

31

	A	B	C	AO	AP	AQ	AR	AS	AT	AU	AV	AW	AX	AY	BA	BE	BC	BI	BE
1																			
2	A	1	2	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	B		X		(AX)
3		-3.85	2.72	-0.47	3.41	-3.46	1.91	-1.95	-2.3	0.08	-4.74	-1.8	0.43	-2.37	-1.1		=МУМНОЖ(МОБР(B3:AY52);BA3:BA52)		=МУМНОЖ(B3:AY52;BC3:BC52)
4		3.97	-3.01	-3.36	2.96	-1.97	-2.46	-4.08	3.66	3.79	-1.24	1.08	-3.46	-0.83	12.9		=МУМНОЖ(МОБР(B3:AY52);BA3:BA52)		=МУМНОЖ(B3:AY52;BC3:BC52)
5		-3.36	4.89	-0.25	-1.39	-4.18	0.71	0.45	2.52	-3.4	-2.64	-4.41	0.34	2.61	3.4		=МУМНОЖ(МОБР(B3:AY52);BA3:BA52)		=МУМНОЖ(B3:AY52;BC3:BC52)
6		4.74	0.15	-2.22	-1.04	-4.84	-2.24	-2.18	-3.39	-4.5	1.27	-3.29	1.39	1.66	-12.4		=МУМНОЖ(МОБР(B3:AY52);BA3:BA52)		=МУМНОЖ(B3:AY52;BC3:BC52)
7		0.26	2.14	3.17	0.01	4.75	4.04	-4.08	1.89	0.3	3.34	0.97	-2.65	3.25	0.8		=МУМНОЖ(МОБР(B3:AY52);BA3:BA52)		=МУМНОЖ(B3:AY52;BC3:BC52)
8		-3.04	2.74	-4.31	-3.78	-2.21	-4.86	0.15	3.88	-4.83	-3.72	-0.06	-0.41	-0.36	20.8		=МУМНОЖ(МОБР(B3:AY52);BA3:BA52)		=МУМНОЖ(B3:AY52;BC3:BC52)
9		-2.08	3.63	-5	3.46	-0.99	2.96	-1.21	2.89	-1.33	-2.04	4.91	2.32	-1	-14.5		=МУМНОЖ(МОБР(B3:AY52);BA3:BA52)		=МУМНОЖ(B3:AY52;BC3:BC52)
10		2.41	-1.04	-1.8	1.86	-2.45	0.32	-1.96	2.21	2.78	-4.46	-0.89	1.76	2.31	5.2		=МУМНОЖ(МОБР(B3:AY52);BA3:BA52)		=МУМНОЖ(B3:AY52;BC3:BC52)
11		-0.66	-0.17	4.81	-3.82	-1.43	-0.69	4.52	4.49	-1.24	-2.74	0.5	3.87	-3.55	12.3		=МУМНОЖ(МОБР(B3:AY52);BA3:BA52)		=МУМНОЖ(B3:AY52;BC3:BC52)
12		-0.63	2.62	2.27	1.73	-3.12	-1.92	3.12	-1.06	0.02	4.09	2.81	-0.27	-4.18	-10.2		=МУМНОЖ(МОБР(B3:AY52);BA3:BA52)		=МУМНОЖ(B3:AY52;BC3:BC52)
13		-3.86	-4.84	-4.44	-4.24	-2.56	1.65	3.13	-1.69	2.65	2.59	-1.14	-2.59	3.64	9.7		=МУМНОЖ(МОБР(B3:AY52);BA3:BA52)		=МУМНОЖ(B3:AY52;BC3:BC52)
14		1.76	-3.89	-2.6	2.67	-4.86	2.76	-1.97	3.48	-3.96	3.89	4.39	-2.71	1.94	9.9		=МУМНОЖ(МОБР(B3:AY52);BA3:BA52)		=МУМНОЖ(B3:AY52;BC3:BC52)
15		0.32	3.42	2.16	-0.31	-0.98	0.85	2.64	1.62	-3.02	-2.6	3.76	-4.73	4.79	6.2		=МУМНОЖ(МОБР(B3:AY52);BA3:BA52)		=МУМНОЖ(B3:AY52;BC3:BC52)
16		-0.4	-4.72	1.27	4.6	3.61	-1.76	-4.77	-3.45	-2.9	2.83	2.26	-1.07	-2.49	19.8		=МУМНОЖ(МОБР(B3:AY52);BA3:BA52)		=МУМНОЖ(B3:AY52;BC3:BC52)
17		0.96	-1.89	3.7	3.12	2.92	-1.49	3.24	1.96	-0.96	2.64	3.62	3.93	-4.68	-19.8		=МУМНОЖ(МОБР(B3:AY52);BA3:BA52)		=МУМНОЖ(B3:AY52;BC3:BC52)
18		3.67	-2.29	3.67	-1.26	1.83	-3.31	2.39	2.26	4.85	-1.92	0.46	3.16	-1.8	-8.5		=МУМНОЖ(МОБР(B3:AY52);BA3:BA52)		=МУМНОЖ(B3:AY52;BC3:BC52)
19		4.36	3.74	0.57	0.42	1.24	4.69	2.2	4.81	3.01	1.68	-1.15	3.64	-3.66	3.6		=МУМНОЖ(МОБР(B3:AY52);BA3:BA52)		=МУМНОЖ(B3:AY52;BC3:BC52)
20		-4.13	4.12	2.37	-3.51	0.26	3.49	1.6	0.99	4.32	2.12	0.55	-3.85	4.77	21.1		=МУМНОЖ(МОБР(B3:AY52);BA3:BA52)		=МУМНОЖ(B3:AY52;BC3:BC52)
42		4.47	0.5	-0.1	2.47	1.27	-1.32	3.95	-1.03	-3.67	1.38	1.83	-1.63	0.17	6.7		=МУМНОЖ(МОБР(B3:AY52);BA3:BA52)		=МУМНОЖ(B3:AY52;BC3:BC52)
43		-3.93	-1	-1.61	2.4	2.58	-0.46	2.99	3.1	-0.63	-4.25	-0.5	-4.7	4.15	23.4		=МУМНОЖ(МОБР(B3:AY52);BA3:BA52)		=МУМНОЖ(B3:AY52;BC3:BC52)
44		0.95	-4.74	4.53	-3.96	1.04	-4.92	3.24	-4.47	4.87	3.15	1.81	-2.44	-2.38	23.9		=МУМНОЖ(МОБР(B3:AY52);BA3:BA52)		=МУМНОЖ(B3:AY52;BC3:BC52)
45		-0.06	3.08	4.9	4.66	1.31	1.85	-0.96	-2.94	-4.62	2.74	-3.49	-0.64	-1.05	-10.7		=МУМНОЖ(МОБР(B3:AY52);BA3:BA52)		=МУМНОЖ(B3:AY52;BC3:BC52)
46		4.73	-2.87	-4.14	0.29	2.15	1.62	-4.46	3.67	-4.47	-0.82	-3.58	3.35	4.29	1		=МУМНОЖ(МОБР(B3:AY52);BA3:BA52)		=МУМНОЖ(B3:AY52;BC3:BC52)
47		-1.91	3.26	0.34	-1.86	-1.67	4.53	-2.81	-1.07	-3.02	-2.9	-3.25	-0.51	2.27	20.5		=МУМНОЖ(МОБР(B3:AY52);BA3:BA52)		=МУМНОЖ(B3:AY52;BC3:BC52)
48		1.22	3.79	-4.68	1.19	2.54	-0.55	1.99	0.66	0.52	-1.65	-1.97	-0.56	1.04	-7.2		=МУМНОЖ(МОБР(B3:AY52);BA3:BA52)		=МУМНОЖ(B3:AY52;BC3:BC52)
49		0.25	4.58	-0.49	3.19	-0.8	0.55	1.61	0.12	2.78	3.14	0.06	-3.54	-1	-6.4		=МУМНОЖ(МОБР(B3:AY52);BA3:BA52)		=МУМНОЖ(B3:AY52;BC3:BC52)
50		-3.52	4.97	2.85	2.54	-1.96	-4.47	-1.53	-1.46	0.47	2.72	-1.8	4.37	4.36	-2.9		=МУМНОЖ(МОБР(B3:AY52);BA3:BA52)		=МУМНОЖ(B3:AY52;BC3:BC52)
51		0.26	-3.6	3.17	-1.36	-3.63	-4.38	-2.63	-0.35	1.84	-1.23	-1.73	1.72	-3.17	-15.7		=МУМНОЖ(МОБР(B3:AY52);BA3:BA52)		=МУМНОЖ(B3:AY52;BC3:BC52)
52		-4.99	-4.78	4.65	4.48	-0.81	-4.61	0.36	4.66	2.39	3.23	3.33	-4.27	-3.89	-5.8		=МУМНОЖ(МОБР(B3:AY52);BA3:BA52)		=МУМНОЖ(B3:AY52;BC3:BC52)

Задача 1.6. Розв'язати визначену СЛАР із використанням надбудови *Поиск решения*

Мета цього методу – перше ознайомлення з технікою користування програмою надбудовою *Поиск решения*. Головна функція програми – розв'язання лінійних та нелінійних задач оптимізації, розв'язання СЛАР є складовою процедури лінійної оптимізації.

Метод використовує матричні функції ТРАНСП та МУМНОЖ й надбудову *Поиск решения*.

Задана система $AX = B$, знайти вектор X .

Початкові дані: квадратна матриця A та вектор-стовпець B .

У системі $AX = B$ вектор AX – ліва частина (ЛЧ), вектор B – права частина системи (ПЧ).

Позначення

i – номер рядка, j – номер стовпця

a_{ij} – елемент матриці A на перетині i -го рядка й j -го стовпця

b_i – i -ий елемент вектора-стовпця B

x_j – j -ий елемент шуканого вектора-рядка X .

Задача оптимізації

I. Знайти вектор-рядок $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, такий, щоб

II. ЦФ $V = \sum_{i=1}^n v_i = 0$, де $v_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - b_i$ – відхилення ЛЧ (AX) від ПЧ (B), V – сума відхилень

III. за обмежень: $AX = B$.

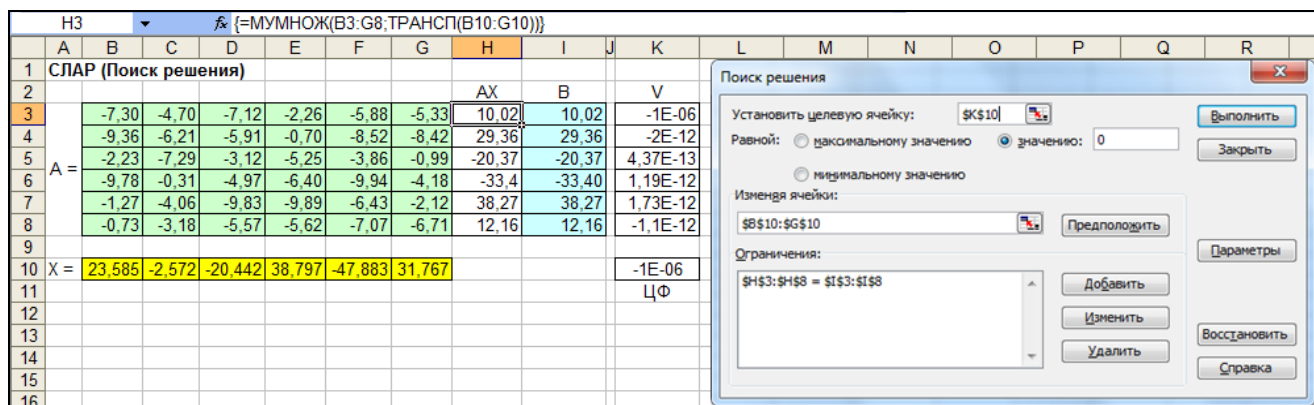
Приклад

Розв'язати СЛАР 6-го порядку.

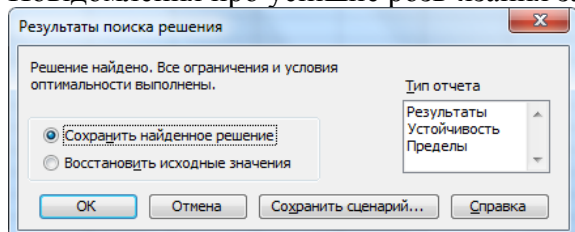
Порядок роботи:

- 1) Увести початкові дані: матрицю A та вектор-стовпець B
- 2) Визначити форму шуканого вектора X : рядок, виділити для нього місце, увести заголовки, клітинки заповнити нулями
- 3) Обчислити ліву частину (AX) системи за формулою $=МУМНОЖ(A;X^T)$
- 4) Обчислити значення вектора V і знайти їх суму (ЦФ)
- 5) Виклик надбудови *Поиск решения*, заповнити поля вікна й знайти розв'язок системи.

Результат 1



Повідомлення про успішне розв'язання задачі



Значення відхилень на рівні машинних нулів.

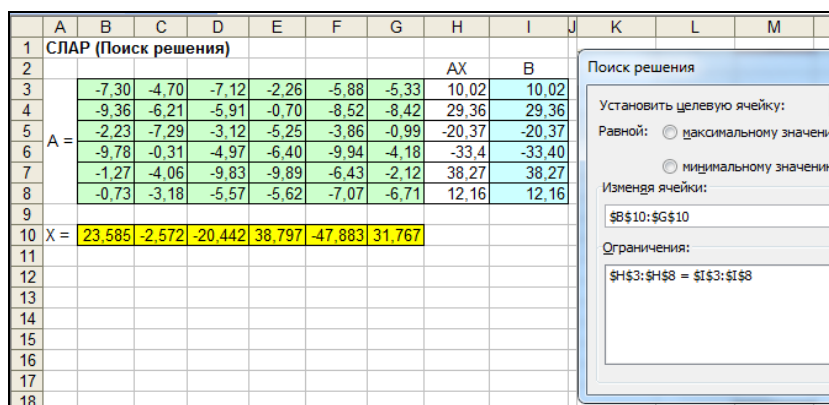
Зауваження. Цю задачу можна розв'язати за скороченою формою – без ЦФ, яка у цій задачі, фактично, дублює систему обмежень:

Задача оптимізації

I. Знайти вектор-рядок $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

III. за обмежень: $AX = B$.

Результат 2



Методи для розв'язання визначеної СЛАР (огляд)

Метод, засіб	Достойнства, переваги	Недоліки, обмеження
графічний	Наочний, без використання матричних функцій, рекомендується для ілюстрації методу	Лише при $n = 2$
Крамера	Простий, одна функція МОПРЕД, рекомендується для задач невеликого розміру	Громіздкий
матричний, з явною оберненою	Потужний, формування й виведення	Вимагає місце для розмі-

матрицею	оберненої матриці, рекомендується для задач, де аналізується й застосовується обернена матриця	щення оберненої матриці
матричний, з віртуальною оберненою матрицею	Лаконічний результат, рекомендується для задач великого розміру	Дещо ускладнена формула
матричний, з використанням надбудови <i>Поиск решения</i> .	Робота з потужною програмою розв'язання лінійних та нелінійних систем рівнянь	Розмір системи обмежується числом шуканих невідомих (до 100 для базової версії розв'язувача)

Система лінійних алгебраїчних нерівностей, формування й розв'язання недовизначеної СЛАР

У недовизначеній системі є m рівнянь й n невідомих ($m < n$), відповідно, до визначеної системи «не вистачає» рівнянь, матриця коефіцієнтів має форму довгастої стрічки розміром $m \times n$ – така система має безліч розв'язків.

У кожного з цих розв'язків визначають m **основних** та $n - m$ **вільних** змінних, далі вільні змінні зануляють, чим наче «вирізають» з матриці коефіцієнтів квадратний шматок розміром $m \times m$, за ним формують визначену СЛАР й знаходять числові значення основних змінних.

Розв'язання недовизначеної СЛАР – основна й характерна властивість лінійного програмування, бо саме до недовизначеної системи лінійних рівнянь відповідними перетвореннями зводяться обмеження, задані системою лінійних алгебраїчних нерівностей.



Щоб зрозуміти методику цих перетворень, згадаймо старовинний інструмент – ваги, де, скажімо, на правій шальці (тарілці) розміщується незмінний предмет, що зважується, на лівій – змінні гири. Виходить, нерівність є математичною моделлю вагів, де, ПЧ нерівності – вага предмету, ЛЧ – вага гирь, $ЛЧ < > = ПЧ$.

Ваги врівноважуються комбінацією гирь на лівій шальці й нерівність перетворюється у рівність:

- додаванням/вилученням/заміною гирь на лівій шальці чи
- додаванням чисел з відповідним знаком у ЛЧ, ПЧ – константа.

Приклад

Система нерівностей	Система рівнянь	Матриця коефіцієнтів СЛАР
$3x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 10$	$3x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 10$	3 3 1 1 0 0
$x_1 + 5x_2 + 7x_3 \geq -9$	$x_1 + 5x_2 + 7x_3 - x_5 = -9$	1 5 7 0 -1 0
$9x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 11$	$9x_1 - x_2 + 2x_3 + x_6 = 11$	9 -1 2 0 0 1

Додаванням невідомих змінних (з відповідним знаком): x_4, x_5 та x_6 задана система нерівностей перетворена у недовизначену систему із матрицею коефіцієнтів розміром 3×6 .

Для недовизначеної системи лінійних рівнянь існують: загальний, частинні й базисні розв'язки.

Щоб знайти *загальний* розв'язок, треба виразити основні m змінних через значення $n - m$ вільних змінних, далі, вільним змінним надати довільні значення, після проміжних обчислень в результаті отримується визначена СЛАР з m рівнянь з m невідомими змінними, для якої відшукується *частинний* розв'язок.

Наприклад, недовизначена система має одне рівняння й дві невідомих ($m = 1, n = 2$):

$2x_1 - 3x_2 = 7$, її розв'язок $X = (x_1, x_2)$. Якщо вирішено, що x_1 є основною змінною, а x_2 – вільною, тоді *загальний розв'язок* системи має вигляд: $x_1 = \frac{3}{2}x_2 + \frac{7}{2}$. Якщо скажімо, вільна

змінна $x_2 = 5$, тоді $x_1 = 11$ – це *частковий* розв'язок: $X = (x_1, x_2) = (11; 5)$, один із безлічі можливих.

Якщо ж вільній змінній x_2 надати нульове значення, тоді $X = (x_1, x_2) = (3; 0)$ – це *базисний* розв'язок, де основну змінну x_1 називають базисною.

Доведено, що у недовизначеній системі з m рівнянь й n невідомих ($m < n$) є

$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ базисних розв'язків. Наприклад, для недовизначеної системи розміром 3×6

можна побудувати $C_6^3 = \frac{6!}{3!(3)!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$ визначених систем розміром 3×3 , ось вони (но-

мери основних змінних – це базис, наприклад, базис 235 це: x_2, x_3, x_5 – базисні змінні, x_1, x_4, x_6 – вільні змінні з нульовими значеннями):

(123), (124), (125), (126), (134), (135), (136), (145), (146), (156),

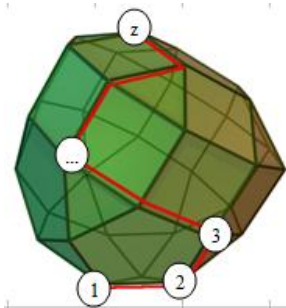
(234), (235), (236), (245), (246), (256),

(345), (346), (356), (456).

Запам'ятаймо (при розв'язанні задач лінійного програмування): в результаті послідовного пошуку базисних розв'язків *серед n шуканих невідомих $n - m$ значень завжди будуть нулями*.

Зауваження В лінійному програмуванні серед усіх базисних розв'язків відшукують ще *опорні* розв'язки, де значення базисних змінних невід'ємні (≥ 0), саме починаючи з одного з них, алгоритм симплекс-методу послідовним переходом від одного опорного розв'язку до кращого від нього відшукує наступний опорний розв'язок, якщо покращення вже не досягається, отриманий розв'язок є *оптимальним*, алгоритм зупиняє свою роботу (він зупиняється й тоді, коли оптимум не існує).

На рисунку зображена багатогранна фігура – область допустимих розв'язків, яка заповнена базисними розв'язками, де опорні розв'язки знаходяться у вершинах (кутових точках): ① – старт (початковий опорний розв'язок), ② – наступний розв'язок, кращий за попередній, фініш на z -му кроці, де процес оптимізації завершується знаходженням оптимального розв'язку (аналогія – стінка для тренування скалолазів з фіксованими опорними точками).



Схематично ідею розв'язання недовизначеної СЛАР можна показати таким чином: задана прямокутна («довгаста») матриця, з якої нульовою фіксацією вільних змінних тимчасово видаляють відповідні їм стовпці, отримуючи квадратну матрицю. Наприклад, задана матриця розміром 3×5 , вважаємо вільними й робимо нульовими змінні x_1 та x_2 , тоді лишається матриця 3×3 (зафарбована), для якої знаходять базисний розв'язок визначеної системи у базисі (345) або (x_3, x_4, x_5):

Задача 1.7. Розв'язати недовизначену СЛАР графічним методом

Ясно, що цей метод можна застосувати лише для недовизначеної СЛАР, де лише дві шукані невідомі й одне рівняння: $m = 1, n = 2$, рівняння: $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$.

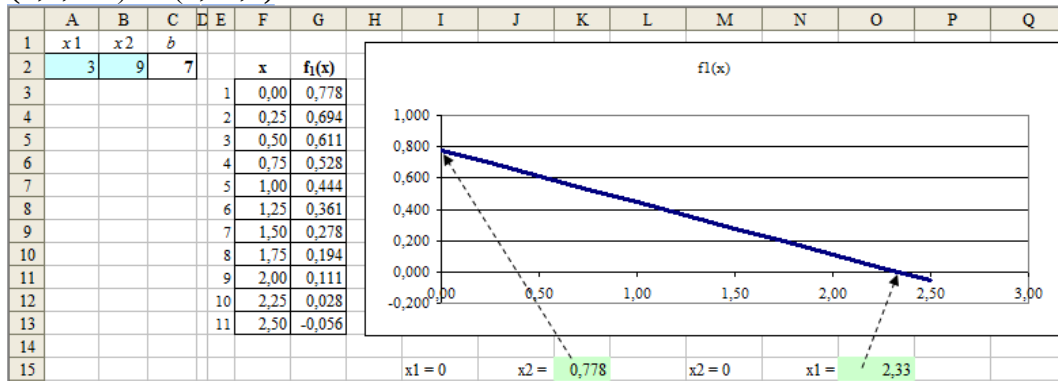
Вважаємо x_1 вільною змінною, з рівняння визначимо функцію $x_2 = \frac{-a_{11}x_1 + b_1}{a_{12}}$, яка після

перетворень має вигляд $y = ax + b$, де:

$x = x_1; y = x_2, a = -\frac{a_{11}}{a_{12}}; b = \frac{b_1}{a_{12}}$, її графік – нескінченна пряма лінія, кожна точка на ній є частинним розв'язком системи, а її перетин із осями x_1 та x_2 визначає два базисні розв'язки, де $x_1 = 0$ або $x_2 = 0$.

Приклад.

Задана недовизначена система $3x_1 + 9x_2 = 7$, у ній два ($C_2^1 = \frac{2!}{1!(2-1)!} = 2$) базисних розв'язки, це: $(0; 0,778)$ та $(2,33; 0)$:



Задача 1.8. Розв'язати недовизначену СЛАР з використанням *Поиск решения*

Приклад 1.

Розв'язати недовизначену СЛАР ($m = 3, n = 4$)

$$x_1 + 1,2x_2 + 0,3x_3 + 8x_4 = 2$$

$$2,1x_1 + 12x_2 + 0,4x_3 - x_4 = 8$$

$$0,5x_2 + x_3 + 3x_4 = 7.$$

Початкові дані:

	A			B	
1	1,2	0,3	8	2	
2,1	12	0,4	-1	8	
0	0,5	1	3	7	

Система має 3 основних й 1 вільну змінну, вільною змінною може бути одна із 4-ох шуканих змінних. Надаючи будь-якій вільній змінній нульове значення, зводимо недовизначену систему до визначеної й розв'язуємо систему за допомогою програми *Поиск решения* у відповідному базисі.

Порядок роботи

1. Увести початкові дані: матрицю коефіцієнтів розміром 3×4 та вектор B (ПЧ)
2. Сформулювати рядок невідомих (X)
3. Обчислити ліву частину системи (AX)
4. Запуск надбудови *Поиск решения*, ЦФ відсутня, Равной значенню 0, ввести два обмеження:
 - $AX = B$ (ЛЧ = ПЧ)
 - $x_3 = 0$ (вільна змінна, клітинка C5)
 - *Выполнить*

Результат (один із 4-ох можливих): $X = (-16,18; 3,64; 0; 1,73)$, де x_3 – вільна змінна, базис (x_1, x_2, x_4)

F2		=СУММПРОИЗВ(A2:D2;\$A\$5:\$D\$5)						
	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2	1	1,2	0,3	8	2	2		
3	2,1	12	0,4	-1	8	8		
4	0	0,5	1	-3	7	7		
5	-16,18	3,64	0,00	1,73				
6								
7								

Приклад 2

Розв'язати недовизначену систему лінійних рівнянь ($m = 3, n = 6$)

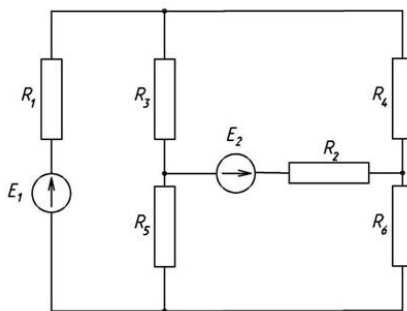
$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &= 10 \\ x_1 + 5x_2 + 7x_3 - x_5 &= -9 \\ 9x_1 - x_2 + 2x_3 + x_6 &= 11 \end{aligned}$$

H2		=СУММПРОИЗВ(A2:F2;\$A\$5:\$F\$5)						
	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x1	x2	x3	x4	x5	x6		AX
2	3	3	1	1	0	0	10	10
3	1	5	7	0	-1	0	-9	-9
4	9	-1	2	0	0	1	11	11
5	1	-2	0	13	0	0		
6								
7								

Результат (один із 20-ти можливих): $X = (1; -2; 0; 13; 0; 0)$, де x_3, x_5, x_6 – вільні змінні, базис (124) або (x_1, x_2, x_4)

Задача 1.9. Розрахунок електричного ланцюга

Задано: схему ланцюга, значення опорів $R_1, \dots, R_6$ та ЕРС джерел E_1 та E_2 , треба розрахувати 6 значень струмів $I_1, \dots, I_6$, що протікають опорами ланцюга.



Порядок роботи

1) У довільному порядку позначити вузли, напрями струмів у гілках й напрями обходу контурів: