

Лінійне рівняння з n невідомими змінними ($x_1, x_2, \dots, x_n$) у матричній формі: $AX = b$, обчислення лівої частини (AX) рівняння здійснюється двома способами:

- за допомогою функції СУММПРОИЗВ
- або за допомогою функцій МУМНОЖ та ТРАНСП:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2	A=	4	6	0	-9	AX =		2	
3									
4	X=	2	5	1	4	AX =		2	

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2	A=	4	6	0	-9	AX =	=СУММПРОИЗВ(B2:E2;B4:E4)		
3									
4	X=	2	5	1	4	AX =	=МУМНОЖ(B2:E2;ТРАНСП(B4:E4))		

Задача 1.1. Побудова графіка лінійного рівняння з двома невідомими

Завдання: на площині x_1Ox_2 побудувати графік лінійного рівняння $a_1x_1 + a_2x_2 = b$.

Якщо x_1 визначити аргументом, тоді рівняння перетворюємо у функцію $x_2 = -\frac{a_1}{a_2}x_1 + \frac{b}{a_2}$ чи

функцію $y = cx + d$ (із застосуванням технології наукової графіки), після чого формуємо функцію у табличній формі й будуємо точкову діаграму.

Приклад.

Задано рівняння $-9x_1 + 0,2x_2 = 34$, тобто, $a_1 = -9$, $a_2 = 0,2$, $b = 34$.

Порядок роботи (у форматі послідовної побудови табличного документа):

задати значення a_1 , a_2 , b та кількість проміжків n на осі x

	A	B	C
1	Графік лінійного рівняння		
2	a_1	a_2	b
3	-9	0,2	34
4	n	25	

обчислити коефіцієнти функції $y = cx + d$: $c = -\frac{a_1}{a_2}$, $d = \frac{b}{a_2}$

6	$c =$	45,00
7	$d =$	170,00

обчислити координати крайніх точок:

$$x_1 = \frac{b}{a_1} \text{ при } x_2 = 0; x_2 = \frac{b}{a_2} \text{ при } x_1 = 0:$$

9	b/a_1	b/a_2
10	-3,78	170,0

обчислити границі (ліву, праву) зміни графіка функції:

$$x_l = \min(x_1; x_2); x_p = \max(x_1; x_2)$$

12	$x_l =$	-3,8
13	$x_p =$	170,00

розрахувати крок $h_x = \frac{x_p - x_l}{n}$

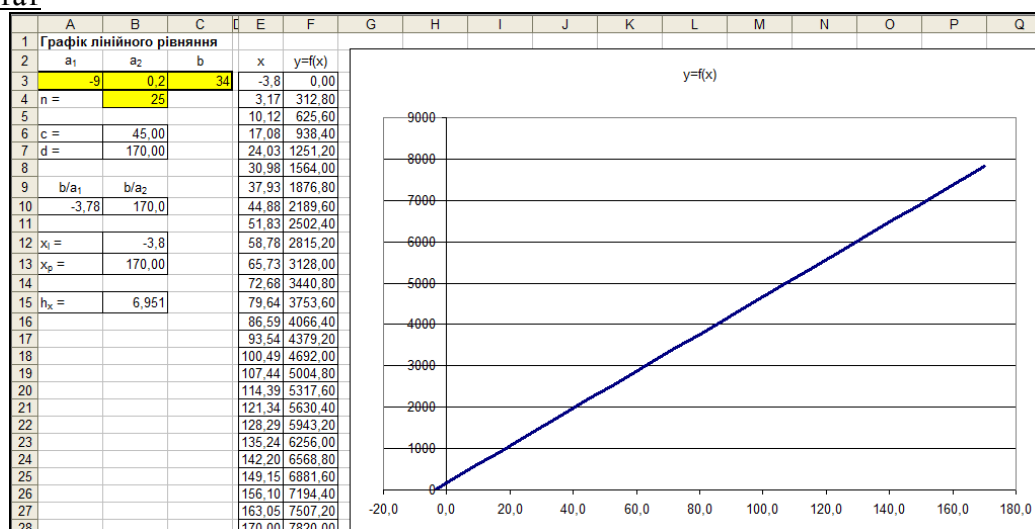
15	$h_x =$	6,951
----	---------	-------

табулюванням сформувати таблицю зі значеннями двох координат: x та $y = f(x)$:

- перше значення x_1 увести посиланням на клітинку B10
- наступне значення обчислити за формулою =E3+\$B\$15
- цю формулу протягнути по стовпцю для отримання значення x_p
- увести формулу функції для першого значення x_1 і протягнути по стовпцю

побудувати графік функції $x_2 = cx_1 + d$, $c = -\frac{a_1}{a_2}$, $d = \frac{b}{a_2}$ у вигляді діаграми *Точечная*

Результат



Побудований табличний документ дозволяє отримати графік лінійного рівняння уведенням довільних значень a_1 , a_2 , b .

Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Система m лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) із n невідомими $x_1, x_2, \dots, x_n$ має вигляд:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

де:

- коефіцієнти a_{ij} при невідомих $x_1, x_2, \dots, x_n$ утворюють прямокутну матрицю $A=\{a_{ij}\}$ розміром $m \times n$,
- числа b_i – утворюють вектор-стовпець вільних членів $B=\{b_i\}$ з m елементів, $i = 1, \dots, m$,
- змінні x_j – утворюють вектор-рядок невідомих $X=\{x_j\}$ з n елементів, $j = 1, \dots, n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \quad X = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)$$

Структура даних:

a ₁₁	a ₁₂	...	a _{1n}	b ₁
a ₂₁	a ₂₂	...	a _{2n}	b ₂
...	...	...	...	...
a _{m1}	a _{m2}	...	a _{mn}	b _m
x ₁	x ₂	...	x _n	

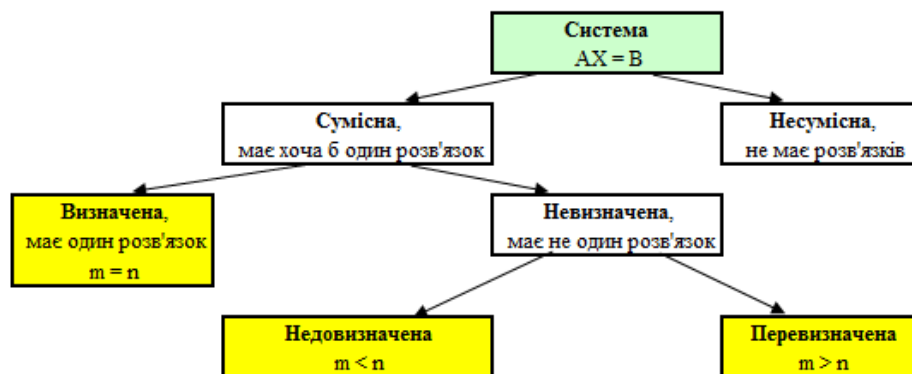
Матричний апарат дозволяє представити СЛАР у лаконічній матричній формі: $AX = B$, де:

AX – ліва частина (ЛЧ, left-hand side, LHS) системи

B – права частина (ПЧ, right-hand side, RHS) системи

й розв'язувати систему, користуючись вбудованими в Excel матричними операціями та функціями.

В залежності від співвідношення значень m та n існують такі системи лінійних алгебраїчних рівнянь:



Розв'язання системи рівнянь – специфічний варіант задачі оптимізації, де треба знайти такі значення шуканих невідомих (X), щоб ЦФ у формі $AX - B = 0$ без обмежень/з обмеженнями на значення X .

Це означає, що розв'язання систем рівнянь (лінійних, нелінійних) – складова чисельних методів оптимізації, вбудованих в програму-оптимізатор *Поиск решения* (Excel Solver).

Розв'язання визначеної системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Визначена СЛАР має однакову кількість рівнянь й невідомих ($m = n$), й, відповідно, квадратну матрицю коефіцієнтів (A). Розв'язок визначеної СЛАР – це шукана упорядкована сукупність чисел $c_1, c_2, \dots, c_n$, підстановка цих чисел замість відповідних шуканих невідомих $x_1, x_2, \dots, x_n$ перетворює кожне з рівнянь системи у тотожність.

Визначена система може мати:

- один розв'язок,
- ані одного розв'язку,
- безліч розв'язків.

Наочною ілюстрацією цих випадків є графічний метод розв'язання СЛАР 2-го порядку.

Задача 1.2. Розв'язати СЛАР графічним методом

При $m = n = 2$ маємо систему двох лінійних рівнянь:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

з двома невідомими x_1 та x_2 , наближені значення яких у наочній формі можна знайти шляхом побудови графіків двох лінійних функцій, утворених з цих рівнянь, на площині x_1Ox_2 (задача 1.1.).

Приклад 1.

Задана система:

$$-9x_1 + 6x_2 = 34$$

$$4x_1 + 5x_2 = 9,$$

$$n = 25.$$

Порядок роботи:

задати значення коефіцієнтів $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$ та кількість проміжків n на осі x

обчислити координати крайніх лівих точок змінної x_1 :

$$x_{11} = \frac{b_1}{a_{11}} \quad x_{12} = \frac{b_2}{a_{21}} :$$

	A	B	C	D
1	Система 2-ох лінійних рівнянь			
2	x_1	x_2	b	
3	-9	6	34	
4	4	5	9	
5	$n =$	25		

7	$x_{11} =$	-3.78		
8	$x_{12} =$	2.25		

обчислити область визначення функції, тобто, границі (ліву, праву) значення аргументу x_1 : $x_l = \min(x_{11}; x_{12})$; $x_p = \max(x_{11}; x_{12})$ й

10	$x_l =$	-3,78		
11	$x_p =$	2,25		
12				
13	$h_x =$	0,24		

розрахувати крок $h_x = \frac{x_p - x_l}{n}$

обчислити коефіцієнти функцій $y_1 = c_1x_1 + d_1$ та $y_2 = c_2x_1 + d_2$, де:

$$c_1 = -\frac{a_{11}}{a_{12}}, d_1 = \frac{b_1}{a_{12}}, c_2 = -\frac{a_{21}}{a_{22}}, d_2 = \frac{b_2}{a_{22}}$$

16	$c_1 =$	1,5		
17	$d_1 =$	5,7		
18	$c_2 =$	-0,8		
19	$d_2 =$	1,8		

сформувати таблицю з 3-ох стовпців зі значеннями координат: аргументу x_1 та двох лінійних функцій

$x_2 = f_1(x_1)$, $x_2 = f_2(x_1)$:

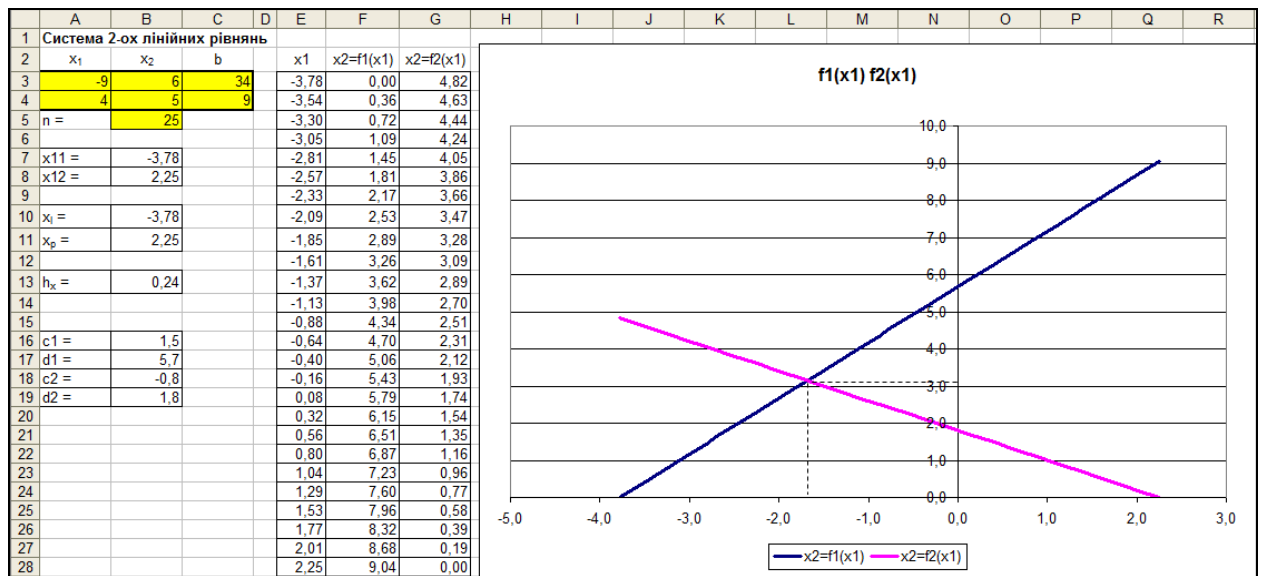
○ перше значення x_1 увести посиланням на клітинку B10 (значення x_1); наступне значення x_1 обчислити за формулою $=E3+\$B\13 й цю формулу протягнути по стовпцю x_1 до отримання крайнього значення x_p

○ увести формулу функції $y_1 = c_1x_1 + d_1$ для першого значення x_1 і протягнути по стовпцю

увести формулу функції $y_2 = c_2x_1 + d_2$ для першого значення x_1 і протягнути по стовпцю

побудувати графіки двох функцій $x_2 = c_1x_1 + d_1$, $x_2 = c_2x_1 + d_2$, у вигляді діаграми *Точечная*

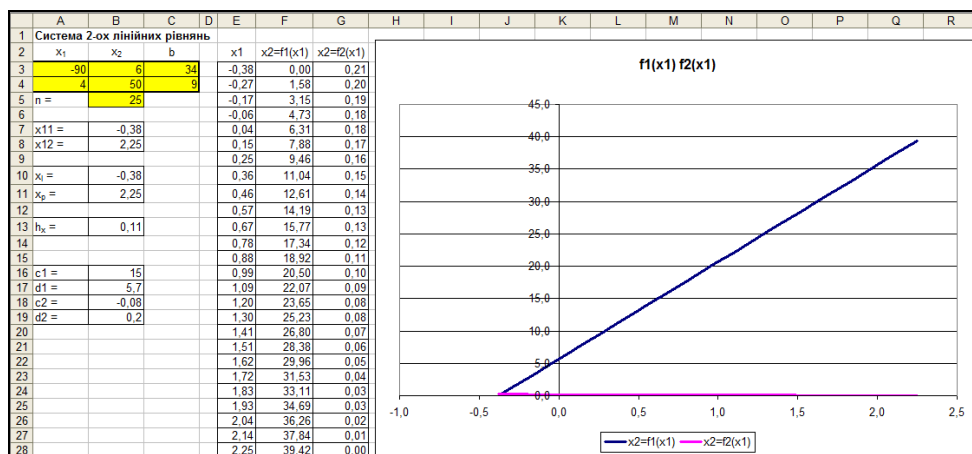
Результат:



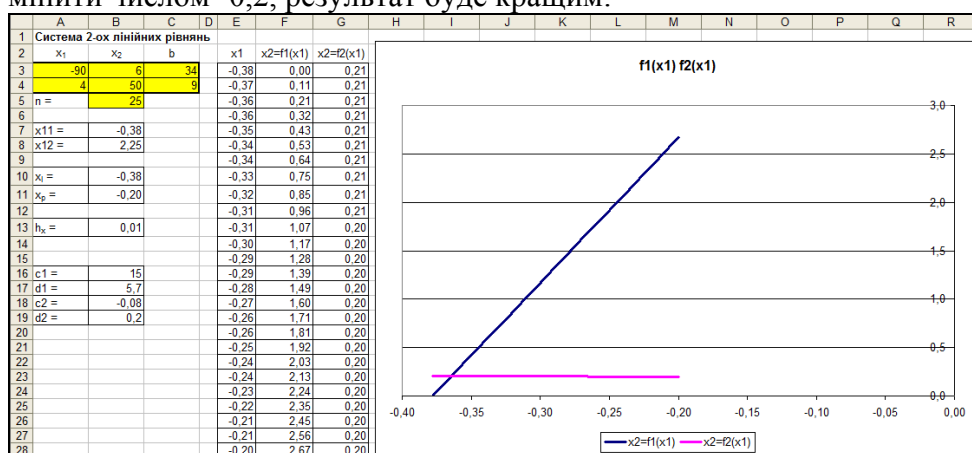
Наближений розв'язок: $X = (-1,6; 3,1)$.

Тепер при зміні початкових даних (a_{11} , a_{12} , b_1 , a_{21} , a_{22} , b_2) автоматично формується новий графічний розв'язок СЛАР з невідомими (x_1 , x_2).

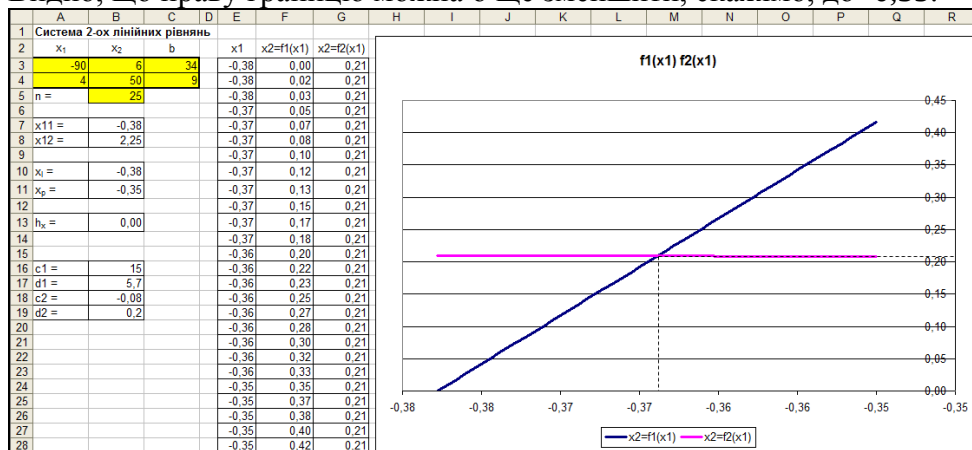
Зауваження. При певних наборах значень коефіцієнтів системи наочність графіка може стати невисокою й результат на ньому важко визначити:



У таких випадках рекомендується вручну змінити певну границю аргументу x_1 , ліву чи праву. У цьому прикладі видно, що права границя діапазону, де знаходиться шуканий корінь, не перевищує $-0,2$, відповідно, у клітинці B11 обчислене значення $x_p = 2,25$ треба замінити числом $-0,2$, результат буде кращим:



Видно, що праву границю можна б ще зменшити, скажімо, до $-0,35$:



і тепер вже можна точніше визначити наближений розв'язок системи: $x_1 \approx 0,367$, $x_2 \approx 0,21$.

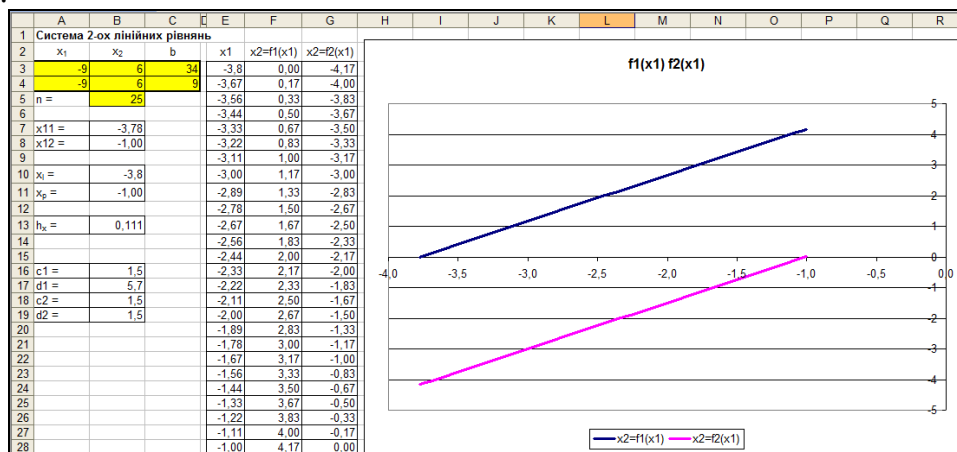
Приклад 2.

Задана система:

$$-9x_1 + 6x_2 = 34$$

$$-9x_1 + 6x_2 = 9.$$

Результат:



Однакові коефіцієнти рівнянь формують дві паралельні лінії, система не має розв'язків.

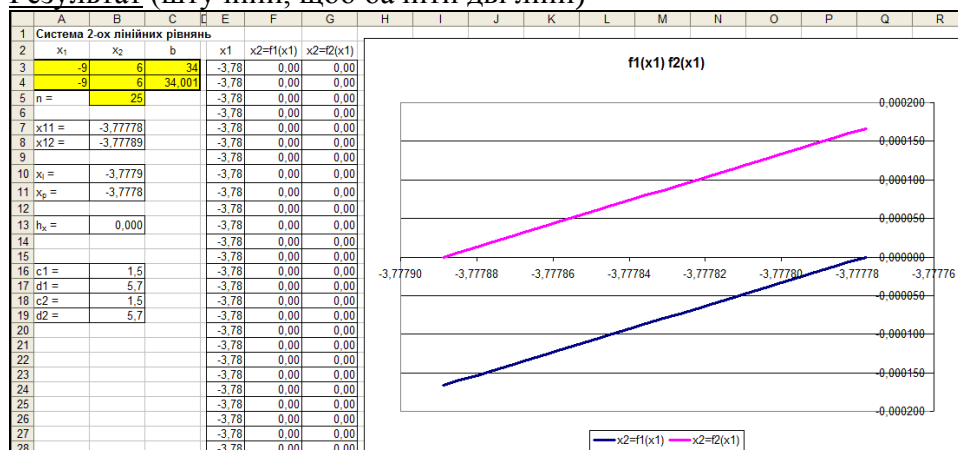
Приклад 3

Задана система (праві частини трохи відрізняються, щоб побачити, що лінії практично співпадають):

$$-9x_1 + 6x_2 = 34$$

$$-9x_1 + 6x_2 = 34,001.$$

Результат (штучний, щоб бачити дві лінії)



Система має безліч розв'язків, їх значення утворюють точки однієї лінії.

Таким чином, графічний метод, розрахований на наочне розв'язання СЛАР 2-го порядку, застосовується в ілюстративних цілях.

Реальні системи розв'язуються за допомогою:

- надбудови *Поиск решения* (до 100-го порядку) та
- матричними методами (розмір обмежується числом стовпців електронної таблиці, в Excel 2003 їх 256, в Excel 2007/2010 – біля 30000).

Розв'язання визначеної СЛАР матричними методами

Задана визначена система $AX = B$, знайти X .

Початкові дані: квадратна матриця A та вектор-стовпець B (ПЧ системи).

Оскільки матриця A квадратна, шуканий вектор X може бути стовпцем чи рядком, варіанти:

а) $X = A^{-1}B$, якщо X – вектор-стовпець

б) $X = (A^{-1}B)^T$, якщо X – вектор-рядок.

Матричні методи використовують функції: МОБР, МОПРЕД, МУМНОЖ та ТРАНСП.

Задача 1.3. Розв'язати визначену СЛАР методом Крамера⁹

Метод був розроблений ще до винаходу оберненої матриці й використовує лише процедуру обчислення визначника квадратної матриці:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \quad \dots \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

тобто, для розв'язання СЛАР n -го порядку треба обчислити $n+1$ визначник.

Обчислення визначника матриці високого порядку – досить громіздка обчислювальна процедура, в Excel вона реалізована вбудованою функцією МОПРЕД.

Порядок роботи

- 1) Увести початкові дані: квадратну матрицю A n -го порядку та вектор-стовпець B
 - 2) Копіюванням сформувати n копій матриці A , виправити імена матриць ($A1, A2, \dots$)
 - 3) Виділити значення стовпця B , скопіювати й послідовно замінити їм стовпці матриць-копій для утворення частинних матриць
 - 4) Увести заголовок ($\Delta =$) і обчислити визначник матриці A , скопіювати заголовок і формулу й в аналогічних позиціях вставити для частинних матриць – формули повинні правильно змінитися (перевірити), виправити імена визначників ($\Delta1=, \Delta2=, \dots$)
 - 5) Для першої частинної матриці ввести заголовок ($x1 =$) і формулу ($=\Delta1/\Delta$) обчислення невідомої x_1 , скопіювати заголовок і формулу й в аналогічних позиціях вставити для частинних матриць – формули повинні правильно змінитися (перевірити), виправити імена змінних ($x1=, x2=, \dots$).
- Зв'язуванням сформувати рядок X).

Приклад

Розв'язати СЛАР 6-го порядку.

Порядок роботи

- 1) Увести початкові дані:

СЛАР (метод Крамера)							
							B
A =	-7,30	-4,70	-7,12	-2,26	-5,88	-5,33	10,02
	-9,36	-6,21	-5,91	-0,70	-8,52	-8,42	29,36
	-2,23	-7,29	-3,12	-5,25	-3,86	-0,99	-20,37
	-9,78	-0,31	-4,97	-6,40	-9,94	-4,18	-33,40
	-1,27	-4,06	-9,83	-9,89	-6,43	-2,12	38,27
	-0,73	-3,18	-5,57	-5,62	-7,07	-6,71	12,16

- 2) Копіюванням сформувати 6 копій матриці A

⁹ Габріель Крамер (1704-1752), швейцарський математик

СПАР (метод Крамера)																					
A =	-7.30	-4.70	-7.12	-2.26	-5.88	-5.33	10.02	A1 =	-7.30	-4.70	-7.12	-2.26	-5.88	-5.33	A2 =	-7.30	-4.70	-7.12	-2.26	-5.88	-5.33
	-9.36	-6.21	-5.91	-0.70	-8.52	-8.42	29.36		-9.36	-6.21	-5.91	-0.70	-8.52	-8.42		-9.36	-6.21	-5.91	-0.70	-8.52	-8.42
	-2.23	-7.29	-3.12	-5.25	-3.86	-0.99	-20.37		-2.23	-7.29	-3.12	-5.25	-3.86	-0.99		-2.23	-7.29	-3.12	-5.25	-3.86	-0.99
	-9.78	-0.31	-4.97	-6.40	-9.94	-4.18	-33.40		-9.78	-0.31	-4.97	-6.40	-9.94	-4.18		-9.78	-0.31	-4.97	-6.40	-9.94	-4.18
	-1.27	-4.06	-9.83	-9.89	-6.43	-2.12	38.27		-1.27	-4.06	-9.83	-9.89	-6.43	-2.12		-1.27	-4.06	-9.83	-9.89	-6.43	-2.12
	-0.73	-3.18	-5.57	-5.62	-7.07	-6.71	12.16		-0.73	-3.18	-5.57	-5.62	-7.07	-6.71		-0.73	-3.18	-5.57	-5.62	-7.07	-6.71

3) Формування частинних матриць

СПАР (метод Крамера)																											
A =							B							A1 =							A2 =						
	-7,30	-4,70	-7,12	-2,26	-5,88	-5,33	10,02	10,02	-4,70	-7,12	-2,26	-5,88	-5,33		-7,30	10,02	-7,12	-2,26	-5,88	-5,33							
	-9,36	-6,21	-5,91	-0,70	-8,52	-8,42	29,36	29,36	-6,21	-5,91	-0,70	-8,52	-8,42		-9,36	29,36	-5,91	-0,70	-8,52	-8,42							
	-2,23	-7,29	-3,12	-5,25	-3,86	-0,99	-20,37	-20,37	-7,29	-3,12	-5,25	-3,86	-0,99		-2,23	-20,37	-3,12	-5,25	-3,86	-0,99							
	-9,78	-0,31	-4,97	-6,40	-9,94	-4,18	-33,40	-33,40	-0,31	-4,97	-6,40	-9,94	-4,18		-9,78	-33,40	-4,97	-6,40	-9,94	-4,18							
	-1,27	-4,06	-9,83	-9,89	-6,43	-2,12	38,27	38,27	-4,06	-9,83	-9,89	-6,43	-2,12		-1,27	38,27	-9,83	-9,89	-6,43	-2,12							
-0,73	-3,18	-5,57	-5,62	-7,07	-6,71	12,16	12,16	-3,18	-5,57	-5,62	-7,07	-6,71	-0,73	12,16	-5,57	-5,62	-7,07	-6,71									

4) Обчислення визначників 7 матриць

СПАР (метод Крамера)																				
A =																				

6) Обчислення значень невідомих: $x_1, x_2, \dots, x_6$.

Результат

СПАР (метод Крамера)							В														
A =	-7,30	-4,70	-7,12	-2,26	-5,88	-5,33	10,02	A1 =	10,02	-4,70	-7,12	-2,26	-5,88	-5,33	A2 =	-7,30	10,02	-7,12	-2,26	-5,88	-5,33
	-9,36	-6,21	-5,91	-0,70	-8,52	-8,42	29,36		29,36	-6,21	-5,91	-0,70	-8,52	-8,42		-9,36	29,36	-5,91	-0,70	-8,52	-8,42
	-2,23	-7,29	-3,12	-5,25	-3,86	-0,99	-20,37		-20,37	-7,29	-3,12	-5,25	-3,86	-0,99		-2,23	-20,37	-3,12	-5,25	-3,86	-0,99
	-9,78	-0,31	-4,97	-6,40	-9,94	-4,18	-33,40		-33,40	-0,31	-4,97	-6,40	-9,94	-4,18		-9,78	-33,40	-4,97	-6,40	-9,94	-4,18
	-1,27	-4,06	-9,83	-9,89	-6,43	-2,12	38,27		38,27	-4,06	-9,83	-9,89	-6,43	-2,12		-1,27	38,27	-9,83	-9,89	-6,43	-2,12
	-0,73	-3,18	-5,57	-5,62	-7,07	-6,71	12,16		12,16	-3,18	-5,57	-5,62	-7,07	-6,71		-0,73	12,16	-5,57	-5,62	-7,07	-6,71
$\Delta = 18675,3$							$\Delta_1 = 440451,9$							$\Delta_2 = -48042,0$							
							$x_1 = 23,58$							$x_2 = -2,57$							
$X =$							23,6	-2,6	-20,4	38,8	-47,9	31,8									
	-7,30	-4,70	10,02	-2,26	-5,88	-5,33	A3 =	-7,30	-4,70	10,02	-2,26	-5,88	-5,33	A4 =	-7,30	-4,70	-7,12	10,02	-5,88	-5,33	
	-9,36	-6,21	29,36	-0,70	-8,52	-8,42		-9,36	-6,21	-5,91	29,36	-8,52	-8,42		-9,36	-6,21	-5,91	29,36	-8,52	-8,42	
	-2,23	-7,29	-20,37	-5,25	-3,86	-0,99		-2,23	-7,29	-3,12	-20,37	-3,86	-0,99		-2,23	-7,29	-3,12	-20,37	-3,86	-0,99	
	-9,78	-0,31	-33,40	-6,40	-9,94	-4,18		-9,78	-0,31	-4,97	-33,40	-9,94	-4,18		-9,78	-0,31	-4,97	-33,40	-9,94	-4,18	
	-1,27	-4,06	38,27	-9,89	-6,43	-2,12		-1,27	-4,06	-9,83	38,27	-6,43	-2,12		-1,27	-4,06	-9,83	38,27	-6,43	-2,12	
	-0,73	-3,18	12,16	-5,62	-7,07	-6,71		-0,73	-3,18	-5,57	12,16	-7,07	-6,71		-0,73	-3,18	-5,57	12,16	-7,07	-6,71	
							$\Delta_3 = -381759,0$							$\Delta_4 = 724550,5$							
							$x_3 = -20,44$							$x_4 = 38,80$							
	-7,30	-4,70	-7,12	-2,26	10,02	-5,33	A5 =	-7,30	-4,70	-7,12	-2,26	10,02	-5,33	A6 =	-7,30	-4,70	-7,12	-2,26	-5,88	10,02	
	-9,36	-6,21	-5,91	-0,70	29,36	-8,42		-9,36	-6,21	-5,91	-0,70	-8,52	29,36		-9,36	-6,21	-5,91	-0,70	-8,52	29,36	
	-2,23	-7,29	-3,12	-5,25	-20,37	-0,99		-2,23	-7,29	-3,12	-5,25	-3,86	-20,37		-2,23	-7,29	-3,12	-5,25	-3,86	-20,37	
	-9,78	-0,31	-4,97	-6,40	-33,40	-4,18		-9,78	-0,31	-4,97	-6,40	-9,94	-33,40		-9,78	-0,31	-4,97	-6,40	-9,94	-33,40	
	-1,27	-4,06	-9,83	-9,89	38,27	-2,12		-1,27	-4,06	-9,83	-9,89	-6,43	38,27		-1,27	-4,06	-9,83	-9,89	-6,43	38,27	
	-0,73	-3,18	-5,57	-5,62	12,16	-6,71		-0,73	-3,18	-5,57	-5,62	-7,07	12,16		-0,73	-3,18	-5,57	-5,62	-7,07	12,16	
							$\Delta_5 = -894218,9$							$\Delta_6 = 593249,5$							
							$x_5 = 47,88$							$x_6 = 31,77$							

Будь-які зміни значень початкових даних автоматично приведуть до зміни результату $X = (x_1, x_2, \dots, x_6)$.

Задача 1.4. Розв'язати визначену СЛАР методом із формуванням оберненої матриці

Метод застосовується, якщо необхідно отримати й використовувати обернену матрицю для аналізу, подальших обчислень й формування звітності.

Порядок роботи

1. Увести початкові дані: квадратну матрицю A та вектор-стовпець B
2. Обчислити визначник системи $\Delta = \det(A)$
3. Якщо $\Delta \neq 0$, обчислити обернену матрицю A^{-1}
Виконати:
4. Множення матриці A^{-1} на вектор B й отримати шуканий вектор-стовпець X (варіант а)
5. Транспонування множення матриці A^{-1} на вектор B й отримати шуканий вектор-рядок X (варіант б).

Приклад

Розв'язати СЛАР 6-го порядку для заданих початкових даних (шуканий вектор X – стовпець й рядок):

A =	-7,3	-4,7	-7,12	-2,26	-5,88	-5,33	В
	-9,36	-6,21	-5,91	-0,7	-8,52	-8,42	29,36
	-2,23	-7,29	-3,12	-5,25	-3,86	-0,99	-20,37
	-9,78	-0,31	-4,97	-6,4	-9,94	-4,18	-33,4
	-1,27	-4,06	-9,83	-9,89	-6,43	-2,12	38,27
	-0,73	-3,18	-5,57	-5,62	-7,07	-6,71	12,16

Результат: числовий, формули

