	21	16	19	16			**1219,618**	
12													
13		RI^2		138,535	136,612	449,082	25,429	4,599	465,361			**1219,618**	
14													

Задача міжгалузевого балансу (МГБ)



Вперше апарат лінійної алгебри для розв'язання реальних економічних задач використав В. В. Леонтьєв для дослідження національної економіки (Росії, США), що складається з певної кількості галузей, які одночасно виступають як виробники певної продукції та споживачі продукції власної та інших галузей.

Він побудував теорію на основі математичної моделі міжгалузевого балансу (МГБ, 1936 р.) саме засобами лінійної алгебри (модель "витрати-випуск" або, за Леонтьєвим, *input-output model*).

За цією теорією функціонування економічної системи будь-якого рівня (окремого підприємства, держави чи міжнаціональної економіки) характеризується випуском (*output*) готової продукції, для чого частина продукції кожної галузі витрачається на споживання самою економічною системою для забезпечення внутрішніх потреб, необхідних для випуску

Витрати на внутрішні потреби (вхід, input за Леонтьєвим) обчислюються як вектор AX, отриманий множенням матриці A на шуканий вектор X, де заданий вектор B визначає замовлення на випуск готової продукції (вихід, output). Оскільки кожна галузь двічі аналізується в моделі (як виробник й споживач), балансова модель є визначеною системою n лінійних алгебраїчних рівнянь:

$x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + b_1$
...
$x_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + b_i$
...
$x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + b_n$

або у матричній формі $\boldsymbol{X = AX + B}$ і називається моделлю МГБ (або моделлю Леонтьєва чи *input-output model*).
Класична матрична формула МГБ $X = AX + B$ є основним математичним співвідношенням для вартісних чи натуральних балансів на плановий період.

Задача 1.10. Розв'язати класичну задачу МГБ

Приклад 1.

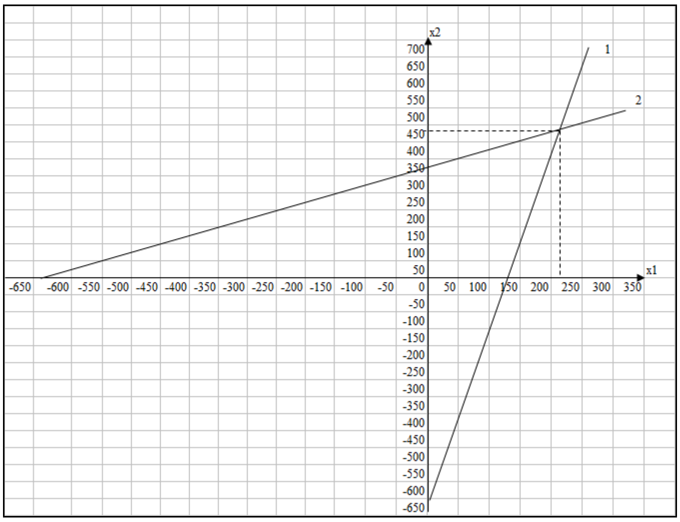
Підприємство складається з 2 цехів, продукція кожного цеху-виробника витрачається на внутрішні потреби обох цехів-споживачів (згідно технологічної матриці A) й випускається для зовнішнього споживання.
Задано: технологічна матриця (A) і вектор-стовпець готової продукції (B).
Визначити: валовий випуск (вектор-стовпець X) для задоволення внутрішніх потреб і замовлення на готову продукцію.

Графічний метод

Система:

$$\begin{matrix} x_1 = 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 + 125 \\ x_2 = 0{,}4x_1 + 0{,}23x_2 + 250 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} 0{,}9x_1 - 0{,}2x_2 = 125 \\ -0{,}4x_1 + 0{,}77x_2 = 250 \end{matrix}$$

	Цех 1	Цех 2	B		X
Цех 1	0,10	0,20	**125**		**239,3**
Цех 2	0,40	0,23	**250**		**449,0**
	x1	x2	B		
	0,90	-0,20	**125**		
	-0,40	0,77	**250**		
	x1	x2			
т1	138,9	-620,8			
т2	-625,0	324,7			



Результат: валовий випуск цехів $X = (x_1, x_2) \approx (220, 470)$.

Приклад 2.

Підприємство складається з 9 цехів, продукція кожного цеху-виробника витрачається на внутрішні потреби усіх цехів-споживачів (згідно технологічної матриці A) й випускається для зовнішнього споживання.
Задано: технологічна матриця (A) і вектор-стовпець готової продукції (B).
Визначити: валовий випуск (вектор-стовпець X) для задоволення внутрішніх потреб і замовлення на готову продукцію.

Матричний метод

За попередній звітний період, наприклад, за 2010 рік, відомі потоки продукції на внутрішні потреби (задана матриця P) й потоки для задоволення попиту на готову продукцію (вектор-стовпець B_{2010}), також задано замовлення на готову продукцію на наступний 2011 рік (вектор-стовпець B_{2011}):

Звіт за 2010 рік											
P	Цех-1	Цех-2	Цех-3	Цех-4	Цех-5	Цех-6	Цех-7	Цех-8	Цех-9	B_{2010}	B_{2011}
Цех-1	14	6	14	13	9	14	10	11	12	123	200
Цех-2	5	7	13	13	8	12	13	6	14	345	400
Цех-3	8	14	12	7	11	10	9	5	14	90	120
Цех-4	12	5	5	11	13	5	12	8	12	55	60
Цех-5	5	6	9	8	5	10	8	14	11	10	20
Цех-6	14	10	7	7	14	12	9	8	5	90	140
Цех-7	10	14	12	11	7	7	8	11	14	400	300
Цех-8	11	7	5	12	12	14	14	14	12	200	150
Цех-9	8	7	7	13	13	7	6	7	12	50	60

Треба:
- обчислити технологічну матрицю A й
- визначити вектор валового випуску X_{2011}, користуючись балансовою моделлю $X_{2011} = AX_{2011} + B_{2011}$.

Припущення лінійності: питомі технологічні витрати (коефіцієнти внутрішніх витрат у складі технологічної матриці A) не залежать від значень вектора B.

Для отримання вектора X використовується 5 матриць: P, A, E, E-A, $(E\text{-}A)^{-1}$.

Алгоритм
1) Обчислити матрицю A
2) Розв'язати систему $X = AX + B$ (для 2011 р.):
- $X - AX = B$
- $X(E\text{-}A) = B$, *де E – одинична матриця*
- $X = (E\text{-}A)^{-1}B$, *де* $^{-1}$ *– символ оберненої матриці.*

Розгорнута форма обчислень

Порядок роботи

1) Для кожного цеху знайти валовий випуск (X_{2010}) як суму потоків матриці P_{2010} (вектор AX за 2010 рік) + B_{2010} (це елементи вектора-стовпця X_{2010}):

P	Цех-1	Цех-2	Цех-3	Цех-4	Цех-5	Цех-6	Цех-7	Цех-8	Цех-9	B_{2010}	X_{2010}
Цех-1	14	6	14	13	9	14	10	11	12	123	**226**
Цех-2	5	7	13	13	8	12	13	6	14	345	**436**
Цех-3	8	14	12	7	11	10	9	5	14	90	**180**
Цех-4	12	5	5	11	13	5	12	8	12	55	**138**
Цех-5	5	6	9	8	5	10	8	14	11	10	**86**
Цех-6	14	10	7	7	14	12	9	8	5	90	**176**
Цех-7	10	14	12	11	7	7	8	11	14	400	**494**
Цех-8	11	7	5	12	12	14	14	14	12	200	**301**
Цех-9	8	7	7	13	13	7	6	7	12	50	**130**

2) Транспонуванням розмістити вектор-стовпець X_{2010} над таблицею й обчислити елементи матриці прямих витрат A за формулою: $a_{ij} = \dfrac{p_{ij}}{x_{2010,\,j}}$

X^T=	**226**	**436**	**180**	**138**	**86**	**176**	**494**	**301**	**130**	
Цех-1	0,062	0,014	0,078	0,094	0,105	0,080	0,020	0,037	0,092	
Цех-2	0,022	0,016	0,072	0,094	0,093	0,068	0,026	0,020	0,108	
Цех-3	0,035	0,032	0,067	0,051	0,128	0,057	0,018	0,017	0,108	
Цех-4	0,053	0,011	0,028	0,080	0,151	0,028	0,024	0,027	0,092	
Цех-5	0,022	0,014	0,050	0,058	0,058	0,057	0,016	0,047	0,085	A
Цех-6	0,062	0,023	0,039	0,051	0,163	0,068	0,018	0,027	0,038	
Цех-7	0,044	0,032	0,067	0,080	0,081	0,040	0,016	0,037	0,108	
Цех-8	0,049	0,016	0,028	0,087	0,140	0,080	0,028	0,047	0,092	
Цех-9	0,035	0,016	0,039	0,094	0,151	0,040	0,012	0,023	0,092	

3) Сформувати матрицю E, обчислити матриці E-A та матрицю повних витрат $V = (E\text{-}A)^{-1}$

Цех-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	
Цех-2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	
Цех-3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	
Цех-4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	
Цех-5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	E
Цех-6	0	0	0	0	0	1	0	0	0	
Цех-7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	
Цех-8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	
Цех-9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	
Цех-1	0,9	0,0	-0,1	-0,1	-0,1	-0,1	0,0	0,0	-0,1	E-A
Цех-2	0,0	1,0	-0,1	-0,1	-0,1	-0,1	0,0	0,0	-0,1	
Цех-3	0,0	0,0	0,9	-0,1	-0,1	-0,1	0,0	0,0	-0,1	
Цех-4	-0,1	0,0	0,0	0,9	-0,2	0,0	0,0	0,0	-0,1	
Цех-5	0,0	0,0	-0,1	-0,1	0,9	-0,1	0,0	0,0	-0,1	
Цех-6	-0,1	0,0	0,0	-0,1	-0,2	0,9	0,0	0,0	0,0	
Цех-7	0,0	0,0	-0,1	-0,1	-0,1	0,0	1,0	0,0	-0,1	
Цех-8	0,0	0,0	0,0	-0,1	-0,1	-0,1	0,0	1,0	-0,1	
Цех-9	0,0	0,0	0,0	-0,1	-0,2	0,0	0,0	0,0	0,9	
Цех-1	1,11	0,03	0,13	0,18	0,24	0,14	0,04	0,07	0,19	
Цех-2	0,06	1,03	0,12	0,17	0,22	0,12	0,05	0,05	0,20	
Цех-3	0,07	0,05	1,12	0,12	0,25	0,11	0,04	0,05	0,20	
Цех-4	0,09	0,03	0,07	1,15	0,26	0,08	0,04	0,06	0,18	
Цех-5	0,06	0,03	0,09	0,12	1,16	0,10	0,03	0,07	0,15	$(E\text{-}A)^{-1}$
Цех-6	0,10	0,04	0,09	0,12	0,27	1,12	0,04	0,06	0,12	
Цех-7	0,08	0,05	0,11	0,15	0,20	0,09	1,03	0,07	0,20	
Цех-8	0,09	0,04	0,08	0,17	0,27	0,14	0,05	1,08	0,19	
Цех-9	0,07	0,03	0,08	0,17	0,27	0,09	0,03	0,05	1,18	

4) Обчислити вектори-стовпці X_{2011} та $AX_{2011} = X_{2011} - B_{2011}$:

P	Цех-1	Цех-2	Цех-3	Цех-4	Цех-5	Цех-6	Цех-7	Цех-8	Цех-9	B_{2010}	X_{2010}	B_{2011}	X_{2011}	AX
Цех-1	14	6	14	13	9	14	10	11	12	123	**226**	200	321,85	121,8
Цех-2	5	7	13	13	8	12	13	6	14	345	**436**	400	505,38	105,4
Цех-3	8	14	12	7	11	10	9	5	14	90	**180**	120	226,49	106,5
Цех-4	12	5	5	11	13	5	12	8	12	55	**138**	60	155,81	95,8
Цех-5	5	6	9	8	5	10	8	14	11	10	**86**	20	106,44	86,4
Цех-6	14	10	7	7	14	12	9	8	5	90	**176**	140	242,56	102,6
Цех-7	10	14	12	11	7	7	8	11	14	400	**494**	300	409,24	109,2
Цех-8	11	7	5	12	12	14	14	14	12	200	**301**	150	265,96	116,0
Цех-9	8	7	7	13	13	7	6	7	12	50	**130**	60	154,11	94,1

Додатковим результатом є обчислення матриці непрямих витрат: *V* - *A*

S-A	Цех-1	Цех-2	Цех-3	Цех-4	Цех-5	Цех-6	Цех-7	Цех-8	Цех-9
Цех-1	1,05	0,02	0,05	0,08	0,14	0,06	0,02	0,04	0,10
Цех-2	0,04	1,02	0,05	0,07	0,12	0,05	0,02	0,03	0,09
Цех-3	0,04	0,02	1,05	0,07	0,12	0,05	0,02	0,03	0,09
Цех-4	0,04	0,02	0,05	1,07	0,11	0,05	0,02	0,03	0,08
Цех-5	0,03	0,01	0,04	0,06	1,10	0,04	0,02	0,03	0,07
Цех-6	0,04	0,02	0,05	0,07	0,11	1,05	0,02	0,03	0,08
Цех-7	0,04	0,02	0,05	0,07	0,12	0,05	1,02	0,03	0,09
Цех-8	0,05	0,02	0,05	0,08	0,13	0,06	0,02	1,04	0,10
Цех-9	0,04	0,02	0,05	0,07	0,11	0,05	0,02	0,03	1,09

і матриці майбутніх (у 2011 р.) потоків продукції від виробників до споживачів $P = \{p_{ij}\}$ за формулою $p_{ij} = a_{ij}x_j$, де p_{ij} – кількість продукції, яка передається від *i*-го виробника до *j*-го споживача згідно частки a_{ij} валового випуску, що споживається *j*-ою галуззю (x_j):

P_{2011}	Цех-1	Цех-2	Цех-3	Цех-4	Цех-5	Цех-6	Цех-7	Цех-8	Цех-9	AX2011
Цех-1	19,9	7,0	17,6	14,7	11,1	19,3	8,3	9,7	14,2	121,8
Цех-2	7,1	8,1	16,4	14,7	9,9	16,5	10,8	5,3	16,6	105,4
Цех-3	11,4	16,2	15,1	7,9	13,6	13,8	7,5	4,4	16,6	106,5
Цех-4	17,1	5,8	6,3	12,4	16,1	6,9	9,9	7,1	14,2	95,8
Цех-5	7,1	7,0	11,3	9,0	6,2	13,8	6,6	12,4	13,0	86,4
Цех-6	19,9	11,6	8,8	7,9	17,3	16,5	7,5	7,1	5,9	102,6
Цех-7	14,2	16,2	15,1	12,4	8,7	9,6	6,6	9,7	16,6	109,2
Цех-8	15,7	8,1	6,3	13,5	14,9	19,3	11,6	12,4	14,2	116,0
Цех-9	11,4	8,1	8,8	14,7	16,1	9,6	5,0	6,2	14,2	94,1
X2011	321,85	505,38	226,49	155,81	106,44	242,56	409,24	265,96	154,11	

Компактна форма з використанням віртуальних матриць

Щоб формула була компактною, бажано надати змістовні імена матриці *P* (Р), стовпцям X_{2010} (X) та B_{2011} (B). Для отримання вектора *X* використовується лише одна задана матриця *P* й 4 віртуальних матриць:

A = Р/трансп(Х),

E = AA^{-1} → МУМНОЖ(Р/трансп(Х);МОБР(Р/трансп(Х))),

E-A → МУМНОЖ(Р/трансп(Х);МОБР(Р/трансп(Х)))-Р/трансп(Х) та

(*E-A*)$^{-1}$ → МОБР(МУМНОЖ(Р/трансп(Х);МОБР(Р/трансп(Х)))-Р/трансп(Х))

у складі однієї формули $X = (E\text{-}A)^{-1}B$ або $X = \left(\frac{P}{X^T} \times \left(\frac{P}{X^T} \right)^{-1} - \frac{P}{X^T} \right)^{-1} \times B$.

Результат

P3 | {=МУМНОЖ(МОБР(МУМНОЖ(P/ТРАНСП(X);МОБР(P/ТРАНСП(X)))-P/ТРАНСП(X));B)}

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
1																		
2	P	Цех-1	Цех-2	Цех-3	Цех-4	Цех-5	Цех-6	Цех-7	Цех-8	Цех-9	B_{2010}	X_{2010}		B_{2011}		X_{2011}	AX_{2011}	
3	Цех-1	14	6	14	13	9	14	10	11	12	123	**226**		200		321,8	121,8	
4	Цех-2	5	7	13	13	8	12	13	6	14	345	**436**		400		505,4	105,4	
5	Цех-3	8	14	12	7	11	10	9	5	14	90	**180**		120		226,5	106,5	
6	Цех-4	12	5	5	11	13	5	12	8	12	55	**138**		60		155,8	95,8	
7	Цех-5	5	6	9	8	5	10	8	14	11	10	**86**		20		106,4	86,4	
8	Цех-6	14	10	7	7	14	12	9	8	5	90	**176**		140		242,6	102,6	
9	Цех-7	10	14	12	11	7	7	8	11	14	400	**494**		300		409,2	109,2	
10	Цех-8	11	7	5	12	12	14	14	14	12	200	**301**		150		266,0	116,0	
11	Цех-9	8	7	7	13	13	7	6	7	12	50	**130**		60		154,1	94,1	

Загальні відомості щодо технології МГБ

Матриці повних, прямих та непрямих витрат використовуються в економічному аналізі діяльності підприємств та народного господарства в цілому.
Коефіцієнти s_{ij} матриці **повних** витрат $S = (E\text{-}A)^{-1}$ показують, скільки треба виготовити продукції *i*-ої галузі для випуску у сферу кінцевого ужитку одиниці продукції *j*-ої галузі. Наприклад, коефіцієнт s_{11}=1,11 для однієї (він стоїть на головній діагоналі) і тієї ж галузі містить в собі ту одиницю продукції (B_1 =1), яка входить у сферу кінцевого споживання. Саме тому на головній діагоналі оберненої матриці *S* коефіцієнти повних витрат завжди більше одиниці.

Прямі витрати відображають частки кількості продукції, спожитої безпосередньо при виготовленні даного продукту, які задані величиною $\mathbf{a}_{ij}$. Наприклад, значення a_{34}=0.05 означає, що 5% продукції 3-ої галузі направляється на споживання 4-ій галузі.

Непрямі витрати відносяться до попередніх стадій виробництва і входять в продукт через інші засоби виробництва. Скажімо, для енергетичної галузі непрямі витрати вказують на кількість електроенергії, витраченої на виготовлення відповідного обладнання, провідникової продукції, сировини тощо.
Отже, **повні витрати = прямі + непрямі**.

Наприклад, маючи прямі витрати продукції електроенергетики (1-ша галузь) машинобудуванню (2-га галузь) величиною a_{12} = 0,01 (1%), розрахунками знайшли повні витрати s_{12}=0.03 (3%), це, відповідно, означає, що непрямі витрати складуть величину 0,02 (2% витрат електроенергетики міститься в обладнанні та матеріалах машинобудування).
Повні витрати не набагато перевищують прямі витрати (на величину непрямих витрат) для видобувних і переробних галузей (шахти, збагачувальні і ткацькі фабрики, виробництво будматеріалів, металургія), але суттєво відрізняються для галузей, де велика доля напівфабрикатів і вартісних матеріалів (наприклад, збиральне виробництво у машинобудуванні, радіоелектроніці тощо[10]), отже це – потужний і об’єктивний інструмент для економічного аналізу ефективності економічної системи будь-якого рівня.

Аналіз балансу “витрати-випуск”, тобто, порівняння величин витрат *AX* та випуску *B*, дозволяє визначити рівень ефективності економічної системи чи окремої галузі – чим менше споживається продукції на внутрішні потреби, тим буде більшим об’єм готової продукції, тим відповідна галузь чи уся економіка продуктивніша.

[10] достатньо порівняти непрямі витрати на видобуток вугілля чи залізної руди й витрати на виготовлення мікросхем чи розробку програм для комп'ютера

Метод із використанням надбудови *Поиск решения*

I. Знайти план X_{2011}
II. за обмеженням: $X_{2011} = AX_{2011} + B_{2011}$, де $A = P_{2010}/X_{2010}^{T}$
Результат:

Q3 {=МУМНОЖ(B16:J24;P3:P11)}

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	M	N	P	Q	R
1	Звіт за 2010 рік															
2	P	Цех-1	Цех-2	Цех-3	Цех-4	Цех-5	Цех-6	Цех-7	Цех-8	Цех-9	B_{2010}	B_{2011}	X_{2010}	X_{2011}	AX	AX+B
3	Цех-1	14	6	14	13	9	14	10	11	12	123	200	**226**	321,8	121,8	321,8
4	Цех-2	5	7	13	13	8	12	13	6	14	345	400	**436**	505,4	105,4	505,4
5	Цех-3	8	14	12	7	11	10	9	5	14	90	120	**180**	226,5	106,5	226,5
6	Цех-4	12	5	5	11	13	5	12	8	12	55	60	**138**	155,8	95,8	155,8
7	Цех-5	5	6	9	8	5	10	8	14	11	10	20	**86**	106,4	86,4	106,4
8	Цех-6	14	10	7	7	14	12	9	8	5	90	140	**176**	242,6	102,6	242,6
9	Цех-7	10	14	12	11	7	7	8	11	14	400	300	**494**	409,2	109,2	409,2
10	Цех-8	11	7	5	12	12	14	14	14	12	200	150	**301**	266,0	116,0	266,0
11	Цех-9	8	7	7	13	13	7	6	7	12	50	60	**130**	154,1	94,1	154,1
12																
13	X2010	226	436	180	138	86	176	494	301	130						
14																
15	A	Цех-1	Цех-2	Цех-3	Цех-4	Цех-5	Цех-6	Цех-7	Цех-8	Цех-9						
16	Цех-1	0,06	0,01	0,08	0,09	0,10	0,08	0,02	0,04	0,09						
17	Цех-2	0,02	0,02	0,07	0,09	0,09	0,07	0,03	0,02	0,11						
18	Цех-3	0,04	0,03	0,07	0,05	0,13	0,06	0,02	0,02	0,11						
19	Цех-4	0,05	0,01	0,03	0,08	0,15	0,03	0,02	0,03	0,09						
20	Цех-5	0,02	0,01	0,05	0,06	0,06	0,06	0,02	0,05	0,08						
21	Цех-6	0,06	0,02	0,04	0,05	0,16	0,07	0,02	0,03	0,04						
22	Цех-7	0,04	0,03	0,07	0,08	0,08	0,04	0,02	0,04	0,11						
23	Цех-8	0,05	0,02	0,03	0,09	0,14	0,08	0,03	0,05	0,09						
24	Цех-9	0,04	0,02	0,04	0,09	0,15	0,04	0,01	0,02	0,09						

Поиск решения
Установить целевую ячейку:
Равной: максимальному значению / значению: 0 / минимальному значению
Изменяя ячейки: $P$3:$P$11
Ограничения: $P$3:$P$11 = $R$3:$R$11
Выполнить | Закрыть | Предположить | Параметры | Добавить | Изменить | Удалить | Восстановить | Справка

Задача 1.11. Розв'язати задачу МГБ («від валу»)

За цим підходом можна оцінити рівень розвитку складових економічної системи (галузей, секторів, окремих підприємств чи цехів у їх складі) й виявити резерви відповідних потужностей.
Задано:

- технологічна матриця міжгалузевих витрат *A* (її визначення показано у попередній задачі)
- вектор валового випуску *X* (це максимально можливі валові об’єми випуску продукції).

Знайти вектор кінцевої продукції *B* за матричною формулою: $B = X – AX$ або за допомогою програми *Поиск решения*.

Результат

O2 {=МУМНОЖ(B2:K11;N2:N11)}

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	N	O
1		Галузь 1	Галузь 2	Галузь 3	Галузь 4	Галузь 5	Галузь 6	Галузь 7	Галузь 8	Галузь 9	Галузь 10	Замовлення (B)	**X**	AX
2	Галузь 1	0,02	0,01	0,01	0,07	0,04	0,02	0,07	0,05	0,08	0,04	**141,75**	350	208,3
3	Галузь 2	0,01	0,20	0,07	0,09	0,00	0,00	0,00	0,04	0,08	0,00	**238,50**	500	261,5
4	Галузь 3	0,10	0,02	0,05	0,01	0,10	0,04	0,09	0,04	0,04	0,00	**757,75**	1000	242,3
5	Галузь 4	0,07	0,03	0,09	0,00	0,10	0,06	0,04	0,01	0,02	0,00	**354,00**	600	246,0
6	Галузь 5	0,00	0,00	0,03	0,03	0,02	0,09	0,06	0,03	0,06	0,06	**596,50**	800	203,5
7	Галузь 6	0,00	0,00	0,02	0,03	0,07	0,01	0,08	0,06	0,00	0,08	**16,50**	250	233,5
8	Галузь 7	0,00	0,00	0,04	0,10	0,03	0,02	0,00	0,09	0,07	0,06	**80,50**	325	244,5
9	Галузь 8	0,00	0,00	0,04	0,09	0,01	0,07	0,01	0,02	0,00	0,07	**38,25**	250	211,8
10	Галузь 9	0,00	0,03	0,03	0,02	0,10	0,04	0,04	0,00	0,00	0,02	**116,00**	300	184,0
11	Галузь 10	0,10	0,04	0,03	0,08	0,06	0,06	0,10	0,00	0,03	0,05	**902,50**	1200	297,5
12														
13	X^T=	350,0	500,0	1000,0	600,0	800,0	250,0	325,0	250,0	300,0	1200,0			

15	**Потоки між галузями**										AX
16	Галузь 1	7,0	5,0	10,0	42,0	32,0	5,0	22,8	12,5	24,0	48,0	208,3
17	Галузь 2	3,5	100,0	70,0	54,0	0,0	0	0	10,0	24,0	0	261,5
18	Галузь 3	35,0	10,0	50,0	6,0	80,0	10,0	29,3	10,0	12,0	0	242,3
19	Галузь 4	24,5	15,0	90,0	0	80,0	15,0	13,0	2,5	6,0	0	246,0
20	Галузь 5	0	0	30,0	18,0	16,0	22,5	19,5	7,5	18,0	72,0	203,5
21	Галузь 6	0	0	20,0	18,0	56,0	2,5	26,0	15,0	0	96,0	233,5
22	Галузь 7	0	0	40,0	60,0	24,0	5,0	0	22,5	21,0	72,0	244,5
23	Галузь 8	0	0	40,0	54,0	8,0	17,5	3,3	5,0	0,0	84,0	211,8
24	Галузь 9	0,0	15,0	30,0	12,0	80,0	10,0	13,0	0	0	24,0	184,0
25	Галузь 10	35,0	20,0	30,0	48,0	48,0	15,0	32,5	0	9,0	60,0	297,5

З отриманих розрахунків можна визначити рівень розвитку (завантаженості) галузей. Наприклад, 6-та галузь маючи потенціал у 250 одиниць, майже все вимушена направляти на внутрішні потреби (233,5), зате 5-та галузь з потенціалом у 800 од. спроможна виготовити майже 600 од. власної продукції для зовнішнього споживання.

Задача 1.12. Розв'язати задачу МГБ (варіант «змішаний»)

Позначення

n – загальна кількість галузей

n_1 – кількість галузей, для яких задано валовий випуск (X)

n_2 – кількість галузей, для яких задано випуск готової продукції (B),

$n_1 + n_2 = n$.

Для цього варіанту задачі рекомендується скористатися програмою *Поиск решения*.

Порядок роботи

1) Ввести (або попередньо обчислити) технологічну матрицю A, n_1 значень валу X та n_2 значень вектору експорту B

2) Визначити діапазони шуканих n_2 невідомих валу X та n_1 невідомих вектору B, заповнити їх нулями

3) Сформувати транспонуванням вектор-рядок X (вал)

4) Обчислити матрицю потоків P та суми по її рядках (AX)

5) Сформувати стовпець правої частини системи $AX + B$

6) Розв'язати систему обмежень (ЛЧ = ПЧ) $X = AX + B$ й визначити шукані значення невідомих.

Приклад

Задана змішана система:

	Г-1	Г-2	Г-3	Г-4	Г-5	Г-6	B	X
Г-1	0,03	0,07	0,02	0,09	0,05	0,1	**100**	0
Г-2	0,09	0,03	0,1	0,07	0,02	0,09	**125**	0
Г-3	0,09	0,09	0,02	0,06	0	0,02	0	**300**
Г-4	0,06	0,03	0,08	0,06	0,2	0,09	0	**500**
Г-5	0,09	0,05	0,04	0,04	0	0,08	0	**90**
Г-6	0,09	0,1	0,02	0,02	0,06	0,02	0	**30**

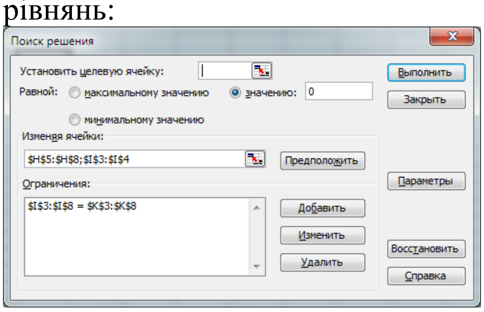
де для «легких» галузей Г-1 та Г-2 із необмеженими можливостями задані замовлення на готову продукцію (100, 125), а для «важких» галузей Г-3 ÷ Г-6 вимагають задані максимальні валові випуски (300, 500, 90, 30).

Треба знайти 6 невідомих: $B3 \div B6$ та $X1$, $X2$.

Матричним множенням обчислюємо вектор AX, потім знаходимо значення вектору $AX + B$:

	Г-1	Г-2	Г-3	Г-4	Г-5	Г-6	B	X	AX	AX+B
Г-1	0,03	0,07	0,02	0,09	0,05	0,1	**100**	0	58,50	158,50
Г-2	0,09	0,03	0,1	0,07	0,02	0,09	**125**	0	69,50	194,50
Г-3	0,09	0,09	0,02	0,06	0	0,02	0	**300**	36,60	36,60
Г-4	0,06	0,03	0,08	0,06	0,2	0,09	0	**500**	74,70	74,70
Г-5	0,09	0,05	0,04	0,04	0	0,08	0	**90**	34,40	34,40
Г-6	0,09	0,1	0,02	0,02	0,06	0,02	0	**30**	22,00	22,00

Далі – запуск програми Поиск решения, заповнюємо поля її вікна й розв'язуємо систему рівнянь $X = AX + B$, де X – ліва частина, а $AX + B$– права частина системи обмежень-рівнянь:



Результат:

	Г-1	Г-2	Г-3	Г-4	Г-5	Г-6	B	X	AX	AX+B
Г-1	0,03	0,07	0,02	0,09	0,05	0,1	**100**	179,07	79,07	179,07
Г-2	0,09	0,03	0,1	0,07	0,02	0,09	**125**	217,13	92,13	217,13
Г-3	0,09	0,09	0,02	0,06	0	0,02	227,74	**300**	72,26	300,00
Г-4	0,06	0,03	0,08	0,06	0,2	0,09	408,04	**500**	91,96	500,00
Г-5	0,09	0,05	0,04	0,04	0	0,08	28,63	**90**	61,37	90,00
Г-6	0,09	0,1	0,02	0,02	0,06	0,02	-29,83	**30**	59,83	30,00

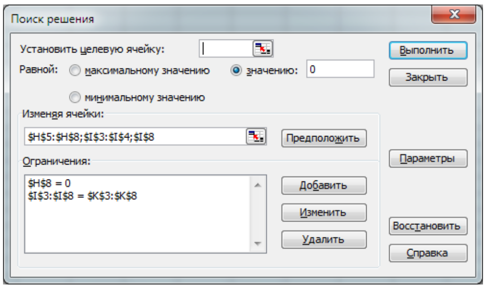
Знайдено 6 значень шуканих невідомих:

Для випуску *B*1 = 100 вал *X*1 = **179,07** Для випуску *B*2 = 125 вал *X*2 = **217,13**	Для валу *X*3 = 300 випуск *B*3 = **227,74** Для валу *X*4 = 500 випуск *B*4 = **408,04** Для валу *X*5 = 90 випуск *B*5 = **28,63** Для валу *X*6 = 30 випуск *B*6 = – **29,83**.

Від'ємне значення *B*6 (купівля необхідного продукту замість продажу) свідчить про недостатню потужність 6-ої галузі, що неспроможна задовольнити навіть внутрішні потреби.

Виникла допоміжна задача: визначити максимальну потужність 6-ої галузі, яка хоча б задовольнила внутрішні потреби на її продукцію (про експорт мова не йде, B6 = 0), для цього визначається невідома *X*6 (клітинка I8) й формується додаткове обмеження:

*B*6 = 0:



<u>Результат</u>:

	Г-1	Г-2	Г-3	Г-4	Г-5	Г-6	B	X	AX	AX+B
Г-1	0,03	0,07	0,02	0,09	0,05	0,1	**100**	182,51	82,51	182,51
Г-2	0,09	0,03	0,1	0,07	0,02	0,09	**125**	220,33	95,33	220,33
Г-3	0,09	0,09	0,02	0,06	0	0,02	226,52	**300**	73,48	300,00
Г-4	0,06	0,03	0,08	0,06	0,2	0,09	404,94	**500**	95,06	500,00
Г-5	0,09	0,05	0,04	0,04	0	0,08	25,67	**90**	64,33	90,00
Г-6	0,09	0,1	0,02	0,02	0,06	0,02	0,00	**61,08**	61,08	61,08

Відповідь: X_6 = 61,08.

Розширена балансова модель виробничо-ресурсної задачі

Постановка задачі

Підприємство складається з m цехів, кожен з яких виготовляє один продукт й є одночасно виробником й споживачем продукції власної й інших цехів, яка є «проміжною» й складовою відповідної готової продукції – це класична задача МГБ, де визначаються потоки продукції двох видів: міжцехові ***витрати*** й ***випуск*** готової продукції. Будемо вважати, що міжцехові потоки продукції безкоштовні для підприємства.
Але цих потоків продукції явно недостатньо для здійснення виробничої програми, бо кожен цех згідно технології є споживачем певних n видів «зовнішніх» ресурсів, це: сировина, енергія, обладнання, послуги (інформаційні, транспортні, інші), які треба купувати за заданою ціною.
Таким чином, у розширеній задачі окрім потоків продукції є ще два потоки: ресурсів й коштів, для забезпечення виробничого процесу. Оцінка фінансових витрат на ресурсне забезпечення випуску кожного продукту дозволяє наблизитися до відповідної ***задачі ціноутворення*** за витратним підходом.
Це – не оптимізаційна, а одноваріантна задача, де вибору нема, бо з-за збалансованості (кількість виробників дорівнює кількості споживачів) маємо математичну модель, що зводиться до розв'язання визначеної СЛР, яка має один розв'язок. Зате ця модель буде надалі використана для розв'язання явно оптимізаційної (багатоваріантної) задачі, де відсутня умова збалансованості й розв'язується недовизначена СЛР.

Задано:
- замовлення на ***випуск*** готової продукції у вигляді вектора-стовпця з m елементів та
- технологічна матриця міжцехових ***витрат*** «проміжної» продукції розміром $m \times m$.

Визначити виробничий план у вигляді валового випуску кожного цеху для задоволення замовлення. Це – виробнича складова задачі, що зводиться до класичної моделі «витрати-випуск» й розв'язання визначеної СЛАР.
Для ресурсного забезпечення визначеного виробничого плану додатково задано:
- питомі норми витрат n ресурсів для виготовлення одиниці продукції кожного цеху
- ціна цих ресурсів.

Визначити:
- коефіцієнти повних витрат ресурсів на одиницю готової продукції кожного цеху
- необхідну кількість кожного з n ресурсів та їх вартість по цехах й для кожного продукту
- нижню границю продажної ціни кожного продукту з урахуванням витрат на оплату ресурсів.

Це – ресурсна й вартісна складові задачі, які розв'язуються засобами матричної алгебри.

Математична модель

Позначення
m – кількість цехів, n – кількість ресурсів, f – кількість фінансових показників ресурсів
i – поточний номер цеху-виробника, j – поточний номер цеху-споживача, $i, j = 1, \ldots, m$

p – поточний номер ресурсу, $p = 1, \ldots, n$, l – поточний номер фінансового показника, $l = 1, \ldots, f$
$A = \{a_{ij}\}$ – задана технологічна матриця розміром $m \times m$
$W = (E-A)^{-1}$ – матриця повних витрат розміром $m \times m$, де E – одинична матриця розміром $m \times m$
$B = \{b_i\}$ – заданий вектор-стовпець випуску готової продукції
$R = \{r_{pj}\}$ – задана матриця питомих витрат ресурсів розміром $n \times m$
$C = \{c_{pl}\}$ – задана матриця питомих значень вартісних показників ресурсів розміром $n \times f$
$X = \{x_i\}$ – шуканий валовий випуск
$D = \{d_{ij}\}$ – шукана матриця витрат продукції на внутрішні потреби розміром $m \times m$ ($D = AX$)
$K = \{K_{pj}\}$ – шукана матриця кількостей ресурсів розміром $n \times m$ на увесь валовий випуск
$k = \{k_{pj}\}$ – шукана матриця питомих кількостей ресурсів розміром $n \times m$
$V = \{V_{pl}\}$ – шукана матриця витрат на ресурсне забезпечення валового випуску розміром $n \times f$
$v = \{v_{pl}\}$ – шукана матриця питомих витрат на ресурсне забезпечення розміром $n \times f$.

Алгоритм
1) Увести початкові дані: матриці A, R, C; вектор B
2) Обчислити матрицю повних витрат:
$W = (E-A)^{-1}$ =МОБР(МУМНОЖ(МОБР(A);A)–A)[11]
3) Визначити валовий випуск продукції для задоволення замовлення:
$X = WB$ =МУМНОЖ(W;B)
4) Визначити міжцехові потоки продуктів:
$D = AX^T$ = МУМНОЖ(A;ТРАНСП(X))
5) Обчислити повні витрати ресурсів:
$K = RX^T$ =МУМНОЖ(R;ТРАНСП(X))
6) Обчислити питомі витрати ресурсів:
$k = RW$ =МУМНОЖ(R;W)
7) Обчислити вартість необхідних ресурсів:
$V = C^T K$ =МУМНОЖ(ТРАНСП(C);K)
8) Обчислити ресурсну складову продажної ціни продуктів:
$c = C^T k$ =МУМНОЖ(ТРАНСП(C);k)

Задача 1.13. Розв'язати виробничо-ресурсну задачу
Приклад (m =3; n= 4; f =2)

Початкові дані:

A	Цех (продукт) 1	Цех (продукт) 2	Цех (продукт) 3	Випуск (B)
Цех (продукт) 1	0,014	0,20	0,11	200
Цех (продукт) 2	0,270	0,09	0,17	150
Цех (продукт) 3	0,025	0,10	0,22	300

R	Цех (продукт) 1	Цех (продукт) 2	Цех (продукт) 3
Ресурс-1	1,4	2,4	0,8
Ресурс-2	0	0,6	1,6
Ресурс-3	2	1,8	2,2
Ресурс-4	10	20	20
	норми витрат ресурсів		

C	Ціна	Доставка
Ресурс-1	5	0,23
Ресурс-2	12	1,25
Ресурс-3	2	0,69
Ресурс-4	1,2	2,50

[11] одиничну матрицю E для зменшення розмірів табличного документа представимо у віртуальній формі за формулою $E = A^{-1}A$

Результат

Виробнича складова

А	Цех (продукт) 1	Цех (продукт) 2	Цех (продукт) 3	Випуск (В)	X (вал)
Цех (продукт) 1	0,014	0,20	0,11	200	**321,18**
Цех (продукт) 2	0,270	0,09	0,17	150	**342,10**
Цех (продукт) 3	0,025	0,10	0,22	300	**438,77**
	Коеф. прямих (міжцехових) витрат продуктів				
X (вал)	321,18	342,10	438,77		
	Цех (продукт) 1	Цех (продукт) 2	Цех (продукт) 3		
Цех (продукт) 1	1,09	0,26	0,21		
Цех (продукт) 2	0,34	1,21	0,31		
Цех (продукт) 3	0,08	0,16	1,33		
	Коеф. повних витрат продуктів				
	Цех (продукт) 1	Цех (продукт) 2	Цех (продукт) 3	AX	
Цех (продукт) 1	4,50	68,42	48,26	121,18	
Цех (продукт) 2	86,72	30,79	74,59	192,10	
Цех (продукт) 3	8,03	34,21	96,53	138,77	
	Витрати продуктів на вн. потреби				

	Цех (продукт) 1	Цех (продукт) 2	Цех (продукт) 3
Ресурс-1	2,40	3,40	2,10
Ресурс-2	0,33	0,99	2,31
Ресурс-3	2,97	3,06	3,91
Ресурс-4	19,25	30,05	34,90
	Витрати ресурсів на кожен продукт		
	Цех (продукт) 1	Цех (продукт) 2	Цех (продукт) 3
Ресурс-1	449,65	821,04	351,01
Ресурс-2	0,00	205,26	702,03
Ресурс-3	642,36	615,78	965,29
Ресурс-4	3211,81	6841,97	8775,37
	Повні витрати ресурсів		

Ресурсна складова

	Цех (продукт) 1	Цех (продукт) 2	Цех (продукт) 3
Вартість ресурсів	7387,16	16010,20	22640,45
Вартість доставки	8576,17	17975,21	23562,74
Разом	**15963,32**	**33985,41**	**46203,19**
	по цехах		
	Цех (продукт) 1	Цех (продукт) 2	Цех (продукт) 3
Вартість ресурсів	45,00	70,98	87,97
Вартість доставки	51,15	79,24	93,33
Разом	**96,14**	**150,22**	**181,30**
	на одиницю продукту		

Вартісна складова

Аналіз результату

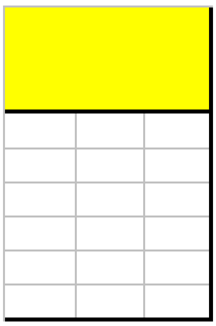
Валовий випуск X = (321,18; 342,10; 438,77).
Загальні витрати коштів на ресурсне забезпечення:

15963,32 + 33985,41 + 46203,19 = 96151,92.

Ресурсна складова цін продуктів (96,14; 150,22; 181,30).

Висновок

1) Завдяки застосуванню апарату матричної алгебри без застосування будь-яких допоміжних програмних продуктів ця модель дозволяє розв'язувати задачі будь-якого розміру
2) Згідно технології «Що-якщо» будь-які зміни початкових даних автоматично приводять до зміни значень результату, тому ця модель може бути складовою будь-якого бізнес-плану.



Розв'язання перевизначеної системи лінійних рівнянь

Перевизначена система з m рівнянь й n невідомих ($m > n$) не може мати єдиного загального розв'язку, який би точно задовольняв усі рівняння,