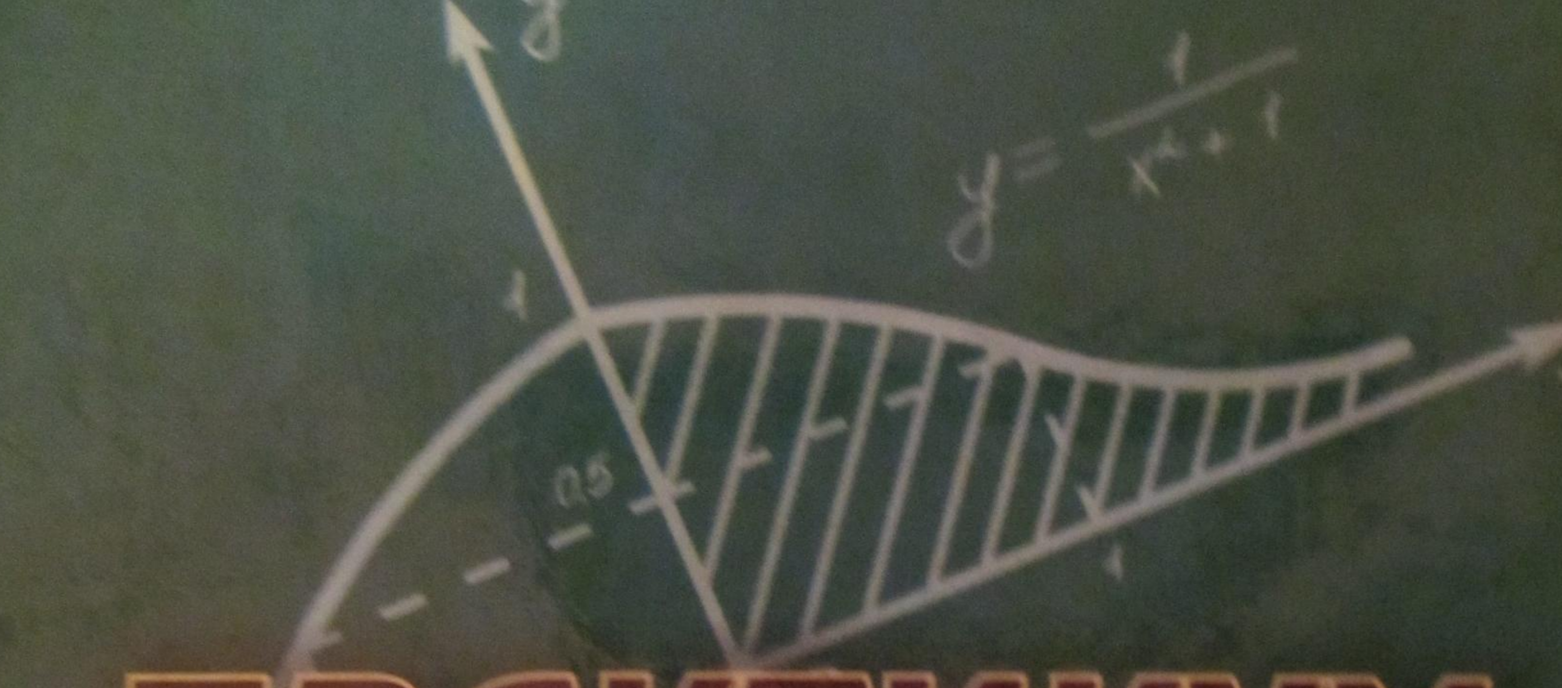


ПРАКТИКУМ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Міністерство освіти і науки України
Житомирський державний технологічний університет

ПРАКТИКУМ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

За редакцією В.О. Коваля

Навчальний посібник

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів, які навчаються за нематематичними напрямами підготовки

ЖДТУ
2008

УДК 51(07)
П69

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(лист № 1.4/18-Г-1145 від 21.05.2008 р.)

А в т о р и:

В.І. Беспальчук, В.М. Бондарчук, Д.О. Величко, Р.М. Головня, С.П. Давидчук, В.В. Івахненкова, Г.О. Кареліна, В.О. Коваль, О.В. Лущиков, С.А. Охріменко, В.М. Очич, Н.В. Письменчук, О.І. Прилипко, С.І. Скуратівський, О.М. Ядренко

Практикум з вищої математики: Навчальний посібник / За ред. В.О. Коваля. – Житомир: ЖДТУ, 2008. – 448 с.
ISBN 978–966–683–158–6

Навчальний посібник призначений для самостійної роботи студентів. Він містить понад 1300 задач з основних розділів вищої математики. До більшої частини задач наведено детальні розв’язки, до інших– вказано відповіді. Заради зручності користування практикумом перед кожною темою поміщено короткі теоретичні відомості.

Для студентів вищих навчальних закладів, які навчаються за нематематичними напрямами підготовки.

Рецензенти: д-р ф.-м. н., проф. *Станжицький О.М.* (Київський національний ун-т імені Тараса Шевченка)*;* д-р ф.-м. н., проф. *Михайленко В.В.* (Національний авіаційний ун-т); д-р ф.-м. н., проф. *Ляшенко Б.М.* (Житомирський державний ун-т імені Івана Франка)

УДК 51(07)

ISBN 978–966–683–158–6

ПЕРЕДМОВА

У посібнику представлені розділи вищої математики, що викладаються на першому курсі студентам усіх спеціальностей. Його мета – допомогти студентам виробити технічні навички у розв'язанні задач і вправ, оволодіти відповідними прийомами і методами та сприяти глибшому розумінню ними теоретичного матеріалу. Це досягається завдяки спеціально підібраним прикладам і методично продуманим підходам до їх розв'язання. У посібнику відображено багаторічний досвід викладання математичних дисциплін на кафедрі вищої математики Житомирського державного технологічного університету.

Посібник містить понад 1300 задач, до більшої частини яких наведено детальні розв'язки. Інша частина пропонується студентам для самостійного розв'язання. Теоретичні відомості викладено у стислій формі і лише в обсязі, необхідному для розв'язування задач. Працюючи з посібником, студент повинен перш за все вивчити теоретичний матеріал, який стосується відповідної теми, детально розібрати наведені розв'язки задач і після цього виконати запропоновані до даної теми вправи для самостійного розв'язання.

Над посібником працював колектив авторів у складі:
ст. викл. В.І. Беспальчук (розд. 7); ас. В.М. Бондарчук (розд. 2); канд. т. н., доц. Д.О. Величко (розд. 1); ст. викл. Р.М. Головня (розд. 4); ст. викл. С.П. Давидчук (розд. 7); канд. ф.-м. н., доц. В.В. Івахненкова (розд. 5); ст. викл. Г.О. Кареліна (розд. 10); д-р ф.-м. н., проф. В.О. Коваль (розд. 6); ст. викл. О.В. Лущиков (розд. 3); канд. ф.-м. н., доц. С.А. Охріменко (розд. 2); ас. В.М. Очич (розд. 9); канд. т. н., доц. Н.В. Письменчук (розд. 8); канд. ф.-м. н., доц. О.І. Прилипко (розд. 9); канд. ф.-м. н., доц. С.І. Скуратівський (розд. 10); канд. ф.-м. н., доц. О.М. Ядренко (розд. 1).

Автори висловлюють вдячність лаборантам кафедри М.А. Мазуренко та І.О. Собко за швидкий і якісний набір рукописів.

Особлива подяка рецензентам О.М. Станжицькому, В.В. Михайленку та Б.М. Ляшенку за слушні зауваження і пропозиції, які сприяли поліпшенню посібника.

Розділ 1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

1. Дії над матрицями

Матрицею розміру $m\times n$ називають прямокутну таблицю чисел, в якій m рядків та n стовпців:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

або коротко $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$.

Над матрицями виконують дії додавання, віднімання, множення, множення на число, транспонування.

Добуток матриці $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ *на число* α – це матриця $\alpha A=\left(\alpha a_{ij}\right)_{m\times n}$, тобто кожен елемент матриці A слід помножити на α.

Сума (*різниця*) матриць $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ та $B=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$ – це матриця $A+B=\left(a_{ij}+b_{ij}\right)_{m\times n}$ $\left(A-B=\left(a_{ij}-b_{ij}\right)_{m\times n}\right)$, тобто для знаходження суми (різниці) матриць A і B слід додати (відняти) їх відповідні елементи. Сума та різниця визначені для матриць однакового розміру.

Добутком матриці $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times p}$ *на матрицю* $B=\left(b_{ij}\right)_{p\times n}$ називають матрицю $C=AB$ розміру $m\times n$, елементи c_{ij} якої обчислюються за правилом: c_{ij} є сумою попарних добутків елементів i-го рядка матриці A та відповідних елементів j-го стовпця матриці B. Добуток AB визначений, якщо число стовпців матриці A дорівнює числу рядків матриці B. В загальному випадку $AB\neq BA$.

Транспонування матриці: якщо рядки матриці A записати як стовпці (зберігаючи порядок), то отриману матрицю називають *транспонованою* до матриці A і позначають A^T. Відзначимо, що якщо A – матриця розміру $m\times n$, то A^T – матриця розміру $n\times m$.

1. Знайти матрицю $2A$, якщо $A=\begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

⌈ $2A=\begin{pmatrix} 2(-1) & 2\cdot 5 & 2\cdot 2 \\ 2\cdot 2 & 2\cdot 3 & 2\cdot(-3) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 10 & 4 \\ 4 & 6 & -6 \end{pmatrix}$. ⌋

2. Знайти матрицю $A+B$, якщо

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 8 \\ -1 & -2 & 6 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

⌜ $$A+B=\begin{pmatrix} 0+(-2) & 1+2 & 8+(-1) \\ -1+(-3) & -2+0 & 6+4 \\ 3+1 & -4+(-3) & 0+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 7 \\ -4 & -2 & 10 \\ 4 & -7 & 1 \end{pmatrix}.$$ ⌟

3. Знайти $A-B$, якщо $A=\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

⌜ $$A-B=\begin{pmatrix} 5-(-2) & 4-1 \\ -2-(-1) & 0-6 \\ 1-3 & 3-2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -1 & -6 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$ ⌟

4. Обчислити AB, якщо:

а) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

⌜ а) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot(-1)+0\cdot(-2)+(-1)\cdot 1 \\ 2\cdot(-1)+(-2)\cdot(-2)+3\cdot 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix};$$

б) $$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (-1)\cdot 1+1\cdot 0+2\cdot 1 & (-1)\cdot 3+1\cdot 2+2\cdot(-1) \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & -3 \end{pmatrix}.$$ ⌟

5. Знайти AB та BA, якщо $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

⌜ $$AB=\begin{pmatrix} 1\cdot 2+2\cdot(-1) & 1\cdot 1+2\cdot 3 \\ 3\cdot 2+4\cdot(-1) & 3\cdot 1+4\cdot 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 2 & 15 \end{pmatrix};$$

$$BA=\begin{pmatrix} 2\cdot 1+1\cdot 3 & 2\cdot 2+1\cdot 4 \\ (-1)\cdot 1+3\cdot 3 & (-1)\cdot 2+3\cdot 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

Отже, $AB \neq BA$. ⌟

6. Обчислити AB, якщо $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\ulcorner \quad AB=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot(-1)+(-1)\cdot(-2) & 2\cdot 1+(-1)\cdot 1 \\ (-1)\cdot(-1)+1\cdot(-2) & (-1)\cdot 1+1\cdot 1 \\ 0\cdot(-1)+3\cdot(-2) & 0\cdot 1+3\cdot 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}. \quad \lrcorner$$

7. Обчислити добуток матриць A та B, якщо

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\ulcorner \quad AB=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} (-1)\cdot 1+1\cdot(-1)+2\cdot 0 & (-1)\cdot 1+1\cdot 0+0\cdot 1 & (-1)\cdot 2+1\cdot(-1)+1\cdot 0 \\ 2\cdot 1+1\cdot(-1)+3\cdot 2 & 2\cdot 1+1\cdot 0+3\cdot 1 & 2\cdot 2+1\cdot(-1)+3\cdot 1 \\ 4\cdot 1+3\cdot(-1)+1\cdot 2 & 4\cdot 1+3\cdot 0+1\cdot 1 & 4\cdot 2+3\cdot(-1)+1\cdot 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -2 & -1 & -3 \\ 7 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}. \quad \lrcorner$$

8. Обчислити добуток матриць A та B, якщо

$$A=\begin{pmatrix} -3 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} -6 & -10 & -8 & -1 \\ 6 & -4 & -5 & -10 \\ -8 & 7 & -6 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\ulcorner \quad AB=\begin{pmatrix} -3 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -6 & -10 & -8 & -1 \\ 6 & -4 & -5 & -10 \\ -8 & 7 & -6 & -2 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 18+18-32 & 30-12+28 & 24-15-24 & 3-30-8 \\ -30+18-48 & -50-12+42 & 40-15-36 & -5-30-18 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 4 & 46 & -15 & -35 \\ -60 & -20 & -91 & -53 \end{pmatrix}. \quad \lrcorner$$

9. Знайти A^T, якщо: а) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

$\ulcorner$ а) Записуючи перший та другий рядки матриці A відповідно як перший та другий стовпці, дістанемо $A^T=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

б) Аналогічно знаходимо $A^T=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. $\lrcorner$

<u>Вправи для самостійного розв'язання</u>

10. Обчислити $(-2)A$, якщо $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

11. Обчислити $A-B$, якщо

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

12. Обчислити $2A+3B$, якщо $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Обчислити добуток AB заданих матриць:

13. а) $A=\begin{pmatrix} -3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 6 & -6 \\ -10 & -8 \end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix} -1 & 6 & -4 \\ -5 & 10 & -8 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$.

14. $A=\begin{pmatrix} 8 & 5 & -7 \\ 7 & -8 & -5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -7 & 1 & 3 & 9 \\ -6 & 3 & 1 & 9 \\ 7 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

15. $A=\begin{pmatrix}-3 & 3\\ 4 & 5\\ 3 & 6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-6 & -10\\ -8 & -1\end{pmatrix}$.

16. $A=\begin{pmatrix}6 & -4\\ 5 & -10\\ -8 & 7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-6 & -2\\ 8 & 5\end{pmatrix}$.

17. $A=\begin{pmatrix}-3 & 3\\ 4 & 5\\ 3 & 6\\ -6 & -10\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-8 & -1 & 6\\ -4 & -5 & -10\end{pmatrix}$.

18. Знайти A^T, якщо: а) $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 5 & 4\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 4\\ 2 & 1 & 5\end{pmatrix}$.

Відповіді:

10. $\begin{pmatrix}2 & -2\\ -4 & -8\\ -6 & 4\end{pmatrix}$.

11. $\begin{pmatrix}2 & -4 & -3 & 3\\ 1 & -3 & -1 & 2\\ -2 & -1 & 2 & 4\end{pmatrix}$.

12. $\begin{pmatrix}6 & 5 & -1\\ 1 & 0 & 5\end{pmatrix}$.

13. а) $\begin{pmatrix}-37 & -59\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}-35\\ 41\end{pmatrix}$.

14. $\begin{pmatrix}-135 & 65 & 36 & 117\\ -36 & 13 & 18 & -9\end{pmatrix}$.

15. $\begin{pmatrix}-6 & 27\\ -64 & -45\\ -66 & -36\end{pmatrix}$.

16. $\begin{pmatrix}-68 & -32\\ -50 & -40\\ 104 & 51\end{pmatrix}$.

17. $\begin{pmatrix}12 & -12 & -48\\ -52 & -29 & -26\\ -48 & -33 & -42\\ 88 & 56 & 64\end{pmatrix}$.

18. а) $\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 4\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\\ 4 & 5\end{pmatrix}$.

2. Визначник матриці

Визначник є числовою характеристикою квадратної матриці. *Визначником матриці A розміру* 2×2 або *визначником другого* *порядку* називається число, яке обчислюється за формулою

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} . \tag{1}$$

Визначником матриці A *розміру* 3×3 або *визначником третього порядку* називається число, яке обчислюється за формулою

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} . \tag{2}$$

Формулу (2) називають *розкладом визначника* за елементами першого рядка. Слід запам'ятати лише <u>принцип побудови</u> правої частини формули (2): елемент a_{11} множимо на визначник другого порядку, який дістаємо з визначника $|A|$ викреслюванням у ньому 1-го рядка і 1-го стовпця; другий доданок беремо зі знаком "мінус" і множимо елемент a_{12} на визначник другого порядку, який дістаємо з визначника $|A|$ викреслюванням у ньому 1-го рядка і 2-го стовпця; третій доданок беремо зі знаком "плюс" і множимо елемент a_{13} на визначник другого порядку, який дістаємо з визначника $|A|$ викреслюванням у ньому 1-го рядка і 3-го стовпця.

Алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} матриці A називається число, яке дорівнює добутку $(-1)^{i+j}$ на визначник матриці, яка утворюється в результаті викреслювання у матриці A рядка з номером i та стовпця з номером j. Позначимо алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} через A_{ij}. Для матриці A розміру 3×3 маємо:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{21} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Отже, формулу (2) можна записати у вигляді

$$|A| = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} . \tag{2$'$}$$

Визначник четвертого порядку обчислюється за аналогічною до (2′) формулою

$$|A| = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} + a_{14} \cdot A_{14} , \tag{3}$$

де A_{1j} – відповідні алгебраїчні доповнення елементів a_{1j} першого рядка матриці, тобто визначники третього порядку, помножені на $(-1)^{1+j}$.

Для обчислення визначників, порядок яких вищий за третій, доцільно використовувати деякі з їх *властивостей*.

1º. Визначник не зміниться, якщо до одного рядка (стовпця) додати інший, помножений на довільне число.

2º. Якщо у визначнику поміняти місцями два рядки (стовпці), то визначник змінить знак на протилежний.

3º. Визначник матриці не змінюється при її транспонуванні, тобто $\left|A^T\right| = |A|$.

Обчислити визначники:

19. $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$.

⌜ За формулою (1) маємо $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot 3 - (-1)\cdot 2 = 5$. ⌟

20. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$.

⌜ Застосовуючи послідовно формули (2) та (1), знаходимо

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - (-1)\cdot\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot\left(2\cdot 0 - (-2)\cdot 3\right) - (-1)\cdot\left(3\cdot 0 - (-2)\cdot(-2)\right) = 6 - 4 = 2.$$ ⌟

21. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 1 & -10 & -1 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix}$.

⌜ Застосовуючи послідовно формули (2) та (1), знаходимо

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 1 & -10 & -1 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = (-1)\cdot\begin{vmatrix} -10 & -1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + (-5)\cdot\begin{vmatrix} 1 & -10 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)\cdot\left((-10)\cdot 6 - (-1)\cdot 2\right) - 2\cdot\left(1\cdot 6 - 3\cdot(-1)\right) + (-5)\cdot\left(1\cdot 2 - 3\cdot(-10)\right) =$$

$$= 58 - 18 - 160 = -120.$$ ⌟

22. $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$

$\ulcorner$ За формулою (3) маємо

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{13} + 2 \cdot A_{14} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Обчислимо визначники третього порядку:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 4 - 18 = -18;$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 8 + 8 = 6.$$

Остаточно маємо

$$|A| = -18 - 2 \cdot 6 = -30. \quad \lrcorner$$

23. $|A| = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & -3 & -2 \\ 3 & 5 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 5 & -6 \end{vmatrix}.$

$\ulcorner$ Скористаємось властивістю **1°** і утворимо, наприклад, у першому стовпці нулі. Для цього виконаємо послідовно такі дії:

1) до першого рядка додамо другий, помножений на 2; 2) до третього рядка додамо другий, помножений на (-3); 3) до четвертого рядка додамо другий, помножений на (-2). Запишемо в умовних позначеннях вказані дії, а також їх результат (опускаємо запис відповідних обчислень):

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & -3 & -2 \\ 3 & 5 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 5 & -6 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 2 \;\; -3 \;\; -2 \\ \\ \\ \end{matrix};$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 8 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 11 & -2 \end{vmatrix}.$$

Застосуємо далі властивість **3°** і послідовно формули (3) та (2):

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 8 & 0 \\ -2 & -3 & 10 & 11 \\ 1 & -2 & 10 & -2 \end{vmatrix} = 0 + 1 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 8 & 0 \\ -2 & 10 & 11 \\ 1 & 10 & -2 \end{vmatrix} + 0 + 0 =$$

$$= -\left(1 \cdot (-20 - 110) - 8(4 - 11) + 0\right) = -(-130 + 56) = 74. \quad \lrcorner$$

<u>Вправи для самостійного розв’язання</u>

24. Обчислити визначник другого порядку

$$\begin{vmatrix} 1/3 & 2 \\ 1{,}5 & 6 \end{vmatrix}.$$

Обчислити визначники третього порядку:

25. $\begin{vmatrix} -10 & 7 & 8 \\ -6 & 1 & 6 \\ -2 & 0 & 7 \end{vmatrix}.$

26. $\begin{vmatrix} 2 & -11 & 4 \\ 5 & 8 & -4 \\ -3 & -4 & 0 \end{vmatrix}.$

27. $\begin{vmatrix} -3 & -8 & 9 \\ 2 & -9 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}.$

Обчислити визначники четвертого порядку:

28. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$

29. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 & 6 \\ 10 & -4 & 7 & 4 \\ 5 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 5 & 9 \end{vmatrix}$.

Вказівка. Додати до другого рядка третій, помножений на (-2), а потім скористатись властивістю **2º**.

Відповіді:
24. -1. **25.** 156. **26.** -148.
27. 345. **28.** 12. **29.** 266.

3. Обернена матриця

Нехай A – квадратна матриця і $|A| \neq 0$. *Обернена матриця* до матриці A обчислюється за формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \tilde{A}^T, \tag{4}$$

де $\tilde{A}$ – матриця, складена з алгебраїчних доповнень елементів матриці A. Матрицю $\tilde{A}$ називають *приєднаною* до A.

Для матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ формула (4) набуває вигляду

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Для матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ приєднана матриця має вигляд

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Обернена матриця A^{-1} задовольняє співвідношення

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E,$$

де E – одинична матриця. Для перевірки правильності знаходження оберненої матриці достатньо переконатися, наприклад, що $A^{-1}A = E$.

30. Знайти обернену матрицю до матриці $A=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 4 & 3\end{pmatrix}$.

$\ulcorner$ Визначник матриці $|A|=\begin{vmatrix}2 & -2\\ 4 & 3\end{vmatrix}=14\neq 0$. Тому існує обернена матриця до A. За умовою задачі $a_{11}=2$, $a_{12}=-2$, $a_{21}=4$, $a_{22}=3$. Тоді за формулою (5)

$$A^{-1}=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}3 & 2\\ -4 & 2\end{pmatrix}. \quad \lrcorner$$

31. Знайти обернену матрицю та переконатися, що $A^{-1}A=E$, якщо $A=\begin{pmatrix}2 & 5 & 7\\ 6 & 3 & 4\\ 5 & -2 & -3\end{pmatrix}$.

$\ulcorner$ Обчислимо визначник матриці A:

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & 5 & 7\\ 6 & 3 & 4\\ 5 & -2 & -3\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}3 & 4\\ -2 & -3\end{vmatrix}-5\cdot\begin{vmatrix}6 & 4\\ 5 & -3\end{vmatrix}+7\cdot\begin{vmatrix}6 & 3\\ 5 & -2\end{vmatrix}=$$

$$=2\cdot\left(3\cdot(-3)--4\cdot(-2)\right)-5\cdot\left(6\cdot(-3)-4\cdot 5\right)+7\cdot\left(6\cdot(-2)-3\cdot 5\right)=$$

$$=2\cdot(-1)-5\cdot(-38)+7\cdot(-27)=-1\,.$$

Визначник не дорівнює нулю, тобто обернена матриця існує.

Знайдемо приєднану матрицю $\tilde{A}$. Для цього обчислимо алгебраїчні доповнення елементів матриці A. Нагадаємо, що алгебраїчне доповнення A_{ij} елемента a_{ij} – це число, яке дорівнює добутку $(-1)^{i+j}$ на визначник матриці, що утворилась, коли у матриці A викреслили рядок з номером i та стовпець з номером j. Отже, якщо сума $i+j$ парна, то знак відповідного визначника не зміниться. Якщо ж сума $i+j$ непарна, то перед визначником слід поставити знак мінус.

$$A_{11}=\begin{vmatrix}3 & 4\\ -2 & -3\end{vmatrix}=-1,\ A_{12}=-\begin{vmatrix}6 & 4\\ 5 & -3\end{vmatrix}=38,\ A_{13}=\begin{vmatrix}6 & 3\\ 5 & -2\end{vmatrix}=-27\,,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}5 & 7\\ -2 & -3\end{vmatrix}=1,\ A_{22}=\begin{vmatrix}2 & 7\\ 5 & -3\end{vmatrix}=-41,\ A_{23}=-\begin{vmatrix}2 & 5\\ 5 & -2\end{vmatrix}=29\,,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}5 & 7\\ 3 & 4\end{vmatrix}=-1,\ A_{32}=-\begin{vmatrix}2 & 7\\ 6 & 4\end{vmatrix}=34,\ A_{33}=\begin{vmatrix}2 & 5\\ 6 & 3\end{vmatrix}=-24\ .$$

Запишемо приєднану матрицю згідно з формулою (6):

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}-1 & 38 & -27\\ 1 & -41 & 29\\ -1 & 34 & -24\end{pmatrix}.$$

За формулою (4) знаходимо обернену матрицю:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\tilde{A}^{T}=\frac{1}{-1}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ 38 & -41 & 34\\ -27 & 29 & -24\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -38 & 41 & -34\\ 27 & -29 & 24\end{pmatrix}.$$

Покажемо, що $A^{-1}\cdot A=E$:

$$A^{-1}\cdot A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -38 & 41 & -34\\ 27 & -29 & 24\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 5 & 7\\ 6 & 3 & 4\\ 5 & -2 & -3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot 2+(-1)\cdot 6+1\cdot 5 & 1\cdot 5+(-1)\cdot 3+1\cdot(-2) & 1\cdot 7+4\cdot(-1)+1\cdot(-3)\\ (-38)\cdot 2+6\cdot 41+(-34)\cdot 5 & (-38)\cdot 5+3\cdot 41+(-2)\cdot(-34) & (-38)\cdot 7+4\cdot 41+(-34)\cdot(-3)\\ 27\cdot 2+6\cdot(-29)+24\cdot 5 & 27\cdot 5+3\cdot(-29)+24\cdot(-2) & 27\cdot 7+4\cdot(-29)+24\cdot(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.\ \lrcorner$$

32. Знайти обернену матрицю до матриці $A=\begin{pmatrix}6 & 7 & 5\\ 10 & 10 & 3\\ 9 & 6 & 5\end{pmatrix}$.

$\ulcorner$ Визначник матриці $|A|=-119$. Знайдемо алгебраїчні доповнення елементів матриці A:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}10 & 3\\ 6 & 5\end{vmatrix}=32,\ A_{12}=-\begin{vmatrix}10 & 3\\ 9 & 5\end{vmatrix}=-23,\ A_{13}=\begin{vmatrix}10 & 10\\ 9 & 6\end{vmatrix}=-30\ ,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}7 & 5\\ 6 & 5\end{vmatrix}=-5,\ A_{22}=\begin{vmatrix}6 & 5\\ 9 & 5\end{vmatrix}=-15,\ A_{23}=-\begin{vmatrix}6 & 7\\ 9 & 6\end{vmatrix}=27\ ,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}7 & 5\\ 10 & 3\end{vmatrix}=-29,\ A_{32}=-\begin{vmatrix}6 & 5\\ 10 & 3\end{vmatrix}=32,\ A_{33}=\begin{vmatrix}6 & 7\\ 10 & 10\end{vmatrix}=-10\ .$$

Запишемо приєднану матрицю згідно з (6):

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 32 & -23 & -30 \\ -5 & -15 & 27 \\ -29 & 32 & -10 \end{pmatrix}.$$

За формулою (4) знаходимо обернену матрицю

$$A^{-1} = -\frac{1}{119}\begin{pmatrix} 32 & -5 & -29 \\ -23 & -15 & 32 \\ -30 & 27 & -10 \end{pmatrix}. \quad \lrcorner$$

<u>Вправи для самостійного розв'язання</u>

Знайти обернені матриці до заданих:

33. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

34. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

35. $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -5 \\ 1 & -10 & -1 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

36. $\begin{pmatrix} -10 & 7 & 8 \\ -6 & 1 & 6 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

37. $\begin{pmatrix} 2 & -11 & 4 \\ 5 & 8 & -4 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$.

Відповіді:

33. $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1,5 & -0,5 \end{pmatrix}$.

34. $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

35. $-\frac{1}{84}\begin{pmatrix} -58 & 2 & -48 \\ -9 & 9 & -6 \\ 32 & -4 & 12 \end{pmatrix}$.

36. $\frac{1}{156}\begin{pmatrix} 7 & -49 & 34 \\ 30 & -54 & 12 \\ 2 & -14 & 32 \end{pmatrix}$.

37. $-\frac{1}{148}\begin{pmatrix} -16 & -16 & 12 \\ 12 & 12 & 28 \\ 4 & 41 & 71 \end{pmatrix}$.

4. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Система m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими $x_1, x_2, \ldots, x_n$ має вигляд

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (7)$$

Систему (7) можна записати у *матричному* вигляді $AX = B$, де

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ – *матриця системи*;

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$$ – *вектор-стовпець вільних членів*;

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$ – *вектор-стовпець невідомих*.

Набір значень невідомих $x_1 = \alpha_1,\ x_2 = \alpha_2, \ldots, x_n = \alpha_n$ називають *розв'язком* системи (7), якщо при підстановці їх у рівняння системи всі рівняння перетворюються у тотожності. Система рівнянь називається *сумісною*, якщо вона має хоча б один розв'язок. Якщо ж система не має жодного розв'язку, то вона називається *несумісною*.

4.1. Розв'язування систем лінійних рівнянь методом Гаусса

Універсальним методом розв'язання систем лінійних рівнянь є *метод Гаусса*, який ще називають методом *послідовного виключення невідомих*. Цей метод ґрунтується на понятті *елементарних перетворень* системи, які полягають у наступному:

1) переставлення рівнянь системи;

2) множення рівнянь системи на довільні числа, відмінні від нуля;

3) додавання до одного рівняння системи іншого рівняння, помноженого на довільне число.

За допомогою елементарних перетворень систему (7) зводять до системи простішого (“східчастого”) вигляду, яка *рівносильна* заданій (це означає, що розв’язки систем співпадають):

$$\begin{cases} \bar{a}_{11}x_1 + \ldots + \bar{a}_{1n}x_n = \bar{b}_1 \\ \quad \bar{a}_{2k}x_k + \ldots + \bar{a}_{2n}x_n = \bar{b}_2 \\ \qquad \bar{a}_{3l}x_l + \ldots + \bar{a}_{3n}x_n = \bar{b}_3 \\ \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \\ \qquad\quad \bar{a}_{rs}x_s + \ldots + \bar{a}_{rn}x_n = \bar{b}_r \\ \qquad\qquad\qquad 0 = \bar{b}_{r+1} \\ \qquad\qquad\qquad \ldots \quad \ldots \\ \qquad\qquad\qquad 0 = \bar{b}_m . \end{cases} \tag{8}$$

Можливі такі випадки.

1. Якщо система містить хибні рівності виду $0 = b_t$, де $b_t \neq 0$, то вона несумісна.

2. Нехай система (8) не містить рівностей виду $0 = b_t$ $(b_t \neq 0)$. Тоді вона є сумісною. Тотожності виду $0 = 0$ відкидаємо. Припустимо, що $r < n$, тобто число рівнянь менше за число невідомих. Назвемо невідомі $x_1, x_k, x_l, ..., x_s$, з яких починаються перше, друге,..., r-те рівняння, *основними*, а всі інші невідомі – *вільними*. Основних невідомих за означенням r. Надаючи вільним невідомим довільних значень і підставляючи ці значення в рівняння системи, з r-го рівняння системи знайдемо x_s. Підставляючи це значення в перші $(r-1)$ рівнянь і, піднімаючись вгору по системі, знайдемо всі основні невідомі. Оскільки вільні невідомі можуть набувати будь-яких значень, система має безліч розв’язків.

3. Нехай в системі (8) $r = n$. Тоді вільних невідомих немає. В цьому випадку система (8) має “трикутний” вигляд

$$\begin{cases} \bar{a}_{11}x_1 + \ldots + \bar{a}_{1n}x_n = \bar{b}_1 \\ \quad \bar{a}_{22}x_2 + \ldots + \bar{a}_{2n}x_n = \bar{b}_2 \\ \quad \ldots \qquad \ldots. \qquad \ldots \\ \qquad\qquad \bar{a}_{nn}x_n = \bar{b}_n . \end{cases}$$

З останнього рівняння системи знайдемо x_n і, піднімаючись по системі вгору, знайдемо всі інші невідомі. Отже, в цьому випадку система має єдиний розв'язок.

Зауваження. При розв'язанні систем, в яких число рівнянь не менше трьох, доцільно виписати *розширену матрицю* системи $\left(A|B\right)$. Елементарні перетворення над рівняннями системи зводяться при цьому до відповідних дій над рядками розширеної матриці. Після зведення матриці $\left(A|B\right)$ до "східчастого" вигляду виписують систему рівнянь, яка відповідає отриманій матриці.

Розв'язати системи лінійних рівнянь методом Гаусса.

38. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 1 \\ 3x_1 + 7x_2 = 2. \end{cases}$

⌜ Виключимо невідоме x_1 з другого рівняння. Для цього можна додати до другого рівняння перше рівняння, помножене на $\left(-\dfrac{3}{2}\right)$. Проте, щоб уникнути дій з дробами, краще помножити друге рівняння на 2 і додати до нього перше рівняння, помножене на $\left(-3\right)$. Опускаючи запис вказаних обчислень, дістанемо систему, рівносильну заданій:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 1 \\ \qquad -x_2 = 1. \end{cases}$$

З останнього рівняння маємо $x_2 = -1$. Підставляючи знайдене значення x_2 в перше рівняння, знаходимо x_1:

$$2x_1 + 5\cdot\left(-1\right) = 1, \quad x_1 = \frac{6}{2} = 3.$$

Отже, задана система має розв'язок $x_1 = 3$, $x_2 = -1$. ⌟

39. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$

⌜ Додамо до другого рівняння перше, помножене на $\left(-3\right)$. В результаті дістанемо систему, рівносильну заданій:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ \quad -2x_2 - 4x_3 = -2. \end{cases} \qquad (*)$$

У цій системі x_3 – вільне невідоме. Надамо йому довільного значення c: $x_3 = c$, $c \in R$ (R – множина дійсних чисел). Тоді з другого рівняння системи ($*$) знаходимо x_2:

$$-2x_2 - 4c = -2, \quad x_2 = -\frac{1}{2}(4c-2) = 1-2c.$$

З першого рівняння системи ($*$) знаходимо невідоме x_1:

$$x_1 + 1 - 2c + c = 2, \quad x_1 = 1 + c.$$

Отже, задана система має розв'язок $x_1 = 1+c$, $x_2 = 1-2c$, $x_3 = c$, $c \in R$. ⌟

40. $\begin{cases} 3x_1 - \dfrac{21}{4}x_2 - \dfrac{3}{4}x_3 = 21 \\ 4x_1 - 7x_2 - x_3 = 5. \end{cases}$

⌜ Додамо до другого рівняння перше, помножене на $\left(-\dfrac{4}{3}\right)$. Дістанемо систему

$$\begin{cases} 3x_1 - \dfrac{21}{4}x_2 - \dfrac{3}{4}x_3 = 21 \\ \qquad\qquad 0 = -23. \end{cases}$$

Друга рівність у цій системі є хибною. Це означає, що задана система несумісна. ⌟

41. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 7 \\ 2x_1 + 9x_2 - 8x_3 = 16 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$

⌜ Розв'яжемо задану систему: а) виконуючи елементарні перетворення безпосередньо над рівняннями системи; б) використовуючи поняття розширеної матриці системи.

а) Виключимо невідоме x_1 з 2-го та 3-го рівнянь системи. Для цього виконаємо послідовно такі дії: 1) додамо до 2-го рівняння 1-ше рівняння, помножене на (-2); 2) додамо до 3-го рівняння 1-ше рівняння, помножене на (-4). В результаті дістанемо систему простішого вигляду, яка рівносильна заданій:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 7 \\ \quad 3x_2 - 4x_3 = 2 \\ -15x_2 + 9x_3 = -21. \end{cases}$$

Виключимо невідоме x_2 з 3-го рівняння отриманої системи. Для цього додамо до 3-го рівняння 2-ге рівняння, помножене на 5. Дістанемо

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 7 \\ \quad 3x_2 - 4x_3 = 2 \\ \quad\quad -11x_3 = -11. \end{cases} \qquad (*)$$

З останнього рівняння отриманої системи знаходимо $x_3 = 1$. Підставляємо це значення в 2-ге рівняння і знаходимо x_2:

$$3x_2 - 4 \cdot 1 = 2\,, \;\; 3x_2 = 6\,, \;\; x_2 = 2\,.$$

Підставимо знайдені значення x_2 та x_3 в 1-ше рівняння системи $(*)$ і знайдемо x_1:

$$x_1 + 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 7\,, \;\; x_1 = 7 - 4\,, \;\; x_1 = 3\,.$$

Оскільки задана система та система $(*)$ рівносильні, то маємо розв'язок заданої системи: $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$.

б) Розв'яжемо систему, використовуючи поняття розширеної матриці. Розширена матриця заданої системи має вигляд

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -2 & 7 \\ 2 & 9 & -8 & 16 \\ 4 & -3 & 1 & 7 \end{array}\right).$$

Виключенню невідомого x_1 з 2-го та 3-го рівнянь системи відповідає утворення нулів у першому стовпці розширеної матриці. Для цього виконаємо послідовно такі дії над рядками матриці: 1) додамо до 2-го рядка матриці 1-й рядок, помножений на (-2); 2) додамо до 3-го рядка матриці 1-й рядок, помножений на (-4). Запишемо в умовних позначеннях вказані дії, а також їх результат – нову розширену матрицю:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -2 & 7 \\ 2 & 9 & -8 & 16 \\ 4 & -3 & 1 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{c} (-2)\;(-4) \\ \leftarrow\!\rfloor \\ \leftarrow\!\!\!\!\!-\!\!\!-\!\rfloor \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -2 & 7 \\ 0 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -15 & 9 & -21 \end{array}\right).$$

До 3-го рядка отриманої матриці додамо 2-й рядок, помножений на 5 (виключаємо невідоме x_2 з 3-го рівняння системи):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 7 \\ 0 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -15 & 9 & -21 \end{array}\right) \; 5 \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 7 \\ 0 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -11 & -11 \end{array}\right).$$

Зауважимо, що у квадратній таблиці чисел, які записані ліворуч від риски, під діагоналлю стоять нулі.

Випишемо систему рівнянь, яка відповідає знайденій розширеній матриці:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 7 \\ \qquad 3x_2 - 4x_3 = 2 \\ \qquad\qquad -11x_3 = -11. \end{cases}$$

Отримали систему ($*$). Її розв'язок $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$. ⌋

Зауваження. Як бачимо з останнього прикладу, для розв'язування системи рівнянь зручно виписати розширену матрицю системи і виконати потрібні перетворення над рядками матриці для утворення нулів на місці певних елементів (це відповідає виключенню відповідних невідомих з рівнянь системи).

42. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ 4x_1 - 4x_2 - 7x_3 = 5 \\ 10x_1 + 2x_3 - x_3 = 8. \end{cases}$

⌈ Запишемо розширену матрицю системи:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & -4 & -7 & 5 \\ 10 & 2 & -1 & 8 \end{array}\right).$$

Виконаємо послідовно такі дії над рядками цієї матриці: 1) додамо до 2-го рядка матриці 1-й рядок, помножений на (-2); 2) додамо до 3-го рядка 1-й рядок, помножений на (-5). Запишемо схематично ці дії, а також їх результат – нову розширену матрицю:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & -4 & -7 & 5 \\ 10 & 2 & -1 & 8 \end{array}\right) \; (-2) \;\; (-5) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -10 & -9 & -1 \\ 0 & -13 & -6 & -7 \end{array}\right).$$

Третій рядок цієї матриці помножимо на 10 і додамо до нього 2-й рядок, помножений на (-13). Запишемо схематично ці дії, а також їх результат – нову розширену матрицю:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -10 & -9 & -1 \\ 0 & -13 & -6 & -7 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ (-13) \\ 10 \hookleftarrow \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -10 & -9 & -1 \\ 0 & 0 & 57 & -57 \end{array}\right).$$

Запишемо систему рівнянь, яка відповідає знайденій розширеній матриці:

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3=3 \\ \quad -10x_2-9x_3=-1 \qquad\qquad (*) \\ \qquad\qquad 57x_3=-57. \end{cases}$$

Система $(*)$ рівносильна заданій. Розв’яжемо систему $(*)$. З останнього рівняння системи знаходимо $x_3=(-57)/57=-1$; з 2-го рівняння – $x_2=\left(-1+9\cdot(-1)\right):(-10)=(-10):(-10)=1$; з 1- го рівняння – $x_1=\left(3-(3\cdot 1+(-1))\right):2=\left(3-2\right):2=\dfrac{1}{2}$.

Таким чином, $x_1=\dfrac{1}{2},\ x_2=1,\ x_3=-1$.

Перевірка:

$$\begin{cases} 4\cdot\dfrac{1}{2}-4\cdot 1-7\cdot(-1)=5 \\ 10\cdot\dfrac{1}{2}+2\cdot 1-(-1)=8 \\ 2\cdot\dfrac{1}{2}+3\cdot 1+(-1)=3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5=5 \\ 8=8 \\ 3=3. \end{cases}$$

Отже, в результаті підстановки знайдених значень невідомих в задану систему, кожне з рівнянь системи перетворилось у тотожність. Це означає, що систему розв’язано вірно. ⌋

43. $\begin{cases} 3x_1-2x_2-2x_3=-1 \\ 5x_1+6x_2+2x_3=13 \\ x_1-10x_2-6x_3=5. \end{cases}$

⌈ Запишемо розширену матрицю системи і поміняємо місцями її перший та третій рядки:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & -2 & -1 \\ 5 & 6 & 2 & 13 \\ 1 & -10 & -6 & 5 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -10 & -6 & 5 \\ 5 & 6 & 2 & 13 \\ 3 & -2 & -2 & -1 \end{array}\right).$$

Виконаємо наступні дії над рядками нової матриці: 1) додамо до 2-го рядка 1-й рядок, помножений на (-5); 2) додамо до 3-го рядка 1-й рядок, помножений на (-3). Запишемо схематично ці дії, а також їх результат – нову розширену матрицю:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -10 & -6 & 5 \\ 5 & 6 & 2 & 13 \\ 3 & -2 & -2 & -1 \end{array}\right) \begin{matrix} (-5) \quad (-3) \\ \\ \\ \end{matrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -10 & -6 & 5 \\ 0 & 56 & 32 & -12 \\ 0 & 28 & 16 & -16 \end{array}\right).$$

Третій рядок помножимо на (-2) і додамо до нього 2-й рядок:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -10 & -6 & 5 \\ 0 & 56 & 32 & -12 \\ 0 & 28 & 16 & -16 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ (-2) \end{matrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -10 & -6 & 5 \\ 0 & 56 & 32 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \end{array}\right).$$

Запишемо систему рівнянь, яка відповідає знайденій розширеній матриці:

$$\begin{cases} x_1 - 10x_2 - 6x_3 = 5 \\ 56x_2 + 32x_3 = -12 \\ 0 = 20. \end{cases}$$

Остання рівність в цій системі є хибною. Звідси випливає несумісність заданої системи.

Таким чином, задана система не має розв'язків. $\lrcorner$

44. $\begin{cases} 4x_1 + 9x_2 - 112x_3 = -65 \\ 12x_1 + 21x_2 + 12x_3 = 11 \\ 10x_1 + 18x_2 - 19x_3 = -8. \end{cases}$

$\ulcorner$ Запишемо розширену матрицю системи і виконаємо елементарні перетворення над її рядками, схематично записуючи всі дії:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 9 & -112 & -65 \\ 12 & 21 & 12 & 11 \\ 10 & 18 & -19 & -8 \end{array}\right) \begin{matrix} (-3) \quad (-5) \\ \\ \\ \end{matrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 9 & -112 & -65 \\ 0 & -6 & 348 & 206 \\ 0 & -9 & 522 & 309 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ (-1/2) \\ \\ \end{matrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 9 & -112 & -65 \\ 0 & 3 & -174 & -103 \\ 0 & -9 & 522 & 309 \end{array}\right)\begin{array}{c} \\ 3 \\ \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 9 & -112 & -65 \\ 0 & 3 & -174 & -103 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Запишемо систему рівнянь, яка відповідає знайденій розширеній матриці (тотожність $0=0$ при цьому відкидаємо):

$$\begin{cases} 4x_1+9x_2-112x_3=-65 \\ \qquad 3x_2-174x_3=-103. \end{cases} \qquad (*)$$

Покладемо $x_3=c$, де c – довільна стала. Тоді з рівнянь системи $(*)$, рухаючись знизу вгору, послідовно знаходимо

$$x_2=\left(-103+174c\right):3=-\frac{103}{3}+58c\,,$$

$$x_1=\left(-65-9\cdot\left(-\frac{103}{3}+58c\right)-112c\right):4=$$

$$=\left(-65+309-522c-112c\right):4=\left(244-634c\right):4=61-\frac{317}{2}c\,.$$

Отже, розв'язок системи має вигляд

$$x_1=61-\frac{317}{2}c\,,\ x_2=-\frac{103}{3}+58c\,,\ x_3=c\,,\ c\in R\,. \quad \lrcorner$$

45. $\begin{cases} 54x_1+147x_2-49x_3=60 \\ 9x_1-18x_2+49x_3=4 \\ 42x_1+168x_2-105x_3=55 \\ 3x_1-3x_2+7x_3=1. \end{cases}$

$\ulcorner$ Запишемо розширену матрицю заданої системи і виконаємо потрібні перетворення над її рядками:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 54 & 147 & -49 & 60 \\ 9 & -18 & 49 & 4 \\ 42 & 168 & -105 & 55 \\ 3 & -3 & 7 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 7 & 1 \\ 9 & -18 & 49 & 4 \\ 42 & 168 & -105 & 55 \\ 54 & 147 & -49 & 60 \end{array}\right)\begin{array}{c} (-3)\ (-14)\ (-18) \\ \\ \\ \end{array} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & -9 & 28 & 1 \\ 0 & 210 & -203 & 41 \\ 0 & 201 & -175 & 42 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & -9 & 28 & 4 \\ 0 & 201 & -175 & 42 \\ 0 & 210 & -203 & 41 \end{array}\right)\begin{array}{c} \\ \\ (-1) \\ \end{array} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -3 & 7 & & 1 \\ 0 & -9 & 28 & & 1 \\ 0 & 201 & -175 & & 42 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ 67 \\ 3 \leftarrow \\ \\ \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & -9 & 28 & 1 \\ 0 & 0 & 1351 & 193 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ 1/193 \\ \\ \end{array} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & -9 & 28 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Запишемо систему рівнянь, яка відповідає знайденій розширеній матриці:

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + \ \ 7x_3 = 1 \\ \quad\ \ -9x_2 + 28x_3 = 1 \\ \qquad\qquad\quad 7x_3 = 1. \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему: з останнього рівняння системи знаходимо $x_3 = \frac{1}{7}$; з другого – $x_2 = \left(1 - 28 \cdot \frac{1}{7}\right) : (-9) = (1-4) : (-9) = \frac{1}{3}$; з першого – $x_1 = \left(1 - (-3) \cdot \frac{1}{3} + 7 \cdot \frac{1}{7}\right) : 3 = (1+1-1) : 3 = \frac{1}{3}$.

Таким чином, $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{1}{3}$, $x_3 = \frac{1}{7}$.

Перевірка:

$$\begin{cases} 54 \cdot \frac{1}{3} + 147 \cdot \frac{1}{3} - 49 \cdot \frac{1}{7} = 60 \\ 9 \cdot \frac{1}{3} - 18 \cdot \frac{1}{3} + 49 \cdot \frac{1}{7} = 4 \\ 42 \cdot \frac{1}{3} + 168 \cdot \frac{1}{3} - 105 \cdot \frac{1}{7} = 55 \\ 3 \cdot \frac{1}{3} - 3 \cdot \frac{1}{3} + 7 \cdot \frac{1}{7} = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 60 = 60 \\ 4 = 4 \\ 55 = 55 \\ 1 = 1. \end{cases}$$

Отже, в результаті підстановки знайдених значень невідомих в задану систему, кожне з рівнянь системи перетворилось у тотожність Це означає, що систему розв'язано вірно. ⌋

46. $\begin{cases} x_1+x_2-3x_3=-1\\ 2x_1+x_2-2x_3=1\\ x_1+x_2+x_3=3\\ x_1+2x_2-3x_3=1. \end{cases}$

⌜ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1\\ 2 & 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 3\\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right)(-2)\ (-1)\ (-1) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1\\ 0 & -1 & 4 & 3\\ 0 & 0 & 4 & 4\\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)1/4 \longrightarrow$

$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1\\ 0 & -1 & 4 & 3\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 4 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$

$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{array}\right)(-4) \longrightarrow$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1\\ 0 & -1 & 4 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Знайденій розширеній матриці відповідає система рівнянь

$$\begin{cases} x_1 \quad +x_2 \quad -3x_3 = -1\\ \qquad -x_2 \quad +4x_3 = 3\\ \qquad\qquad x_3 = 1\\ \qquad\qquad 0 = -1. \end{cases}$$

Остання рівність у цій системі є хибною. Тому задана система не має розв’язків. ⌟

47. $\begin{cases} 13x_1+14x_2+8x_3=-3\\ 3x_1-2x_2+6x_3=-7\\ 7x_1-16x_2+23x_3=-30\\ 5x_1+8x_2+x_3=2. \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 13 & 14 & 8 & -3 \\ 3 & -2 & 6 & -7 \\ 7 & -16 & 23 & -30 \\ 5 & 8 & 1 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 6 & -7 \\ 13 & 14 & 8 & -3 \\ 7 & -16 & 23 & -30 \\ 5 & 8 & 1 & 2 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} (-4)\ (-2)\ \ 2 \\ \\ \\ (-1) \end{array} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 6 & -7 \\ 1 & 22 & -16 & 25 \\ 1 & -12 & 11 & -16 \\ 1 & -12 & 11 & -16 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ (-1) \\ \\ \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 6 & -7 \\ 1 & 22 & -16 & 25 \\ 1 & -12 & 11 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -12 & 11 & -16 \\ 1 & 22 & -16 & 25 \\ 3 & -2 & 6 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (-1)\ \ (-3) \\ \\ \\ \\ \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -12 & 11 & -16 \\ 0 & 34 & -27 & 41 \\ 0 & 34 & -27 & 41 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ (-1) \\ \\ \\ \end{array} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -12 & 11 & -16 \\ 0 & 34 & -27 & 41 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Знайденій матриці відповідає система рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - 12x_2 + 11x_3 = -16 \\ \qquad 34x_2 - 27x_3 = 41. \end{cases}$$

Надамо невідомому x_3 довільного значення c. Починаючи з другого рівняння і переходячи до першого, знаходимо

$$x_2 = \frac{1}{34}(41 + 27c);$$

$$x_1 = \frac{12}{34}\cdot(41+27c) - 11c - 16 = \frac{1}{17}(246 + 162c - 17\cdot 11c - 17\cdot 16) =$$

$$= -\frac{1}{17}(26 + 25c).$$

Отже, $x_1 = -\frac{1}{17}(26+25c)$, $x_2 = \frac{1}{34}(41+27c)$, $x_3 = c$, $c \in R$. ⌋

48. $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases}$

$$\ulcorner \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{array}\right)\begin{array}{c} \\ 2 \\ 2 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 6 & 10 & 4 & 4 & 8 \\ 18 & 8 & 2 & 14 & 4 \end{array}\right)\begin{array}{c} (-3)\ (-9) \\ \\ \\ \end{array} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & -11 & -5 & 1 & -10 \\ 0 & -55 & -25 & 5 & -50 \end{array}\right)\begin{array}{c} \\ (-5) \\ \\ \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & -11 & -5 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = \quad 6 \\ \quad -11x_2 - 5x_3 + x_4 = -10. \end{cases}$$

У цій системі x_3 та x_4 – вільні невідомі. Надамо їм довільних значень: $x_4 = c_1$, $x_3 = c_2$, $c_1, c_2 \in R$. Тоді з другого рівняння

$$x_2 = \frac{1}{11}\left(10 + c_1 - 5c_2\right).$$

Підставляючи це значення в перше рівняння, отримаємо

$$2x_1 + \frac{7}{11}\left(10 + c_1 - 5c_2\right) + 3c_2 + c_1 = 6,$$

$$2x_1 = 6 - c_1 - 3c_2 - \frac{7}{11}\left(10 + c_1 - 5c_2\right) = \frac{2}{11}\left(c_2 - 9c_1 - 2\right),$$

$$x_1 = \frac{1}{11}\left(c_2 - 9c_1 - 2\right).$$

Таким чином, $x_1 = \frac{1}{11}\left(c_2 - 9c_1 - 2\right)$, $x_2 = \frac{1}{11}\left(10 + c_1 - 5c_2\right)$, $x_3 = c_2$, $x_4 = c_1$, $c_1, c_2 \in R$. $\lrcorner$

49. $\begin{cases} 9x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 4 \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 10x_4 = -8. \end{cases}$

$$\ulcorner \left(\begin{array}{cccc|c} 9 & -4 & 5 & 4 & 4 \\ 6 & -2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & 3 & 10 & -8 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 3 & 10 & -8 \\ 6 & -2 & 3 & 4 & 5 \\ 9 & -4 & 5 & 4 & 4 \end{array}\right)\begin{array}{c} (-2)\ (-3) \\ \\ \\ \end{array} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 3 & 10 & -8 \\ 0 & 0 & -3 & -16 & 21 \\ 0 & -1 & -4 & -26 & 28 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 3 & 10 & -8 \\ 0 & -1 & -4 & -26 & 28 \\ 0 & 0 & -3 & -16 & 21 \end{array}\right).$$

Останній матриці відповідає система рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 10x_4 = -8 \\ \quad - x_2 - 4x_3 - 26x_4 = 28 \\ \qquad - 3x_3 - 16x_4 = 21. \end{cases}$$

Поклавши $x_4 = c$, з третього рівняння системи знаходимо

$$-3x_3 - 16c = 21, \quad -3x_3 = 21 + 16c, \quad x_3 = -7 - \frac{16}{3}c.$$

Далі, підставляючи в друге рівняння вираз для x_3 та $x_4 = c$, отримаємо

$$-x_2 - 4\left(-7 - \frac{16}{3}c\right) - 26c = 28, \quad -x_2 = 28 + 26c + 4\left(-7 - \frac{16}{3}c\right) = \frac{14}{3}c,$$

$$x_2 = -\frac{14}{3}c.$$

Підставляючи в перше рівняння системи x_4, x_3 та x_2 знаходимо x_1:

$$x_1 = \left(-8 - \frac{14}{3}c - 3\left(-7 - \frac{16}{3}c\right) - 10c\right) : 3 = \left(13 + \frac{4}{3}c\right) : 3 = \frac{13}{3} + \frac{4}{9}c.$$

Отже, $x_1 = \frac{13}{3} + \frac{4}{9}c$, $x_2 = -\frac{14}{3}c$, $x_3 = -7 - \frac{16}{3}c$, $x_4 = c$, $c \in R$. ⌋

50. $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3. \end{cases}$

$$\ulcorner \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 7 & -4 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & -4 & -6 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ 3 \\ 3 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 21 & -12 & 3 & 9 & 15 \\ 15 & 21 & -12 & -18 & 9 \end{array}\right) \begin{array}{c} (-7) \; (-5) \\ \\ \\ \end{array} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 23 & -11 & -19 & 1 \\ 0 & 46 & -22 & -38 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ (-2) \\ \\ \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 23 & -11 & -19 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right).$$

Третій рядок останньої матриці свідчить, що відповідна система містить хибну рівність $0=-3$. Отже, задана система не має розв’язків. ⌋

51. $\begin{cases} x_1+x_2-6x_3-4x_4=6 \\ 3x_1-x_2-6x_3-4x_4=2 \\ 2x_1+3x_2+9x_3+2x_4=6 \\ 3x_1+2x_2+3x_3+8x_4=-7. \end{cases}$

⌜ $$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -6 & -4 & 6 \\ 3 & -1 & -6 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & 9 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & 3 & 8 & -7 \end{array}\right)\begin{array}{l} (-3)\ (-2)\ (-3) \\ \\ \\ \\ \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -6 & -4 & 6 \\ 0 & -4 & 12 & 8 & -16 \\ 0 & 1 & 21 & 10 & -6 \\ 0 & -1 & 21 & 20 & -25 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ (1/4) \\ \\ \\ \end{array} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -6 & -4 & 6 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 21 & 10 & -6 \\ 0 & 0 & 42 & 30 & -31 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -6 & -4 & 6 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 24 & 12 & -10 \\ 0 & 0 & 42 & 30 & -31 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ (1/2) \\ \\ \end{array} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -6 & -4 & 6 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 12 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 42 & 30 & -31 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ (-42) \\ 12 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -6 & -4 & 6 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 12 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 108 & -162 \end{array}\right).$$

Запишемо систему рівнянь, яка відповідає знайденій розширеній матриці:

$$\begin{cases} x_1+x_2-6x_3-4x_4=6 \\ \quad -x_2+3x_3+2x_4=-4 \\ \qquad\quad 12x_3+6x_4=-5 \\ \qquad\qquad\quad 108x_4=-162. \end{cases}$$

З 4-го рівняння системи знаходимо $x_4=-\frac{162}{108}=-\frac{3}{2}$. Підставивши x_4 в 3-тє рівняння, знайдемо x_3:

$$12x_3=-5-6\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=4, \quad x_3=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}.$$

Підставивши x_3 та x_4 в 2-ге рівняння, знайдемо x_2:

$$-x_2 = -4 - 2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) - 3\cdot\frac{1}{3} = -2,$$

$$x_2 = 2.$$

Підставивши x_4, x_3, x_2 в 1-ше рівняння, знаходимо x_1:

$$x_1 = 6 + 4\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) + 6\cdot\frac{1}{3} - 2 = 0.$$

Отже, система має розв'язок $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = \frac{1}{3}$, $x_4 = -\frac{3}{2}$.

Вправи для самостійного розв'язання

Розв'язати системи рівнянь або довести їх несумісність:

52. $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 = 23 \\ x_1 - 10x_2 = -56. \end{cases}$

53. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 44 \\ 5x_1 + 8x_2 = 112. \end{cases}$

54. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 11x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 0. \end{cases}$

55. $\begin{cases} \frac{3}{7}x_1 - \frac{1}{7}x_2 + \frac{1}{14}x_3 = -\frac{6}{7} \\ x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{6}x_3 = -1. \end{cases}$

56. $\begin{cases} 16x_1 - 18x_2 - 7x_3 = 12 \\ 7x_1 - 12x_2 + 21x_3 = -3 \\ x_1 - 27x_2 - 35x_3 = 2. \end{cases}$

57. $\begin{cases} -2x_1 + 13x_3 = 11 \\ 21x_1 - 121x_2 + 131x_3 = 101 \\ x_1 - 121x_2 + 261x_3 = 2. \end{cases}$

58. $\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 9 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ 8x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 12. \end{cases}$

59. $\begin{cases} 6x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -5 \\ 21x_1 + x_2 - x_3 = 10 \\ 9x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

60. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 13 \\ 3x_2 + 4x_3 = 5 \\ -3x_1 + x_2 + 4x_3 = -22. \end{cases}$

61. $\begin{cases} 5x_1 - 13x_2 + x_3 = -20 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7 \\ 4x_1 + 5x_2 + 5x_3 = -9 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1. \end{cases}$

62. $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2. \end{cases}$

63. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6. \end{cases}$

64. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 10 \\ 4x_1 - 10x_2 - 4x_3 + 3x_4 = -33 \\ 9x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 10. \end{cases}$

Відповіді:

52. $x_1 = -6$, $x_2 = 5$.

53. $x_1 = 8$, $x_2 = 9$.

54. $x_1 = 2 - c$, $x_2 = 1 + 3c$, $x_3 = c$.

55. Несумісна.

56. $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{3}$, $x_3 = -\frac{2}{7}$.

57. Несумісна.

58. $x_1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}c$, $x_2 = c$, $x_3 = c$.

59. $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = 5$, $x_3 = 2$.

60. Несумісна.

61. $x_1 = -\frac{1}{11}(31 + 10c)$, $x_2 = \frac{1}{11}(5 - 3c)$, $x_3 = c$.

62. $x_1 = -1{,}8 - 0{,}6c$, $x_2 = 0{,}4 - 0{,}45c$, $x_3 = 1{,}2 + 0{,}4c$, $x_4 = c$.

63. Несумісна.

64. $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 1$.

4.2. Розв'язування систем лінійних рівнянь матричним методом

Нехай маємо систему рівнянь (7), в якій $m = n$, тобто число рівнянь дорівнює числу невідомих. Запишемо систему у матричному вигляді (див. стор. 17)

$$AX = B. \tag{9}$$

Якщо $|A| \neq 0$, то розв'язок системи рівнянь (9) можна знайти за формулою

$$X = A^{-1}B. \tag{10}$$

Розв'язати системи лінійних рівнянь матричним методом:

65. $\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 = -35 \\ -x_1 + x_2 = 16. \end{cases}$

Γ Для заданої системи рівнянь матриця системи, вектор-стовпець вільних членів та вектор-стовпець невідомих мають відповідно вигляд

$$A=\begin{pmatrix}5 & 4\\ -1 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-35\\ 16\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}.$$

Визначник матриці $|A|=9$. За формулою (5) знаходимо обернену матрицю

$$A^{-1}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1 & -4\\ 1 & 5\end{pmatrix}.$$

Застосувавши формулу (10), дістанемо

$$X=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1 & -4\\ 1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-35\\ 16\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1\cdot(-35)+(-4)\cdot 16\\ 1\cdot(-35)+5\cdot 16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11\\ 5\end{pmatrix}.$$

Таким чином, $X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11\\ 5\end{pmatrix}$. Звідси, прирівнюючи відповідні елементи вектор-стовпців, знаходимо $x_1=-11$, $x_2=5$. ⌋

66. $\begin{cases}7x_1+2x_2 = 11\\ -7x_1+x_2+x_3=-2\\ 6x_1-6x_2-3x_3=-15.\end{cases}$

⌜ Для заданої системи

$$A=\begin{pmatrix}7 & 2 & 0\\ -7 & 1 & 1\\ 6 & -6 & -3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}11\\ -2\\ -15\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}.$$

Обчислимо визначник матриці A:

$$|A|=\begin{vmatrix}7 & 2 & 0\\ -7 & 1 & 1\\ 6 & -6 & -3\end{vmatrix}=7\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ -6 & -3\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}-7 & 1\\ 6 & -3\end{vmatrix}=-9\neq 0.$$

Для знаходження оберненої матриці A^{-1} обчислимо алгебраїчні доповнення:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -6 & -3\end{vmatrix}=1\cdot(-3)-1\cdot(-6)=3,$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}-7 & 1\\ 6 & -3\end{vmatrix}=-(-7)\cdot(-3)+1\cdot 6=-15,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}-7 & 1\\ 6 & -6\end{vmatrix}=(-7)\cdot(-6)-1\cdot 6=36,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -6 & -3 \end{vmatrix} = -2\cdot(-3) + 0\cdot(-6) = 6\ ,$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = 7\cdot(-3) - 0\cdot 6 = -21\,,$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 6 & -6 \end{vmatrix} = -7\cdot(-6) + 2\cdot 6 = 54\ ,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 1 - 0\cdot 1 = 2\ ,$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ -7 & 1 \end{vmatrix} = -7\cdot 1 + 0\cdot(-7) = -7\ ,$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ -7 & 1 \end{vmatrix} = 7\cdot 1 - 2\cdot(-7) = 21\ .$$

За формулою (6) запишемо приєднану матрицю

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & -15 & 36 \\ 6 & -21 & 54 \\ 2 & -7 & 21 \end{pmatrix}.$$

За формулою (4) знаходимо обернену матрицю

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot \tilde{A}^T = \frac{1}{-9}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ -15 & -21 & -7 \\ 36 & 54 & 21 \end{pmatrix}.$$

Застосувавши формулу (10), дістанемо

$$X = \frac{1}{-9}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ -15 & -21 & -7 \\ 36 & 54 & 21 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ -15 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix} 3\cdot 11 + 6\cdot(-2) + 2\cdot(-15) \\ (-15)\cdot 11 + (-21)\cdot(-2) + (-7)\cdot(-15) \\ 36\cdot 11 + 54\cdot(-2) + 21\cdot(-15) \end{pmatrix} = -\frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix} -9 \\ -18 \\ -27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ або $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. ⌋

67. $\begin{cases} -3x_1+8x_2-9x_3=33 \\ 4x_1-x_2+2x_3=-17 \\ x_1-4x_2+3x_3=-23. \end{cases}$

$\ulcorner$ Запишемо матрицю системи $A=\begin{pmatrix} -3 & 8 & -9 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$.

Обчислимо визначник матриці A. Він дорівнює 40. Далі знайдемо приєднану матрицю $\tilde{A}$. Для цього обчислимо алгебраїчні доповнення елементів матриці A:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}=5,\ A_{12}=-\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-10,\ A_{13}=\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}=-15,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix} 8 & -9 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}=12,\ A_{22}=\begin{vmatrix} -3 & -9 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=0,\ A_{23}=-\begin{vmatrix} -3 & 8 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}=-4,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix} 8 & -9 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=7,\ A_{32}=-\begin{vmatrix} -3 & -9 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=-30,\ A_{33}=\begin{vmatrix} -3 & 8 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}=-29.$$

Отже, маємо приєднану матрицю

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} 5 & -10 & -15 \\ 12 & 0 & -4 \\ 7 & -30 & -29 \end{pmatrix}.$$

За формулою (4) знаходимо обернену матрицю

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\tilde{A}^T=\frac{1}{40}\begin{pmatrix} 5 & 12 & 7 \\ -10 & 0 & -30 \\ -15 & -4 & -29 \end{pmatrix}.$$

Застосувавши формулу (10), дістанемо

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\frac{1}{40}\begin{pmatrix} 5 & 12 & 7 \\ -10 & 0 & -30 \\ -15 & -4 & -29 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 33 \\ -17 \\ -23 \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{40}\begin{pmatrix} 5\cdot 33+(-17)\cdot 12+7\cdot 23 \\ (-10)\cdot 33+(-30)\cdot(-23) \\ (-15)\cdot 33+(-4)\cdot(-17)+(-29)\cdot(-23) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Звідси $x_1=-5,\ x_2=9,\ x_3=6$. $\lrcorner$

68. $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 7x_3 = 9 \\ -5x_2 + 8x_3 = 130 \\ 2x_1 - 5x_2 + 5x_3 = 31. \end{cases}$

Запишемо матрицю системи

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -7 \\ 0 & -5 & 8 \\ 2 & -5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо її визначник: $|A| = 37$. Щоб знайти приєднану матрицю, обчислимо алгебраїчні доповнення елементів матриці A.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -5 & 8 \\ -5 & 5 \end{vmatrix} = 15, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 8 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 16, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & -5 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 10,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -7 \\ -5 & 5 \end{vmatrix} = 25, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 39, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 29,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -7 \\ -5 & 8 \end{vmatrix} = -19, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = -10, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = -25.$$

Отже, приєднана матриця

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 15 & 16 & 10 \\ 25 & 39 & 29 \\ -19 & -40 & -25 \end{pmatrix}.$$

За формулою (4) знаходимо обернену матрицю

$$A^{-1} = \frac{1}{37}\begin{pmatrix} 15 & 25 & -19 \\ 16 & 39 & -40 \\ 10 & 29 & -25 \end{pmatrix}.$$

Застосувавши формулу (10), дістанемо

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{37}\begin{pmatrix} 15 & 25 & -19 \\ 16 & 39 & -40 \\ 10 & 29 & -25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 130 \\ 31 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Звідси $x_1 = 8$, $x_2 = 2$, $x_3 = 5$.

Вправи для самостійного розв’язання

Розв’язати системи лінійних рівнянь матричним методом:

69. $\begin{cases} 7x_1 + 8x_2 = -99 \\ 2x_1 + 5x_2 = -50. \end{cases}$

70. $\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 44 \\ x_1 + x_2 - 9x_3 = 21 \\ x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 70. \end{cases}$

71. $\begin{cases} -11x_1 + 6x_2 - 11x_3 = -63 \\ 6x_1 + 9x_2 - 4x_3 = 33 \\ 9x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 19. \end{cases}$

72. $\begin{cases} 8x_1 - 8x_2 - 3x_3 = 79 \\ 2x_1 - 3x_3 = 21 \\ 8x_1 - 11x_2 + x_3 = 74. \end{cases}$

Відповіді:

69. $x_1 = -5$, $x_2 = -8$.

70. $x_1 = 1$, $x_2 = 11$, $x_3 = -1$.

71. $x_1 = 9$, $x_2 = -5$, $x_3 = -6$.

72. $x_1 = 3$, $x_2 = -5$, $x_3 = -5$.

4.3. Розв’язування систем лінійних рівнянь за формулами Крамера

Нехай маємо систему рівнянь (7), в якій $m = n$. Якщо визначник матриці системи $\Delta = |A| \neq 0$, то розв’язок системи можна знайти за *формулами Крамера*

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ \ldots,\ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

де Δ_i ($i = 1, 2, ..., n$) – визначник матриці, що отримана з матриці A заміною i -го стовпця на стовпець вільних членів B.

Розв’язати системи лінійних рівнянь за формулами Крамера:

73. $\begin{cases} x_1 - x_2 = -2 \\ 5x_1 + 9x_2 = 130. \end{cases}$

$\ulcorner$ Знаходимо визначник матриці системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} = 9 - (-5) = 14 \neq 0.$$

Знаходимо визначник Δ_1, який дістаємо в результаті заміни першого стовпця визначника Δ на стовпець вільних членів, та визначник Δ_2, який дістаємо в результаті заміни другого стовпця визначника Δ на стовпець вільних членів:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 130 & 9 \end{vmatrix} = 112, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 130 \end{vmatrix} = 140.$$

Отже, за формулами Крамера отримуємо

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{112}{14} = 8, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{140}{14} = 10. \quad \lrcorner$$

74. $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 = 11 \\ -7x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\ 6x_1 - 6x_2 - 3x_3 = -15. \end{cases}$

$\ulcorner$ Знаходимо визначники:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 0 \\ -7 & 1 & 1 \\ 6 & -6 & -3 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -6 & -3 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} -7 & 1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} + 0 = 7 \cdot 3 - 2 \cdot 15 = -9 \neq 0,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 11 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ -15 & -6 & -3 \end{vmatrix} = 11 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -6 & -3 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -15 & -3 \end{vmatrix} = -9,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 7 & 11 & 0 \\ -7 & -2 & 1 \\ 6 & -15 & -3 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -15 & -3 \end{vmatrix} - 11 \cdot \begin{vmatrix} -7 & 1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = -18,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 11 \\ -7 & 1 & -2 \\ 6 & -6 & -15 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -6 & -15 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} -7 & -2 \\ 6 & -15 \end{vmatrix} + 11 \cdot \begin{vmatrix} -7 & 1 \\ 6 & -6 \end{vmatrix} = -27.$$

За формулами Крамера отримуємо

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-9}{-9} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-18}{-9} = 2, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-27}{-9} = 3. \quad \lrcorner$$

75. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 9 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7. \end{cases}$

$\ulcorner$ Знаходимо визначники:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 13, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 9 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 1 \\ 7 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -13,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}2&9&3\\1&-2&1\\3&7&2\end{vmatrix}=26\,,\quad \Delta_3=\begin{vmatrix}2&1&9\\1&-2&-2\\3&2&7\end{vmatrix}=39\,.$$

За формулами Крамера отримуємо

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-13}{13}=-1\,,\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{26}{13}=2\,,\quad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{39}{13}=3\,.\quad \lrcorner$$

<u>Вправи для самостійного розв'язання</u>

Розв'язати системи лінійних рівнянь за формулами Крамера:

76. $\begin{cases}9x_1-5x_2=19\\ x_1-x_2=7.\end{cases}$

77. $\begin{cases}5x_1-4x_2-10x_3=164\\ -x_1+9x_2+7x_3=-96\\ 7x_1+3x_2+9x_3=-32.\end{cases}$

78. $\begin{cases}-7x_1-9x_2+11x_3=66\\ -6x_1+7x_2+3x_3=63\\ 10x_1+x_2-8x_3=-102.\end{cases}$

Відповіді:

76. $x_1=-4$, $x_2=-11$. **77.** $x_1=10$, $x_2=-1$, $x_3=-11$.

78. $x_1=-11$, $x_2=0$, $x_3=-1$.

Розділ 2. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

1. Вектори та дії над ними

Вектором називається напрямлений відрізок, тобто відрізок, для якого вказано початок A і кінець B. Позначення вектора: $\overrightarrow{AB}$ або $\vec{a}$.

Довжиною або *модулем* вектора $\overrightarrow{AB}$ називають довжину відрізка AB. Позначення: $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, $|\vec{a}|$.

Вектор $\vec{a}$ називають *одиничним*, якщо $|\vec{a}| = 1$.

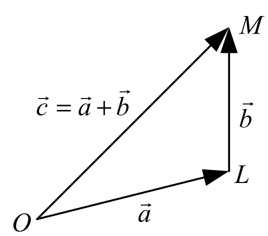
Вектор, у якого початок і кінець співпадають, називається *нульовим* вектором. Позначення: $\vec{0}$.

Вектори, що лежать на одній прямій або на паралельних прямих, називаються *колінеарними*. Нульовий вектор вважається колінеарним довільному вектору.

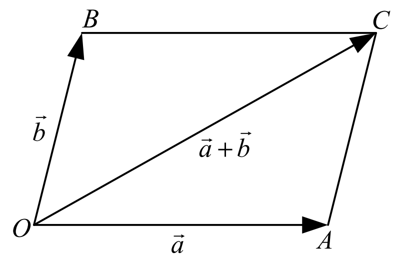
Два ненульових вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ *рівні*, якщо вони мають однаковий напрям і рівні модулі. Звідси випливає, що всі вектори, які отримуємо із заданого вектора шляхом паралельного перенесення, рівні.

1º. *Добутком вектора* $\vec{a}$ *на число* λ називають такий вектор $\vec{b}$, що: 1) $|\vec{b}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$; 2) вектори $\vec{b}$ та $\vec{a}$ мають однаковий напрям, якщо $\lambda > 0$ і протилежний, якщо $\lambda < 0$.

2º. *Сумою векторів* $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називають вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, який напрямлений від початку вектора $\vec{a}$ до кінця вектора $\vec{b}$, за умови, що кінець вектора $\vec{a}$ співпадає з початком вектора $\vec{b}$ (правило трикутника):



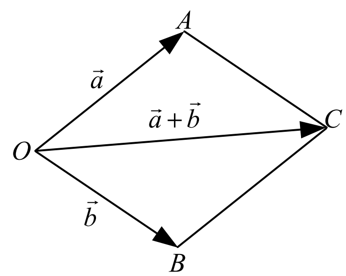
Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ неколінеарні, то суму $\vec{a} + \vec{b}$ можна знайти за правилом паралелограма, яке ілюструється наступним рисунком:



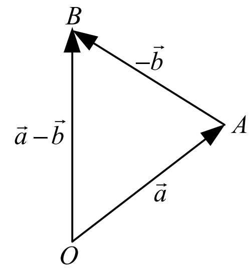
3º. *Різницею* векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називають суму векторів $\vec{a}$ та $(-1)\vec{b}$, тобто $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-1)\vec{b}$. Вектор $-\vec{b}=(-1)\cdot\vec{b}$ називають *протилежним* до вектора $\vec{b}$.

1. За даними векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ побудувати вектори: а) $\vec{a}+\vec{b}$; б) $\vec{a}-\vec{b}$.

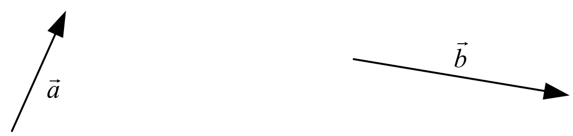
Г а) Зведемо вектори до спільного початку і застосуємо правило паралелограма:



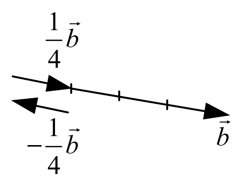
б) Запишемо вектор $\vec{a}-\vec{b}$ як $\vec{a}+(-\vec{b})$ і застосуємо правило трикутника:



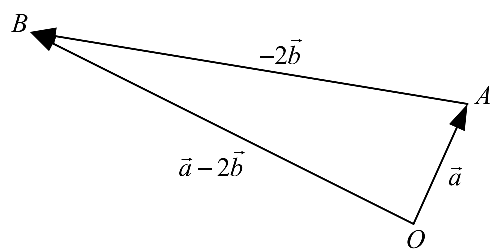
2. За даними векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ побудувати вектори: а) $-\frac{1}{4}\vec{b}$; б) $\vec{a}-2\vec{b}$.



а) Напрям вектора $-\frac{1}{4}\vec{b}$ протилежний напряму вектора $\vec{b}$, а модуль – у 4 рази менший за модуль вектора $\vec{b}$:

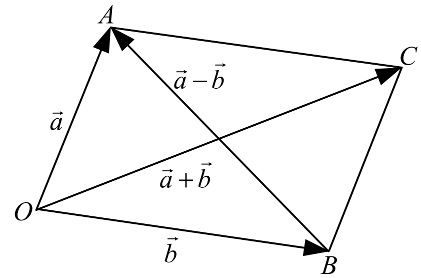


б) Вектор $\vec{a}-2\vec{b}$ запишемо як $\vec{a}+\left(-2\vec{b}\right)$. За правилом трикутника:



3. Дано $\left|\vec{a}\right|=13$, $\left|\vec{b}\right|=19$ і $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=24$. Обчислити $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$.

Зобразимо на рисунку $\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{a}-\vec{b}$:



Вектори $\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{a}-\vec{b}$ є діагоналями паралелограма. Для знаходження довжини діагоналі скористаємося наступною властивістю паралелограма:

$$\left|\overrightarrow{OC}\right|^2+\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=2\left(\left|\overrightarrow{OA}\right|^2+\left|\overrightarrow{OB}\right|^2\right).$$

Звідси

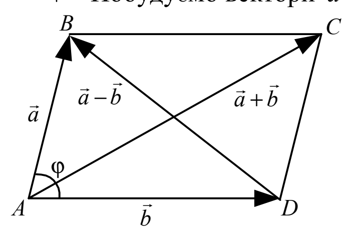
$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2+\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=2\left(\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2\right),$$

$$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=2\left|\vec{a}\right|^2+2\left|\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2;$$

$$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{2\cdot 13^2+2\cdot 19^2-24^2}=\sqrt{484}=22. \quad \lrcorner$$

4. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi=60^\circ$, причому $\left|\vec{a}\right|=7$ і $\left|\vec{b}\right|=10$. Знайти $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$ і $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$.

⌜ Побудуємо вектори $\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{a}-\vec{b}$:



довжини векторів $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$ і $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$ відповідають довжинам векторів $\left|\overrightarrow{AC}\right|$ і $\left|\overrightarrow{BD}\right|$. З трикутника ABD за теоремою косинусів знаходимо

$$\left|\overrightarrow{BD}\right|^2=\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{AD}\right|^2-2\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AD}\right|\cdot\cos\varphi,$$

$$\left|\overrightarrow{BD}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2-2\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\varphi,$$

$$\left|\overrightarrow{BD}\right|^2=7^2+10^2-2\cdot 7\cdot 10\cdot\cos 60^\circ,$$

$$\left|\overrightarrow{BD}\right|^2=79, \quad \left|\overrightarrow{BD}\right|=\sqrt{79}.$$

Звідси $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{79}$.

Розглянемо трикутник ACD: $\left|\overrightarrow{AD}\right|=\left|\vec{b}\right|$, $\left|\overrightarrow{CD}\right|=\left|\vec{a}\right|$, $\angle ADC=180^\circ-60^\circ=120^\circ$. За теоремою косинусів знаходимо

$$\left|\overrightarrow{AC}\right|^2=\left|\overrightarrow{AD}\right|^2+\left|\overrightarrow{CD}\right|^2-2\left|\overrightarrow{AD}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CD}\right|\cdot\cos\angle ADC,$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right|^2=\left|\vec{b}\right|^2+\left|\vec{a}\right|^2-2\left|\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{a}\right|\cdot\cos 120^\circ,$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right|^2=10^2+7^2-2\cdot 10\cdot 7\cos 120^\circ,$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right|^2=219,\quad \left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{219}.$$

Звідси $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{219}$. ⌋

<u>Вправи для самостійного розв’язання</u>

5. За даними векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ побудувати вектор $-\vec{a}-\vec{b}$.

6. За даними векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ побудувати вектор $2\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$.

7. Дано $\left|\vec{a}\right|=11$, $\left|\vec{b}\right|=17$, $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=12$. Обчислити $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$.

8. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні, причому $\left|\vec{a}\right|=12$ і $\left|\vec{b}\right|=5$. Знайти $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$ і $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$.

Відповіді:

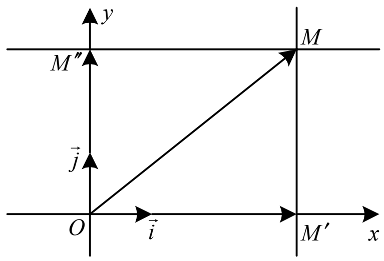
7. 26. **8.** $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=13$.

2. Системи координат. Координати вектора

Розглянемо на площині взаємно перпендикулярні одиничні вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$ (у просторі – $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) з початком у точці O. Вважатимемо їх напрямленими так, що менший поворот вектора $\vec{i}$ до вектора $\vec{j}$ (у просторі – це менший поворот від $\vec{i}$ до $\vec{j}$, якщо дивитися з кінця вектора $\vec{k}$) здійснюється проти руху годинникової стрілки. У цьому випадку кажуть, що в площині визначено *прямокутну декартову систему координат* $\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$ (у просторі –

(O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$)), а вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$ (у просторі – $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) утворюють *ортонормований базис*. Прямі, що проходять через точку O паралельно до векторів $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, називаються *осями координат* і позначаються Ox, Oy, Oz (відповідно *вісь абсцис*, *вісь ординат*, *вісь аплікат*).

Розглянемо довільну точку M на площині. Через неї проведемо дві прямі, які паралельні осям координат. Точки перетину M' і M'' цих прямих відповідно з осями Ox і Oy називають *проекціями* точки M на осі координат. Очевидно, що $\overrightarrow{OM'} = x\vec{i}$, $\overrightarrow{OM''} = y\vec{j}$. Числа x, y називаються *декартовими координатами точки* $M(x;y)$ і має місце рівність $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.



Вектор $\overrightarrow{OM} = \vec{r}(M)$ називають *радіус-вектором* точки M, а точки x, y – *координатами вектора* $\vec{r}(M)$. При цьому пишуть $\vec{r}(M) = (x;y)$.

Аналогічно у просторі:

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad M(x;y;z), \quad \vec{r}(M) = (x;y;z).$$

Довільний вектор $\vec{a}$ можна записати у вигляді

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \quad \text{або} \quad \vec{a} = (a_x;\, a_y;\, a_z).$$

Якщо точка $A(x_1;\, y_1;\, z_1)$ – початок вектора, а точка $B(x_2;\, y_2;\, z_2)$ – його кінець, то координати вектора $\overrightarrow{AB}$ знаходять за формулою

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1;\, y_2 - y_1;\, z_2 - z_1). \tag{1}$$

Довжину вектора $\vec{a} = (a_x;\, a_y;\, a_z)$ визначають через його координати за формулою

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \tag{2}$$

Два вектори $\vec{a} = (a_x;\, a_y;\, a_z)$ і $\vec{b} = (b_x;\, b_y;\, b_z)$ колінеарні тоді і лише тоді, коли їх відповідні координати пропорційні, тобто

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}. \quad (3)$$

Три вектори, що лежать в одній площині або у паралельних площинах, називаються *компланарними*. Вектори $\vec{a} = (a_x;\, a_y;\, a_z)$, $\vec{b} = (b_x;\, b_y;\, b_z)$ і $\vec{c} = (c_x;\, c_y;\, c_z)$ компланарні тоді і лише тоді, коли визначник

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0. \quad (4)$$

Звідси, якщо умова (4) не виконується, то вектори некомпланарні.

При додаванні векторів їх відповідні координати додаються:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x;\, a_y + b_y;\, a_z + b_z). \quad (5.1)$$

При відніманні векторів їх відповідні координати віднімаються:

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x;\, a_y - b_y;\, a_z - b_z). \quad (5.2)$$

При множенні вектора на число всі координати множаться на те ж число:

$$\lambda\vec{a} = (\lambda a_x;\, \lambda a_y;\, \lambda a_z). \quad (6)$$

Напрямними косинусами вектора $\vec{a} = (a_x;\, a_y;\, a_z)$ називають косинуси кутів α, β, γ, які вектор $\vec{a}$ утворює з додатними напрямами осей координат:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}; \quad \cos\beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}};$$

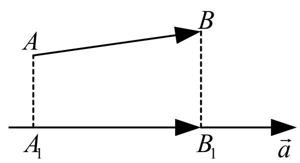
$$\cos\gamma = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}. \quad (7)$$

З формул (7) випливає, що

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \quad (8)$$

Ортом $\vec{a}_0$ *вектора* $\vec{a}$ називають одиничний вектор, координатами якого є напрямні косинуси: $\vec{a}_0 = (\cos\alpha;\, \cos\beta;\, \cos\gamma)$. На практиці для знаходження орта часто використовують формулу

$$\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}. \quad (9)$$



Нехай задано вектори $\vec{a}$ і $\overrightarrow{AB}$ (див. рисунок). *Проекцією вектора* $\overrightarrow{AB}$ *на вектор* $\vec{a}$ (позначення $пр_{\vec{a}}\overrightarrow{AB}$) називають число $\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$, якщо напрями векторів $\vec{a}$ та $\overrightarrow{A_1B_1}$ співпадають, і число $-\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$, якщо їх напрями протилежні.

Проекцію вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\vec{a}$ можна обчислити за формулою

$$пр_{\vec{a}}\overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \cos\varphi, \tag{10}$$

де φ – кут між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\vec{a}$, $\varphi = \left(\widehat{\overrightarrow{AB},\ \vec{a}}\right)$ ($0 \le \varphi \le \pi$).

9. Дано точки $A(1; -3; 4)$ і $B(3; 1; 5)$. Знайти координати вектора $\overrightarrow{AB}$ та його довжину.

$\ulcorner$ За формулою (1) маємо $\overrightarrow{AB} = (3-1; 1-(-3); 5-4) = (2; 4; 1)$.

За формулою (2) $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{21}$. $\lrcorner$

10. Визначити початок вектора $\vec{a} = (4; -1; 2)$, якщо його кінець міститься в точці $B(5; 2; 1)$.

$\ulcorner$ За формулою (1) маємо $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1)$, тобто

$a_x = x_2 - x_1$; $a_y = y_2 - y_1$; $a_z = z_2 - z_1$.

Тоді $4 = 5 - x_1$; $-1 = 2 - y_1$; $2 = 1 - z_1$. Звідси $x_1 = 1$, $y_1 = 3$, $z_1 = -1$.

Отже, $A(1; 3; -1)$. $\lrcorner$

11. Дано дві координати $a_y = 4$, $a_z = 12$ вектора $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$. Знайти третю координату, якщо $|\vec{a}| = 13$.

$\ulcorner$ За формулою (2) маємо

$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$, $13 = \sqrt{a_x^2 + 4^2 + 12^2}$, $169 = a_x^2 + 16 + 144$,

$a_x^2 = 9$, $a_x = \pm 3$.

Отже, $\vec{a} = (3; 4; 12)$ або $\vec{a} = (-3; 4; 12)$. $\lrcorner$

12. Дано два вектори $\vec{a}=(3;\,1;\,4)$ і $\vec{b}=(-2;\,2;\,-1)$. Визначити координати векторів: а) $2\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$; б) $4\vec{a}$; в) $3\vec{a}+2\vec{b}$.

⌈ а) Використовуючи формули (5.2), (6), маємо

$$2\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}=2(3;\,1;\,4)-\frac{1}{2}(-2;\,2;\,-1)=(6;\,2;\,8)-\left(-1;\,1;\,-\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\left(7;\,1;\,\frac{17}{2}\right).$$

б) Використовуючи формулу (6), маємо

$$4\vec{a}=4(3;\,1;\,4)=(12;\,4;\,16).$$

в) Використовуючи формули (5.1), (6), маємо

$$3\vec{a}+2\vec{b}=3(3;\,1;\,4)+2(-2;\,2;\,-1)=(9;\,3;\,12)+(-4;\,4;\,-2)=$$

$$=(5;\,7;\,10).$$ ⌋

13. Знайти довжину вектора $2\vec{a}-\vec{b}$, якщо $\vec{a}=(3;\,-2;\,1)$, $\vec{b}=(2;\,1;\,-3)$.

⌈ Знайдемо координати вектора за формулами (6), (5.2):

$$2\vec{a}-\vec{b}=2(3;\,-2;\,1)-(2;\,1;\,-3)=(6;\,-4;\,2)-(2;\,1;\,-3)=$$

$$=(4;\,-5;\,5).$$

За формулою (2) знайдемо довжину вектора:

$$\left|2\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{4^2+(-5)^2+5^2}=\sqrt{66}.$$ ⌋

14. Перевірити колінеарність векторів $\vec{a}=(3;\,2;\,-4)$ і $\vec{b}=(-6;\,-4;\,8)$.

⌈ За формулою (3) маємо

$$\frac{3}{-6}=\frac{2}{-4}=\frac{-4}{8},\quad -\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}\ \Leftrightarrow\ \vec{a}\parallel\vec{b}.$$

Отже, вектори колінеарні. ⌋

15. При яких значеннях α і β вектори $\vec{a}=(\alpha;\,3;\,1)$ і $\vec{b}=(2;\,4;\,\beta)$ колінеарні.

⌈ За формулою (3) маємо

$$\vec{a}\parallel\vec{b}\ \Leftrightarrow\ \frac{\alpha}{2}=\frac{3}{4}=\frac{1}{\beta}, \text{ звідки } \frac{\alpha}{2}=\frac{3}{4} \text{ і } \frac{3}{4}=\frac{1}{\beta}.$$

Отже, $\alpha = \frac{3}{2}$, $\beta = \frac{4}{3}$. ⌋

16. Довести, що чотири точки $A(-1; 5; -10)$, $B(5; -7; 8)$, $C(2; 2; -7)$ і $D(5; -4; 2)$ є вершинами трапеції.

⌈ У трапеції основи паралельні. Визначимо, які з двох пар протилежних сторін чотирикутника $ABCD$ будуть паралельні.

$$\overrightarrow{AB} = (5-(-1);\ -7-5;\ 8-(-10)) = (6; -12; 18),$$

$$\overrightarrow{BC} = (2-5;\ 2-(-7);\ -7-8) = (-3; 9; -15),$$

$$\overrightarrow{CD} = (5-2;\ -4-2;\ 2-(-7)) = (3; -6; 9),$$

$$\overrightarrow{DA} = (-1-5;\ 5-(-4);\ -10-2) = (-6; 9; -12).$$

Звідси маємо, що $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$. Отже, $ABCD$ – трапеція. ⌋

17. Перевірити, що вектори $\vec{a} = (2; 1; 0)$, $\vec{b} = (1; -1; 2)$ та $\vec{c} = (2; 2; -1)$ некомпланарні.

⌈ Обчислимо визначник, складений з координат векторів:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2\cdot(1-4) - 1\cdot(-1-4) + 0 = -1.$$

Оскільки умова (4) не виконується, то дані вектори некомпланарні. ⌋

18. Знайти напрямні косинуси вектора $\vec{a} = (3; 4; -12)$.

⌈ За формулами (7) маємо

$$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 4^2 + (-12)^2}} = \frac{3}{\sqrt{169}} = \frac{3}{13};$$

$$\cos\beta = \frac{4}{\sqrt{3^2 + 4^2 + (-12)^2}} = \frac{4}{13};$$

$$\cos\gamma = \frac{-12}{\sqrt{3^2 + 4^2 + (-12)^2}} = -\frac{12}{13}.$$ ⌋

19. Знайти орт вектора $\vec{a} = (15; 0; 8)$.

⌈ За формулою (9) знаходимо

$$\vec{a}_0=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\left(\frac{15}{\sqrt{15^2+0^2+8^2}};\ \frac{0}{\sqrt{15^2+0^2+8^2}};\ \frac{8}{\sqrt{15^2+0^2+8^2}}\right)=$$

$$=\left(\frac{15}{17};\ 0;\ \frac{8}{17}\right).\ \lrcorner$$

20. Знайти $\text{пр}_{\vec{a}}\overrightarrow{AB}$, якщо $\left|\overrightarrow{AB}\right|=4$ і $\varphi=\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\ \vec{a}}\right)=120^\circ$.

$\ulcorner$ За формулою (10) маємо

$$\text{пр}_{\vec{a}}\overrightarrow{AB}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\cos\varphi=4\cdot\cos120^\circ=4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-2.\ \lrcorner$$

<u>Вправи для самостійного розв'язання</u>

21. Дано точки $M(2;\ 4;\ -1)$ і $K(3;\ 1;\ 2)$. Знайти координати векторів $\overrightarrow{MK}$ і $\overrightarrow{KM}$.

22. Обчислити довжину вектора $\vec{a}=(3;\ -12;\ 4)$.

23. Знайти модуль вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо $A(3;\ -1;\ 2)$, $B(4;\ 6;\ 2)$.

24. Визначити кінець вектора $\vec{a}=(4;\ -2;\ 1)$, якщо його початок міститься в точці $A(2;\ -1;\ 3)$.

25. Знайти напрямні косинуси вектора $\left(\frac{3}{5};\ 0;\ \frac{4}{5}\right)$.

26. Дано дві координати $a_x=3$, $a_y=-6$ вектора $\vec{a}=(a_x;a_y;\ a_z)$. Знайти третю координату, якщо $|\vec{a}|=\sqrt{94}$.

27. Дано два вектори $\vec{a}=(-2;\ 1;\ -3)$ і $\vec{b}=(3;\ 2;\ -1)$. Визначити координати векторів: 1) $-2\vec{a}+\vec{b}$; 2) $3\vec{a}+2\vec{b}$; 3) $\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$; 4) $2\vec{b}$.

28. Перевірити, що вектори $\vec{a}=(-1;\ 3;\ 2)$, $\vec{b}=(4;\ 1;\ -2)$ та $\vec{c}=(2;\ 1;\ -1)$ некомпланарні.

29. Знайти орт вектора $\vec{a}=(-3;\ 4;\ -12)$.

30. При яких значеннях α і β вектори $\vec{a}=(2;\ 4;\ \beta)$ і $\vec{b}=(\alpha;\ 2;\ 1)$ колінеарні?

31. Знайти модулі суми і різниці векторів $\vec{a}=(-2;1;3)$ і $\vec{b}=(1;-2;4)$.

32. Знайти $\text{пр}_{\vec{a}}\overrightarrow{AB}$, якщо $\left|\overrightarrow{AB}\right|=6$, $\varphi=\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\vec{a}}\right)=60^\circ$.

Відповіді:

21. $\overrightarrow{MK}=(1;-3;3)$, $\overrightarrow{KM}=(-1;3;-3)$. **22.** $|\vec{a}|=13$.

23. $\left|\overrightarrow{AB}\right|=5\sqrt{2}$. **24.** $B(6;-3;4)$.

25. $\cos\alpha=\frac{3}{5}$; $\cos\beta=0$; $\cos\gamma=\frac{4}{5}$. **26.** $a_z=\pm 7$.

27. 1) $(7;0;5)$; 2) $(0;7;-11)$; 3) $\left(-\frac{13}{6};-\frac{2}{3};-\frac{1}{2}\right)$; 4) $(6;4;-2)$.

29. $\vec{a}_0=\left(\frac{-3}{13};\frac{4}{13};\frac{-12}{13}\right)$. **30.** $\alpha=1$; $\beta=2$.

31. $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{51}$; $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{19}$. **32.** 3.

3. Лінійна залежність векторів. Розклад вектора за довільним базисом

Система векторів $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$ називається *лінійно залежною*, якщо знайдуться числа $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$, хоча б одне з яких відмінне від нуля, що $\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\cdots+\lambda_n\vec{a}_n=0$. В іншому випадку, система називається *лінійно незалежною*.

Геометричні критерії лінійної залежності:

1º. система $\{\vec{a}_1;\vec{a}_2\}$ лінійно залежна тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{a}_1,\vec{a}_2$ колінеарні;

2º. система $\{\vec{a}_1;\vec{a}_2;\vec{a}_3\}$ лінійно залежна тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ компланарні;

3º. будь-яка система з $n\ge 4$ векторів лінійно залежна.

Впорядкована трійка некомпланарних векторів $\vec{e}_1;\vec{e}_2;\vec{e}_3$ називається *базисом* у множині всіх геометричних векторів.

Будь-який вектор $\vec{a}$ можна єдиним чином подати у вигляді

$$\vec{a}=X_1\vec{e}_1+X_2\vec{e}_2+X_3\vec{e}_3,$$

де числа X_1, X_2, X_3 називаються *координатами вектора* $\vec{a}$ *в базисі* $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3\}$.

Аналогічно, впорядкована пара неколінеарних векторів $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ називається базисом $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2\}$ у множині геометричних векторів, компланарних деякій площині.

33. На площині дано неколінеарні вектори $\vec{p} = (2; -3)$ і $\vec{q} = (1; 2)$. Знайти розклад вектора $\vec{a} = (9; 4)$ за базисом $\{\vec{p}, \vec{q}\}$.

⌈ Потрібно знайти такі числа X_1 та X_2, що $\vec{a} = X_1\vec{p} + X_2\vec{q}$. Дана рівність рівносильна наступній:

$$(9; 4) = X_1(2; -3) + X_2(1; 2) = (2X_1 + X_2; -3X_1 + 2X_2).$$

Прирівнюючи відповідні координати векторів, дістаємо

$$\begin{cases} 2X_1 + X_2 = 9 \\ -3X_1 + 2X_2 = 4. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему методом Гаусса. Для цього додамо до другого рівняння перше, помножене на $\frac{3}{2}$. Дістанемо

$$\begin{cases} 2X_1 + X_2 = 9 \\ \frac{7}{2}X_2 = \frac{35}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = 2 \\ X_2 = 5. \end{cases}.$$

Отже, $\vec{a} = 2\vec{p} + 5\vec{q}$. ⌋

34. Дано чотири вектори $\vec{a} = (2; 1; 0)$, $\vec{b} = (1; -1; 2)$, $\vec{c} = (2; 2; -1)$ і $\vec{d} = (3; 7; -7)$. Знайти розклад вектора $\vec{d}$ за базисом $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$.

⌈ Зауважимо, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють базис згідно з прикладом 17. Потрібно знайти такі числа X_1, X_2, X_3, що

$$\vec{d} = X_1\vec{a} + X_2\vec{b} + X_3\vec{c}.$$

Дана рівність рівносильна наступній:

$$(3; 7; -7) = X_1(2; 1; 0) + X_2(1; -1; 2) + X_3(2; 2; -1) =$$
$$= (2X_1 + X_2 + 2X_3;\ X_1 - X_2 + 2X_3;\ 2X_2 - X_3).$$

Звідси отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 2X_1 + X_2 + 2X_3 = 3 \\ X_1 - X_2 + 2X_3 = 7 \\ \quad 2X_2 - X_3 = -7. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему методом Гаусса:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & -1 & -7 \end{array}\right) (-2) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & -2 & -11 \\ 1 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & -1 & -7 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & -2 & -11 \\ 0 & 2 & -1 & -7 \end{array}\right) \left(-\frac{2}{3}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & -2 & -11 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right).$$

Запишемо систему рівнянь, яка відповідає знайденій розширеній матриці:

$$\begin{cases} X_1 - X_2 + 2X_3 = 7 \\ 3X_2 - 2X_3 = -11 \\ \quad \frac{1}{3}X_3 = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Розв'язок даної системи: $X_1 = 2$, $X_2 = -3$, $X_3 = 1$.

Отже, $\vec{d} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$. ⌋

35. Розкласти вектор $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ за трьома некомпланарними векторами $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}$, $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$, $\vec{r} = 2\vec{b} + 3\vec{c}$.

⌈ Шукатимемо числа X_1, X_2, X_3 такі, що $\vec{s} = X_1\vec{p} + X_2\vec{q} + X_3\vec{r}$. Звідси маємо

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = X_1\left(\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}\right) + X_2\left(\vec{a} - \vec{b}\right) + X_3\left(2\vec{b} + 3\vec{c}\right) =$$

$$= \left(X_1 + X_2\right)\vec{a} + \left(X_1 - X_2 + 2X_3\right)\vec{b} + \left(-2X_1 + 3X_3\right)\vec{c}.$$

Далі одержуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} X_1 + X_2 = 1 \\ X_1 - X_2 + 2X_3 = 1 \\ -2X_1 + 3X_3 = 1. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему методом Гаусса:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&1\\1&-1&2&1\\-2&0&3&1\end{array}\right)\begin{matrix}(-1)&2\\ \\ \\ \end{matrix}\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&1\\0&-2&2&0\\0&2&3&3\end{array}\right):(-2)\longrightarrow$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&1\\0&1&-1&0\\0&2&3&3\end{array}\right)(-2)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&1\\0&1&-1&0\\0&0&5&3\end{array}\right).$$

Звідси маємо

$$\begin{cases}X_1+X_2=1\\X_2-X_3=0\\5X_3=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}X_1=\dfrac{2}{5}\\X_2=\dfrac{3}{5}\\X_3=\dfrac{3}{5}.\end{cases}$$

Отже, $\vec{s}=\frac{2}{5}\vec{p}+\frac{3}{5}\vec{q}+\frac{3}{5}\vec{r}$. ┘

Вправи для самостійного розв’язання

36. Дано три вектори $\vec{a}=(3;\,-1)$, $\vec{b}=(1;-2)$, $\vec{c}=(-1;\,7)$. Знайти розклад вектора $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ за базисом $\{\vec{a},\,\vec{b}\}$.

37. Дано чотири вектори $\vec{a}=(-1;\,3;\,2)$, $\vec{b}=(4;\,1;\,-2)$, $\vec{c}=(2;\,1;\,-1)$ і $\vec{d}=(3;\,0;\,1)$. Знайти розклад вектора $\vec{d}$ за базисом $\{\vec{a},\,\vec{b},\,\vec{c}\}$.

38. Встановити вигляд лінійної залежності між даними чотирма векторами $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{q}=\vec{b}-\vec{c}$, $\vec{r}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{s}=\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$.

Відповіді:

36. $\vec{p}=2\vec{a}-3\vec{b}$.

37. $\vec{d}=\frac{5}{3}\vec{a}+\frac{22}{3}\vec{b}-\frac{37}{3}\vec{c}$.

38. $3\vec{p}-4\vec{q}-3\vec{r}-2\vec{s}=0$.

4. Скалярний добуток векторів

Скалярним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число $\vec{a}\cdot\vec{b}$, що обчислюється за формулою

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi, \tag{11}$$

де кут φ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, $\varphi=\left(\widehat{\vec{a},\ \vec{b}}\right)$ ($0\le\varphi\le\pi$).

Якщо $\vec{a}=\left(a_x;\,a_y;\,a_z\right)$, $\vec{b}=\left(b_x,\,b_y,\,b_z\right)$, то

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z. \tag{12}$$

Властивості скалярного добутку:

1) якщо хоча б один з векторів $\vec{a}$ чи $\vec{b}$ нульовий, то $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$;

2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$;

3) $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$;

4) $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$;

5) якщо $\vec{a}\cdot\vec{b}>0$, то кут φ – гострий, а якщо $\vec{a}\cdot\vec{b}<0$, то кут φ – тупий;

6) $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ тоді і тільки тоді, коли $\varphi=90^\circ$ ($\vec{a}\ne 0,\ \vec{b}\ne 0$);

7) справедлива формула $\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$;

8) справедлива формула $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}=\left|\vec{b}\right|\cdot\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}$.

39. Знайти $\vec{a}\cdot\vec{b}$, якщо $|\vec{a}|=2$, $\left|\vec{b}\right|=3$, $\varphi=\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\dfrac{\pi}{3}$.

⌈ За формулою (11) маємо

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\varphi=2\cdot3\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}=2\cdot3\cdot\dfrac{1}{2}=3.$ ⌋

40. Знайти $\vec{a}\cdot\vec{b}$, якщо $\vec{a}=(1;\,-2;\,3)$, $\vec{b}=(3;\,2;\,1)$.

⌈ За формулою (12) маємо

$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z=1\cdot3+(-2)\cdot2+3\cdot1=2.$ ⌋

41. Показати, що вектори $\vec{a}=(1;\,-3;\,0)$ і $\vec{b}=(6;\,2;\,1)$ взаємно перпендикулярні.

Γ Оскільки $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot 6+(-3)\cdot 2+0\cdot 1=0$, то за властивістю 6 кут $\varphi=90^\circ$, тобто вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні. $\lrcorner$

42. Визначити, гострий чи тупий кут між векторами $\vec{a}=(-1;\ 2;\ -2)$, $\vec{b}=(3;\ 2;\ 1)$.

Γ Оскільки $\vec{a}\cdot\vec{b}=(-1)\cdot 3+2\cdot 2+(-2)\cdot 1=-1<0$, то за властивістю 5 кут φ між векторами тупий. $\lrcorner$

43. Знайти $\vec{a}\cdot\vec{b}$, якщо $|\vec{a}|=3$, $\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}=4$.

Γ За властивістю 8 маємо $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}=3\cdot 4=12$. $\lrcorner$

44. Визначити, при якому значенні α вектори $\vec{a}=(\alpha;\ 3;\ 2)$ і $\vec{b}=(1;\ -2;-\alpha)$ взаємно перпендикулярні.

Γ Знаходимо $\vec{a}\cdot\vec{b}=\alpha\cdot 1+3\cdot(-2)+2\cdot(-\alpha)=-\alpha-6$. Оскільки $\vec{a}\perp\vec{b}$, то $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, а звідси $-\alpha-6=0$ або $\alpha=-6$. $\lrcorner$

45. Знайти косинус кута φ між векторами $\vec{a}=(2;\ -2;\ 1)$ і $\vec{b}=(4;\ 0;\ -3)$.

Γ З формули (11) маємо

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}=$$

$$=\frac{2\cdot 4+(-2)\cdot 0+1\cdot(-3)}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}\cdot\sqrt{4^2+0^2+(-3)^2}}=\frac{5}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{25}}=\frac{1}{3}.\ \lrcorner$$

46. Трикутник заданий вершинами $A(0;\ -1;\ 2)$, $B(-1;\ -2;\ 7)$, $C(1;\ -2;\ 6)$. Знайти його внутрішній кут при вершині A.

Γ Знаходимо: $\overrightarrow{AB}=(-1;\ -1;\ 5)$, $\overrightarrow{AC}=(1;\ -1;\ 4)$. Тоді

$$\cos\angle A=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\frac{(-1)\cdot 1+(-1)\cdot(-1)+5\cdot 4}{\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+5^2}\cdot\sqrt{1^2+(-1)^2+4^2}}=$$

$$=\frac{20}{9\sqrt{6}}\approx 0{,}91,\ \text{звідки}\ \ \angle A\approx 25^\circ.\ \lrcorner$$

47. Знайти довжину вектора $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 4$, $\varphi = \left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) = \frac{\pi}{3}$.

⌈ Використовуючи властивості 4, 7, маємо

$$|\vec{c}| = \sqrt{\vec{c}^{\,2}} = \sqrt{\left(2\vec{a} - 3\vec{b}\right)^2} = \sqrt{4\vec{a}^2 - 12\vec{a}\cdot\vec{b} + 9\vec{b}^2} =$$

$$= \sqrt{4|\vec{a}|^2 - 12\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi + 9|\vec{b}|^2} =$$

$$= \sqrt{4\cdot 1^2 - 12\cdot 1\cdot 4\cdot\frac{1}{2} + 9\cdot 4^2} = \sqrt{124} = 2\sqrt{31}. \quad ⌋$$

48. Обчислити роботу, яку виконує сила $\vec{F} = (3; -2; -5)$, що прямолінійно переміщує матеріальну точку з положення $M(2; -3; 5)$ у положення $N(3; -2; -1)$.

⌈ Шукана робота A знаходиться за формулою $A = \vec{F}\cdot\vec{S}$, де $\vec{S} = \overrightarrow{MN}$ – вектор переміщення.

Далі знаходимо $\vec{S} = \overrightarrow{MN} = (1; 1; -6)$.

Тоді шукана робота $A = \vec{F}\cdot\vec{S} = 3\cdot 1 + (-2)\cdot 1 + (-5)\cdot(-6) = 31$. ⌋

49. Знайти скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, якщо $A(1; -2; 3)$, $B(4; 1; 5)$, $C(3; 1; 2)$.

⌈ Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} = (4-1;\ 1-(-2);\ 5-3) = (3; 3; 2);$$

$$\overrightarrow{AC} = (3-1;\ 1-(-2);\ 2-3) = (2; 3; -1).$$

Звідси маємо

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 3\cdot 2 + 3\cdot 3 + 2\cdot(-1) = 13. \quad ⌋$$

50. Обчислити роботу при прямолінійному переміщенні матеріальної точки з положення $M(2; 2; 4)$ у положення $N(6; 2; 1)$, яку виконує сила величиною $|\vec{F}| = 3$, що діє під кутом 30° до напряму переміщення.

⌈ Шукана робота A знаходиться за формулою $A = \vec{F} \cdot \vec{S} = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|\vec{S}\right| \cos\varphi$, де $\vec{S} = \overrightarrow{MN}$ – вектор переміщення, φ – кут між напрямом сили та переміщенням.

Далі знаходимо $\vec{S} = \overrightarrow{MN} = (6-2;\ 2-2;\ 1-4) = (4;\ 0;\ -3)$,

$\left|\vec{S}\right| = \sqrt{4^2 + 0^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$.

Тоді шукана робота

$$A = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|\vec{S}\right| \cdot \cos\varphi = 3 \cdot 5 \cdot \cos 30^\circ = 15 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{2}. \quad \rfloor$$

51. Знайти проекцію вектора $3\vec{a} + 2\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$, якщо $\left|\vec{a}\right| = 3$, $\left|\vec{b}\right| = 2$, $\varphi = \left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) = 60^\circ$.

⌈ З властивості 8 маємо, що $\text{пр}_{\vec{a}}\left(3\vec{a} + 2\vec{b}\right) = \dfrac{\vec{a} \cdot \left(3\vec{a} + 2\vec{b}\right)}{\left|\vec{a}\right|}$. Далі знаходимо

$$\text{пр}_{\vec{a}}\left(3\vec{a} + 2\vec{b}\right) = \frac{3\vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|} = \frac{3\left|\vec{a}\right|^2 + 2\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\varphi}{\left|\vec{a}\right|} =$$

$$= \frac{3 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 2\cos 60^\circ}{3} = \frac{27 + 12 \cdot \frac{1}{2}}{3} = 11. \quad \rfloor$$

<u>Вправи для самостійного розв'язання</u>

52. Знайти $\vec{a} \cdot \vec{b}$, якщо $\left|\vec{a}\right| = 3$, $\left|\vec{b}\right| = 4$, $\varphi = \left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

53. Знайти $\vec{a} \cdot \vec{b}$, якщо $\vec{a} = (1;\ 4;\ 1)$, $\vec{b} = (-2;\ 1;\ 5)$.

54. Перевірити, чи є задані вектори взаємно перпендикулярними

а) $\vec{a} = (2;\ -2;\ 3)$, $\vec{b} = (1;\ 0;\ -1)$; б) $\vec{a} = (3;\ -1;\ 2)$, $\vec{b} = (0;\ 2;\ 1)$.

55. Визначити, гострий чи тупий кут між векторами:

а) $\vec{a} = (3; -1;\ 2)$, $\vec{b} = (-1;\ 1;\ 1)$; б) $\vec{a} = (1;\ 2;\ -5)$, $\vec{b} = (-2;\ 1;\ -1)$.

56. Визначити, при якому значенні α вектори $\vec{a} = (1;\ \alpha;\ 3)$ і $\vec{b} = (-2;\ 1;\ \alpha)$ взаємно перпендикулярні.

57. Знайти $\vec{a} \cdot \vec{b}$, якщо $\left|\vec{b}\right| = 4$, $\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a} = 5$.

58. Обчислити косинус кута, утвореного векторами $\vec{a} = (-2;\ 4;\ -4)$ і $\vec{b} = (3;\ -2;\ -6)$.

59. Дано вершини трикутника $A(1;\ 2;\ -4)$, $B(4;\ 2;\ 0)$, $C(-3;\ 2;\ -1)$. Знайти його внутрішній кут при вершині B.

60. Знайти $\vec{m} \cdot \vec{n}$, де $\vec{m} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$, $\vec{n} = 4\vec{a} + 5\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $\varphi = \left(\widehat{\vec{a},\ \vec{b}}\right) = \dfrac{\pi}{3}$.

61. Обчислити роботу, яку виконує сила $\vec{F} = (2;\ -1;\ 4)$, що прямолінійно переміщує матеріальну точку з положення $M(-1;\ 0;\ 3)$ у положення $N(2;\ -3;\ 5)$.

62. Знайти скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$, якщо $A(3;\ 2;\ 1)$, $B(2;\ 3;\ 2)$, $C(0;\ 4;\ 2)$.

63. Обчислити роботу при прямолінійному переміщенні матеріальної точки з положення $M(3;\ 6;\ 4)$ у положення $N(3;\ 2;\ 7)$ під дією сили величиною $|\vec{F}| = 7$, яка діє під кутом 45° до напряму переміщення.

64. Знайти проекцію вектора $2\vec{a} - \vec{b}$ на вектор $\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$, $\varphi = \left(\widehat{\vec{a},\ \vec{b}}\right) = \dfrac{\pi}{3}$.

Відповіді:

52. $6\sqrt{2}$; **53.** 7. **54.** а) ні; б) так.
55. а) тупий; б) гострий. **56.** $\alpha = 0,5$. **57.** 20.
58. $\dfrac{5}{21}$. **59.** 45°. **60.** -54.
61. 17. **62.** 8. **63.** $\dfrac{35\sqrt{2}}{2}$.
64. -3.

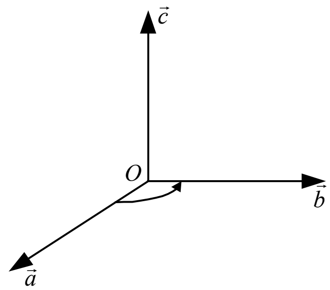
5. Векторний добуток векторів

Векторним добутком вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, що визначається такими трьома умовами:

а) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$, де $\varphi = \left(\widehat{\vec{a},\ \vec{b}}\right)$;

б) вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до кожного з векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

в) вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють праву трійку:



упорядкована трійка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ некомпланарних векторів називається *правою*, якщо з кінця вектора $\vec{c}$ менший поворот вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$ видно проти руху годинникової стрілки (див. рисунок); у противному разі трійка векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ називається *лівою*.

Векторний добуток позначають $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$.

Якщо $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ і $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, то

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}. \qquad (13)$$

Властивості векторного добутку:

1) $\vec{a} \times \vec{b} = -\left(\vec{b} \times \vec{a}\right)$;

2) $\lambda\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \lambda\vec{b} = \lambda\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$;

3) $\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$;

4) $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ тоді і тільки тоді, коли $\vec{a} \parallel \vec{b}$;

5) $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$ чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, віднесених до спільного початку.

65. Знайти $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$, якщо $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $\varphi = \left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) = \dfrac{\pi}{6}$.

Γ За означенням $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = |\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\varphi = 2\cdot 3\cdot\dfrac{1}{2} = 3$. $\lrcorner$

66. Знайти $\vec{a}\times\vec{b}$, якщо $\vec{a} = (1;\,-1;\,2)$, $\vec{b} = (3;\,2;\,1)$.

Γ За формулою (13) маємо

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5\vec{i} + 5\vec{j} + 5\vec{k}\ . \quad \lrcorner$$

67. Знайти $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$, якщо $|\vec{a}| = 4$, $\left|\vec{b}\right| = 5$ і $\vec{a}\cdot\vec{b} = 12$.

Γ За формулою (11) маємо

$\cos\varphi = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|} = \dfrac{12}{4\cdot 5} = \dfrac{3}{5}$, де $\varphi = \left(\widehat{\vec{a},\ \vec{b}}\right)$.

Далі, $\sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi} = \sqrt{1-\dfrac{9}{25}} = \dfrac{4}{5}$.

Тоді $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = |\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\varphi = 4\cdot 5\cdot\dfrac{4}{5} = 16$. $\lrcorner$

68. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = (3;\,-1;\,-2)$ і $\vec{b} = (1;\,2;\,-1)$.

Γ За властивістю 5 шукана площа S паралелограма рівна $S = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$. Далі знаходимо

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5\vec{i} + \vec{j} + 7\vec{k}\ .$$

Тоді шукана площа

$S = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \sqrt{5^2+1^2+7^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$ (кв. од). $\lrcorner$

69. Знайти площу трикутника, заданого вершинами $A(1;\,2;\,0)$, $B(0;\,-2;\,1)$, $C(-1;\,0;2)$. Обчислити довжину висоти CD.

⌐ Площа ΔABC рівна половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$.

Знаходимо $\overrightarrow{AB}=(-1;\,-4;\,1)$, $\overrightarrow{AC}=(-2;\,-2;\,2)$ і

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & -4 & 1\\ -2 & -2 & 2\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}-4 & 1\\ -2 & 2\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -2 & 2\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}-1 & -4\\ -2 & -2\end{vmatrix}=-6\vec{i}-6\vec{k}\ .$$

Тоді $S_\Delta=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{(-6)^2+0^2+(-6)^2}=3\sqrt{2}$ (кв. од.)

З іншого боку, $S_\Delta=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CD}\right|$. Звідси

$$CD=\left|\overrightarrow{CD}\right|=\frac{2S_\Delta}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\frac{2\cdot 3\sqrt{2}}{\sqrt{(-1)^2+(-4)^2+1^2}}=\frac{6\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}=2\ . \quad ⌋$$

70. Знайти $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$, якщо $\vec{a}=(1;\,-1;\,2)$, $\vec{b}=(3;\,2;\,1)$, $\vec{c}=(-1;\,1;\,3)$.

⌐ У задачі 66 знайдено, що $\vec{a}\times\vec{b}=(-5;\,5;\,5)$.

Тоді

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -5 & 5 & 5\\ -1 & 1 & 3\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}5 & 5\\ 1 & 3\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}-5 & 5\\ -1 & 3\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}-5 & 5\\ -1 & 1\end{vmatrix}=10\vec{i}+10\vec{j}\ . \quad ⌋$$

71. Знайти момент сили $\vec{F}=(2;\,-4;\,5)$, прикладеної до точки $A(4;\,-2;\,3)$, відносно точки $B(3;\,2;\,-1)$.

⌐ Шуканий момент сили $\vec{M}$ знаходиться за формулою $\vec{M}=\overrightarrow{BA}\times\vec{F}$.

Оскільки $\overrightarrow{BA}=(1;-4;\,4)$, то

$$\vec{M}=\overrightarrow{BA}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -4 & 4\\ 2 & -4 & 5\end{vmatrix}=-4\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}\ . \quad ⌋$$

72. Відомо, що $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=3$, $\varphi=\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\frac{\pi}{3}$. Знайти $\left(\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)\times\vec{b}\right)^2$.

Γ $\left(\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)\times\vec{b}\right)^2=\left(2\vec{a}\times\vec{b}-\vec{b}\times\vec{b}\right)^2=\left(2\vec{a}\times\vec{b}-0\right)^2=\left(2\vec{a}\times\vec{b}\right)^2=$

$$=4\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^2=4\left(|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi\right)^2=4\left(1\cdot3\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right)^2=4\cdot\frac{27}{4}=27. \quad \lrcorner$$

<u>Вправи для самостійного розв’язання</u>

73. Знайти $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$, якщо $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=5$, $\varphi=\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\frac{\pi}{4}$.

74. Знайти $\vec{a}\times\vec{b}$, якщо $\vec{a}=(5;-1;2)$, $\vec{b}=(1;2;-4)$.

75. Знайти $\vec{a}\times\vec{b}$, якщо $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=26$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=30$.

76. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}=(2;-2;-3)$ і $\vec{b}=(4;0;6)$.

77. Дано вершини трикутника $A(1;-1;2)$, $B(5;-6;2)$ і $C(1;3;-1)$. Обчислити довжину висоти BD.

78. Знайти момент сили $\overrightarrow{F}=(1;-2;4)$, прикладеної до точки $A(1;2;3)$, відносно точки $B(3;2;-1)$.

79. Дано вектори $\vec{a}=(2;-3;1)$, $\vec{b}=(-3;1;2)$ і $\vec{c}=(1;2;3)$. Обчислити:

а) $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}$; б) $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$.

80. Знайти $\left(\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\right)^2$ за умови, що $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=1$, $\varphi=\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\frac{2\pi}{3}$.

Відповіді:

73. $10\sqrt{2}$. **74.** $(0;22;11)$. **75.** 72.

76. 28. **77.** 5. **78.** $(-8;-12;-4)$.

79. а) $(-7;14,-7)$; б) $(10;13;19)$. **80.** 27.

6. Мішаний добуток векторів

Мішаним (векторно-скалярним) добутком трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ називається число $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$ (спочатку знаходиться векторний добуток векторів $\vec{a}\times\vec{b}$, а потім одержаний вектор скалярно множиться на вектор $\vec{c}$).

Позначення: $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$.

Якщо $\vec{a}=\left(a_x, a_y, a_z\right)$, $\vec{b}=\left(b_x, b_y, b_z\right)$ і $\vec{c}=\left(c_x, c_y, c_z\right)$, то

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \qquad (14)$$

Властивості мішаного добутку:

1) якщо у мішаному добутку поміняти місцями які-небудь два множники, то мішаний добуток змінить знак, наприклад, $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=-\vec{c}\,\vec{b}\,\vec{a}$;

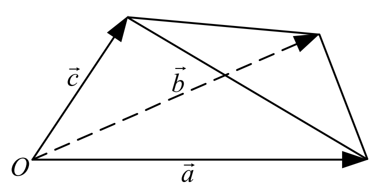
2) при циклічній перестановці множників мішаний добуток не змінюється: $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a}=\vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b}$;

3) у мішаному добутку знаки векторного і скалярного добутку можна міняти місцями:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right);$$

4) якщо $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}>0$, то вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють праву трійку; а якщо $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}<0$ – то ліву трійку векторів;

5) вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарні тоді і тільки тоді, коли $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=0$;



6) об'єм тетраедра, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, які віднесені до спільного початку (див. рисунок), рівний $\dfrac{1}{6}\left|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right|$.

81. Обчислити $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ двома способами, якщо $\vec{a}=\left(3;\,6;\,3\right)$, $\vec{b}=\left(1;\,3;\,-2\right)$, $\vec{c}=\left(2;\,2;\,2\right)$.

⌈ а) За формулою (13) знаходимо спочатку векторний добуток:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 6 & 3\\ 1 & 3 & -2\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}6 & 3\\ 3 & -2\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}3 & 3\\ 1 & -2\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}3 & 6\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-21\vec{i}+9\vec{j}+3\vec{k}\ .$$

Далі маємо

$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=(-21)\cdot 2+9\cdot 2+3\cdot 2=-18$.

б) За формулою (14) знаходимо

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & 6 & 3\\ 1 & 3 & -2\\ 2 & 2 & 2\end{vmatrix}=3(6+4)-6(2+4)+3(2-6)=-18\ .\ \lrcorner$$

82. Яку трійку, праву чи ліву, утворюють вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, якщо $\vec{a}=(1;\ 2;\ 3)$, $\vec{b}=(-1;\ 0;\ 2)$, $\vec{c}=(1;\ -2;\ 5)$?

$\ulcorner$ Оскільки за формулою (14)

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 2\\ 1 & 2 & 5\end{vmatrix}=24>0\ ,$$

то згідно з властивістю 4 дані вектори утворюють праву трійку. $\lrcorner$

83. Довести, що точки $A(0;\ 1;\ 2)$, $B(-2;\ 0;\ -1)$, $C(-1;\ 5;\ 8)$, $D(1;\ 6;\ 11)$ лежать в одній площині.

$\ulcorner$ Точки A, B, C, D лежать в одній площині, якщо вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ компланарні.

Знаходимо координати векторів $\overrightarrow{AB}=(-2;\ -1;\ -3)$, $\overrightarrow{AC}=(-1;\ 4;\ 6)$, $\overrightarrow{AD}=(1;\ 5;\ 9)$. Оскільки за формулою (14)

$$\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}-2 & -1 & -3\\ -1 & 4 & 6\\ 1 & 5 & 9\end{vmatrix}=0\ ,$$

то згідно з властивістю 5 вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ компланарні. Тому задані точки лежать в одній площині. $\lrcorner$

84. Знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}=(1;\ 4;-3)$, $\vec{b}=(1;\ 0;\ 2)$ і $\vec{c}=(-2;\ 2;\ 5)$.

Γ Використаємо той факт, що об'єм V паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, у шість разів більший за об'єм тетраедра, побудованого на цих векторах.

Далі за формулою (14)

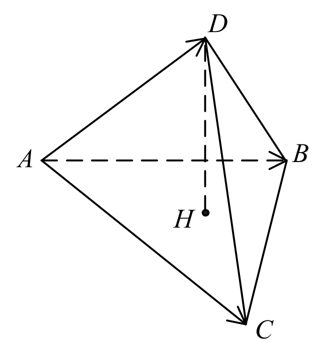
$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\begin{vmatrix}1 & 4 & -3\\ 1 & 0 & 2\\ -2 & 2 & 5\end{vmatrix}=-46\,.$$

Тоді шуканий об'єм

$$V=\left|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right|=\left|-46\right|=46\ \text{(куб. од.).}\quad \lrcorner$$

85. Дано вершини тетраедра $A(1;\,2;\,3)$, $B(9;\,6;\,4)$, $C(3;\,0;\,4)$, $D(5;\,2;\,6)$. Обчислити довжину висоти DH тетраедра.

Γ Скористаємося формулою $V=\dfrac{1}{3}S\left|\overrightarrow{DH}\right|$, де V – об'єм тетраедра, а S – площа $\Delta\,ABC$.



Знаходимо координати векторів: $\overrightarrow{AB}=(8;\,4;\,1)$, $\overrightarrow{AC}=(2;\,-2;\,1)$, $\overrightarrow{AD}=(4;\,0;\,3)$.

За формулою (13) маємо

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 8 & 4 & 1\\ 2 & -2 & 1\end{vmatrix}=$$

$$=\vec{i}\begin{vmatrix}4 & 1\\ -2 & 1\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}8 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}8 & 4\\ 2 & -2\end{vmatrix}=6\vec{i}-6\vec{j}-24\vec{k}\,.$$

Далі, $S=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\dfrac{1}{2}\sqrt{6^2+(-6)^2+(-24)^2}=9\sqrt{2}$ (кв. од.).

Тоді знаходимо

$$\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}=\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}=6\cdot4+(-6)\cdot0+(-24)\cdot3=-48\,.$$

За властивістю 6 знаходимо об'єм тетраедра

$$V=\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}\right|=\frac{1}{6}\cdot\left|-48\right|=8\ \text{(куб. од.).}$$

Отже,

$$DH=\left|\overrightarrow{DH}\right|=\frac{3V}{S}=\frac{3\cdot 8}{9\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{2}}{3}. \quad \lrcorner$$

<u>Вправи для самостійного розв’язання</u>

86. Обчислити $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ двома способами, якщо $\vec{a}=(1;-1;3)$, $\vec{b}=(-2;2;1)$ і $\vec{c}=(3;-2;5)$.

87. Встановити, праву чи ліву трійку утворюють вектори, якщо:

а) $\vec{a}=(1;3;-1)$, $\vec{b}=(-3;8;2)$, $\vec{c}=(-1;1;1)$;

б) $\vec{a}=(-1;4;1)$, $\vec{b}=(0;3;-1)$, $\vec{c}=(3;4;2)$.

88. Перевірити, чи лежать точки $A(1;2;-1)$, $B(0;1;5)$, $C(-1;2;1)$, $D(2;1;3)$ в одній площині.

89. Встановити, чи є задані вектори компланарними:

а) $\vec{a}=(3;-2;1)$, $\vec{b}=(2;1;2)$, $\vec{c}=(3;-1;-2)$;

б) $\vec{a}=(2;-1;2)$, $\vec{b}=(1;2;-3)$, $\vec{c}=(3;-4;7)$.

90. Знайти об’єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}=(3;6;3)$, $\vec{b}=(1;3;-2)$, $\vec{c}=(2;-2;2)$.

91. Дано вершини тетраедра $A(2;3;1)$, $B(4;1;-2)$, $C(6;3;7)$, $D(-5;-4;8)$. Знайти довжину висоти DH тетраедра.

Відповіді:

86. -7. **87.** а) праву; б) ліву. **88.** Так.

89. а) ні; б) так. **90.** 54. **91.** 11.

Розділ 3. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

1. Пряма на площині

Є кілька типів рівнянь прямої на площині. В залежності від умови задачі, зручно скористатись для її розв'язання тим чи іншим типом рівняння.

а) *Загальне рівняння прямої на площині*

$$Ax + By + C = 0 . \qquad (1)$$

У прямокутній декартовій системі координат пряма (1) перпендикулярна вектору $\vec{n} = (A;B)$, який називають *нормальним вектором* прямої.

б) *Рівняння прямої, яка проходить через точку* $M_0(x_0;y_0)$ *перпендикулярно вектору* $\vec{n} = (A;B)$

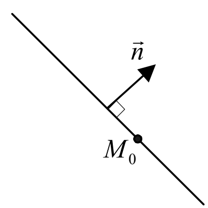


Рис. 1

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 . \qquad (2)$$

в) *Рівняння прямої, яка проходить через точку* $M_0(x_0;y_0)$ *паралельно напрямному вектору* $\vec{s} = (l;m)$

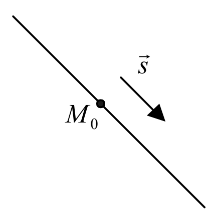


Рис. 2

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} . \qquad (3)$$

г) *Рівняння прямої, яка проходить через точки* $M_1(x_1;y_1)$ *та* $M_2(x_2;y_2)$

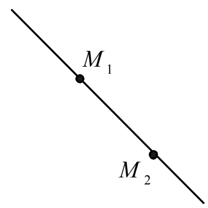


Рис. 3

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \qquad (4)$$

Зауваження. Якщо $x_1=x_2$, то рівняння прямої має вигляд $x=x_1$; аналогічно при $y_1=y_2$ рівняння прямої має вигляд $y=y_1$.

д) *Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом*

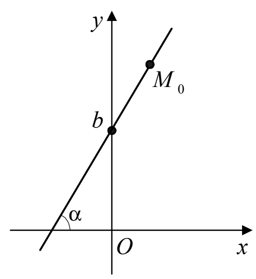


Рис. 4

$$y=kx+b, \qquad (5)$$

де $k=\operatorname{tg}\alpha$ – *кутовий коефіцієнт*.

е) *Рівняння прямої, яка проходить через точку* $M_0(x_0;y_0)$ *і має кутовий коефіцієнт* k

$$y-y_0=k(x-x_0). \qquad (6)$$

Якщо дві прямі задані загальними рівняннями $A_1x+B_1y+C_1=0$ і $A_2x+B_2y+C_2=0$, то один з кутів між ними знаходиться з формули

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}. \qquad (7)$$

Умова перпендикулярності прямих:

$$A_1A_2+B_1B_2=0. \qquad (8)$$

Умова паралельності прямих:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \qquad (9)$$

(при $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ прямі паралельні, при $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ прямі співпадають).

Якщо дві прямі задані рівняннями з кутовими коефіцієнтами $y = k_1 x + b_1$ і $y = k_2 x + b_2$, то один з кутів між ними знаходиться з формули

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \qquad (10)$$

Умова перпендикулярності прямих:

$$k_1 k_2 = -1. \qquad (11)$$

Умова паралельності прямих:

$$k_1 = k_2. \qquad (12)$$

Відстань d від точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$ обчислюють за формулою

$$d = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (13)$$

1. Визначити, які з точок $M_1(2;3)$, $M_2(-1;3)$, $M_3(-2;-1)$, $M_4(5;-5)$ лежать на прямій $4x + 3y - 5 = 0$.

⌈ Для розв'язання даної задачі підставимо координати кожної із заданих точок в рівняння прямої.

$M_1(2;3)$: $4 \cdot 2 + 3 \cdot 3 - 5 \neq 0$. Точка M_1 не лежить на прямій.

$M_2(-1;3)$: $4 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 - 5 = 0$. Точка M_2 лежить на прямій.

$M_3(-2;-1)$: $4 \cdot (-2) + 3 \cdot (-1) - 5 \neq 0$. Точка M_3 не лежить на прямій.

$M_4(5;-5)$: $4 \cdot 5 + 3 \cdot (-5) - 5 = 0$. Точка M_4 лежить на прямій. ⌋

2. На прямій $4x - 5y - 2 = 0$ знайти точку, у якої координата $y = 2$.

⌈ Координату x знайдемо з рівняння прямої, підставивши в це рівняння $y = 2$: $4x - 5 \cdot 2 - 2 = 0$, $4x = 12$, $x = 3$.

Отже, шукана точка має координати $(3;2)$. ⌋

3. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(2;-3)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}=(4;5)$.

$\ulcorner$ Використаємо рівняння (2):

$4(x-2)+5(y-(-3))=0$, $4x-8+5y+15=0$, або $4x+5y+7=0$. $\lrcorner$

4. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(1;-4)$ паралельно вектору $\vec{s}=(-3;2)$.

$\ulcorner$ Використаємо рівняння (3):

$$\frac{x-1}{-3}=\frac{y-(-4)}{2},\ \frac{x-1}{-3}-\frac{y+4}{2}=0,\ \frac{2(x-1)-(-3)(y+4)}{-3\cdot 2}=0,$$

$2(x-1)+3(y+4)=0$, $2x-2+3y+12=0$, або $2x+3y+10=0$. $\lrcorner$

5. Знайти рівняння прямої, яка проходить через дві точки $M_1(-3;4)$ і $M_2(1;2)$.

$\ulcorner$ Рівняння прямої має вигляд (4):

$$\frac{x-(-3)}{1-(-3)}=\frac{y-4}{2-4},\ \frac{x+3}{4}=\frac{y-4}{-2},\ \frac{x+3}{4}-\frac{y-4}{-2}=0,$$

$$\frac{x+3-(-2)(y-4)}{4}=0,\ x+3+2y-8=0\text{, або }\ x+2y-5=0.$$

Зауваження. Можна зробити перевірку, переконавшись, що координати даних точок задовольняють знайдене рівняння:

$$M_1(-3;4):\ -3+2\cdot 4-5=0;\ M_2(1;2):\ 1+2\cdot 2-5=0.$$

Отже, рівняння знайдено правильно. $\lrcorner$

6. Знайти точку перетину прямих $4x-3y+9=0$ і $3x+2y-23=0$.

$\ulcorner$ Координати шуканої точки задовольняють обидва рівняння прямих і тому знаходяться із системи рівнянь

$$\begin{cases}4x-3y+9=0\\3x+2y-23=0.\end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему за формулами Крамера (див. розділ 1):

$$\begin{cases}4x-3y=-9\\3x+2y=23;\end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 - (-3) \cdot 3 = 8 + 9 = 17,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -9 & -3 \\ 23 & 2 \end{vmatrix} = -9 \cdot 2 - (-3) \cdot 23 = -18 + 69 = 51,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -9 \\ 3 & 23 \end{vmatrix} = 4 \cdot 23 - (-9) \cdot 3 = 92 + 27 = 119;$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{51}{17} = 3, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{119}{17} = 7.$$

Отже , точка перетину прямих – $(3;7)$. ⌋

7. Знайти рівняння прямої, яка відтинає від осі Oy відрізок $b = 4$ і утворює кут $\alpha = 60^\circ$ з додатним напрямом осі Ox.

⌈ Використаємо рівняння (5). Так як $k = \mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{tg}\,60^\circ = \sqrt{3}$, то $y = \sqrt{3}x + 4$. ⌋

8. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(3;4)$ і утворює кут $\alpha = 30^\circ$ з додатним напрямом осі Ox.

⌈ Рівняння прямої має вигляд (6), де $k = \mathrm{tg}\,30^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Тому

$$y - 4 = \frac{1}{\sqrt{3}}(x - 3), \quad y - 4 - \frac{1}{\sqrt{3}}(x - 3) = 0, \quad \frac{\sqrt{3}(y - 4) - (x - 3)}{\sqrt{3}} = 0,$$

$\sqrt{3}y - 4\sqrt{3} - x + 3 = 0$, або остаточно $x - \sqrt{3}y + 4\sqrt{3} - 3 = 0$. ⌋

9. Знайти кутовий коефіцієнт прямої, яка проходить через точки $M_1(3;2)$ та $M_2(-2;5)$.

⌈ Кутовий коефіцієнт k можна знайти з рівняння прямої, звівши його до виду (5). Пряма задана двома точками. Тому використаємо рівняння (4):

$$\frac{x - 3}{-2 - 3} = \frac{y - 2}{5 - 2}, \quad \frac{x - 3}{-5} - \frac{y - 2}{3} = 0, \quad \frac{3(x - 3) - (-5)(y - 2)}{-5 \cdot 3} = 0,$$

$$3x - 9 + 5y - 10 = 0, \quad 3x + 5y - 19 = 0.$$

Зі знайденого рівняння прямої виразимо y: $5y = -3x + 19$,

$y=-\frac{3}{5}x+\frac{19}{5}$. Порівнюючи це рівняння з формулою (5), знаходимо, що $k=-\frac{3}{5}$. ⌋

10. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0\left(2;5\right)$ перпендикулярно до прямої $4x+3y-2=0$.

⌈ Шукана пряма перпендикулярна до заданої прямої, а тому паралельна до її нормального вектора $\vec{n}=\left(4;3\right)$ (див. пункт а)). Підставимо координати точки M_0 та вектора $\vec{n}$ в рівняння (3):

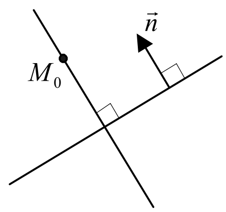


Рис. 5

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y-5}{3},\ \frac{x-2}{4}-\frac{y-5}{3}=0,$$

$$\frac{3\left(x-2\right)-4\left(y-5\right)}{12}=0,\ 3x-6-4y+20=0,$$

або остаточно $3x-4y+14=0$. ⌋

11. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0\left(-3;2\right)$ і паралельна до прямої $2x+5y+7=0$.

⌈ Шукана пряма перпендикулярна до нормального вектора заданої прямої $\vec{n}=\left(2;5\right)$. Використаємо рівняння (2):

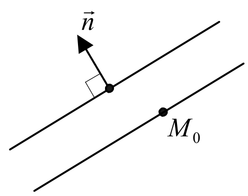


Рис. 6

$$2\left(x-\left(-3\right)\right)+5\left(y-2\right)=0,$$

$$2x+6+5y-10=0,$$

або

$$2x+5y-4=0.$$ ⌋

12. Відомі координати вершин трикутника: $A\left(3;6\right)$, $B\left(-5;8\right)$, $C\left(-1;-2\right)$. Знайти рівняння середньої лінії цього трикутника, яка паралельна до сторони AB.

⌈ Нехай M та N – середини сторін AC та BC відповідно. Їх координати

$$x_M=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{3+\left(-1\right)}{2}=1,\ y_M=\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{6+\left(-2\right)}{2}=2;$$

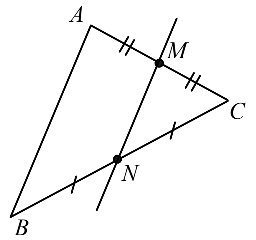


Рис. 7

$$x_N = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{-5+(-1)}{2} = -3,$$

$$y_N = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{8+(-2)}{2} = 3.$$

Отже, $M(1;2)$, $N(-3;3)$. Рівняння прямої MN має вигляд (4):

$$\frac{x-1}{-3-1} = \frac{y-2}{3-2}, \quad \frac{x-1}{-4} - \frac{y-2}{1} = 0,$$

$$\frac{x-4-(-4)(y-2)}{-4} = 0, \quad x-4+4y-8=0, \text{ або } \quad x+4y-12=0. \quad \lrcorner$$

13. Вершини трикутника мають координати: $A(4;3)$, $B(1;8)$, $C(8;4)$. Знайти рівняння висоти цього трикутника, проведеної з вершини A до сторони BC.

$\ulcorner$ Висота AK проходить через точку A перпендикулярно до вектора

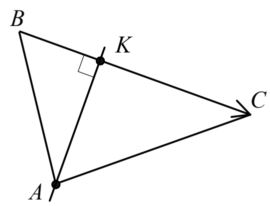


Рис. 8

$\vec{n} = \overrightarrow{BC} = (8-1;4-8) = (7;-4)$. Тому її рівняння має вигляд (2):

$$7(x-4)-4(y-3)=0,$$

$$7x-28-4y+12=0,$$

або

$$7x-4y-16=0. \quad \lrcorner$$

14. Знайти точку перетину медіан трикутника, якщо відомі координати його вершин: $A(-1;7)$, $B(-5;1)$, $C(9;-5)$.

$\ulcorner$ Три медіани трикутника перетинаються в одній точці. Знайдемо рівняння двох будь-яких медіан, наприклад CM і BN. Для цього спочатку обчислимо координати точки M – середини сторони AB:

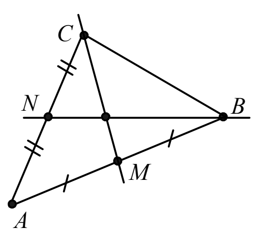


Рис. 9

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-1+(-5)}{2} = -3,$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{7+1}{2} = 4.$$

Отже, $M(-3;4)$. Рівняння медіани CM має вигляд (4):

$$\frac{x-9}{-3-9}=\frac{y-(-5)}{4-(-5)},\ \frac{x-9}{-12}-\frac{y+5}{9}=0,$$

$$\frac{3(x-9)-(-4)(y+5)}{-36}=0,\ 3x-27+4y+20=0.$$

Таким чином, рівняння прямої CM – $3x+4y-7=0$.

Аналогічно знаходимо координати точки N – середини сторони AC і рівняння прямої BN:

$$x_N=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{-1+9}{2}=4,\ y_N=\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{7+(-5)}{2}=1,\quad N(4;1);$$

$$\frac{x-(-5)}{4-(-5)}=\frac{y-1}{1-1},\ \frac{x+5}{9}=\frac{y-1}{0}.$$

Згідно з зауваженням до формули (4), рівняння медіани BN $y-1=0$. Координати точки перетину знаходяться з системи

$$\begin{cases}y-1=0\\3x+4y-7=0,\end{cases}\quad\begin{cases}y=1\\3x=7-4y,\end{cases}\quad\begin{cases}x=1\\y=1.\end{cases}$$

Отже, точка перетину медіан $O(1;1)$. ⌋

15. Знайти проекцію точки $P(8;2)$ на пряму $3x-y-2=0$ і точку, симетричну точці P відносно даної прямої.

⌈ Перпендикуляр PO паралельний до нормального вектора даної прямої $\vec{n}=(3;-1)$ (див. пункт а)) і проходить через точку P. Його рівняння має вигляд (3):

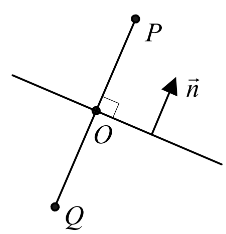


Рис. 10

$$\frac{x-8}{3}=\frac{y-2}{-1},\ \frac{x-8}{3}+\frac{y-2}{1}=0,$$

$$\frac{x-8+3(y-2)}{8}=0,\quad x+3y-14=0.$$

Проекція точки P є точкою перетину знайденої прямої і даної прямої. Її координати визначаються з системи

$$\begin{cases}3x-y-2=0\\x+3y-14=0,\end{cases}\quad\begin{cases}3x-y=2\\x+3y=14;\end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3\cdot 3 - (-1)\cdot 1 = 10,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 14 \end{vmatrix} = 3\cdot 14 - 1\cdot 2 = 40,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 14 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot 3 - (-1)\cdot 14 = 20;$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{40}{10} = 4, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{20}{10} = 2.$$

Отже, знайдено проекцію точки P – точку $O(4;2)$. Ця точка є серединою відрізка PQ. Тому

$$x_O = \frac{x_P + x_Q}{2}, \text{ звідки } 2x_O = x_P + x_Q, \quad x_Q = 2x_O - x_P;$$

аналогічно, $y_O = \dfrac{y_P + y_Q}{2}$, $2y_O = y_P + y_Q$, $y_Q = 2y_O - y_P$.

Обчислимо координати точки Q:

$$x_Q = 2\cdot 4 - 8 = 0, \; y_Q = 2\cdot 2 - 2 = 2.$$

Отже, $Q(0;2)$. ⌋

16. Визначити кут між прямими:

а) $5x - y + 7 = 0$ і $3x + 2y - 3 = 0$;

б) $y = 3x + 2$ і $y = \dfrac{1}{2}x - 5$.

⌈ а) Використаємо формулу (7): $A_1 = 5$, $B_1 = -1$, $A_2 = 3$, $B_2 = 2$;

$$\cos\varphi = \frac{5\cdot 3 + (-1)\cdot 2}{\sqrt{5^2 + (-1)^2}\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{15-2}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{13}} = \frac{13}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{13}\sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\varphi = \arccos\frac{1}{\sqrt{2}} = 45^\circ.$$

б) Використаємо формулу (10): $k_1 = 3$, $k_2 = \dfrac{1}{2}$;

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\frac{1}{2} - 3}{1 + \frac{1}{2}\cdot 3} = \frac{-\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}} = -1.$$

За відомим значенням $\operatorname{tg}\varphi = -1$ знаходимо $\varphi = 135^\circ$. $\rfloor$

17. Перевірити, чи перпендикулярні прямі:

а) $3x - 2y + 4 = 0$ і $4x + 6y - 3 = 0$;

б) $y = 2x - 7$ і $y = -\dfrac{2}{3}x + 3$.

$\ulcorner$ а) Використаємо формулу (8). В даній задачі $A_1 = 3$, $B_1 = -2$, $A_2 = 4$, $B_2 = 6$. Так як $3 \cdot 4 + (-2) \cdot 6 = 0$, то прямі перпендикулярні.

б) Використаємо умову (11). В даній задачі $k_1 = 2$, $k_2 = -\dfrac{2}{3}$. Так як $k_1 \cdot k_2 \neq -1$, то прямі не перпендикулярні. $\rfloor$

18. Перевірити, чи паралельні прямі:

а) $-3x + 4y - 7 = 0$ і $6x - 8y + 2 = 0$;

б) $y = 3x + 7$ і $y = 3x - 2$.

$\ulcorner$ а) Використаємо умову (9). В даній задачі

$$A_1 = -3,\ B_1 = 4,\ C_1 = -7,\ A_2 = 6,\ B_2 = -8,\ C_2 = 2.$$

Перевіряємо рівність $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}$: $\dfrac{-3}{6} = \dfrac{4}{-8}$. Отже, прямі паралельні, причому не співпадають, так як $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$.

б) Кутові коефіцієнти даних прямих однакові: $k_1 = k_2 = 3$. Згідно з умовою (12) прямі паралельні. $\rfloor$

19. Знайти відстань від точки $P(-2;3)$ до прямої $3x - 4y - 2 = 0$.

$\ulcorner$ Використаємо формулу (13):

$$d = \frac{|3\cdot(-2) - 4\cdot 3 - 2|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|-6 - 12 - 2|}{5} = 4. \quad \rfloor$$

20. Знайти відстань між двома паралельними прямими $3x + 4y - 8 = 0$ і $-3x - 4y + 18 = 0$.

$\ulcorner$ На першій прямій візьмемо довільну точку $M_0(x_0; y_0)$ і обчислимо відстань від цієї точки до іншої прямої. Нехай $x_0 = 0$. Тоді з рівняння першої прямої знаходимо: $3 \cdot 0 + 4 \cdot y_0 - 8 = 0$, $y_0 = 2$. Отже,

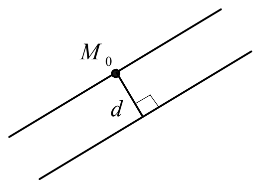


Рис. 11

$M_0(0;2)$. Відстань від знайденої точки до другої прямої знаходимо за формулою (13):

$$d = \frac{|-3\cdot 0 - 4\cdot 2 + 18|}{\sqrt{(-3)^2 + (-4)^2}} = \frac{|0 - 8 + 18|}{5} = 2. \quad \lrcorner$$

Вправи для самостійного розв'язання

21. Визначити, які з точок $M_1(3;5)$, $M_2(-1;4)$, $M_3(4;-2)$, лежать на прямій $7x + y - 26 = 0$.

22. На прямій $3x + 4y + 7 = 0$ знайти точку, у якої координата $x = 3$.

23. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(3;-1)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (-3;4)$.

24. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(3;2)$ паралельно вектору $\vec{s} = (2;5)$.

25. Знайти рівняння прямої, яка проходить через дві точки $M_1(3;-1)$ і $M_2(2;4)$.

26. Знайти точку перетину прямих $2x + 7y + 17 = 0$ і $3x + y - 3 = 0$.

27. Знайти рівняння прямої, яка відтинає від осі Oy відрізок $b = -2$ і утворює кут $\alpha = 45^\circ$ з додатним напрямом осі Ox.

28. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(-1;3)$ і утворює кут $\alpha = 60^\circ$ з додатним напрямом осі Ox.

29. Знайти кутовий коефіцієнт прямої, яка проходить через точки $M_1(4;3)$ і $M_2(1;-1)$.

30. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(3;2)$ перпендикулярно до прямої $2x + 5y + 7 = 0$.

31. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(4;1)$ паралельно до прямої $3x + 2y - 7 = 0$.

32. Відомі координати вершин трикутника $A(2;3)$, $B(8;7)$, $C(-2;9)$. Знайти рівняння середньої лінії цього трикутника, яка паралельна до сторони AC.

33. Відомі координати вершин трикутника: $A(3;-1)$, $B(1;7)$, $C(-5;1)$. Знайти рівняння висоти цього трикутника, проведеної з вершини C до сторони AB.

34. Знайти точку перетину медіан трикутника, якщо відомі координати його вершин: $A(3;5)$, $B(-1;8)$, $C(-5;-4)$.

35. Знайти проекцію точки $P(7;5)$ на пряму $2x+3y-3=0$ і точку, симетричну точці P відносно даної прямої.

36. Визначити кут між прямими:

а) $4x+2y+3=0$ і $x+2y-3=0$;

б) $y=x+5$ і $y=2x-3$.

37. Перевірити, чи перпендикулярні прямі:

а) $2x+3y+1=0$ і $2x-y+7=0$,

б) $y=\dfrac{3}{2}x-7$ і $y=-\dfrac{2}{3}x+5$.

38. Перевірити, чи паралельні прямі:

а) $6x-4y+7=0$ і $3x+2y+1=0$;

б) $y=2x+3$ і $y=2x-1$.

39. Знайти відстань від точки $P(7;1)$ до прямої $3x+4y-50=0$.

40. Знайти відстань між паралельними прямими $x+2y-7=0$ і $x+2y+3=0$.

Відповіді:

21. M_1 і M_3.

22. $M(3;-4)$.

23. $-3x+4y+13=0$.

24. $5x-2y-11=0$.

25. $5x+y-14=0$.

26. $M(2;-3)$.

27. $y=x-2$.

28. $\sqrt{3}x-y+3+\sqrt{3}=0$.

29. $4x-3y-7=0$, $k=\dfrac{4}{3}$.

30. $5x-2y-11=0$.

31. $3x+2y-14=0$.

32. $3x+2y-25=0$.

33. $x+4y+1=0$.

34. $O(-1;3)$.

35. $O(3;-1)$, $Q(-1;-7)$.

36. а) $\arccos\dfrac{4}{5}$; б) $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}$.

37. а) ні; б) так.

38. а) ні; б) так.

39. 5.

40. $2\sqrt{5}$.

2. Площина у просторі

Є кілька типів рівнянь площини у просторі.

а) *Загальне рівняння площини*

$$Ax + By + Cz + D = 0\,. \qquad (14)$$

У прямокутній декартовій системі координат площина (14) перпендикулярна вектору $\vec{n} = (A; B; C)$, який називається *нормальним вектором* площини.

б) *Рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n} = (A; B; C)$*

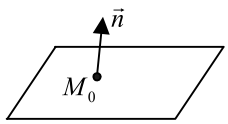


Рис. 12

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0\,. \qquad (15)$$

в) *Рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ паралельно неколінеарним векторам $\vec{s}_1 = (l_1; m_1; n_1)$ і $\vec{s}_2 = (l_2; m_2; n_2)$*

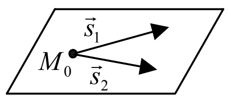


Рис. 13

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0\,. \qquad (16)$$

г) *Рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ і $M_2(x_2; y_2; z_2)$ паралельно вектору $\vec{s} = (l; m; n)$*

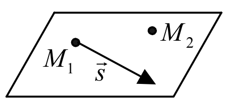


Рис. 14

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0\,. \qquad (17)$$

д) *Рівняння площини, яка проходить через точки* $M_1\left(x_1;y_1;z_1\right)$, $M_2\left(x_2;y_2;z_2\right)$ *і* $M_3\left(x_3;y_3;z_3\right)$

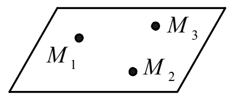


Рис. 15

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \qquad (18)$$

Один з кутів φ між двома площинами $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ і $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ знаходиться як кут між їх нормальними векторами $\vec{n}_1=\left(A_1;B_1;C_1\right)$ і $\vec{n}_2=\left(A_2;B_2;C_2\right)$ з формули

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \qquad (19)$$

Умова перпендикулярності площин – перпендикулярність їх нормальних векторів $\vec{n}_1=\left(A_1;B_1;C_1\right)$ і $\vec{n}_2=\left(A_2;B_2;C_2\right)$:

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0. \qquad (20)$$

Умова паралельності площин – паралельність їх нормальних векторів:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2} \qquad (21)$$

(при $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}$ площини паралельні, при $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$ площини співпадають).

Відстань d від точки $M_0\left(x_0;y_0;z_0\right)$ до площини $Ax+By+Cz+D=0$ обчислюють за формулою

$$d=\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \qquad (22)$$

41. Визначити, які з точок $M_1\left(2;4;-1\right)$, $M_2\left(3;-1;0\right)$, $M_3\left(-1;7;2\right)$ лежать на площині $2x-y+3z+3=0$.

Γ Для розв’язання даної задачі підставимо координати заданих точок в рівняння площини.

$M_1(2;4;-1)$: $2\cdot 2-4+3\cdot(-1)+3=0$. Точка M_1 лежить на площині.

$M_2(3;-1;0)$: $2\cdot 3-(-1)+3\cdot 0+3\neq 0$. Точка M_2 не лежить на площині.

$M_3(-1;7;2)$: $2\cdot(-1)-7+3\cdot 2+3=0$. Точка M_3 лежить на площині. ⌟

42. На площині $4x+5y-3z+5=0$ знайти точку, якщо відомі дві її координати: $x=3$, $z=-1$.

⌜ Координату y знайдемо з рівняння площини, підставивши в це рівняння відомі координати:

$4\cdot 3+5\cdot y-3\cdot(-1)+5=0$, $12+5y+3+5=0$, $5y=-20$, $y=-4$.

Отже, координати шуканої точки $(3;-4;-1)$. ⌟

43. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(3;-1;2)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}=(2;4;-3)$.

⌜ Рівняння площини має вигляд (15):

$$2(x-3)+4(y-(-1))+(-3)(z-2)=0,$$
$$2x-6+4y+4-3z+6=0,$$
$$2x+4y-3z+4=0.$$ ⌟

44. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(1;4;-3)$ паралельно векторам $\vec{s}_1=(2;-3;-1)$, $\vec{s}_2=(-3;2;0)$.

⌜ Рівняння площини має вигляд (16):

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-4 & z-(-3) \\ 2 & -3 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Обчислимо визначник:

$$(x-1)\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}-(y-4)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}+(z+3)\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}=0,$$

$$(x-1)(-3\cdot 0-(-1)\cdot 2)-(y-4)(2\cdot 0-(-1)(-3))+(z+3)(2\cdot 2-(-3)\cdot(-3))=0,$$
$$2(x-1)+3(y-4)-5(z+3)=0,$$
$$2x-2+3y-12-5z-15=0,$$

або, остаточно, шукане рівняння площини – $2x+3y-5z-29=0$. ⌟

45. Знайти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(2;4;-1)$ і $M_2(3;1;2)$ паралельно вектору $\vec{s}=(-1;-3;2)$.

⌈ Рівняння має вигляд (17):

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-4 & z+1 \\ 3-2 & 1-4 & 2+1 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix}=0 .$$

Аналогічно до попереднього прикладу знаходимо

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-4 & z+1 \\ 1 & -3 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix}=0 ,$$

$$(x-2)\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}-(y-4)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}+(z+1)\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}=0 ,$$

$$(x-2)(-3\cdot 2-3\cdot(-3))-(y-4)(1\cdot 2-3\cdot(-1))+(z+1)(1\cdot(-3)-(-3)\cdot(-1))=0,$$

$$3(x-2)-5(y-4)-6(z+1)=0 ,$$

$$3x-6-5y+20-6z-6=0 ,$$

або остаточно маємо $3x-5y-6z+8=0$. ⌋

46. Знайти рівняння площини, яка проходить через три точки $M_1(2;-2;1)$, $M_2(1;3;2)$, $M_3(-1;1;3)$.

⌈ Рівняння площини має вигляд (18):

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+2 & z-1 \\ 1-2 & 3+2 & 2-1 \\ -1-2 & 1+2 & 3-1 \end{vmatrix}=0 , \quad \begin{vmatrix} x-2 & y+2 & z-1 \\ -1 & 5 & 1 \\ -3 & 3 & 2 \end{vmatrix}=0 ,$$

$$(x-2)\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}-(y+2)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}+(z-1)\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -3 & 3 \end{vmatrix}=0 ,$$

$$(x-2)(5\cdot 2-3\cdot 1)-(y+2)(-1\cdot 2-1\cdot(-3))+(z-1)(-1\cdot 3-5\cdot(-3))=0,$$

$$7(x-2)-(y+2)+12(z-1)=0 ,$$

$$7x-14-y-2+12z-12=0 ,$$

або остаточно маємо $7x-y+12z-28=0$. ⌋

47. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(3;-2;2)$ паралельно площині $2x-2y+5z+4=0$.

⌈ Задана площина перпендикулярна до вектора $\vec{n}=(2;-2;5)$

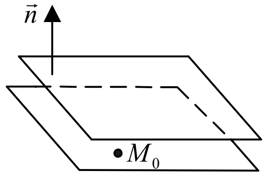


Рис. 16

(див. пункт а)). Тому, внаслідок паралельності площин, шукана площина також перпендикулярна до цього вектора. Її рівняння буде мати вигляд (15):

$$2(x-3)-2(y-(-2))+5(z-2)=0,$$

$$2x-6-2y-4+5z-10=0,$$

або $$2x-2y+5z-20=0. \;⌋$$

48. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(4;1;-1)$ перпендикулярно до площин $2x+2y-3z+2=0$ та $3x+y+2z+3=0$.

⌈ Згідно з пунктом а) перша з даних площин перпендикулярна до вектора $\vec{n}_1=(2;2;-3)$, а друга – до $\vec{n}_2=(3;1;2)$.

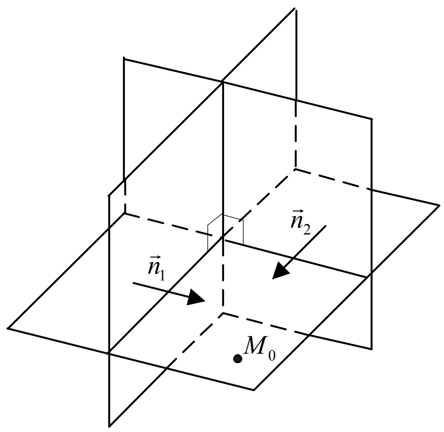


Рис. 17

Шукана площина буде перпендикулярна до даних площин і тому паралельна до векторів $\vec{n}_1$ та $\vec{n}_2$. Її рівняння буде мати вигляд (16):

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-1 & z+1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0,$$

$$(x-4)\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}-(y-1)\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}+(z+1)\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

$$(x-4)(2\cdot 2-(-3)\cdot 1)-(y-1)(2\cdot 2-3\cdot(-3))+(z+1)(2\cdot 1-2\cdot 3)=0,$$

$$7(x-4)-13(y-1)-4(z+1)=0,$$

$$7x-28-13y+13-4z-4=0,$$

або остаточно маємо $7x-13y-4z-19=0$. ⌋

Зауваження. Перевірити правильність знайденого рівняння площини можна переконавшись, що координати точки M_0 задовольняють його: $7\cdot 4-13\cdot 1-4\cdot(-1)-19=0$, і що нормальний вектор цієї площини $\vec{n}=(7;-13;-4)$ перпендикулярний до $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$:
$\vec{n}_1\cdot\vec{n}=2\cdot 7+2\cdot(-13)+(-3)\cdot(-4)=0$, $\vec{n}_2\cdot\vec{n}=3\cdot 7+1\cdot(-13)+2\cdot(-4)=0$.
Подібним чином можна перевірити і відповіді задач **44** – **46**.

49. Знайти кут між площинами $4x-2y-4z+3=0$ і $3x+6y+2z+7=0$.

⌜ Нормальні вектори даних площин $\vec{n}_1=(4;-2;-4)$ і $\vec{n}_2=(3;6;2)$. Кут знаходимо з формули (19):

$$\cos\varphi=\frac{4\cdot 3+(-2)\cdot 6+(-4)\cdot 2}{\sqrt{4^2+(-2)^2+(-4)^2}\sqrt{3^2+6^2+2^2}}=\frac{12-12-8}{\sqrt{36}\cdot\sqrt{49}}=\frac{-8}{6\cdot 7}=\frac{-4}{21},$$

$$\varphi=\arccos\left(-\frac{4}{21}\right). \quad ⌟$$

50. Перевірити, чи паралельні площини

а) $3x+2y-4z+7=0$ і $-6x-4y+8z+1=0$;

б) $2x+5y-3z+1=0$ і $4x+10y+z-3=0$.

⌜ Використаємо умову (21).

а) Нормальні вектори даних площин $\vec{n}_1=(3;2;-4)$, $\vec{n}_2=(-6;-4;8)$. Так як $\frac{3}{-6}=\frac{2}{-4}=\frac{-4}{8}$, то площини паралельні.

б) Нормальні вектори даних площин $\vec{n}_1=(2;5;-3)$, $\vec{n}_2=(4;10;1)$. Так як $\frac{2}{4}=\frac{5}{10}\neq\frac{-3}{1}$, то площини не паралельні. ⌟

51. Перевірити, чи перпендикулярні площини

а) $4x-3y+5z-1=0$ і $2x+5y+z-3=0$;

б) $3x+y-9z+7=0$ і $4x+6y+z-3=0$.

⌜ Використаємо умову (20).

а) Нормальні вектори даних площин $\vec{n}_1=(4;-3;5)$, $\vec{n}_2=(2;5;1)$. Так як $4\cdot 2+(-3)\cdot 5+5\cdot 1\neq 0$, то площини не перпендикулярні.

б) Нормальні вектори даних площин $\vec{n}_1 = (3;1;-9)$, $\vec{n}_2 = (4;6;2)$. Так як $3 \cdot 4 + 1 \cdot 6 + (-9) \cdot 2 = 0$, то площини перпендикулярні. $\lrcorner$

52. При яких значеннях A та C площини $3x + 2y + Cz - 7 = 0$ і $Ax + 4y - 8z + 1 = 0$ паралельні?

$\ulcorner$ Для паралельності площин повинна виконуватись умова (21)

$$\frac{3}{A} = \frac{2}{4} = \frac{C}{-8}, \text{ звідки } \begin{cases} \frac{3}{A} = \frac{2}{4} \\ \frac{2}{4} = \frac{C}{-8}, \end{cases} \quad \begin{cases} A = 6 \\ C = -4. \end{cases} \quad \lrcorner$$

53. При яких значеннях C площини $3x + 7y - 5z + 2 = 0$ і $2x + 7y + Cz - 3 = 0$ перпендикулярні?

$\ulcorner$ Використаємо умову (20):

$$A_1 = 3,\ B_1 = 7,\ C_1 = -5,\ A_2 = 2,\ B_2 = 7;$$

$$3 \cdot 2 + 7 \cdot 7 + (-5) \cdot C = 0, \text{ звідки } -5C = -55,\ C = 11. \quad \lrcorner$$

54. Знайти відстань від точки $M_0(-2;-4;3)$ до площини $2x - y + 2z + 3 = 0$.

$\ulcorner$ Відстань знаходиться за формулою (22):

$$d = \frac{|2 \cdot (-2) - (-4) + 2 \cdot 3 + 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{|-4 + 4 + 6 + 3|}{\sqrt{9}} = 3. \quad \lrcorner$$

55. Знайти відстань між двома паралельними площинами $2x - y + 2z + 9 = 0$ і $-4x + 2y - 4z + 21 = 0$.

$\ulcorner$ На одній з площин, наприклад, першій, виберемо довільну точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ і обчислимо відстань від цієї точки до другої площини. Нехай $x_0 = z_0 = 0$. З першого рівняння знаходимо

$$2 \cdot 0 - y_0 + 2 \cdot 0 + 9 = 0,\ y_0 = 9.$$

Отже, $M_0(0;9;0)$. За формулою (22) знаходимо відстань від цієї точки до другої площини:

$$d = \frac{|-4 \cdot 0 + 2 \cdot 9 - 4 \cdot 0 + 21|}{\sqrt{(-4)^2 + 2^2 + (-4)^2}} = \frac{|0 + 18 + 0 + 21|}{\sqrt{36}} = \frac{39}{6} = 6{,}5.$$

Отже, відстань між даними площинами $d = 6{,}5$. $\lrcorner$

Вправи для самостійного розв'язання

56. Визначити, які з точок $M_1(3;2;4)$, $M_2(-1;1;4)$, $M_3(2;3;7)$ лежать на площині $2x+5y-z-12=0$.

57. На площині $3x-y-2z+2=0$ знайти точку, якщо відомі дві її координати: $x=0$, $y=-4$.

58. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(3;5;-2)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}=(-2;1;4)$.

59. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(-1;-2;4)$ паралельно векторам $\vec{s}_1=(3;1;-2)$, $\vec{s}_2=(2;2;1)$.

60. Знайти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(3;2;-1)$ і $M_2(1;-2;0)$ паралельно вектору $\vec{s}=(1;3;-2)$.

61. Знайти рівняння площини, яка проходить через три точки $M_1(1;2;-3)$, $M_2(2;0;3)$, $M_3(-1;-3;2)$.

62. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(3;1;-4)$ паралельно площині $2x-2y+5z-7=0$.

63. Знайти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(1;-3;2)$, $M_2(3;1;-1)$ і перпендикулярна до площини $3x+4y+2z-7=0$.

64. Знайти кут між площинами $x-2y+2z-3=0$ і $3x+4y-7=0$.

65. Перевірити, чи паралельні площини

а) $2x-3y+5z+8=0$ і $-4x+5y-10z+7=0$;

б) $6x-4y-2z+8=0$ і $-3x+2y+z-5=0$.

66. Перевірити, чи перпендикулярні площини

а) $5x+2y-3z+4=0$ і $x-y+z+7=0$;

б) $3x-2y-3z+3=0$ і $2y+z+4=0$.

67. При яких значеннях B та C площини $6x+By-9z+7=0$ і $2x-y+Cz+1=0$ паралельні?

68. При якому значенні A площини $3x+2y+5z-7=0$ і $Ax+2y+z-4=0$ перпендикулярні?

69. Знайти відстань від точки $M_0(3;3;-4)$ до площини $6x+4y+3z+10=0$.

70. Знайти відстань між двома паралельними площинами $x+2y+2z-8=0$ і $x+2y+2z+1=0$.

Відповіді:

56. M_1 і M_3.

57. $M(0;-4;3)$.

58. $-2x+y+4z+9=0$.

59. $5x-7y+4z-25=0$.

60. $5x-3y-2z-11=0$.

61. $20x-17y-9z-13=0$.

62. $2x-2y+5z+16=0$.

63. $20x-13y-4z-51=0$.

64. $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$.

65. а) ні; б) так.

66. а) так; б) ні.

67. $B=-3$, $C=-3$.

68. $A=-3$.

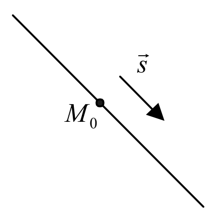
69. 4.

70. 3.

3. Пряма у просторі

Є декілька типів рівнянь прямої у просторі.

а) *Рівняння прямої, яка проходить через точку* $M_0(x_0;y_0;z_0)$ *паралельно вектору* $\vec{s}=(l;m;n)$, який називається *напрямним вектором* прямої:



$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}. \qquad (23)$$

Рис. 18

Рівняння (23) називають *канонічними рівняннями* прямої у просторі.

У *параметричній формі* ці рівняння мають вигляд

$$\begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt \\ z=z_0+nt, \quad t\in R. \end{cases}$$

б) *Рівняння прямої, яка проходить через дві точки* $M_1(x_1;y_1;z_1)$ і $M_2(x_2;y_2;z_2)$

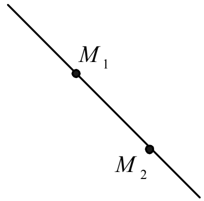


Рис. 19

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (24)$$

У параметричній формі рівняння (24) мають вигляд

$$\begin{cases} x=x_1+(x_2-x_1)t \\ y=y_1+(y_2-y_1)t \\ z=z_1+(z_2-z_1)t, \quad t\in R. \end{cases}$$

в) Лінією перетину площин $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ і $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ є пряма. *Загальними рівняннями* цієї прямої називаються рівняння

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$$

Відстань від точки P до прямої $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ знаходиться за формулою

$$d=\frac{\left|\overrightarrow{M_0P}\times\vec{s}\right|}{|\vec{s}|}, \qquad (25)$$

де $\vec{s}=(l;m;n)$ – напрямний вектор прямої, M_0 – будь-яка точка на прямій, наприклад точка з координатами $(x_0;y_0;z_0)$.

Кут між прямими $\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$ і $\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$ знаходиться як кут між їх напрямними векторами $\vec{s}_1=(l_1;m_1;n_1)$ і $\vec{s}_2=(l_2;m_2;n_2)$ з формули

$$\cos\varphi=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}. \qquad (26)$$

Кут між прямою $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ і площиною $Ax+By+Cz+D=0$ знаходиться з формули

$$\sin\varphi=\frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}. \qquad (27)$$

71. Перевірити, які з точок $M_1(2;1;9)$, $M_2(-1;-5;3)$, $M_3(8;7;3)$ лежать на прямій $\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-5}{-1}$.

⌈ Для розв'язання задачі підставимо координати даних точок в рівняння прямої.

$M_1(2;1;9)$: $\frac{2-2}{3}\neq\frac{1+1}{4}\neq\frac{9-5}{-1}$. Точка M_1 не лежить на прямій.

$M_2(-1;-5;3)$: $\frac{-1-2}{3}=\frac{-5+1}{4}\neq\frac{3-5}{-1}$. Точка M_2 не лежить на прямій.

$M_3(8;7;3)$: $\frac{8-2}{3}=\frac{7+1}{4}=\frac{3-5}{-1}$. Точка M_3 лежить на даній прямій. ⌋

72. На прямій $\frac{x-2}{4}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z+3}{5}$ знайти точку, у якої координата $z=7$.

⌈ Підставивши відому координату в рівняння прямої, знаходимо дві інші координати:

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y+1}{-2}=\frac{7+3}{5}, \quad \begin{cases}\frac{x-2}{4}=2\\ \frac{y+1}{-2}=2,\end{cases} \quad \begin{cases}x=10\\ y=-5.\end{cases}$$

Отже, шукана точка має координати $(10;-5;7)$. ⌋

73. Знайти точки перетину прямої $\frac{x-6}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-6}{3}$ з координатними площинами.

⌈ Точка перетину прямої з площиною xOy (рівняння якої $z=0$) має координати $(x;y;0)$. Підставивши в рівняння прямої $z=0$, знайдемо значення x та y:

$$\frac{x-6}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{0-6}{3}, \quad \begin{cases} \frac{x-6}{2}=-2 \\ \frac{y+1}{1}=-2, \end{cases} \quad \begin{cases} x=2 \\ y=-3. \end{cases}$$

Таким чином, точка перетину прямої з площиною xOy є $M_1(2;-3;0)$.

Точка перетину з площиною xOz має координати $(x;0;z)$. З рівняння прямої знаходимо x та z:

$$\frac{x-6}{2}=\frac{0+1}{1}=\frac{z-6}{3}, \quad \begin{cases} \frac{x-6}{2}=1 \\ \frac{z-6}{3}=1, \end{cases} \quad \begin{cases} x=8 \\ z=9. \end{cases}$$

Отже, точка перетину прямої з площиною xOz є $M_2(8;0;9)$.

Точка перетину з площиною yOz має координати $(0;y;z)$. Аналогічно

$$\frac{0-6}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-6}{3}, \quad \begin{cases} \frac{y+1}{1}=-3 \\ \frac{z-6}{3}=-3, \end{cases} \quad \begin{cases} y=-4 \\ z=-3. \end{cases}$$

Отже, точка перетину прямої з площиною yOz є $M_3(0;-4;-3)$. ┘

74. Знайти канонічні і параметричні рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(2;-3;1)$ паралельно вектору $\vec{s}=(4;3;-2)$.

┌ Канонічні рівняння мають вигляд (23):

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y+3}{3}=\frac{z-1}{-2}.$$

Знайдемо параметричні рівняння:

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y+3}{3}=\frac{z-1}{-2}=t, \quad \begin{cases} \frac{x-2}{4}=t, \\ \frac{y+3}{3}=t \\ \frac{z-1}{-2}=t, \end{cases}$$

звідки маємо рівняння прямої у параметричній формі

$$\begin{cases} x = 2+4t \\ y = -3+3t \\ z = 1-2t, \quad t \in R. \end{cases}$$ ⌟

75. Знайти канонічні і параметричні рівняння прямої, яка проходить через дві точки $M_1(4;-2;-1)$ і $M_2(3;2;2)$.

⌜ Рівняння прямої мають вигляд (24):

$$\frac{x-4}{3-4} = \frac{y+2}{2+2} = \frac{z+1}{2+1}, \text{ або } \frac{x-4}{-1} = \frac{y+2}{4} = \frac{z+1}{3}.$$

Знайдемо параметричні рівняння цієї прямої:

$$\frac{x-4}{-1} = \frac{y+2}{4} = \frac{z+1}{3} = t;$$

$$\frac{x-4}{-1} = t, \; x = 4-t; \; \frac{y+2}{4} = t, \; y = -2+4t; \; \frac{z+1}{3} = t, \; z = -1+3t.$$

Отже, $\begin{cases} x = 4-t \\ y = -2+4t \\ z = -1+3t, \quad t \in R. \end{cases}$ – рівняння прямої у параметричній формі. ⌟

76. Пряма задана загальними рівняннями

$$\begin{cases} 2x-3y+2z-4=0 \\ x+2y+3z+13=0. \end{cases}$$

Знайти на цій прямій точку, у якої координата $x = 3$.

⌜ Підставимо відому координату в загальні рівняння:

$$\begin{cases} 2\cdot 3-3y+2z-4=0 \\ 3+2y+3z+13=0. \end{cases}$$

З отриманої системи знаходимо координати y і z шуканої точки:

$$\begin{cases} -3y+2z=-2 \\ 2y+3z=-16; \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3\cdot 3 - 2\cdot 2 = -13;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -16 & 3 \end{vmatrix} = -2\cdot 3 - (-16)\cdot 2 = 26, \; y = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{26}{-13} = -2;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 2 & -16 \end{vmatrix} = -3\cdot(-16) - 2\cdot(-2) = 52, \; z = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{52}{-13} = -4.$$

Отже, координати шуканої точки $(3;-2;-4)$. $\rfloor$

77. Пряма задана загальними рівняннями

$$\begin{cases} 2x+y-3z+11=0 \\ 3x+2y+z-17=0. \end{cases}$$

Знайти напрямний вектор цієї прямої.

$\ulcorner$ За напрямний вектор прямої можна взяти векторний добуток нормальних векторів даних площин $\vec{n}_1=(2;1;-3)$ і $\vec{n}_2=(3;2;1)$:

$$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\vec{k}=$$

$$=(1\cdot1-(-3)\cdot2)\vec{i}-(2\cdot1-(-3)\cdot3)\vec{j}+(2\cdot2-1\cdot3)\vec{k}=7\vec{i}-11\vec{j}+\vec{k}.$$

Отже, напрямний вектор $\vec{s}=(7;-11;1)$. $\rfloor$

78. Пряма задана загальними рівняннями

$$\begin{cases} 3x+y-2z+3=0 \\ x+2y+3z-8=0. \end{cases}$$

Знайти її канонічні рівняння.

$\ulcorner$ Знаходимо на прямій довільну точку M_0, наприклад точку з координатою $x=0$. Підставивши це значення в загальні рівняння, отримаємо

$$\begin{cases} 3\cdot0+y-2z+3=0 \\ 0+2y+3z-8=0. \end{cases}$$

З цієї системи знаходимо координати y та z:

$$\begin{cases} y-2z=-3 \\ 2y+3z=8; \end{cases}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=1\cdot3-(-2)\cdot2=7;$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 8 & 3 \end{vmatrix}=-3\cdot3-(-2)\cdot8=7,\ y=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{7}{7}=1;$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}=1\cdot8-2\cdot(-3)=14,\ z=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{14}{7}=2.$$

Отже, точка $M_0(0;1;2)$ лежить на прямій.

Знаходимо напрямний вектор прямої. Нормальні вектори даних площин $\vec{n}_1 = (3;1;-2)$, $\vec{n}_2 = (1;2;3)$. Їх векторний добуток

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{k} =$$

$$= (1\cdot 3 - (-2)\cdot 2)\vec{i} - (3\cdot 3 - (-2)\cdot 1)\vec{j} + (3\cdot 2 - 1\cdot 1)\vec{k} = 7\vec{i} - 11\vec{j} + 5\vec{k}.$$

За знайденими точкою $M_0(0;1;2)$ та напрямним вектором $\vec{s} = (7;-11;5)$ запишемо канонічні рівняння прямої (23):

$$\frac{x}{7} = \frac{y-1}{-11} = \frac{z-2}{5}. \quad \lrcorner$$

79. Знайти точку перетину прямої $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z+1}{1}$ і площини $2x + 4y + 3z - 8 = 0$.

$\ulcorner$ Знайдемо рівняння прямої у параметричній формі:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{1} = t;$$

$$\frac{x-2}{3} = t,\ x = 2 + 3t;\ \frac{y-1}{-2} = t,\ y = 1 - 2t;\ \frac{z+1}{1} = t,\ z = -1 + t.$$

Знайдені рівняння

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 - 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$$

підставляємо в рівняння площини і знаходимо параметр точки перетину:

$$2(2+3t) + 4(1-2t) + 3(-1+t) - 8 = 0,$$

$$4 + 6t + 4 - 8t - 3 + 3t - 8 = 0, \text{ звідки } t = 3.$$

Координати точки перетину знаходяться з параметричних рівнянь:

$$\begin{cases} x = 2 + 3\cdot 3 = 11 \\ y = 1 - 2\cdot 3 = -5 \\ z = -1 + 3 = 2. \end{cases}$$

Отже, точка перетину $M(11;-5;2)$. $\lrcorner$

80. Знайти проекцію точки $P(8;-1;7)$ на площину $3x-2y+4z+4=0$ і точку, симетричну точці P відносно даної площини.

Γ Перпендикуляр PO паралельний до нормального вектора площини $\vec{n}=(3;-2;4)$ і проходить через точку P. Його рівняння має вигляд (23):

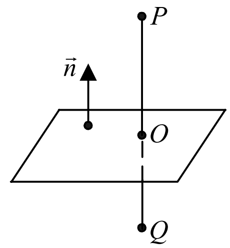


Рис. 20

$$\frac{x-8}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-7}{4}.$$

Проекцію точки P знаходимо як точку перетину прямої PO і заданої площини. Для цього спочатку записуємо параметричні рівняння прямої:

$$\frac{x-8}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-7}{4}=t;$$

$$\frac{x-8}{3}=t,\ x=8+3t;\ \frac{y+1}{-2}=t,\ y=-1-2t;\ \frac{z-7}{4}=t,\ z=7+4t.$$

Знайдені параметричні рівняння $\begin{cases} x=8+3t \\ y=-1-2t \\ z=7+4t \end{cases}$ підставляємо в рівняння площини:

$$3(8+3t)-2(-1-2t)+4(7+4t)+4=0,$$
$$24+9t+2+4t+28+16t+4=0,$$
$$58+29t=0.$$

Звідси, $t=-2$ – параметр точки перетину. Знаходимо її координати

$$\begin{cases} x=8+3\cdot(-2)=2 \\ y=-1-2\cdot(-2)=3 \\ z=7+4\cdot(-2)=-1. \end{cases}$$

Таким чином, проекція – точка $O(2;3;-1)$.

Нехай Q – точка, симетрична точці P відносно даної площини. Тоді точка O – середина відрізка PQ і тому

$$x_O=\frac{x_P+x_Q}{2},\ y_O=\frac{y_P+y_Q}{2},\ z_O=\frac{z_P+z_Q}{2},$$ звідки знаходимо

$$x_Q=2x_O-x_P,\ y_Q=2y_O-y_P,\ z_Q=2z_O-z_P.$$

Підставляючи в дані формули координати точок O та P, дістанемо

$$x_Q = 2\cdot 2 - 8 = -4,\ y_Q = 2\cdot 3 - (-1) = 7,\ z_Q = 2\cdot(-1) - 7 = -9.$$

Отже, координати симетричної точки $Q(-4;7;-9)$. $\rfloor$

81. Знайти проекцію точки $P(2;4;15)$ на пряму $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+2}{4}$ і точку, симетричну точці P відносно даної прямої.

$\ulcorner$ Через точку P проведемо площину, перпендикулярну до заданої прямої, тобто до її напрямного вектора $\vec{s} = (3;-2;4)$. Рівняння площини має вигляд (15):

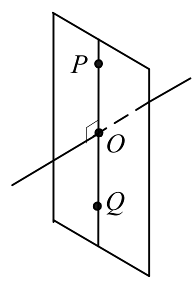


Рис. 21

$$3(x-2) - 2(y-4) + 4(z-15) = 0,$$

$$3x - 6 - 2y + 8 + 4z - 60 = 0,$$

$$3x - 2y + 4z - 58 = 0.$$

Точка O перетину цієї площини і даної прямої буде проекцією точки P, оскільки пряма PO перпендикулярна до даної прямої. Для знаходження точки перетину запишемо рівняння даної прямої у параметричній формі:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+2}{4} = t;\ \frac{x-2}{3} = t,\ x = 2 + 3t;\ \frac{y+1}{-2} = t,\ y = -1 - 2t;$$

$$\frac{z+2}{4} = t,\ z = -2 + 4t;\ \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 - 2t \\ z = -2 + 4t. \end{cases}$$

Знайдені параметричні рівняння даної прямої підставляємо у рівняння площини:

$$3(2+3t) - 2(-1-2t) + 4(-2+4t) - 58 = 0,$$

$$6 + 9t + 2 + 4t - 8 + 16t - 58 = 0,\ 29t - 58 = 0.$$

$t = 2$ – параметр точки перетину, її координати знаходимо з параметричних рівнянь

$$\begin{cases} x = 2 + 3\cdot 2 = 8 \\ y = -1 - 2\cdot 2 = -5 \\ z = -2 + 4\cdot 2 = 6. \end{cases}$$

Отже, проекція точки P – точка $O(8;-5;6)$.

Якщо Q – точка, симетрична точці P відносно даної прямої, то точка O – середина відрізка PQ і тому

$$x_O = \frac{x_P + x_Q}{2},\ y_O = \frac{y_P + y_Q}{2},\ z_O = \frac{z_P + z_Q}{2},$$

звідки знаходимо $x_Q = 2x_O - x_P$, $y_Q = 2y_O - y_P$, $z_Q = 2z_O - z_P$.
Підставляючи в дані формули координати точок O та P, дістанемо

$$x_Q = 2\cdot 8 - 2 = 14,\ y_Q = 2\cdot(-5) - 4 = -14,\ z_Q = 2\cdot 6 - 15 = -3.$$

Таким чином, координати симетричної точки $Q(14;-14;-3)$. $\lrcorner$

82. Знайти відстань від точки $P(2;-1;0)$ до прямої $\frac{x-7}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{2}$.

$\ulcorner$ Використаємо формулу (25).

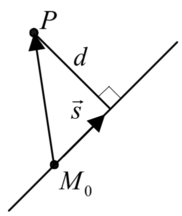


Рис. 22

$M_0(7;1;3)$, $\vec{s} = (3;4;2)$, $\overrightarrow{M_0P} = (-5;-2;-3)$.

$$\overrightarrow{M_0P}\times\vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -5 & -2 & -3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} -5 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} -5 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}\vec{k} =$$

$$= \left(-2\cdot 2 - (-3)\cdot 4\right)\vec{i} - \left(-5\cdot 2 - (-3)\cdot 3\right)\vec{j} +$$

$$+\left(-5\cdot 4 - (-2)\cdot 3\right)\vec{k} = 8\vec{i} + \vec{j} - 14\vec{k} = (8;1;-14).$$

$$\left|\overrightarrow{M_0P}\times\vec{s}\right| = \sqrt{8^2 + 1^2 + (-14)^2} = \sqrt{64+1+196} = \sqrt{261},$$

$$|\vec{s}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{9+16+4} = \sqrt{29};$$

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{M_0P}\times\vec{s}\right|}{|\vec{s}|} = \frac{\sqrt{261}}{\sqrt{29}} = \sqrt{\frac{261}{29}} = \sqrt{9} = 3. \ \lrcorner$$

83. Знайти кут між прямими $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+3}{1}$ і $\frac{x+3}{3} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-4}{6}$.

$\ulcorner$ За формулою (26) знаходимо кут між напрямними векторами $\vec{s}_1 = (2;-1;1)$ і $\vec{s}_2 = (3;-2;6)$ даних прямих:

$$\cos\varphi = \frac{2\cdot 3 + (-1)\cdot(-2) + 1\cdot 6}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 6^2}} = \frac{14}{\sqrt{6}\cdot 7} = \frac{2}{\sqrt{6}},$$

звідки $\varphi = \arccos\frac{2}{\sqrt{6}}$. $\lrcorner$

84. Знайти кут між прямою $\frac{x-2}{5} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{1}$ і площиною $x - y + z + 7 = 0$.

$\ulcorner$ $A = 1,\ B = -1,\ C = 1,\ l = 5,\ m = 1,\ n = 1$. За формулою (27) знаходимо

$$\sin\alpha = \frac{\left|1\cdot 5 + (-1)\cdot 1 + 1\cdot 1\right|}{\sqrt{5^2 + 1^2 + 1^2}\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{27}\cdot\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{81}} = \frac{5}{9},$$

звідки $\alpha = \arcsin\frac{5}{9}$. $\lrcorner$

<u>Вправи для самостійного розв'язання</u>

85. Перевірити, які з точок $M_1(3;4;0)$, $M_2(0;9;4)$, $M_3(-3;-1;0)$ лежать на прямій $\frac{x+1}{2} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-1}{1}$.

86. На прямій $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-3}$ знайти точку, у якої координата $y = -3$.

87. Знайти точки перетину прямої $\frac{x+6}{3} = \frac{y-6}{-2} = \frac{z+5}{1}$ з координатними площинами.

88. Знайти канонічні і параметричні рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(2;1;7)$ паралельно вектору $\vec{s} = (4;-1;-3)$.

89. Знайти канонічні і параметричні рівняння прямої, яка проходить через дві точки: $M_1(3;-4;2)$ і $M_2(1;2;6)$.

90. Пряма задана загальними рівняннями

$$\begin{cases} x + 3y - 2z - 6 = 0 \\ 2x + y - 4z + 3 = 0. \end{cases}$$

Знайти на цій прямій точку, у якої координата $y = 3$.

91. Пряма задана загальними рівняннями

$$\begin{cases} x+2y+3z-2=0 \\ 2x-y-2z+1=0. \end{cases}$$

Знайти напрямний вектор цієї прямої.

92. Пряма задана загальними рівняннями

$$\begin{cases} 3x-y-2z+5=0 \\ x+2y-2z+2=0. \end{cases}$$

Знайти її канонічні рівняння.

93. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+1}{-1}$ і площини $2x-3y+z-14=0$.

94. Знайти проекцію точки $P(3;-1;1)$ на площину $x+2y+2z+6=0$ і точку, симетричну точці P відносно даної площини.

95. Знайти проекцію точки $P(2;-1;0)$ на пряму $\frac{x-7}{3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-3}{2}$ і точку, симетричну точці P відносно даної прямої.

96. Знайти відстань від точки $P(2;3;-1)$ до прямої $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-4}{2}$.

97. Знайти кут між двома прямими $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+3}{2}$ і $\frac{x-1}{-3}=\frac{y+2}{6}=\frac{z+7}{2}$.

98. Знайти кут між прямою $\frac{x}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z+1}{-6}$ і площиною $x-2y+2z+7=0$.

Відповіді:

85. M_3. **86.** $M(1;-3;4)$.

87. $M_1(9;-4;0)$, $M_2(3;0;-2)$, $M_3(0;2;-3)$.

88. $\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-7}{-3}$, $\begin{cases} x=2+4t \\ y=1-t \\ z=7-3t. \end{cases}$

89. $\frac{x-3}{-2}=\frac{y+4}{6}=\frac{z-2}{4}$, $\begin{cases} x=3-2t, \\ y=-4+6t \\ z=2+4t. \end{cases}$

90. $M(1;3;2)$.

91. $\vec{s}=(-1;8;-5)$.

92. $\frac{x}{6}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-2}{7}$.

93. $M(-1;-5;1)$.

94. $O(2;-3;-1)$, $Q(1;-5;-3)$.

95. $O(4;-3;1)$, $Q(6;-5;2)$.

96. 5.

97. $\arccos\frac{4}{21}$.

98. $\arcsin\frac{5}{21}$.

4. Криві другого порядку

Рівняння кола з центром у початку координат і радіусом R (*канонічне рівняння кола*)

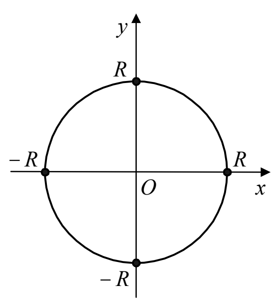
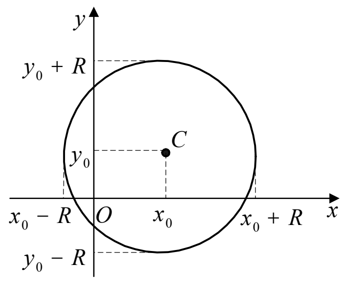


Рис. 23

$$x^2+y^2=R^2. \qquad (28)$$

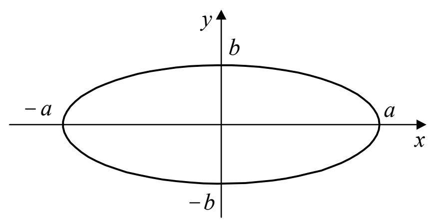
Рівняння кола з центром у точці $C(x_0; y_0)$ і радіусом R



$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \qquad (29)$$

Рис. 24

Рівняння еліпса, осі якого співпадають з осями координат і який має півосі a та b (канонічне рівняння еліпса)

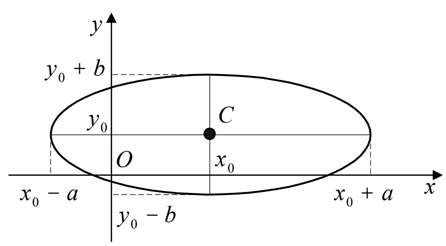


$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (30)$$

Рис. 25

(a *– велика піввісь,* b *– мала піввісь*).

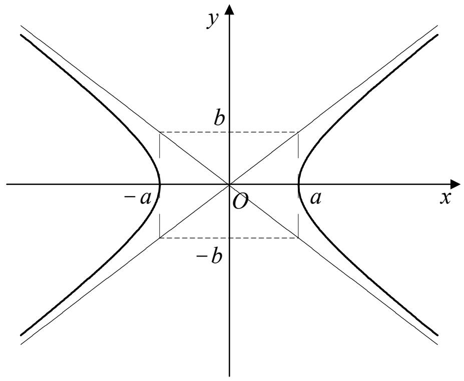
Рівняння еліпса, осі якого паралельні осям координат і який має півосі a та b і центр у точці $C(x_0; y_0)$



$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1. \qquad (31)$$

Рис. 26

Рівняння гіперболи, осі якої співпадають з осями координат і яка має півосі a та b (канонічне рівняння гіперболи)

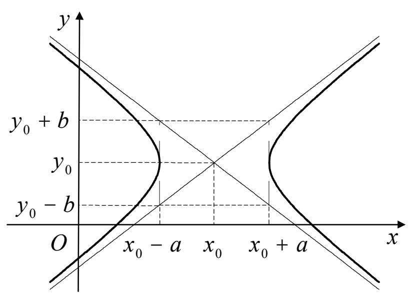


$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (32)$$

Рис. 27

(a – дійсна піввісь, b – уявна піввісь).

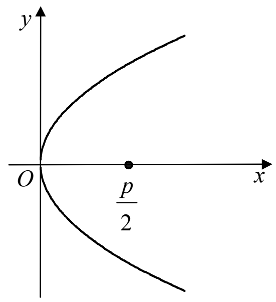
Рівняння гіперболи, осі якої паралельні осям координат і яка має півосі a та b і центр в точці $C(x_0; y_0)$



$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1. \qquad (33)$$

Рис. 28

Рівняння параболи з вершиною в початку координат і віссю, яка співпадає з додатною піввіссю Ox

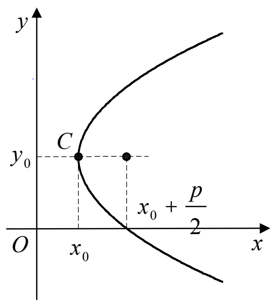


$$y^2 = 2px, \qquad (34)$$

Рис. 29

де p – параметр параболи.

Якщо вершина параболи має координати $C(x_0; y_0)$, а вісь паралельна до осі Ox, то рівняння параболи має вигляд



$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0). \qquad (35)$$

Рис. 30

99. Знайти координати центра і радіус кола, заданого рівнянням $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$.

⌈ Перетворимо дане рівняння до виду (29), виділивши повні квадрати з x та y:

$$x^2 - 4x + y^2 + 2y - 4 = 0,$$

$$x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 - 2^2 + y^2 + 2 \cdot y \cdot 1 + 1^2 - 1^2 - 4 = 0,$$

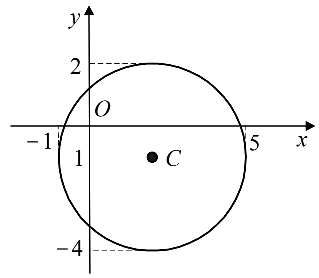


Рис. 31

$$\left(x-2\right)^2-4+\left(y+1\right)^2-1-4=0,$$

$$\left(x-2\right)^2+\left(y+1\right)^2=9.$$

Порівнюючи отримане рівняння з рівнянням (29), знаходимо $R^2=9$, $R=3$ – радіус кола, $C(2;-1)$ – центр кола. ┘

100. Знайти рівняння кола, якщо його центр має координати $C(2;3)$ і коло проходить через точку $M(5;-1)$.

┌ Рівняння кола має вигляд (29): $(x-2)^2+(y-3)^2=R^2$. Значення R^2 знайдемо з умови, що коло проходить через точку M: $(5-2)^2+(-1-3)^2=R^2$, $R^2=3^2+(-4)^2$, $R^2=25$. Отже, рівняння кола

$$(x-2)^2+(y-3)^2=25. \quad ┘$$

Зауваження. Радіус кола можна знайти як відстань між центром C і точкою M:

$$R=CM=\sqrt{\left(x_C-x_M\right)^2+\left(y_C-y_M\right)^2}=\sqrt{(2-5)^2+\left(3-(-1)\right)^2}=5.$$

101. Знайти рівняння кола, якщо точки $A(4;7)$ і $B(10;-1)$ є кінцями одного з його діаметрів.

┌ Центр кола – точка C є серединою відрізка AB:

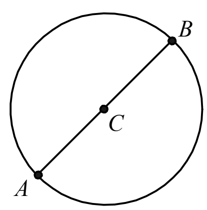


Рис. 32

$$x_C=\frac{x_A+x_B}{2},\ y_C=\frac{y_A+y_B}{2};$$

$$x_C=\frac{4+10}{2}=7,\ y_C=\frac{7+(-1)}{2}=3.$$

Отже, $C(7;3)$.

Радіус кола

$$R=AC=\sqrt{\left(x_A-x_C\right)^2+\left(y_A-y_C\right)^2}=$$

$$=\sqrt{(4-7)^2+(7-3)^2}=\sqrt{9+16}=5.$$

За формулою (29) рівняння кола має вигляд $(x-7)^2+(y-3)^2=25$. ⌋

102. Знайти рівняння еліпса, осі якого співпадають з осями координат і який проходить через точки $M_1\left(4;-\sqrt{3}\right)$ і $M_2\left(2\sqrt{2};3\right)$.

Γ Рівняння має вигляд (30): $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Значення a^2 та b^2 знайдемо з умови, що координати точок $M_1\left(4;-\sqrt{3}\right)$ і $M_2\left(2\sqrt{2};3\right)$ задовольняють це рівняння:

$$\begin{cases}\dfrac{4^2}{a^2}+\dfrac{\left(-\sqrt{3}\right)^2}{b^2}=1\\ \dfrac{\left(2\sqrt{2}\right)^2}{a^2}+\dfrac{3^2}{b^2}=1,\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{16}{a^2}+\dfrac{3}{b^2}=1\\ \dfrac{8}{a^2}+\dfrac{9}{b^2}=1,\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{16}{a^2}\right)\\ \dfrac{8}{a^2}+9\cdot\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{16}{a^2}\right)=1,\end{cases}$$

$$\frac{8}{a^2}+3-\frac{48}{a^2}=1,\ -\frac{40}{a^2}=-2,\ \frac{1}{a^2}=\frac{1}{20},\ a^2=20;$$

$$\frac{1}{b^2}=\frac{1}{3}\left(1-16\cdot\frac{1}{20}\right)=\frac{1}{3}\left(1-\frac{4}{5}\right)=\frac{1}{15},\ b^2=15.$$

Отже, рівняння еліпса $\dfrac{x^2}{20}+\dfrac{y^2}{15}=1$. ⌋

103. Знайти координати центра і півосі еліпса, заданого рівнянням $16x^2-25y^2+32x-100y-284=0$.

Γ Зведемо рівняння до виду (31). Для цього виділимо в рівнянні повні квадрати з x та y :

$$16x^2+25y^2+32x-100y-284=0,$$

$$16\left(x^2+2x\right)+25\left(y^2-4y\right)-284=0,$$

$$16\left(x^2+2x+1^2-1^2\right)+25\left(y^2-4y+2^2-2^2\right)-284=0,$$

$$16(x+1)^2-16+25(y-2)^2-100-284=0,$$

$$16(x+1)^2+25(y-2)^2=400,$$

$$\frac{(x+1)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{16}=1.$$

Порівнюючи отримане рівняння з (31), знаходимо координати центра $x_0 = -1$, $y_0 = 2$ і півосі $a = 5$, $b = 4$. $\rfloor$

104. Знайти рівняння гіперболи, осі якої співпадають з осями координат і яка проходить через точки $M_1(6;-1)$ і $M_2\left(-8;2\sqrt{2}\right)$.

$\ulcorner$ Рівняння буде мати вигляд (32): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Координати точок M_1 та M_2 задовольняють це рівняння:

$$\begin{cases} \frac{6^2}{a^2} - \frac{(-1)^2}{b^2} = 1 \\ \frac{(-8)^2}{a^2} - \frac{\left(2\sqrt{2}\right)^2}{b^2} = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{36}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1 \\ \frac{64}{a^2} - \frac{8}{b^2} = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{b^2} = \frac{36}{a^2} - 1 \\ \frac{64}{a^2} - 8\left(\frac{36}{a^2} - 1\right) = 1, \end{cases}$$

$$\frac{64}{a^2} - \frac{288}{a^2} + 8 = 1, \quad \frac{-224}{a^2} = -7, \quad a^2 = \frac{-224}{-7} = 32.$$

$$\frac{1}{b^2} = \frac{36}{32} - 1, \quad \frac{1}{b^2} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}, \quad b^2 = 8.$$

Отже, рівняння гіперболи $\frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{8} = 1$. $\rfloor$

105. Знайти координати центра і півосі гіперболи, заданої рівнянням $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$.

$\ulcorner$ Зведемо дане рівняння до виду (33). Для цього виділимо повні квадрати з x та y:

$$16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0,$$

$$16x^2 - 64x - 9y^2 - 54y - 161 = 0,$$

$$16\left(x^2 - 4x\right) - 9\left(y^2 + 6y\right) - 161 = 0,$$

$$16\left(x^2 - 2\cdot x\cdot 2 + 2^2 - 2^2\right) - 9\left(y^2 + 2\cdot y\cdot 3 + 3^2 - 3^2\right) - 161 = 0,$$

$$16(x-2)^2 - 16\cdot 4 - 9(y+3)^2 + 9\cdot 9 - 161 = 0,$$

$$16(x-2)^2 - 9(y+3)^2 = 144,$$

$$\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+3)^2}{16} = 1.$$

Порівнюючи отримане рівняння з (33), знаходимо координати центра $x_0 = 2$, $y_0 = 3$ і півосі $a = 3$, $b = 4$. ⌋

106. Знайти рівняння параболи, вершина якої знаходиться у початку координат, а вісь співпадає з віссю Ox, і яка проходить через точку $M(2;-4)$.

⌈ Рівняння параболи буде мати вигляд (34): $y^2 = 2px$. Значення p знайдемо з умови, що парабола проходить через точку M, і її координати задовольняють це рівняння: $(-4)^2 = 2p \cdot 2$, $16 = 4p$, $p = 4$.

Отже, рівняння параболи $y^2 = 8x$. ⌋

107. Знайти рівняння параболи, вершина якої знаходиться в точці $C(2;3)$, а вісь паралельна до осі Ox, і яка проходить через точку $M(4;-1)$.

⌈ Рівняння параболи буде мати вигляд (35): $(y-y_0)^2 = 2p(x-x_0)$. Так як координати вершини C – $x_0 = 2$, $y_0 = 3$, то $(y-3)^2 = 2p(x-2)$. Значення p знайдемо з умови, що парабола проходить через точку M, і координати цієї точки задовольняють рівняння параболи: $(-1-3)^2 = 2p(4-2)$, $16 = 4p$, $p = 4$.

Отже, рівняння параболи $(y-3)^2 = 8(x-2)$. ⌋

108. Знайти координати вершини і параметр параболи, заданої рівнянням $y^2 - 8x + 4y - 4 = 0$.

⌈ Зведемо дане рівняння до вигляду (35):

$$y^2 - 8x + 4y - 4 = 0,$$

$$y^2 + 4y - 8x - 4 = 0,$$

$$y^2 + 2 \cdot y \cdot 2 + 2^2 - 2^2 - 8x - 4 = 0,$$

$$(y+2)^2 - 8x - 8 = 0,$$

$$(y+2)^2 = 8(x+1).$$

Порівнюючи отримане рівняння з формулою (35), знаходимо $x_0 = -1$, $y_0 = -2$, $2p = 8$. Отже, координати вершини параболи $C(-1;-2)$, параметр – $p = 4$. ⌋

Вправи для самостійного розв’язання

109. Знайти координати центра і радіус кола, заданого рівнянням $x^2+y^2+6x-4y+9=0$.

110. Знайти рівняння кола, що проходить через точку $M(4;2)$ і має центр $C(3;-1)$.

111. Знайти рівняння кола, якщо точки $A(3;1)$ і $B(-5;5)$ є кінцями одного з його діаметрів.

112. Знайти рівняння еліпса, осі якого співпадають з осями координат і який проходить через точки $A\left(-2\sqrt{3};1\right)$ та $B\left(2\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$.

113. Знайти координати центра і півосі еліпса, заданого рівнянням $5x^2+9y^2-30x+18y+9=0$.

114. Знайти рівняння гіперболи, осі якої співпадають з осями координат і яка проходить через точки $A\left(\sqrt{10};-2\right)$ та $B\left(4\sqrt{2};4\sqrt{3}\right)$.

115. Знайти координати центра і півосі гіперболи, заданої рівнянням $4x^2-9y^2-16x-18y-29=0$.

116. Знайти рівняння параболи, вершина якої знаходиться у початку координат, а вісь співпадає з віссю Ox, і яка проходить через точку $M(3;6)$.

117. Знайти рівняння параболи, вершина якої знаходиться в точці $C(1;-2)$, а вісь паралельна до осі Ox, і яка проходить через точку $M(7;4)$.

118. Знайти координати вершини і параметр параболи, заданої рівнянням $y^2-10x-6y+19=0$.

Відповіді:

109. $(x+3)^2+(y-2)^2=4$. **110.** $(x-3)^2+(y+1)^2=10$.

111. $(x+1)^2+(y-3)^2=20$. **112.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$.

113. $C(3;-1)$, $a=3$, $b=\sqrt{5}$. **114.** $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{16}=1$.

115. $C(2;-1)$, $a=3$, $b=2$. **116.** $y^2=12x$.

117. $(y+2)^2=6(x-1)$. **118.** $C(1;3)$, $p=5$.

Розділ 4. ФУНКЦІЯ. ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ

1. Функції однієї змінної та їх властивості

Нехай X – непорожня множина дійсних чисел. Якщо кожному числу $x \in X$ за певним правилом ставиться у відповідність єдине число y, то кажуть, що задано *функцію* f з *областю визначення* X. Для позначення функції використовують запис $y = f(x)$. При цьому x називають *незалежною змінною* або *аргументом* функції f, y – *залежною змінною* або *значенням функції* в точці x. Область визначення X позначають $D(f)$, а *множину значень* – $E(f) = \{y : y = f(x), x \in X\}$.

Послідовністю називають функцію з областю визначення $X = \{1, 2, \ldots\}$. Позначають послідовність символом $\{x_n\}$.

Графіком функції $y = f(x)$ називають множину точок площини xOy з координатами $(x; f(x))$, де $x \in D(f)$.

Якщо функціональна залежність y від x задана рівнянням $y = f(x)$, з якого можна виразити x як функцію змінної y – $x = \varphi(y)$, то функцію $x = \varphi(y)$ називають *оберненою* до функції $y = f(x)$ і позначають $x = f^{-1}(y)$. Тут y – незалежна змінна, а x – залежна. Якщо перепозначити звичним чином залежну і незалежну змінні, то графіки функцій $f(x)$ та $f^{-1}(x)$ будуть симетричними відносно прямої $y = x$.

Основними елементарними функціями називають наступні функції:

1) Стала функція $y = c$, $c \in R$.

$D(f): x \in R$; $E(f): y \in \{c\}$.

2) Степенева функція $y = x^{\alpha}$, $\alpha \in R$ (рис. 1).

Область визначення та множина значень степеневої функції залежать від значення показника α: наприклад, при цілому додатному α $D(f)$: $x \in (-\infty, +\infty)$; при цілому від'ємному α $D(f)$: $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

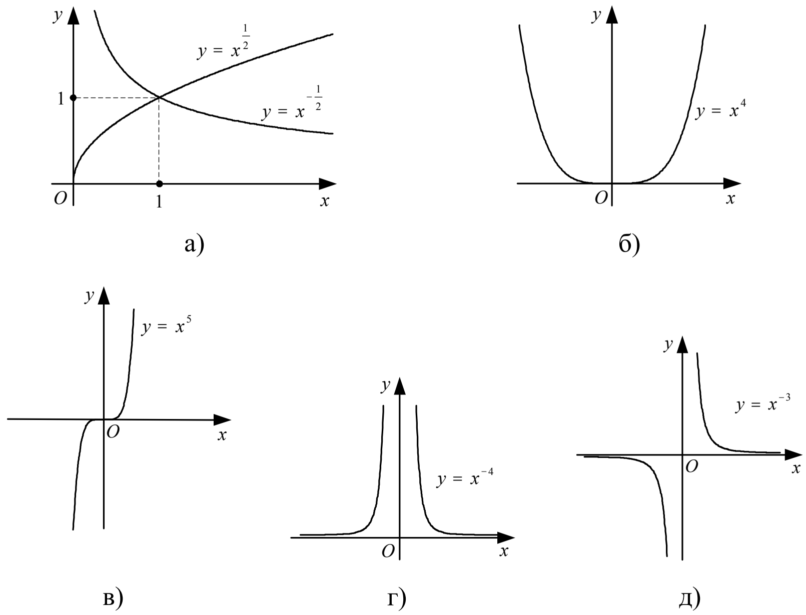


Рис. 1

3) Показникова функція $y = a^x$, де $a \in R$, $a > 0$, $a \neq 1$ (рис. 2).

$D(f): x \in R$; $E(f): y \in (0, +\infty)$.

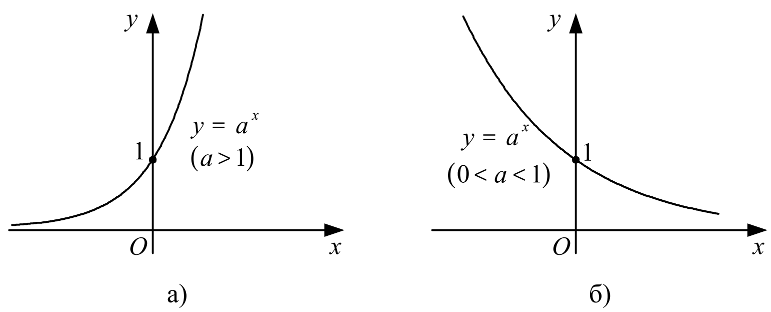
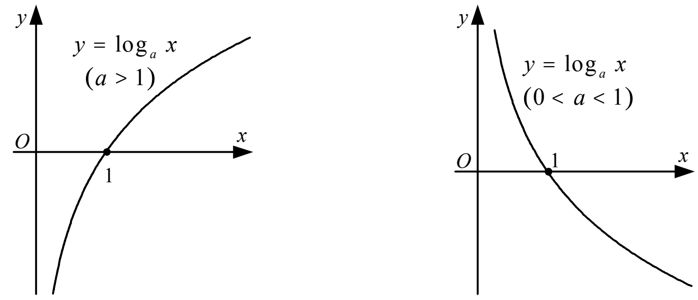


Рис. 2

4) Логарифмічна функція $y = \log_a x$, де $a \in R$, $a > 0, a \neq 1$ (рис. 3).

$D(f): x \in (0, +\infty)$; $E(f): y \in R$.



а) б)

Рис. 3

5) Тригонометричні функції:

*) синус $y = \sin x$ (рис. 4 а).

$D(f): x \in R$; $E(f): y \in [-1, 1]$;

*) косинус $y = \cos x$ (рис. 4 б).

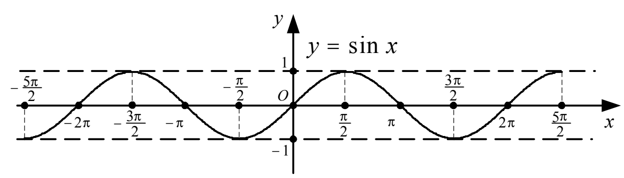
$D(f): x \in R$; $E(f): y \in [-1, 1]$;

*) тангенс $y = \mathrm{tg}\, x$ (рис. 4 в).

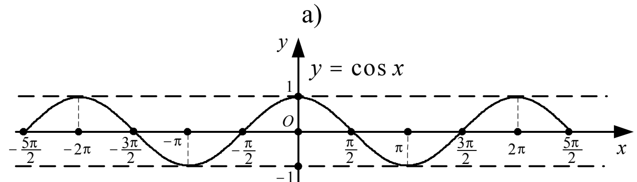
$$D(f): x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k\right), \ k \in Z; \quad E(f): y \in R;$$

*) котангенс $y = \mathrm{ctg}\, x$ (рис. 4 г).

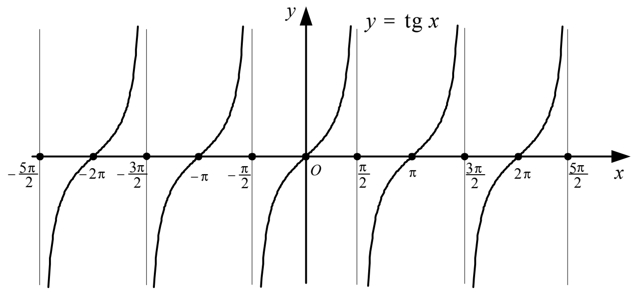
$D(f): x \in (\pi k, \pi + \pi k)$, $k \in Z$; $E(f): y = R$.



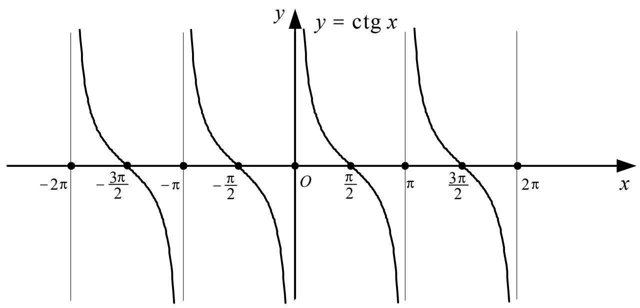
а)



б)



в)



г)

Рис. 4

6) Обернені тригонометричні функції:

*) арксинус $y = \arcsin x$ (рис. 5 а).

$$D(f): x \in [-1, 1]; \quad E(f): y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right];$$

*) арккосинус $y = \arccos x$ (рис. 5 б).

$$D(f): x \in [-1, 1]; \quad E(f): y \in [0, \pi];$$

*) арктангенс $y = \operatorname{arctg} x$ (рис. 5 в).

$$D(f): x \in R; \quad E(f): y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right);$$

*) арккотангенс $y = \operatorname{arcctg} x$ (рис. 5 г).

$$D(f): x \in R; \quad E(f): y \in (0, \pi).$$

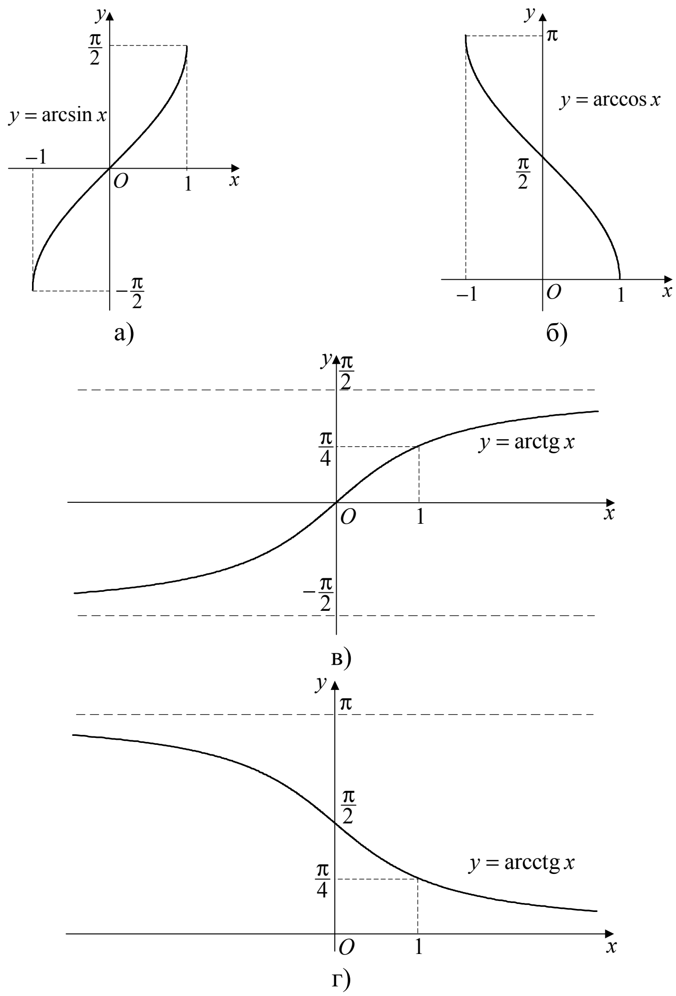


Рис. 5

Елементарними називають функції, що одержуються з основних елементарних функцій за допомогою операцій додавання, віднімання, множення, ділення та операції утворення складної функції, які застосовуються скінченну кількість разів. Операція утворення *складної* функції полягає у наступному: якщо $y = f(u)$, а $u = g(x)$, то функція $y = f(g(x))$ – складна (її ще називають *суперпозицією* функцій).

Функцію $f(x)$ називають *парною* (*непарною*), якщо її область визначення симетрична відносно нуля і для довільного $x \in D(f)$ $f(-x) = f(x)$ $\left(f(-x) = -f(x)\right)$. Графік парної функції симетричний відносно осі Oy, графік непарної – відносно початку координат.

Функцію $f(x)$ називають *періодичною*, якщо існує таке число $T \neq 0$, що для довільного $x \in D(f)$:

1) $(x+T) \in D(f)$;

2) $f(x+T) = f(x)$.

Число T при цьому називають *періодом* функції $f(x)$, а найменше додатне число T_0, для якого виконуються вказані умови – *основним періодом* функції.

Якщо основний період функції $y = f(x)$ дорівнює T_0, то основний період функції $y = f(kx+b)$ знаходиться за формулою $T = \frac{T_0}{k}$.

1. Задано функцію $f(x) = \frac{x+3}{x-1}$. Знайти: $f(0)$; $f(2)$; $f\left(\frac{1}{2}\right)$; $f(a)$. Чи існує значення $f(1)$?

⌈ Обчислимо значення функції $f(x)$ у вказаних точках, підставляючи замість x в аналітичний вираз функції $\frac{x+3}{x-1}$ задані значення аргументу:

$$f(0) = \frac{0+3}{0-1} = \frac{3}{-1} = -3; \qquad f(2) = \frac{2+3}{2-1} = \frac{5}{1} = 5;$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}+3}{\frac{1}{2}-1} = \frac{\frac{7}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\frac{7}{2}\cdot\frac{2}{1} = -7; \qquad f(a) = \frac{a+3}{a-1}.$$

Значення $f(1)$ не існує, оскільки ділення на нуль змісту не має. ⌋

2. Записати перші чотири члени послідовності, заданої загальним членом

$$x_n = (-1)^n \frac{1}{n}.$$

⌜ Підставляємо у формулу загального члена послідовності замість n по черзі натуральні числа $1, 2, 3, 4$:

$x_1 = (-1)^1 \frac{1}{1} \Rightarrow x_1 = -1$;

$x_2 = (-1)^2 \frac{1}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}$;

$x_3 = (-1)^3 \frac{1}{3} \Rightarrow x_3 = -\frac{1}{3}$;

$x_4 = (-1)^4 \frac{1}{4} \Rightarrow x_4 = \frac{1}{4}$. ⌟

3. Записати формулу загального члена послідовності:

$$\frac{1}{2};\ -\frac{2}{3};\ \frac{3}{4};\ -\frac{4}{5};\dots.$$

⌜ Знак члена послідовності можна охарактеризувати виразом $(-1)^{n+1}$, а чисельник і знаменник пов'язані з номером члена послідовності наступним чином: $\frac{n}{n+1}$. Тому $x_n = (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}$. ⌟

4. Задано функції $y = u^2$, $u = x + 3$. Виразити y як функцію змінної x.

⌜ Будуємо аналітичний вираз складної функції, підставляючи замість u у функцію $y(u)$ значення $u = x + 3$:

$$y = (x+3)^2 \quad \text{або} \quad y = x^2 + 6x + 9.$$ ⌟

5. Подати складну функцію $y = \sin^2 x$ у вигляді ланцюжка основних елементарних функцій.

⌜ Записуючи аналітичний вираз функції у вигляді $y = (\sin x)^2$, бачимо, що $y = u^2$, $u = \sin x$. ⌟

6. Знайти області визначення функцій:

1) $y=\sqrt{x-1}$; 2) $y=\log_3(x+2)$;

3) $y=\dfrac{x+3}{x-1}$; 4) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\arcsin 2x$.

Γ 1) Область визначення функції $y=\sqrt{x}$ відома – $D(f): x\geq 0$. У випадку функції $y=\sqrt{x-1}$ ця умова набуває вигляду: $x-1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1$.

Отже, $D(f): x\in[1,+\infty)$.

2) Скористаємось тим, що для функції $y=\log_a x$ $(a\in R,\ a>0,\ a\neq 1)$ область визначення $D(f): x>0$. Тому $x+2>0 \Leftrightarrow x>-2$.

Отже, $D(f): x\in(-2,+\infty)$.

3) Оскільки для $y=\dfrac{1}{x}$ $D(f): x\neq 0$, то у нашому випадку $x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$.

Тому $D(y): x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

4) Для існування функції слід вимагати виконання системи нерівностей, кожна з яких враховує область визначення відповідної основної елементарної функції:

$$\begin{cases}\sqrt{x}\neq 0\\ x\geq 0\\ -1\leq 2x\leq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq 0\\ x\geq 0\\ -\dfrac{1}{2}\leq x\leq\dfrac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>0\\ -\dfrac{1}{2}\leq x\leq\dfrac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow 0<x\leq\frac{1}{2}.$$

Отже, $D(f): x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$. $\lrcorner$

7. Дослідити функції на парність і непарність:

1) $y=\dfrac{x+3}{x-1}$; 2) $y=x^3+x$;

3) $y=x^6+x$; 4) $y=|x|\cdot\cos x$.

Γ 1) Область визначення даної функції (див. вправу 6) $x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ – не є симетричною відносно нуля. Тому функція ані парна, ані непарна (у цьому випадку ще кажуть, що функція $f(x)$ *загального вигляду*).

2) Область визначення функції $x \in R$ – симетрична відносно нуля. Тому обчислимо $f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x = -(x^3 + x)$.

Оскільки виконується умова $f(-x) = -f(x)$, то дана функція непарна.

3) Область визначення функції $x \in R$ – симетрична відносно нуля. Але вираз $f(-x) = (-x)^6 + (-x) = x^6 - x$ не дорівнює $-f(x) = -(x^6 + x)$ і не дорівнює $f(x) = x^6 + x$. Тому функція $f(x)$ ані парна, ані непарна.

4) Область визначення $x \in R$. Оскільки $f(-x) = |-x|\cos(-x) = |x|\cos x = f(x)$, то функція $f(x)$ – парна. ⌟

8. Знайти основні періоди функцій:

1) $y = \cos 3x$; 2) $y = \operatorname{tg}\frac{x}{4}$.

⌜ 1) Оскільки основний період функції $\cos x$ дорівнює 2π, то основним періодом функції $y = \cos 3x$ є число $T = \frac{2\pi}{3}$.

2) Основний період функції $\operatorname{tg} x$ дорівнює π. Тому основним періодом функції $y = \operatorname{tg}\frac{x}{4}$ є число $T = \frac{\pi}{\frac{1}{4}} = 4\pi$. ⌟

9. Дослідити функцію $y = \sin x^2$ на періодичність.

⌜ Припустимо, що функція y – періодична, тобто існує така стала $T > 0$, для якої $y(x+T) = y(x)$ для всіх x. Тоді для заданої функції маємо:

$$\sin(x+T)^2 = \sin x^2 \Leftrightarrow \quad \sin(x+T)^2 - \sin x^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\cos\frac{(x+T)^2 + x^2}{2}\sin\frac{(x+T)^2 - x^2}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\left(x^2+xT+\frac{T^2}{2}\right)\sin\left(xT+\frac{T^2}{2}\right)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l}\cos\left(x^2+xT+\dfrac{T^2}{2}\right)=0\\ \sin\left(xT+\dfrac{T^2}{2}\right)=0.\end{array}\right.$$

Але, розв'язуючи кожне з цих рівнянь відносно T, ми одержимо значення T, яке залежить від x. А це суперечить припущенню, зробленому на початку розв'язання, що T – стала. Отже, припущення не вірне. Функція неперіодична. ⌋

10. Знайти функції, обернені до заданих:

1) $y=3x+1$; 2) $y=e^{4x}$.

⌈ 1) Виразимо з рівняння $y=3x+1$ змінну x через y: $y-1=3x$, $\dfrac{y-1}{3}=x$. Звідси шляхом заміни y на x та x на y одержуємо шукану обернену функцію $y=\dfrac{x-1}{3}$.

2) Прологарифмуємо обидві частини рівняння $y=e^{4x}$ за основою e:

$\ln y=\ln e^{4x} \Leftrightarrow \ln y=4x \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{4}\ln y$. Отже, оберненою до функції $y=e^{4x}$ є функція $y=\dfrac{1}{4}\ln x$.

Вправи для самостійного розв'язання

11. Задано функцію $f(x)=x^2-4$. Знайти значення $f(0)$; $f(3)$; $f(a)$.

12. Задано функцію $\varphi(t)=ta^{-t}$. Знайти значення $\varphi(0)$; $\varphi(1)$; $\varphi\left(\dfrac{1}{a}\right)$; $\varphi(-a)$.

13. Записати перші п'ять членів послідовності, заданої формулою загального члена $x_n=\dfrac{3n-1}{2n+5}$.

14. Записати формулу загального члена послідовності:

1) $1;\ -\frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ -\frac{1}{4};\ \frac{1}{5};\ldots;$

2) $-1;\ 0;\ -1;\ 0;\ -1;\ldots.$

15. Задано функції $y=\frac{1}{\sqrt{z^2+1}}$, $z=\operatorname{tg}x$. Виразити y як функцію змінної x.

16. Подати складні функції за допомогою ланцюжків основних елементарних функцій:

1) $y=\sqrt{\cos x}$; 2) $y=e^{\operatorname{tg}^2 x}$.

17. Знайти області визначення функцій:

1) $y=\sqrt[3]{x+2}$; 2) $y=\frac{1}{x^2+1}$; 3) $y=\sqrt{4-x^2}$;

4) $y=\arccos\frac{x}{2}$; 5) $y=\frac{\sqrt{2-x}}{\log_2 x}$; 6) $y=\sin x+\frac{e^x}{\sqrt{|x|-2}}$.

18. Дослідити функції на парність та непарність:

1) $y=7x$; 2) $y=2x+1$; 3) $y=x^2\sin x$;

4) $y=\sqrt[3]{x}+x$; 5) $y=\ln\frac{x+1}{x-1}$; 6) $y=3^x+3^{-x}$.

19. Знайти основні періоди функцій:

1) $y=\cos\frac{x}{2}$; 2) $y=\operatorname{ctg}3x$.

20. Знайти функції, обернені до заданих:

1) $y=\frac{x}{2}$; 2) $y=x^2+1$; 3) $y=\frac{1}{x+2}$; 4) $y=2+\operatorname{arctg}\frac{x}{3}$.

Відповіді:

11. -4; 5; a^2-4.

12. 0; $\frac{1}{a}$; $a^{-\frac{a+1}{a}}$; $-a^{a+1}$.

13. $\frac{2}{7}$; $\frac{5}{9}$; $\frac{8}{11}$; $\frac{11}{13}$; $\frac{14}{15}$.

14. 1) $(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$; 2) $\frac{(-1)^n-1}{2}$.

15. $y=|\cos x|$.

16. 1) $y=\sqrt{u}$, $u=\cos x$; 2) $y=e^u$, $u=v^2$, $v=\operatorname{tg}x$.

17. 1) R; 2) R; 3) $[-2,2]$; 4) $[-2,2]$; 5) $(0,1)\cup(1,2]$; 6) $(-\infty,-2)\cup(2+\infty)$.

18. 1) непарна; 2) загального вигляду; 3) непарна; 4) непарна; 5) непарна; 6) парна.

19. 1) 4π; 2) $\dfrac{\pi}{3}$.

20. 1) $y=2x$; 2) $y=\sqrt{x-1}$; 3) $y=\dfrac{1-2y}{y}$; 4) $y=3\operatorname{tg}(y-2)$.

2. Побудова графіків функцій

При побудові графіків функцій використовують наступні прийоми: а) побудова "за точками" (для чого надають незалежній змінній кількох значень $x=x_1$, $x=x_2$, $x=x_3$, …, $x=x_n$; обчислюють відповідні значення функції $y_1=f(x_1)$, $y_2=f(x_2)$, $y_3=f(x_3)$, …, $y_n=f(x_n)$; будують в системі координат точки $(x_1;\,y_1)$, $(x_2;\,y_2)$, $(x_3;\,y_3)$, …, $(x_n;\,y_n)$, які сполучають плавною лінією); б) перетворення графіків (зсув, розтяг); в) дії над графіками ("додавання", "віднімання", "множення" графіків).

Якщо функція є парною або непарною, то побудова графіка спрощується завдяки його симетричності (див. підрозділ 1).

За відомим графіком функції $y=f(x)$ можна побудувати графіки функцій:

1) $y=f(-x)$ – графік симетричний графіку функції $y=f(x)$ відносно осі Oy;

2) $y=-f(x)$ – графік симетричний графіку функції $y=f(x)$ відносно осі Ox;

3) $y=f(x-a)$ – графік зсунутий відносно графіка функції $y=f(x)$ вздовж осі Ox на величину a (при $a>0$ зсув вправо, при $a<0$ – вліво);

4) $y = f(x) + b$ – графік зсунутий відносно графіка функції $f(x)$ вздовж осі Oy на величину b (при $b > 0$ зсув вгору, при $b < 0$ – вниз);

5) $y = A f(x)$ – графік розтягнутий відносно графіка функції $f(x)$ в A разів вздовж осі Oy;

6) $y = f(kx)$ $(k > 0)$ – графік розтягнутий відносно графіка функції $f(x)$ в $\dfrac{1}{k}$ разів вздовж осі Ox.

За допомогою вказаних перетворень можна побудувати графік складної функції вигляду $y = A f\big(k(x-a)\big) + b$, якщо відомий графік функції $y = f(x)$.

21. Побудувати графік функції $y = 2x + 1$.

⌐ Дана функція ані парна, ані непарна (див. задачу 18) і визначена на всій множині дійсних чисел. Оскільки графіком лінійної функції є пряма, то для її побудови достатньо знати лише дві точки цієї прямої.

Виберемо два довільні значення аргументу і обчислимо відповідні значення функції:

x	y
0	1
2	5

Побудуємо в координатній площині точки $M_1(0;1)$ та $M_2(2;5)$. Вони і визначать пряму, яка є графіком заданої функції (рис. 6). ⌋

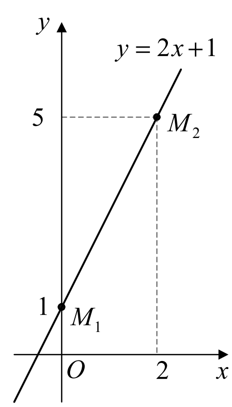


Рис. 6

22. Побудувати графік функції $y = x^2$.

⌐ Оскільки функція парна, то достатньо побудувати частину графіка для значень $x \ge 0$, а потім симетрично відобразити її відносно осі Oy.

Виберемо кілька невід'ємних значень аргументу і обчислимо відповідні значення функції:

x	y
0	0
1	1
2	4
3	9

Зобразимо точки $(0;\,0)$, $(1;\,1)$, $(2;\,4)$, $(3;\,9)$ в системі координат і сполучимо їх плавною лінією.

Побудуємо лінію симетричну одержаній лінії відносно осі Oy.

Одержану лінію (рис. 7), яка є графіком функції $y = x^2$, називають параболою. ⌋

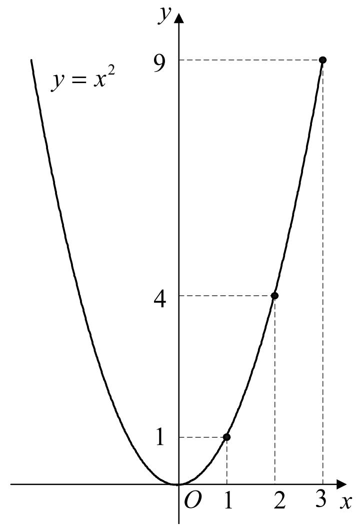


Рис. 7

23. За відомим графіком функції $y = x^2$ побудувати графіки функцій: 1) $y = 2x^2$; 2) $y = (x-1)^2$; 3) $y = -x^2$; 4) $y = x^2 - 1$.

⌈ Використовуючи відомий графік функції $y = x^2$ (рис. 7) та наведені вище перетворення графіків нам слід:

у випадку 1) здійснити розтяг у 2 рази вздовж осі Oy (рис. 8);

у випадку 2) – зсув на 1 одиницю вправо вздовж осі Ox (рис. 9);

у випадку 3) – симетричне відображення відносно осі Ox (рис. 10);

у випадку 4) – зсув на 1 одиницю вниз вздовж осі Oy (рис. 11). ⌋

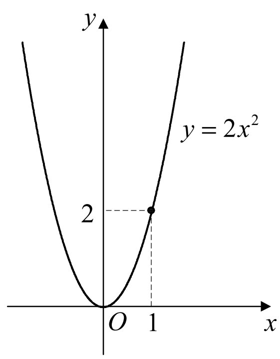


Рис. 8

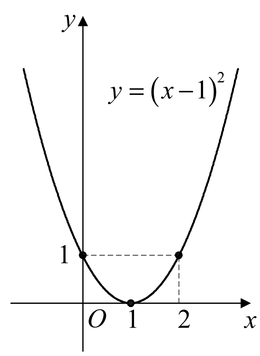


Рис. 9

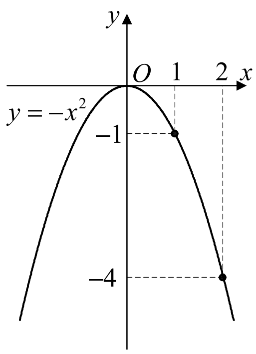


Рис. 10

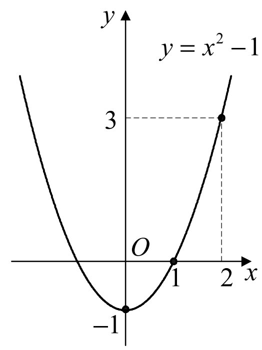


Рис. 11

24. Побудувати графік функції $y = \dfrac{1}{x}$.

⌐ Оскільки дана функція непарна, то виберемо кілька додатних значень аргументу та обчислимо відповідні значення функції:

x	y
$\frac{1}{3}$	3
$\frac{1}{2}$	2
1	1
2	$\frac{1}{2}$

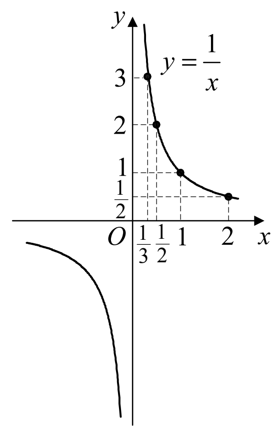


Рис. 12

Зобразимо відповідні точки в системі координат і сполучимо їх плавною лінією. Використовуючи симетричність графіка відносно початку координат, одержуємо графік функції, зображений на рис. 12. ⌋

25. Побудувати графік функції $y = e^{x-2}$.

⌈ Схематичний графік показникової функції $y = e^x$ ($y = a^x$, $a > 1$) зображений на рис. 2. Здійснюючи зсув цього графіка на 2 одиниці вправо вздовж осі Ox одержимо графік функції $y = e^{x-2}$ (рис. 13). ⌋

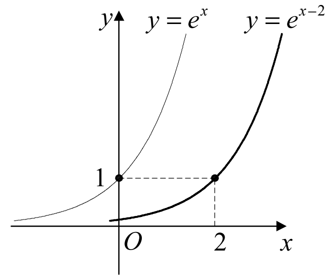


Рис. 13

26. Побудувати графік функції $y = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$.

⌈ Подамо задану функцію у вигляді $y = 2\sin 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. Графік функції $y = \sin x$ нам відомий (рис. 4). Графік функції $y = \sin 2x$ одержиться з початкового стисканням вздовж осі Ox у два рази. Графік $y = \sin 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ побудуємо зсувом попереднього на $\frac{\pi}{4}$ вправо і розтягом у два рази останнього графіка вздовж осі Oy отримаємо шуканий графік функції $y = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 14). ⌋

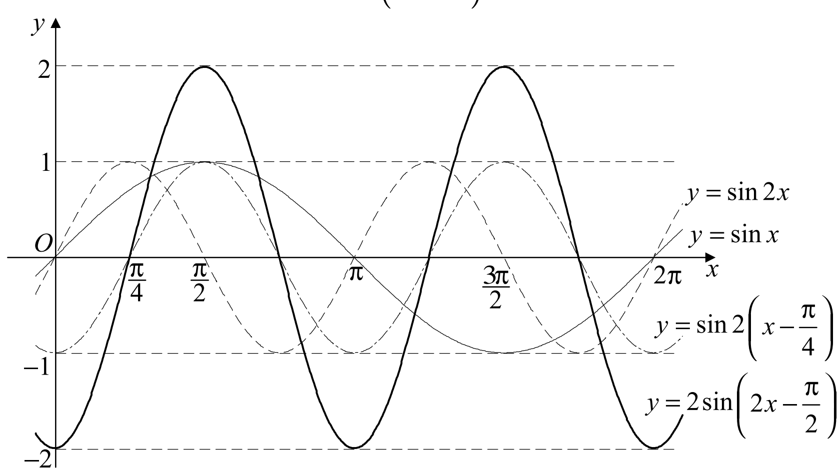


Рис. 14

27. Побудувати графік функції

$$y = \begin{cases} x+1, & \text{якщо } x \le 1, \\ 2, & \text{якщо } 1 < x < 2, \\ -x+4, & \text{якщо } x \ge 2. \end{cases}$$

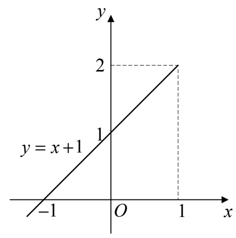
⌈ Дана функція не є елементарною.

При $x \le 1$ функція задана рівнянням $y = x + 1$ ї її графіком є промінь (рис. 15 а).

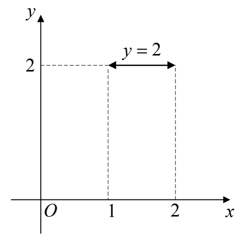
При $1 < x < 2$ функція задана рівнянням $y = 2$ і її графіком є пряма, на якій потрібно взяти відрізок, що відповідає значенням аргументу $x \in [1, 2]$ з виколотими кінцями (рис. 15 б) (ми позначимо виколоті точки стрілками на кінцях відрізка).

При $x \ge 2$ функція задана рівнянням $y = -x + 4$ і її графіком є промінь (рис. 15 в).

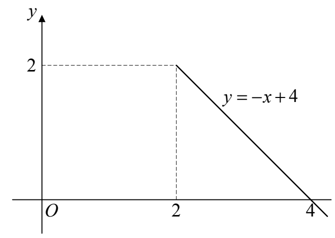
"Збираючи" побудовані окремо частини, отримаємо графік заданої функції, який зображений на рис. 15 г. ⌋



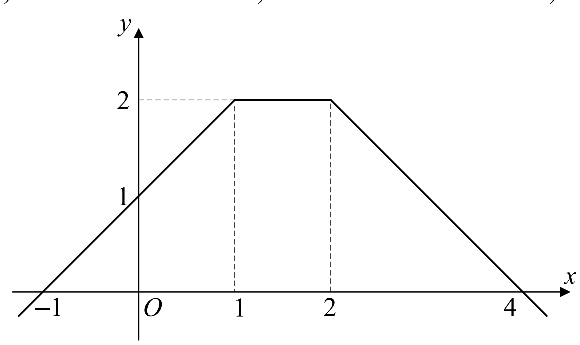
а)



б)



в)

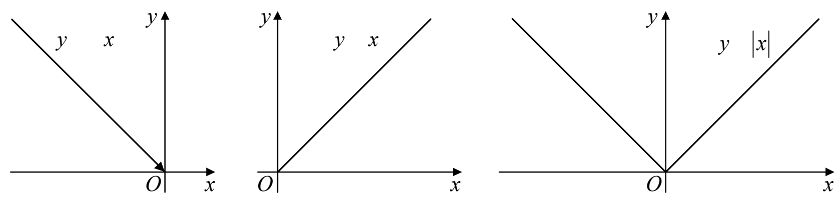


г)

Рис. 15

28. Побудувати графіки функцій: 1) $y = |x|$; 2) $y = |x-1|$.

⌐ 1) Подаючи дану функцію у вигляді $y = \begin{cases} -x, & \text{якщо } x < 1, \\ x, & \text{якщо } x \geq 1, \end{cases}$ отримаємо можливість реалізувати описану у попередньому прикладі процедуру, яка ілюструється рис. 16.



а) б) в)

Рис. 16

2) Зсувом графіка функції $y = |x|$ (рис. 16 в)) на одиницю вправо одержимо графік функції $y = |x-1|$ (рис. 17). ⌋

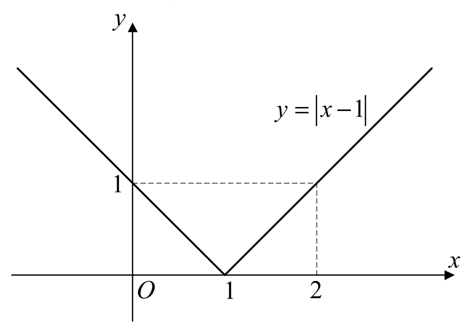


Рис. 17

29. Побудувати графік функції $y = x + \cos x$.

⌐ Графік заданої функції можна побудувати “додаванням” відомих графіків функцій $y = x$ та $y = \cos x$ (рис. 18). ⌋

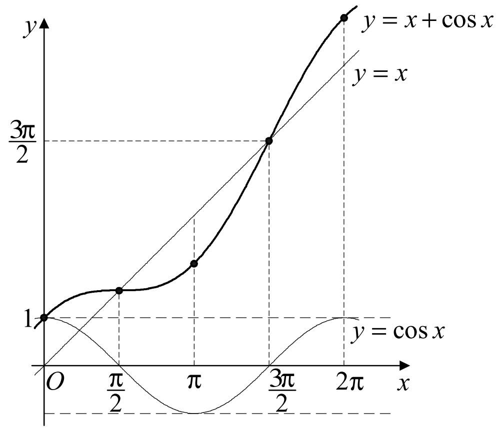


Рис. 18

30. Побудувати графік функції $y = x \sin x$.

⌈ Графік заданої функції можна побудувати “множенням” відомих графіків функцій $y = x$ та $y = \sin x$ (рис. 19). ⌋

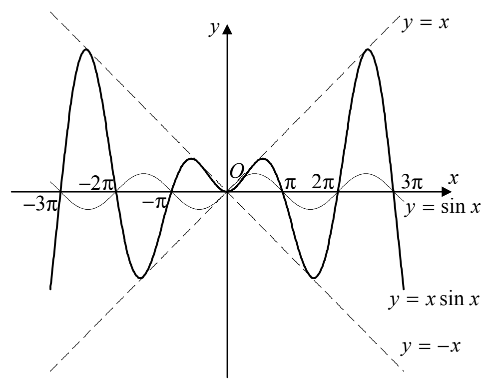


Рис. 19

<u>Вправи для самостійного розв’язання</u>

Побудувати графіки функцій:

31. $y = -2x + 3$. **32.** $y = x^3$.

33. 1) $y = (x+1)^3$; 2) $y = 2x^3$; 3) $y = x^3 + 2$; 4) $y = -x^3$.

34. 1) $y = \sqrt{x}$; 2) $y = \sqrt{x-1}$; 3) $y = 2\sqrt{x}$; 4) $y = \sqrt{-x}$.

35. 1) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$; 2) $y=\log_2(x+1)$.

36. 1) $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$; 2) $y=3\sin x$; 3) $y=2\,\mathrm{tg}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$.

37. 1) $y=2\arcsin x$; 2) $y=\arccos\frac{x}{2}$; 3) $y=2\,\mathrm{arctg}(x-3)$.

38. 1) $y=\begin{cases}-1, & \text{якщо } x<0,\\ 1, & \text{якщо } x>0;\end{cases}$ 2) $y=2|x-2|$.

39. 1) $y=x+1+\sin x$; 2) $y=\frac{1}{x}\sin x$.

3. Границя функції

Число a називають *границею послідовності* $\{x_n\}$, якщо для довільного $\varepsilon>0$ знайдеться число N_0, що для всіх $n>N_0$ виконується нерівність $|x_n-a|<\varepsilon$. При цьому кажуть, що послідовність $\{x_n\}$ *збігається* до числа a. Позначення: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ або $x_n\to a$.

Число A називають *границею функції* $f(x)$ *в точці* x_0, якщо для довільного $\varepsilon>0$ знайдеться $\delta>0$, що для всіх значень x з області визначення функції, які задовольняють умову $0<|x-x_0|<\delta$, виконується нерівність $|f(x)-A|<\varepsilon$. Позначення: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ або $f(x)\to A$ при $x\to x_0$.

Число A називають *границею функції при* $x\to\infty$, якщо для довільного $\varepsilon>0$ знайдеться $\delta>0$, що для всіх значень x з області визначення функції, які задовольняють умову $|x|>\delta$, виконується нерівність $|f(x)-A|<\varepsilon$. Позначення: $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ або $f(x)\to A$ при $x\to\infty$.

Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$, то функцію $f(x)$ називають *нескінченно малою* при $x\to x_0$.

Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$, то функцію $f(x)$ називають *нескінченно* *великою* при $x \to x_0$. Запис $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ означає, що для довільного (як завгодно великого) числа $M > 0$ знайдеться $\delta > 0$, що для всіх значень x таких, що $0 < |x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x)| > M$.

Властивості нескінченно малих:

1) Якщо функції $f_1(x)$ та $f_2(x)$ нескінченно малі при $x \to x_0$, то їх сума $f_1(x) + f_2(x)$ також є нескінченно малою при $x \to x_0$.

2) Якщо функція $f(x)$ нескінченно мала при $x \to x_0$, а функція $g(x)$ – обмежена, то їх добуток $f(x)g(x)$ є нескінченно малою функцією при $x \to x_0$.

Властивості нескінченно великих:

1) Якщо при $x \to x_0$ функція $f(x)$ – нескінченно велика, а функція $g(x)$ має границю, то нескінченно великими при $x \to x_0$ є:

сума $f(x) + g(x)$; добуток $g(x) \cdot f(x)$; частка $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

2) Якщо $f_1(x)$ та $f_2(x)$ – нескінченно великі при $x \to x_0$, то їх добуток теж є нескінченно великою.

3) Якщо $f_1(x)$ та $f_2(x)$ – нескінченно великі одного знаку при $x \to x_0$, то їх сума теж є нескінченно великою.

Зв'язок між нескінченно великими та нескінченно малими:

1) Якщо $f(x)$ при $x \to x_0$ – нескінченно велика функція, то функція $\alpha(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ – нескінченно мала.

2) Якщо при $x \to x_0$ функція $\alpha(x)$ нескінченно мала і не перетворюється в нуль, то функція $f(x) = \dfrac{1}{\alpha(x)}$ – нескінченно велика.

При обчисленні границь зручно використовувати ряд їх властивостей:

1° (арифметичні властивості границь).

Якщо існують $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ та $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$, то а) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\pm g(x)\right]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$;

б) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$,

зокрема,

$$\lim_{x\to x_0}\left[c\cdot g(x)\right]=c\lim_{x\to x_0}g(x);$$

в) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}$ (якщо $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\neq 0$).

2º (<u>границя суперпозиції функцій</u>).

Якщо існують скінченні границі $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=a$ та $\lim\limits_{t\to a}f(t)=A$, то існує також границя складної функції $\lim\limits_{x\to x_0}f(g(x))=A$. Дану рівність можна записати також у вигляді: $\lim\limits_{x\to x_0}f(g(x))=\lim\limits_{y\to a}f(y)$. На цій формулі ґрунтується обчислення границь методом заміни змінної, якщо покласти $y=g(x)$.

При обчисленні границь зручно користуватись тим, що коли x_0 належить області визначення елементарної функції $f(x)$, то (див. підрозділ 5)

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0). \tag{1}$$

Більш загально: якщо $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=a$, де a належить області визначення елементарної функції f, то

$$\lim_{x\to x_0}f(g(x))=a\left(\lim_{x\to x_0}g(x)\right), \tag{2}$$

де x_0 – число або один із символів ∞, $+\infty$, $-\infty$.

Використовуються також границі:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ (*перша визначна* границя);

$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ (*друга визначна* границя).

40. Користуючись означенням границі послідовності, показати, що $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{n}}=0$.

$\ulcorner$ Загальний член послідовності $x_n=\frac{1}{\sqrt[5]{n}}$. Тому

$x_n-0=\frac{1}{\sqrt[5]{n}}-0=\frac{1}{\sqrt[5]{n}}$.

Задамо додатне число ε. Розглянемо нерівність $|x_n-0|<\varepsilon$, тобто $\frac{1}{\sqrt[5]{n}}<\varepsilon$. Оскільки обидві частини нерівності додатні, то вона рівносильна нерівності

$$\frac{1}{\varepsilon}<\sqrt[5]{n}, \text{ звідки } n>\frac{1}{\varepsilon^5}.$$

Отже, якщо за N_0 в означенні границі послідовності взяти число $N_0=\frac{1}{\varepsilon^5}$, то для всіх $n>N_0$ буде виконуватись умова $|x_n-0|<\varepsilon$. Це означає, що $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{n}}=0$. $\lrcorner$

41. Показати, що послідовність $\frac{3}{4};\frac{5}{7};\frac{7}{10};\ldots;\frac{2n+1}{3n+1};\ldots$ має границею число $\frac{2}{3}$.

$\ulcorner$ Загальний член послідовності $x_n=\frac{2n+1}{3n+1}$. Тому

$$x_n-\frac{2}{3}=\frac{2n+1}{3n+1}-\frac{2}{3}=\frac{3(2n+1)-2(3n+1)}{3(3n+1)}=\frac{1}{3(3n+1)}.$$

Задамо додатне число ε. Розглянемо нерівність $\left|x_n-\frac{2}{3}\right|<\varepsilon$, тобто $\frac{1}{3(3n+1)}<\varepsilon$. Помножимо обидві частини останньої нерівності на $\frac{3n+1}{\varepsilon}$:

$$\frac{1}{3\varepsilon}<3n+1, \text{ звідки } n>\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3\varepsilon}-1\right).$$

Отже, якщо за N_0 в означенні границі послідовності взяти число $N_0 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3\varepsilon} - 1\right)$, то для всіх $n > N_0$ виконуватиметься умова $\left|x_n - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon$. Це означає, що $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n+1} = \frac{2}{3}$. ⌋

42. Довести, що $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$.

⌈ Запишемо "ланцюжок" означення границі для цього випадку.

Число c є границею функції $f(x) = c$ в точці x_0, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta > 0$, що для всіх значень x таких, що $0 < |x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|c - c| = 0 < \varepsilon$.

Оскільки остання нерівність виконується для всіх $\varepsilon > 0$ при довільному $\delta > 0$, то маємо $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$. ⌋

Знайти границі функцій.

43. а) $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2 - 3x + 2\right)$; б) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2 + 2x}{x^2 - x + 3}$.

⌈ а) Оскільки функція $f(x) = x^2 - 3x + 2$ $\left(D(f) = (-\infty, +\infty)\right)$ є елементарною, то для обчислення її границі можна застосувати властивість (1). Підставивши в аналітичний вираз функції замість аргументу x його граничне значення 2, одержимо

$$\lim_{x\to 2}\left(x^2 - 3x + 2\right) = 2^2 - 3\cdot 2 + 2 = 0.$$

б) Значення $x = -1$ належить області визначення функції $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x^2 - x + 3}$ (знаменник не дорівнює нулю при $x = -1$). Тому скористаємось формулою (1):

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2 + 2x}{x^2 - x + 3} = \frac{(-1)^2 + 2(-1)}{(-1)^2 - (-1) + 3} = \frac{1 - 2}{1 + 1 + 3} = -\frac{1}{5}. \quad ⌋$$

44. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$.

⌈ Скористатись формулою (1) у цьому випадку не можна, оскільки значення $x = 1$ не належить області визначення функції $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$.

Для знаходження заданої границі застосуємо формулу скороченого множення $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x^2+x+1) = 1^2+1+1 = 3. \quad \rfloor$$

У розглянутому щойно прикладі чисельник і знаменник дробу прямують до нуля при $x \to 1$. У такому випадку кажуть, що має місце невизначеність типу $\frac{0}{0}$.

Поряд з такою невизначеністю зустрічаються й інші, наприклад, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, 1^∞ тощо. Якщо при обчисленні границі виникає одна з невизначеностей, то процес обчислення границі називають ще *розкриттям невизначеності*. Зручно класифікувати границі в залежності від типу невизначеності і розглядати відповідні методи розкриття невизначеностей у вигляді правил.

Правило 1. *Для того щоб знайти границю дробово-раціональної функції у випадку, коли при $x \to x_0$ чисельник і знаменник прямують до нуля (невизначеність $\frac{0}{0}$), потрібно скоротити дріб на $(x-x_0)$ і перейти до границі.*

Застосування правила 1 ґрунтується на розкладі чисельника та знаменника дробу на множники. Для цього можна скористатись, наприклад, формулами скороченого множення

$$x^2 \pm 2ax + a^2 = (x \pm a)^2; \tag{a}$$

$$x^2 - a^2 = (x-a)(x+a); \tag{в}$$

$$x^3 \pm a^3 = (x \pm a)(x^2 \mp ax + a^2) \tag{c}$$

або формулою розкладу квадратного тричлена на множники

$$ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2), \tag{d}$$

де x_1, x_2 – корені рівняння $ax^2+bx+c=0$.

45. $\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+x-3}{x^2+5x-6}$.

$\ulcorner$ Підстановкою значення $x=1$ переконуємось, що маємо невизначеність типу $\frac{0}{0}$. Скористаємось правилом 1, для чого спочатку розкладемо чисельник та знаменник дробу на множники.

Розглянемо рівняння $2x^{2}+x-3=0$. Його коренями є числа $x_1=1$ та $x_2=-\frac{3}{2}$. Тому за формулою (d):

$$2x^2+x-3=2(x-1)\left(x-\left(-\frac{3}{2}\right)\right)=(x-1)(2x+3).$$

Аналогічно, розв'язавши рівняння $x^2+5x-6=0$, одержимо $x_1=1$, $x_2=-6$ та $x^2+5x-6=(x-1)(x+6)$.

Тому

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+x-3}{x^2+5x-6}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(2x+3)}{(x-1)(x+6)}=\lim_{x\to 1}\frac{2x+3}{x+6}=\frac{2\cdot 1+3}{7+6}=\frac{5}{7}. \quad \lrcorner$$

46. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^4-x-2}{x^3+1}$.

$\ulcorner$ При $x=-1$ чисельник та знаменник перетворюються в нуль. Тому потрібно скористатись правилом 1.

У нашому випадку $x-x_0=x-(-1)=x+1$, отже, згідно з правилом 1, скорочувати дріб потрібно саме на вираз $(x+1)$. Знаменник дробу можна за допомогою формули (c) скороченого множення подати у вигляді: $x^3+1=x^3+1^3=(x+1)(x^2-x+1)$.

Для розкладу чисельника на множники виконаємо ділення многочлена на многочлен "кутом":

$$\begin{array}{r|l}
-\;x^4-x-2 & x+1 \\ \cline{2-2}
\underline{x^4+x^3} & x^3-x^2+x-2 \\
-\;-x^3-x-2 & \\
\underline{-x^3-x^2} & \\
-\;x^2-x-2 & \\
\underline{x^2+x} & \\
-\;-2x-2 & \\
\underline{-2x-2} & \\
0 &
\end{array}$$

Отже,
$x^4-x-2=(x+1)(x^3-x^2+x-2)$.

Тому одержимо

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^4-x-2}{x^3+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)\left(x^3-x^2+x-2\right)}{(x+1)\left(x^2-x+1\right)}=\lim_{x\to -1}\frac{x^3-x^2+x-2}{x^2-x+1}=$$

$$=\frac{(-1)^3-(-1)^2+(-1)-2}{(-1)^2-(-1)+1}=\frac{-1-1-1-2}{1+1+1}=\frac{-5}{3}=-\frac{5}{3}.\ ┘$$

47. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-x-2}$.

┌ При $x=-2$ знаменник не дорівнює нулю. Тому за формулою (1):

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+x-2}{x^2-x-2}=\frac{(-2)^2+(-2)-2}{(-2)^2-(-2)-2}=\frac{0}{4}=0,$$

тобто функція $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x^2-x-2}$ є нескінченно малою при $x\to -2$. ┘

48. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+1}{x^2-2x-3}$.

┌ При $x=3$ знаменник дробу дорівнює нулю. Тому властивістю (1) скористатись не можна. Але тут немає і невизначеності, оскільки чисельник дробу при $x=3$ дорівнює 10, тобто відмінний від нуля.

Ми вже перевірили, що знаменник дробу $\alpha(x)=x^2-2x-3$ є функцією нескінченно малою при $x\to 3$. Отже функція $\dfrac{1}{\alpha(x)}=\dfrac{1}{x^2-2x-3}$ є нескінченно великою, тобто $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x^2-2x-3}=\infty$. За формулою (1) існує $\lim\limits_{x\to 3}\left(x^2+1\right)=3^2+1=10$. Тому за властивостями нескінченно великих $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+1}{x^2-2x-3}=\lim\limits_{x\to 1}\left[\left(x^2+1\right)\cdot\dfrac{1}{x^2-2x-3}\right]=\infty$. ┘

49. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}$.

┌ При $x=2$ чисельник і знаменник дробу дорівнюють нулю, тобто маємо невизначеність $\dfrac{0}{0}$. Але розкрити її за правилом 1 немає можливості, оскільки чисельник дробу не є многочленом. Скористаємось основною властивістю дробу і помножимо чисельник та знаменник дробу на вираз $\sqrt{x+7}+3$, який є спряженим до чисельника. Одержимо

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}=\lim_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}\cdot\frac{\sqrt{x+7}+3}{\sqrt{x+7}+3}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x+7}\right)^2-3^2}{(x-2)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+7-9}{(x-2)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x+7}+3}=\frac{1}{\sqrt{2+7}+3}=\frac{1}{\sqrt{9}+3}=\frac{1}{6}.$$

Зауважимо, що при множенні на спряжений вираз, ми розкрили дужки лише в чисельнику, перемноживши взаємно спряжені вирази за допомогою формули скороченого множення $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$. У знаменнику ж ми дужки не розкривали, щоб зберегти множник $(x-2)$, на який потрібно скоротити дріб для розкриття невизначеності. ⌋

Розглянутий нами прийом можна узагальнити наступним правилом.

Правило 2. *Для того щоб знайти границю функції, яка є часткою двох ірраціональних функцій, у випадку, коли при $x\to x_0$ чисельник і знаменник прямують до нуля (невизначеність $\frac{0}{0}$), потрібно помножити чисельник та знаменник дробу на вираз спряжений до кожного ірраціонального виразу, скоротити після цього дріб на $(x-x_0)$ і перейти до границі.*

50. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+9}-3}$.

⌈ При $x=0$ чисельник та знаменник дорівнюють нулю. Дійсно $\sqrt{0^2+4}-2=\sqrt{4}-2=2-2=0$, $\sqrt{0^2+9}-3=\sqrt{9}-3=3-3=0$. Тому маємо невизначеність типу $\frac{0}{0}$, зумовлену саме ірраціональними виразами. Скористаємось правилом 2 та помножимо чисельник і знаменник дробу на спряжені вирази відповідно $\sqrt{x^2+4}+2$ і $\sqrt{x^2+9}+3$.

Одержимо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+9}-3}=\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{\left(\sqrt{x^2+4}-2\right)\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}^{\text{перемножаємо}}\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)}{\underbrace{\left(\sqrt{x^2+9}-3\right)\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)}_{\text{перемножаємо}}\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\left(\sqrt{x^2+4}\right)^2-2^2}{\left(\sqrt{x^2+9}\right)^2-3^2}\cdot\frac{\sqrt{x^2+9}+3}{\sqrt{x^2+4}+2}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x^2+4-4}{x^2+9-9}\cdot\frac{\sqrt{x^2+9}+3}{\sqrt{x^2+4}+2}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x^2}{x^2}\cdot\frac{\sqrt{x^2+9}+3}{\sqrt{x^2+4}+2}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+9}+3}{\sqrt{x^2+4}+2}=\frac{\sqrt{0^2+9}+3}{\sqrt{0^2+4}+2}=\frac{3+3}{2+2}=\frac{3}{2}.\ \lrcorner$$

51. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3x+1}-2}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3x-1}}$.

$\ulcorner$ Підстановкою у функцію значення $x=1$ переконуємось у тому, що маємо невизначеність $\frac{0}{0}$, а отже, можемо скористатись правилом 2. Помножити чисельник і знаменник дробу потрібно на спряжені вирази як до чисельника так і до знаменника. Маємо

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3x+1}-2}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3x-1}}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\left[\frac{\left(\sqrt{3x+1}-2\right)\left(\sqrt{3x+1}+2\right)}{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{3x-1}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{3x-1}\right)}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{3x-1}}{\sqrt{3x+1}+2}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 1}\left[\frac{\left(\sqrt{3x+1}\right)^2-2^2}{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-\left(\sqrt{3x-1}\right)^2}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{3x-1}}{\sqrt{3x+1}+2}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 1}\left[\frac{3x+1-4}{x+1-(3x-1)}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{3x-1}}{\sqrt{3x+1}+2}\right]=\lim_{x\to 1}\left[\frac{3x-3}{-2x+2}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{3x-1}}{\sqrt{3x+1}+2}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 1}\left[\frac{3(x-1)}{-2(x-1)}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{3x-1}}{\sqrt{3x+1}+2}\right]=\frac{3}{-2}\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{3x-1}}{\sqrt{3x+1}+2}=$$

$$=-\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{1+1}+\sqrt{3\cdot 1-1}}{\sqrt{3\cdot 1+1}+2}=-\frac{3}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{4}=-\frac{3\sqrt{2}}{4}. \quad \lrcorner$$

У розглянутих вище прикладах обчислювалась границя функції при $x \to x_0$. Розглянемо знаходження границь при $x \to \infty$. Очевидно, правило (1) у цьому випадку застосовуватись не може.

52. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x^2+x-3\right)$.

$\ulcorner$ Використовуючи властивості нескінченно великих, маємо:

$x^2 = x\cdot x$ – нескінченно велика при $x\to+\infty$, як добуток нескінченно великих;

$2x^2 = 2\cdot x^2$ – нескінченно велика при $x\to+\infty$, як добуток функції, що має границю на нескінченно велику;

$2x^2+x$ – нескінченно велика при $x\to+\infty$, як сума двох нескінченно великих;

$2x^2+x-3=\left(2x^2+x\right)-3$ – нескінченно велика при $x\to+\infty$, як сума нескінченно великої та функції, що має границю.

Отже, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x^2+x-3\right)=\infty$. $\lrcorner$

53. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4x^2-x\right)$.

$\ulcorner$ Оскільки $4x^2$ та x є нескінченно великими, то маємо випадок невизначеності типу $\infty-\infty$. Розкрити таку невизначеність можна шляхом запису функції $4x^2-x$ у вигляді $4x^2-x=x\left(4x-1\right)$. Одержали добуток двох нескінченно великих, отже

$$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4x^2-x\right)=\infty. \quad \lrcorner$$

54. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(a_nx^m+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0\right)$, $a_i\in R$, $i=0,1,\ldots,n$.

$\ulcorner$ Подаючи функцію $f\left(x\right)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ у вигляді $f\left(x\right)=x\Big[x\Big(\ldots\big\{\left(a_nx+a_{n-1}\right)+a_{n-2}\big\}+\ldots+a_2\Big)+a_1\Big]+a_0$ і застосовуючи властивості нескінченно великих, одержуємо:

a_nx – нескінченно велика, як добуток нескінченно великої та функції, що має границю;

$\left(a_nx+a_{n-1}\right)$ – нескінченно велика, як сума нескінченно великої та функції, що має границю;

$x\left(a_n x + a_{n-1}\right)$ – нескінченно велика, як добуток нескінченно великих і т. д.

$x\left[x\left(\ldots\left\{\left(a_n x + a_{n-1}\right) + a_{n-2}\right\} + \ldots + a_2\right) + a_1\right] + a_0$ – нескінченно велика, як сума нескінченно великої $y_1 = x\left[x\left(\ldots\left\{\left(a_n x + a_{n-1}\right) + a_{n-2}\right\} + \ldots + a_2\right) + a_1\right]$ та функції $y_2 = a_0$, що має границю.

Отже, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(a_n x^m + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0\right) = \infty$, тобто при $x \to \infty$ кожен многочлен є нескінченно великою функцією. ⌋

55. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2 + x - 3}{4x^2 - x}$.

⌈ Для обчислення цієї границі не можна застосувати правило (1). Арифметичну властивість про границю частки застосувати також не можна, оскільки не існує границь чисельника та знаменника. Дійсно (див. приклади 53, 54), при $x \to \infty$ чисельник та знаменник нескінченно великі. Тобто, ми маємо невизначеність типу $\frac{\infty}{\infty}$.

Щоб розкрити дану невизначеність, поділимо чисельник та знаменник дробу на x^2 і одержимо:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2 + x - 3}{4x^2 - x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x^2}{x^2} + \dfrac{x}{x^2} - \dfrac{3}{x^2}}{\dfrac{4x^2}{x^2} - \dfrac{x}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{x^2}}{4 - \dfrac{1}{x}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(4 - \dfrac{1}{x}\right)} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}2 + \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x} - \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}4 - \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}} = \frac{2 + 0 - 0}{4 - 0} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

У ході розв'язання скористались тим, що $\dfrac{1}{x}$ та $\dfrac{3}{x^2}$ є нескінченно малими при $x \to \infty$ (див. властивості нескінченно малих). ⌋

Розглянутий нами щойно прийом можна узагальнити наступним правилом.

Правило 3. *Для обчислення границі частки двох многочленів при* $x \to \infty$ *(невизначеність типу* $\frac{\infty}{\infty}$*) потрібно поділити чисельник та знаменник дробу на найвищий степінь змінної, що зустрічається під* *знаком границі, та скористатись тим, що всі функції вигляду* $\frac{a}{x^n}$ $(a \in R,\ n \in N)$ *при* $x \to \infty$ *є нескінченно малими.*

56. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x+1}{x^2-3x+4}$.

⌈ Оскільки при $x \to \infty$ чисельник та знаменник дробу є нескінченно великими, маємо невизначеність типу $\frac{\infty}{\infty}$, для розкриття якої скористаємось правилом 3: поділимо чисельник та знаменник на x^2 – найвищий степінь змінної:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{x^2-3x+4} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}\right)} = \frac{0}{1} = 0.$$ ⌋

57. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^3-3x+1}{x^2+4}$.

⌈ При $x \to \infty$ маємо невизначеність $\frac{\infty}{\infty}$. Поділимо чисельник та знаменник на найвищий степінь змінної x^3. Одержимо

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3-3x+1}{x^2+4} = \lim_{x\to\infty} \frac{2-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x}+\frac{4}{x^3}}.$$

Скористатись арифметичною властивістю про границю частки не можна, оскільки границя знаменника дорівнює нулю, тобто функція $f(x) = \frac{1}{x}+\frac{4}{x^3}$ є нескінченно малою. Але тоді функція $g(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{4}{x^3}}$ є нескінченно великою. Границя чисельника дорівнює 2. Тому за властивістю нескінченно великих

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{4}{x^3}} = \infty.$$ ⌋

Узагальнення правила 3 на складніші випадки розглянемо на наступних прикладах.

58. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+2x^2-4}}{2x+3}$.

Γ Поділимо чисельник та знаменник дробу на x:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3+2x^2-4}}{2x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{\sqrt[3]{x^3+2x^2-4}}{x}}{\dfrac{2x}{x}+\dfrac{3}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{\sqrt[3]{x^3+2x^2-4}}{\sqrt[3]{x^3}}}{2+\dfrac{3}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{\dfrac{x^3+2x^2-4}{x^3}}}{2+\dfrac{3}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{4}{x^3}}}{2+\dfrac{3}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{4}{x^3}}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\dfrac{3}{x}\right)}=\frac{1}{2}.$$

При обчисленні границі чисельника ми скористались частинним випадком властивості 2º, який можна сформулювати у вигляді наступного ***правила 4***: *при постійному показнику степеня можна переходити до границі в основі степеня за умови, що границя основи степеня існує*, тобто

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^k=\left[\lim_{x\to x_0}f(x)\right]^k.$$

Дійсно,

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^3}}=\sqrt[3]{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^3}\right)}=\sqrt[3]{\lim_{x\to\infty}1+\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}-\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x^3}}=$$

$$=\sqrt[3]{1+0-0}=\sqrt[3]{1}=1. \quad \lrcorner$$

59. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^6+2}+\sqrt[4]{x^2+1}}{\sqrt[4]{x^5+3}-\sqrt{x^4+4}}$.

Γ Поділимо чисельник та знаменник дробу на x^2:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^6+2}+\sqrt[4]{x^2+1}}{\sqrt[4]{x^5+3}-\sqrt{x^4+4}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{\sqrt[3]{x^6+2}}{x^2}+\dfrac{\sqrt[4]{x^2+1}}{x^2}}{\dfrac{\sqrt[4]{x^5+3}}{x^2}-\dfrac{\sqrt{x^4+4}}{x^2}}=$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{\sqrt[3]{x^6+2}}{\sqrt[3]{x^6}} + \dfrac{\sqrt[4]{x^2+1}}{\sqrt[4]{x^8}}}{\dfrac{\sqrt[4]{x^2+3}}{\sqrt[4]{x^8}} - \dfrac{\sqrt{x^4+4}}{\sqrt{x^4}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{\dfrac{x^6+2}{x^6}} + \sqrt[4]{\dfrac{x^2+1}{x^8}}}{\sqrt[4]{\dfrac{x^5+3}{x^8}} - \sqrt{\dfrac{x^4+4}{x^4}}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{1+\dfrac{2}{x^6}} + \sqrt[4]{\dfrac{1}{x^6}+\dfrac{1}{x^8}}}{\sqrt[4]{\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{3}{x^8}} - \sqrt{1+\dfrac{4}{x^4}}} = \frac{1+0}{0-1} = -1\,.$$

Дійсно, за правилом 4

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{1+\frac{2}{x^6}} = \sqrt[3]{\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x^6}\right)} = \sqrt[3]{\lim_{x\to+\infty} 1 + \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x^6}} = \sqrt[3]{1+0} = 1\,;$$

аналогічно,

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[4]{\frac{1}{x^6}+\frac{1}{x^8}} = 0\,;$$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[4]{\frac{1}{x^3}+\frac{3}{x^8}} = 0\,;$$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{4}{x^4}} = 1\,. \quad \lrcorner$$

60. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+4}-\sqrt{x}\right)$.

$\ulcorner$ При $x\to+\infty$ маємо невизначеність типу $(\infty-\infty)$. Помножимо та поділимо функцію, що стоїть під знаком границі, на вираз $\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{x}\right)$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+4}-\sqrt{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+4}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+4}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x+4-x}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{4}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x}} = 0\,.$$

Скористались тим, що при $x\to+\infty$ кожна з функцій $\sqrt{x+4}$ та $\sqrt{x}$ є нескінченно великою. Тому їх сума $\sqrt{x+4}+\sqrt{x}$ також є нескінченно великою, а обернена до неї функція $\dfrac{1}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x}}$ є нескінченно малою. $\lrcorner$

Перейдемо до обчислення границь пов'язаних з першою визначною границею:

(I) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

61. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$.

$\ulcorner$ При $x\to 0$ чисельник та знаменник є нескінченно малими. Тому маємо невизначеність $\dfrac{0}{0}$. Обчислимо цю границю двома способами.

1) Використовуючи (I) та властивості границь 1º б), 2º, одержуємо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{3\cdot\sin 3x}{3x}=3\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=3\cdot 1=3.$$

2) Інший спосіб розв'язування цієї вправи ґрунтується на заміні змінної під знаком границі (див. властивість 2º).

Нехай $3x=y$. Тоді $y\to 0$ при $x\to 0$. Враховуючи, що $x=\dfrac{y}{3}$, маємо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{\frac{y}{3}}=\lim_{y\to 0}\frac{3\sin y}{y}=3\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=3\cdot 1=3.$$

Ми скористались границею (I) $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin y}{y}=1$, яка не залежить від позначення змінної, тобто $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin y}{y}=1$. $\lrcorner$

62. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$.

$\ulcorner$ Зробимо заміну змінної $y=\arcsin x$, звідки $x=\sin y$ і $y\to 0$ при $x\to 0$. Тому, з урахуванням (I) та арифметичних властивостей границь, одержимо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{\sin y}{y}}=\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}}=\frac{1}{1}=1. \quad \lrcorner$$

63. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$.

$\ulcorner$ Скористаємось тим, що $\operatorname{tg} x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ та границею (I):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot 1=1.$$

Ми скористались властивостями 1° границь та правилом (1), згідно з яким $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\cos x}=\dfrac{1}{\cos 0}=\dfrac{1}{1}=1$. $\lrcorner$

64. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sin^2 3x}$.

$\ulcorner$ Щоб прийти до границі (I), слід помножити чисельник та знаменник дробу на 9 і скористатись правилом 4. Матимемо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin^2 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{9x^2}{9\sin^2 3x}=\frac{1}{9}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{(3x)^2}{(\sin 3x)^2}=$$

$$=\frac{1}{9}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2}=\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2}=\frac{1}{9\cdot\left[\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\right]^2}=\frac{1}{9\cdot 1^2}=\frac{1}{9}. \quad \lrcorner$$

З розглянутих прикладів випливають наступні узагальнення границі (I):

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1; \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin^n x}{x^n}=1; \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{kx}=1 \text{ тощо.}$$

65. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\operatorname{tg} 3x}{1-\cos 4x}$.

$\ulcorner$ а) Аналогічно попередньому

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\frac{\sin 2x}{\cos 2x}}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{2x}{\sin 2x}\cdot\frac{5x}{2x}\cdot\cos 2x\right]=$$

$$=\frac{5}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 2x}\cdot\lim_{x\to 0}\cos 2x=\frac{5}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}}\cdot\cos 0=$$

$$=\frac{5}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{1}\cdot 1=\frac{5}{2}.$$

б) Використаємо формули $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$ і $\operatorname{tg}3x=\frac{\sin 3x}{\cos 3x}$ та перейдемо від границі добутку до добутку границь:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\operatorname{tg}3x}{1-\cos 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin 3x}{2\sin^2\frac{4x}{2}\cdot\cos 3x}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{(2x)^2}{\sin^2 2x}\cdot\frac{x\cdot 3x}{(2x)^2}\cdot\frac{1}{\cos 3x}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{3x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x}{\sin 2x}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{3}{4\cos 3x}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{8}.\ \lrcorner$$

66. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin 2x\operatorname{ctg}^2 3x\right)$.

$\ulcorner$ У вправах 61 – 65 виникала невизначеність типу $\frac{0}{0}$. В даному випадку маємо невизначеність $0\cdot\infty$, оскільки $\lim\limits_{x\to 0}\sin 2x=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{ctg}^2 3x=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos^2 3x}{\sin^2 3x}=\infty$. Розписуючи $\operatorname{ctg}3x$, одержимо:

$$\lim_{x\to 0}x\sin 2x\operatorname{ctg}^2 3x=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin 2x\cos^2 3x}{\sin^2 3x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{(3x)^2}{\sin^2 3x}\frac{\sin 2x}{2x}\frac{x\cdot 2x\cos^2 3x}{(3x)^2}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(3x)^2}{\sin^2 3x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2\cos^2 3x}{9}=$$

$$=1\cdot 1\cdot\frac{2}{9}=\frac{2}{9}.\ \lrcorner$$

67. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\cos 3x}$.

$\ulcorner$ Перейдемо до нової змінної y, поклавши $y=x-\frac{\pi}{2}$. Тоді

$y \to 0$ при $x \to \frac{\pi}{2}$. Враховуючи, що $x = y + \frac{\pi}{2}$, одержимо:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos 3x} = \lim_{y\to 0} \frac{\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(3y+\frac{3\pi}{2}\right)} = \lim_{y\to 0} \frac{-\sin y}{\sin 3y} = -\lim_{y\to 0}\left[\frac{\sin y}{y}\cdot\frac{3y}{\sin 3y}\cdot\frac{y}{3y}\right] =$$

$$= -\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{3y}{\sin 3y}\cdot\frac{1}{3} = -1\cdot 1\cdot\frac{1}{3} = -\frac{1}{3}.$$

В ході розв'язання використали формули зведення $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin\alpha$ та $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) = \sin\alpha$. ⌋

68. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$.

⌈ При $x \to 1$ маємо невизначеність $0\cdot\infty$. Покладемо $y = 1-x$. Звідки $x = 1-y$ та $y \to 0$ при $x \to 1$. Тому одержимо

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2} = \lim_{y\to 0} y\operatorname{tg}\frac{\pi(1-y)}{2} = \lim_{y\to 0} y\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}y\right) = \lim_{y\to 0} y\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}y =$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{y\cos\frac{\pi}{2}y}{\sin\frac{\pi}{2}y} = \lim_{y\to 0}\left[\frac{\frac{\pi}{2}y}{\sin\frac{\pi}{2}y}\cdot\frac{\cos\frac{\pi}{2}y}{\frac{\pi}{2}}\right] = \lim_{y\to 0}\frac{\frac{\pi}{2}y}{\sin\frac{\pi}{2}y}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\cos\frac{\pi}{2}y}{\frac{\pi}{2}} = 1\cdot\frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}.$$

В ході розв'язання скористались формулами $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \operatorname{ctg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, властивостями границь 1° та границею (I). ⌋

69. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x - \sin\beta x}{x}$ $(\alpha \ne \beta)$.

⌈ Скористаємось властивостями границь:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x-\sin\beta x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{x} - \lim_{x\to 0}\frac{\sin\beta x}{x} = \alpha\lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\alpha x} - \beta\lim_{x\to 0}\frac{\sin\beta x}{\beta x} =$$

$$= \alpha\cdot 1 - \beta\cdot 1 = \alpha - \beta.$$ ⌋

Зауважимо, що при обчисленні границь від тригонометричних функцій не завжди виникає необхідність використовувати першу визначну границю. Переконаємось у цьому на наступних прикладах.

70. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\cos 2x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos x}{x}$.

⌈ а) Оскільки значення $x=0$ належить області визначення елементарної функції $y=\dfrac{\sin 3x}{\cos 2x}$, скористаємося правилом (1): $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\cos 2x}=\dfrac{\sin 0}{\cos 0}=\dfrac{0}{1}=0$.

б) З графіка функції $y=\cos x$ (рис. 4) робимо висновок, що при $x\to\infty$ границя функції $\cos x$ не існує.

в) Подамо функцію $y=\dfrac{\cos x}{x}$ у вигляді добутку $y=\cos x\cdot\dfrac{1}{x}$. Скористатись властивістю границь і перейти від границі добутку до добутку границь не можна, оскільки $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$ не існує (див. попередній приклад). Але, оскільки функція $y=\cos x$ обмежена ($|\cos x|\le 1,\ x\in R$), а функція $y=\dfrac{1}{x}$ – нескінченно мала при $x\to\infty$, то за властивістю 2) нескінченно малих функція $y=\cos x\cdot\dfrac{1}{x}$ є нескінченно малою при $x\to\infty$. Отже, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos x}{x}=0$. ⌋

Розглянемо обчислення границь, пов'язаних з другою визначною границею

(II.1) $$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e,$$

(II.2) $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.$$

Записи другої визначної границі у вигляді (II.1) та (II.2) еквівалентні. У цьому можна переконатись, здійснивши підстановку $\dfrac{1}{x}=y$ у кожній з цих границь. При розв'язанні вправ, пов'язаних з другою визначною границею, нам знадобиться наступна формула (наслідок формули (2)):

якщо існують скінченні границі $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = a > 0$ *та* $\lim\limits_{x\to x_0} v(x)$*, то*

$$\lim_{x\to x_0}\left[u(x)\right]^{v(x)} = \left[\lim_{x\to x_0} u(x)\right]^{\lim\limits_{x\to x_0} v(x)}, \tag{3}$$

де під x_0 *розуміємо число або один із символів* ∞, $+\infty$, $-\infty$.

Розглянемо спочатку прості вправи, пов'язані з застосуванням формули (3).

71. а) $\lim\limits_{x\to 1} 2^{\frac{3x}{x+2}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} 3^{\frac{2x}{x+3}}$.

⌈ а) $\lim\limits_{x\to 1} 2^{\frac{3x}{x+2}} = \left[\lim\limits_{x\to 1} 2\right]^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x}{x+2}} = 2^{\frac{3\cdot 1}{1+2}} = 2^{\frac{3}{3}} = 2$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty} 3^{\frac{2x}{x+3}} = \left[\lim\limits_{x\to\infty} 3\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{x+3}} = 3^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{1+\frac{3}{x}}} = 3^{\frac{2}{1}} = 3^2 = 9$. ⌋

72. $\lim\limits_{x\to 1}(3-x)^{\frac{2x}{x+3}}$.

⌈ $\lim\limits_{x\to 1}(3-x)^{\frac{2x}{x+3}} = \left[\lim\limits_{x\to 1}(3-x)\right]^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x}{x+3}} = [3-1]^{\frac{2\cdot 1}{1+3}} = 2^{\frac{2}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$. ⌋

73. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{x+3}\right)^{\frac{2x+5}{x+1}}$.

⌈ $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{x+3}\right)^{\frac{2x+5}{x+1}} = \left[\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{x+3}\right)\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+5}{x+1}} = \left[\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{3}{x}}\right)\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+\frac{5}{x}}{1+\frac{1}{x}}} =$$

$$= \left(\frac{2}{1}\right)^{\frac{2}{1}} = 2^2 = 4.$$ ⌋

74. $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{3x}}$.

⌈ Спроба знайти дану границю з використанням формули (3) приводить нас до невизначеності типу 1^∞. Дійсно, $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x) = 1$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{3x} = \infty$.

Тому зробимо підстановку $3x = y$, при якій $y \to 0$, якщо $x \to 0$. Використовуючи границю (II.1), одержимо

$$\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{3x}} = \lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}} = e. \quad \rfloor$$

75. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{3x+1}\right)^{\frac{3x+1}{2}}$.

$\ulcorner$ Оскільки при $x \to \infty$ основа $\left(1+\dfrac{2}{3x+1}\right) \to 1$, а показник степеня $\dfrac{3x+1}{2} \to \infty$, то маємо невизначеність 1^{∞}. Проведемо заміну змінної. Нехай $\dfrac{3x+1}{2} = y$, звідки $\dfrac{2}{3x+1} = \dfrac{1}{y}$ та $y \to \infty$ при $x \to \infty$. Одержимо

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{3x+1}\right)^{\frac{3x+1}{2}} = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y} = e.$$

Ми використали другу визначну границю у вигляді (II. 2). $\rfloor$

У подальшому не будемо щоразу робити заміну змінної у подібних випадках, а розумітимемо, що формули (II.1) та (II.2) виконуються і у випадку, коли у них під x розуміти довільну функцію, яка прямує відповідно до нуля чи до нескінченності при $x \to x_0$, тобто

$$\lim_{x\to x_0}\left(1+f(x)\right)^{\frac{1}{f(x)}} = e \quad \text{(II.1')} \quad \text{та} \quad \lim_{x\to x_0}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e \quad \text{(II.2')}.$$

Ці узагальнення формул (II.1) та (II.2) дістаємо на основі границі суперпозиції функцій (властивість 2°).

Наприклад, будемо писати

$\lim\limits_{x\to 1}\left(1+3(x-1)\right)^{\frac{1}{3(x-1)}} = e$ (оскільки $3(x-1) \to 0$ при $x \to 1$);

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2+4x+5}{2x-3}}\right)^{\frac{x^2+4x+5}{2x-3}} = e$$

(оскільки $\dfrac{x^2+4x+5}{2x-3}=\dfrac{1+\dfrac{4}{x}+\dfrac{5}{x^2}}{\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x^2}}\to\infty$ при $x\to\infty$) тощо.

76. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^x$.

$\ulcorner$ Як і раніше, маємо невизначеність 1^∞. Перепишемо функцію, що стоїть під знаком границі так, щоб прийти до (II.2') і скористаємось формулою (2):

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{-x}\right)^{\frac{-x}{2}\cdot\frac{2}{-x}\cdot x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{-x}\right)^{\frac{-x}{2}\cdot(-2)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{-x}\right)^{\frac{-x}{2}}\right]^{-2}=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{-x}{2}}\right)^{\frac{-x}{2}}\right]^{-2}=e^{-2}.$$

Для побудови потрібного показника $\dfrac{-x}{2}$ ми помножили і поділили на нього показник функції x. Такий прийом у подальшому будемо використовувати часто. $\lrcorner$

77. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x-3}$.

$\ulcorner$ Знову маємо невизначеність 1^∞. Виділимо в основі цілу частину $\dfrac{2x+3}{2x+1}=\dfrac{(2x+1)+2}{2x+1}=1+\dfrac{2}{2x+1}$. Зауважимо, що для виділення цілої частини можна також скористатись діленням многочлена на многочлен. Але у випадку невизначеності 1^∞ (коли відомо, що основа прямує до 1) зручним є формальний спосіб, який полягає у додаванні та відніманні 1. Проілюструємо його на нашому прикладі:

$$\frac{2x+3}{2x+1}=1+\frac{2x+3}{2x+1}-1=1+\left(\frac{2x+3}{2x+1}-1\right)=1+\frac{2x+3-(2x+1)}{2x+1}=1+\frac{2}{2x+1}.$$

Отже, для того щоб можна було скористатись формулою (II.2'), показником степеня має бути вираз $\dfrac{2x+1}{2}$ (обернений до $\dfrac{2}{2x+1}$).

Тому помножимо і поділимо показник $x-3$ на $\dfrac{2x+1}{2}$ (від цього вираз $x-3$ не зміниться). Використовуючи формулу (3), одержимо

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x-3}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{x-3}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{2}\cdot\frac{2}{2x+1}\cdot(x-3)}=$$

$$=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{2}}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-6}{2x+1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2-\frac{6}{x}}{2+\frac{1}{x}}}=e^1=e\,.$$

При знаходженні границі основи скористались формулою (II.2'), а при обчисленні границі показника – правилом 3.

Розглянемо інший спосіб розв’язання цієї вправи. Поділимо чисельник та знаменник дробу на $2x$ і одержимо

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x-3}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{3}{2x}}{1+\frac{1}{2x}}\right)^{x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{3}{2x}\right)^{x-3}}{\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{x-3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{3}{2x}\right)^{x}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{3}}{\left(1+\frac{3}{2x}\right)^{3}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{2x}\right)^{\frac{2x}{3}\cdot\frac{3}{2}}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{3}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{2x}\right)^{3}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x\cdot\frac{1}{2}}}=$$

$$=\frac{\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{2x}\right)^{\frac{2x}{3}}\right]^{\frac{3}{2}}\cdot 1}{1\cdot\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}\right]^{\frac{1}{2}}}=\frac{e^{\frac{3}{2}}}{e^{\frac{1}{2}}}=e^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}=e^1=e\,.$$

Оскільки перший спосіб є більш стандартним, його ми і будемо використовувати у подальшому. ⌋

78. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+3x+1}{x^2-2x+5}\right)^{x-1}$.

⌈ Переконуємось, що при $x\to\infty$ основа $\dfrac{x^2+3x+1}{x^2-2x+5}\to 1$, а показник $(x-1)\to\infty$. Тому виділення цілої частини в основі можна провести у вигляді $\dfrac{x^2+3x+1}{x^2-2x+5}=1+\left(\dfrac{x^2+3x+1}{x^2-2x+5}-1\right)=$

$=1+\dfrac{x^2+3x+1-\left(x^2-2x+5\right)}{x^2-2x+5}=1+\dfrac{5x-4}{x^2-2x+5}$. Перетворимо функцію так, щоб можна було скористатись формулою (II.2'). Використовуючи формулу (3), одержимо

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x+1}{x^2-2x+5}\right)^{x-1}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{5x-4}{x^2-2x+5}\right)^{\frac{x^2-2x+5}{5x-4}}\right]^{\frac{(5x-4)(x-1)}{x^2-2x+5}}=$$

$$=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5x-4}{x^2-2x+5}\right)^{\frac{x^2-2x+5}{5x-4}}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2-9x+4}{x^2-2x+5}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5-\frac{9}{x}+\frac{4}{x^2}}{1-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}}=e^5. \quad \lrcorner$$

79. $\lim\limits_{x\to3}\left(2x-5\right)^{\frac{x}{x^2-9}}$.

$\ulcorner$ При $x\to3$: $\left(2x-5\right)\to1$, $\dfrac{x}{x^2-9}\to\infty$. Тому подамо основу у вигляді $1+f\left(x\right)$:

$$2x-5=1+\left(2x-5\right)-1=1+\left(2x-5-1\right)=1+\left(2x-6\right)=1+2\left(x-3\right).$$

Зауважимо, що $2\left(x-3\right)\to0$ при $x\to3$. Перетворимо функцію під знаком границі так, щоб можна було використати формулу (II.1'). Враховуючи формулу (3), одержимо:

$$\lim_{x\to3}\left(2x-5\right)^{\frac{x}{x^2-9}}=\lim_{x\to3}\left[\left(1+2\left(x-3\right)\right)^{\frac{1}{2(x-3)}}\right]^{\frac{2(x-3)\cdot x}{x^2-9}}=$$

$$=\left[\lim_{x\to3}\left(1+2\left(x-3\right)\right)^{\frac{1}{2(x-3)}}\right]^{\lim\limits_{x\to3}\frac{2x}{x+3}}=e^{\frac{2\cdot3}{3+3}}=e^1=e. \quad \lrcorner$$

80. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x+1\right)\left[\ln\left(3x-2\right)-\ln\left(3x+1\right)\right]$.

$\ulcorner$ Скориставшись властивостями логарифма $\ln a-\ln b=\ln\dfrac{a}{b}$ та $k\ln a=\ln a^k$, одержуємо

$$(2x+1)\left[\ln(3x-2)-\ln(3x+1)\right]=(2x+1)\ln\frac{3x-2}{3x+1}=\ln\left(\frac{3x-2}{3x+1}\right)^{2x+1}.$$

Скористаємось наслідком формули (2):

якщо існує границя $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a>0$, *то*

$$\lim_{x\to x_0}\left[\log_b f(x)\right]=\log_b\left[\lim_{x\to x_0} f(x)\right].$$

Одержимо

$$\lim_{x\to+\infty}(2x+1)\left[\ln(3x-2)-\ln(3x+1)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(\frac{3x-2}{3x+1}\right)^{2x+1}\right]=$$

$$=\ln\left[\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x-2}{3x+1}\right)^{2x+1}\right].$$

Для закінчення розв’язання слід виділити цілу частину в основі $\frac{3x-2}{3x+1}=\frac{(3x+1)-3}{3x+1}=1+\frac{-3}{3x+1}$ і обчислити

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x-2}{3x+1}\right)^{2x+1}=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{-3}{3x+1}\right)^{\frac{3x+1}{-3}}\right]^{\frac{-3(2x+1)}{3x+1}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-6x-3}{3x+1}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-6-\frac{3}{x}}{3+\frac{1}{x}}}=e^{-2}.$$

Тому

$$\ln\left[\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x-2}{3x+1}\right)^{2x+1}\right]=\ln e^{-2}=-2\cdot\ln e=-2\cdot 1=-2.$$

Отже, $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+1)\left[\ln(3x-2)-\ln(3x+1)\right]=-2$. ⌋

81. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\operatorname{ctg}3x}$.

⌈ При $x\to 0$: $\cos x\to 1$, $\operatorname{ctg}^2 3x\to\infty$. Тому перетворимо функцію під знаком границі так, щоб можна було скористатись формулою (II.1'):

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 3x}=\lim_{x\to 0}\left(1+(\cos x-1)\right)^{\operatorname{ctg}^2 3x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\left[1+(\cos x-1)\right]^{\frac{1}{\cos x-1}}\right)^{\frac{(\cos x-1)\cos^2 3x}{\sin^2 3x}}=$$

$$=\left(\lim_{x\to 0}\left[1+(\cos x-1)\right]^{\frac{1}{\cos x-1}}\right)^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-(1-\cos x)\cdot\cos^2 3x}{\sin^2 3x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}\cdot\cos^2 3x}{\sin^2 3x}}=$$

$$=e^{-\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\frac{(3x)^2}{\sin^2 3x}\cdot\frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^2\cos^2 3x}{(3x)^2}\right]}=e^{-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{(3x)^2}{\sin^2 3x}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos^2 3x}{18}}=e^{-1\cdot 1\cdot\frac{1}{18}}=e^{-\frac{1}{18}}.$$

Ми використали те, що $(\cos x-1)\to 0$ при $x\to 0$, відому формулу тригонометрії $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$ та обидві визначні границі. ⌋

Вправи для самостійного розв’язання

82. За означенням границі послідовності показати, що послідовність

$$\frac{2}{5};\frac{3}{7};\frac{4}{9};\ldots;\frac{n+1}{2n+3};\ldots$$

має границею число $\frac{1}{2}$.

83. За допомогою властивості (1) знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x+1}{x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}(2x+5)$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{3+x}}{1+\sqrt{2-x}}$.

84. Знайти границі, використовуючи правило 1:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{3x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x^2+x-12}$;

в) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{2x^2+x-6}{x^2+x-2}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4+2x^3-3}{x^3+x-2}$.

85. Використовуючи властивості нескінченно малих та нескінченно великих, знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2+2x+4}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2+3x+3}{x^2+3x+2}$.

86. Знайти границі за допомогою правила 2:

а) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x-2}-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x^2-16}$;

в) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{\sqrt{12+x}-3}{1-\sqrt{x+4}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{2-\sqrt{x^2+4}}$.

87. Використовуючи властивості нескінченно великих, знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-x+4\right)$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2-x\right)$.

За допомогою правила 3 знайти границі:

88. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{2x^2+3x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-x+5}{2x-3}$.

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x+4}{x^2+x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-x^2+2x}{x^3+x^2+4}$.

89. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^3+1}{x^2+2}-2x\right)$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+5}-\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[3]{x^2+3}+x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[7]{x^5+2}-\sqrt[3]{x^4-3}}{\sqrt[3]{x^9+1}}$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^3+3}-\sqrt{x^3-3}\right)$.

За допомогою першої та другої визначних границь знайти границі:

90. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 7x}{x}$.

91. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\operatorname{tg} ax}$.

92. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{\cos x-\cos^5 x}$.

93. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}$.

94. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x}{\operatorname{arctg} 3x}$.

95. $\lim\limits_{x\to0} x\operatorname{ctg} 7x$.

96. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)^2}$.

97. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)\operatorname{tg} x$.

98. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1+\cos 5x}{1-\cos 4x}$.

99. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 2x}{\sin 7x}$.

100. $\lim\limits_{x\to3}2^{\frac{x-3}{2}}$.

101. $\lim\limits_{x\to+\infty}2^{\frac{3x-1}{x+2}}$.

102. $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{2}{x}}$.

103. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x+5}\right)^{2x+5}$.

104. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{x}$.

105. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{1+2x}\right)^{x}$.

106. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)^{x}$.

107. $\lim\limits_{x\to0}(1+3x)^{\frac{4}{x}}$.

108. $\lim\limits_{x\to 1}(7x-6)^{\frac{1}{x-1}}$.

109. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+3}{x^2+1}\right)^{1-x^2}$.

110. $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)^{\frac{4x}{2-x}}$.

111. $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-2)\left[\ln(2x-1)-\ln(2x+1)\right]$.

112. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2x^2-3\right)\left[\ln\left(x^2+4\right)-\ln\left(x^2-1\right)\right]$.

113. $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}$.

114. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2\operatorname{tg} x)^{\frac{6}{x}}$.

115. $\lim\limits_{x\to 1}(1+5\ln x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

116. $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$.

117. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

Відповіді:

83. а) $\dfrac{1}{2}$; б) 11; в) 1.

84. а) $\dfrac{4}{3}$; б) $\dfrac{5}{7}$; в) $\dfrac{7}{3}$; г) $\dfrac{5}{2}$.

85. а) 0; б) ∞.

86. а) 2; б) $\dfrac{1}{32}$; в) $-\dfrac{1}{3}$; г) -2.

87. а) ∞; б) ∞.

88. а) 0; б) ∞; в) 2; г) 3.

89. а) 0; б) 1; в) 0; г) 0.

90. 7.

91. $\dfrac{1}{a}$.

92. $\dfrac{1}{2}$.

93. $\dfrac{1}{6}$.

94. $\dfrac{2}{3}$.

95. $\dfrac{1}{7}$.

96. $\dfrac{1}{2}$.

97. 2.

98. $-\dfrac{25}{16}$.

99. $\dfrac{2}{7}$.

100. 1.

101. 8.

102. e.

103. e.

104. e^3.

105. $\sqrt{e}$.

106. e^{-5}.

107. e^{12}.

108. e^7. **109.** e^{-2}. **110.** e^{-16}.
111. -3. **112.** 10. **113.** e^{-1}.
114. e^{12}. **115.** e^5. **116.** $e^{\operatorname{ctg} a}$.
117. $e^{-\frac{1}{2}}$.

4. Порівняння нескінченно малих

Нехай $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ – нескінченно малі при $x \to x_0$.

1. Якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то кажуть, що $\alpha(x)$ є нескінченно малою *вищого порядку* ніж $\beta(x)$ і записують $\alpha = o(\beta)$.

2. Якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A$, де A – відмінне від нуля число, то кажуть, що $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ – нескінченно малі *одного порядку*. Зокрема, якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то нескінченно малі $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ називають *еквівалентними* і записують $\alpha \sim \beta$.

3. Якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$, то кажуть, що $\alpha(x)$ є нескінченно малою *нижчого порядку* ніж $\beta(x)$. Але це означає, що $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 0$, тобто $\beta = o(\alpha)$.

4. Якщо $\left[\alpha(x)\right]^k$ та $\beta(x)$ – нескінченно малі одного порядку, то кажуть, що нескінченно мала $\beta(x)$ має *порядок* k у порівнянні з нескінченно малою $\alpha(x)$.

Властивості нескінченно малих:

1) Добуток двох нескінченно малих є нескінченною малою вищого порядку у порівнянні з кожним співмножником, тобто, якщо $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ – нескінченно малі та $\gamma(x) = \alpha(x) \cdot \beta(x)$, то $\gamma = o(\alpha)$, $\gamma = o(\beta)$.

2) Нескінченно малі $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ еквівалентні тоді і тільки тоді, коли їх різниця $\alpha(x)-\beta(x)=\gamma(x)$ є нескінченно малою вищого порядку у порівнянні з $\alpha(x)$ та $\beta(x)$, тобто якщо $\gamma=o(\alpha)$, $\gamma=o(\beta)$, то $\alpha\sim\beta$.

3) Границя відношення двох нескінченно малих не зміниться, якщо одну з них або обидві замінити еквівалентними їм нескінченно малими.

Корисно **пам'ятати** наступні основні пари еквівалентних при $x\to 0$:

$\sin x\sim x$, $\operatorname{tg} x\sim x$, $\arcsin x\sim x$, $\operatorname{arctg} x\sim x$; $\ln(1+x)\sim x$, $e^x-1\sim x$.

118. Порівняти нескінченно малі $\alpha=2x^2+x^3$ та $\beta=3x^2+x^5$ при $x\to 0$.

⌈ Розглянемо $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2+x^3}{3x^2+x^5}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2+x}{3+x^3}=\dfrac{2}{3}$. Оскільки границя відношення є відмінним від нуля числом, то функції α та β – нескінченно малі одного порядку. ⌋

119. Порівняти нескінченно малі $\alpha=t\operatorname{tg}^2 t$ та $\beta=t\sin t$ при $t\to 0$.

⌈ Розглянемо

$$\lim_{t\to 0}\frac{\alpha}{\beta}=\lim_{t\to 0}\frac{t\operatorname{tg}^2 t}{t\sin t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t\cdot\sin t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{\cos^2 t}=\frac{\lim\limits_{t\to 0}\sin t}{\lim\limits_{t\to 0}\cos^2 t}=\frac{0}{1}=0.$$

Отже, α є нескінченно малою вищого порядку ніж β, тобто $\alpha=o(\beta)$. ⌋

120. Визначити порядок нескінченно малої $\alpha(x)=1-\cos x$ у порівнянні з нескінченно малою x.

⌈ Оскільки, використовуючи першу визначну границю,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\frac{1}{2^2}\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2},$$

то $\alpha(x)=1-\cos x$ є нескінченно малою другого порядку у порівнянні з x. $\rfloor$

121. Визначити порядок нескінченно малої $\alpha(x)=\operatorname{tg}x-\sin x$ у порівнянні з нескінченно малою x.

$\ulcorner$ На відміну від попереднього прикладу, де ми зробили припущення про порядок нескінченно малої, враховуючи вигляд першої визначної границі, зробити подібне припущення в цій вправі не можна. Тому будемо вважати, що порядок малості цієї функції дорівнює k і знайдемо таке k, щоб границя $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^k}$ дорівнювала відмінному від нуля числу. Одержимо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin x\cos x}{x^k}=$$

$$=1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\;2\sin^2\frac{x}{2}}{x^k}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\frac{2\cdot x\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^k}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^3}{x^k}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{k-3}}.$$

Очевидно, що лише при $k=3$ границя скінченна і відмінна від нуля, а саме, дорівнює $\dfrac{1}{2}$. Тому функція $\alpha(x)=\operatorname{tg}x-\sin x$ – нескінченно мала третього порядку малості у порівнянні з x. $\rfloor$

Зауважимо, що основні пари еквівалентних нескінченно малих (ст. 159) легко узагальнюються. Зокрема, при $x\to 0$:

$\sin kx \sim kx$;	$\sin^n x \sim x^n$;	$\sin^n kx \sim (kx)^n$;
$\operatorname{tg}kx \sim kx$;	$\operatorname{tg}^n x \sim x^n$;	$\operatorname{tg}^n kx \sim (kx)^n$;
$\arcsin kx \sim kx$;	$\arcsin^n x \sim x^n$;	$\arcsin^n kx \sim (kx)^n$;
$\operatorname{arctg}kx \sim kx$;	$\operatorname{arctg}^n x \sim x^n$;	$\operatorname{arctg}^n kx \sim (kx)^n$;
$\ln(1+kx) \sim kx$;	$\ln^n(1+x) \sim x^n$;	$\ln^n(1+kx) \sim (kx)^n$;

$e^{kx}-1\sim kx$; $\quad (e^x-1)^n\sim x^n$; $\quad (e^{kx}-1)^n\sim (kx)^n$.

Це дає нам можливість з використанням властивості 3) (ст. 159) суттєво спростити розв'язання вправ, пов'язаних з визначними границями.

Повернемось, наприклад, до розв'язання вправи 65 а):

$\ulcorner$ Оскільки $\sin 5x\sim 5x$, $\operatorname{tg} 2x\sim 2x$ при $x\to 0$, то маємо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{2x}=\frac{5}{2}. \quad \lrcorner$$

Наведемо розв'язання вправи 65 б) з використанням вказаної властивості:

$$\ulcorner \lim_{x\to 0}\frac{x\operatorname{tg} 3x}{1-\cos 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\operatorname{tg} 3x}{2\sin^2 2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot 3x}{(2x)^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{4x^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{8}.$$

Ми скористались еквівалентностями: $\operatorname{tg} 3x\sim 3x$; $\sin^2 2x\sim (2x)^2$. $\lrcorner$

Цей прийом зручно використовувати при порівнянні нескінченно малих.

122. Порівняти нескінченно малі $\alpha=\ln(1+x\sin x)$ та $\beta=\operatorname{tg} x^2$ при $x\to 0$.

$\ulcorner$ Розглянемо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha}{\beta}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x\sin x)}{\operatorname{tg} x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Ми замінили чисельник та знаменник дробу еквівалентними нескінченно малими: $\ln(1+x\sin x)\sim x\sin x$, $\operatorname{tg} x^2\sim x^2$. Оскільки границя дорівнює одиниці, то нескінченно малі α та β еквівалентні. $\lrcorner$

123. Порівняти нескінченно малі $\alpha=a^x-1$ та $\beta=x\ln a$ при $x\to 0$.

$\ulcorner$ Відомо, що $e^{kx}-1\sim kx$, якщо $x\to 0$. У нашому випадку $\alpha=a^x-1=\left(e^{\ln a}\right)^x-1=e^{x\ln a}-1\sim(x\ln a)$. Тобто нескінченно малі α та β еквівалентні. $\lrcorner$

124. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}2x}{x^5+x^3+x}$.

$\ulcorner$ Скориставшись еквівалентністю $\operatorname{tg}2x \sim 2x$ при $x\to 0$, одержимо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}2x}{x^5+x^3+x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x^5+x^3+x}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{x^4+x^2+1}=2. \quad \lrcorner$$

125. Знайти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln\left(1+x-3x^2+2x^3\right)}{\ln\left(1+4x-5x^2+x^3\right)}$.

$\ulcorner$ При $x\to 1$ функції $x-3x^2+2x^3$ та $4x-5x^2-x^3$ є нескінченно малими. Тому, використовуючи еквівалентність $\ln(1+t)\sim t \quad (t\to 0)$, маємо

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln\left(1+x-3x^2+2x^3\right)}{\ln\left(1+4x-5x^2+x^3\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-3x^2+2x^3}{4x-5x^2+x^3}=\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-3x+1}{x^2-5x+4}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(2x-1)}{(x-1)(x-4)}=\lim_{x\to 1}\frac{2x-1}{x-4}=\frac{1}{-3}=-\frac{1}{3}. \quad \lrcorner$$

<u>Вправи для самостійного розв'язання</u>

126. Порівняти нескінченно малі $\alpha=3x^3+x$ та $\beta=x^4-x^3+2x^2$ при $x\to 0$.

127. Порівняти нескінченно малі $\alpha=t\ln(1+t)$ та $\beta=t\sin t$ при $t\to 0$.

128. Визначити порядок нескінченно малої $y=xe^x$ у порівнянні з нескінченно малою x.

129. Визначити порядок нескінченно малої $y=\sqrt{\sin 2x}$ у порівнянні з нескінченно малою x.

130. Порівняти нескінченно малі $\alpha=x^2\sin^2 x$ та $\beta=x\operatorname{tg}x$, якщо $x\to 0$.

Знайти границі, використовуючи властивість 3) нескінченно малих.

131. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-1}{\operatorname{tg}2x}$.

132. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{\ln^2(1+3x)}$.

133. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\ln(1-x)}$. **134.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-4x)}{e^{2x}-1}$.

135. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\left(e^{x-1}-1\right)}{\ln x}$.

Відповіді.

126. $\beta=o(\alpha)$. **127.** $\alpha\sim\beta$. **128.** 1. **129.** $\dfrac{1}{2}$.

130. $\alpha=o(\beta)$. **131.** $\dfrac{3}{4}$. **132.** $\dfrac{4}{9}$. **133.** -1.

134. -2. **135.** 1.

5. Неперервність функції

Функція $f(x)$ називається *неперервною в точці* x_0, якщо

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0),$$

тобто границя функції у точці співпадає зі значенням функції в цій точці.

Якщо позначити $x-x_0=\Delta x$ (*приріст аргументу*) та $f(x)-f(x_0)=\Delta f(x)$ (*приріст функції*), то умову неперервності можна записати у вигляді

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0.$$

Якщо функція неперервна в кожній точці інтервалу (відрізка), то вона називається *неперервною на* цьому *інтервалі* (*відрізку*).

Якщо функція не є неперервною у точці x_0, то її називають *розривною* у цій точці, а саму точку x_0 називають *точкою розриву*.

Нехай x_0 – точка розриву функції $f(x)$. Якщо існують скінченні односторонні границі $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0-0)$ та $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0+0)$, то x_0 називають точкою розриву *першого роду* ($x\to x_0-0$ означає, що $x\to x_0$ і $x<x_0$; $x\to x_0+0$ означає, що $x\to x_0$ і $x>x_0$).

Точки розриву першого роду поділяють на точки *усувного* розриву (коли $f(x_0-0)=f(x_0+0)$) та точки *неусувного* розриву або точки стрибка (коли $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$). *Стрибком* функції в точці x_0 у випадку неусувного розриву називають різницю $f(x_0+0)-f(x_0-0)$.

Зауважимо, що існування границі функції $f(x)$ в точці x_0 рівносильне умові $f(x_0-0)=f(x_0+0)$.

Точки розриву, які не є точками розриву першого роду, називають точками розриву *другого роду*.

Сума, різниця та добуток скінченного числа неперервних функцій є неперервною функцією. Частка двох неперервних функцій є неперервною функцією у тих точках, де знаменник не дорівнює нулю.

З означення неперервності функції в точці та властивостей границь випливає, що кожна елементарна функція неперервна у довільній точці своєї області визначення. Цей факт будемо використовувати при дослідженні функцій на неперервність.

136. Довести, що при $x=3$ функція $y=\dfrac{x+1}{x-3}$ має розрив та встановити його характер.

$\ulcorner$ При $x=3$ функція має розрив, оскільки це значення не належить її області визначення. З'ясуємо характер розриву. Обчислимо: $\lim\limits_{x\to 3-0}\dfrac{x+1}{x-3}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 3+0}\dfrac{x+1}{x-3}=+\infty$. Отже, функція при $x\to 3$ не має скінченних односторонніх границь (і не визначена у цій точці). Тому $x=3$ є точкою розриву другого роду. $\lrcorner$

137. Дослідити функцію $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-2}$ на неперервність.

$\ulcorner$ Функція $y=\operatorname{arctg} t$ є основною елементарною функцією з областю визначення $t\in(-\infty,+\infty)$. Функція $t=\dfrac{1}{z}=z^{-1}$ також елементарна і визначена при $z\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, тобто $z\neq 0$. Але функція $z=x-2$ також елементарна і визначена при $x\in(-\infty,+\infty)$. Тобто єдиною точкою, що не належить області визначення функції $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-2}$, є точка $x=2$. Тому $x=2$ є точкою розриву.

З'ясуємо характер цього розриву. При $x\to 2-0$ маємо $\dfrac{1}{x-2}\to-\infty$. Звідси $\lim\limits_{x\to 2-0}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-2}=-\dfrac{\pi}{2}$. При $x\to 2+0$ маємо

$\frac{1}{x-2} \to +\infty$. Звідси $\lim\limits_{x \to 2+0} \operatorname{arctg}\frac{1}{x-2} = \frac{\pi}{2}$. Односторонні границі скінченні, але не рівні. Тому $x = 2$ є точкою неусувного розриву першого роду зі стрибком $f(2+0) - f(2-0) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$.

Ми скористались графіком функції $y = \operatorname{arctg} x$ (рис. 5) для встановлення того, що $\operatorname{arctg} x \to \frac{\pi}{2}$ при $x \to +\infty$ та $\operatorname{arctg} x \to -\frac{\pi}{2}$ при $x \to -\infty$. ⌋

138. З'ясувати характер розриву функції $y = \frac{x^2-4}{x-2}$ в точці $x = 2$.

⌈ При $x = 2$ функція не визначена. Оскільки $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}(x+2) = 4$, то функція y має в точці $x = 2$ усувний розрив. ⌋

139. Дослідити на неперервність функцію $y = 2^{\frac{1}{x-1}}$.

⌈ При $x = 1$ функція має розрив, оскільки це значення не належить її області визначення. З'ясуємо характер розриву. Для цього знайдемо односторонні границі функції при $x \to 1$.

Якщо $x \to 1-0$, то $\frac{1}{x-1} \to -\infty$ і $\lim\limits_{x\to 1-0} 2^{\frac{1}{x-1}} = 0$.

Якщо $x \to 1+0$, то $\frac{1}{x-1} \to +\infty$ і $\lim\limits_{x\to 1+0} 2^{\frac{1}{x-1}} = +\infty$.

Оскільки права границя не є скінченною, то функція у точці $x = 1$ має розрив другого роду.

При обчисленні односторонніх границь у цій вправі зручно використати схематичний графік функції $y = 2^x$ (рис. 20), з якого:

якщо $x \to +\infty$, то $2^x \to +\infty$;

якщо $x \to -\infty$, то $2^x \to 0$. ⌋

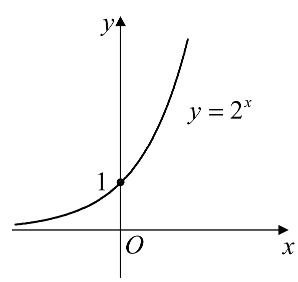


Рис. 20

140. Знайти точки розриву функції $y=\dfrac{2^{\frac{1}{x-2}}-1}{2^{\frac{1}{x-2}}+1}$ та дослідити їх характер.

$\ulcorner$ Область визначення функції визначається системою нерівностей $\begin{cases} x-2\neq 0, \\ 2^{\frac{1}{x-2}}+1\neq 0, \end{cases}$ звідки $x\neq 2$.

Значення $x=2$ не належить області визначення функції. Отже, в цій точці функція має розрив.

Дослідимо характер розриву функції у точці $x=2$. Розглянемо односторонні границі.

Оскільки $\dfrac{1}{x-2}\to -\infty$ при $x\to 2-0$, то $\lim\limits_{x\to 2-0} 2^{\frac{1}{x-2}}=0$. Звідси $\lim\limits_{x\to 2-0}\dfrac{2^{\frac{1}{x-2}}-1}{2^{\frac{1}{x-2}}+1}=-1$.

Оскільки $\dfrac{1}{x-2}\to +\infty$ при $x\to 2+0$, то $2^{\frac{1}{x-2}}\to +\infty$ і тому $\dfrac{1}{2^{\frac{1}{x-2}}}\to 0$. Звідси $\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{2^{\frac{1}{x-2}}-1}{2^{\frac{1}{x-2}}+1}=\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{1-\dfrac{1}{2^{\frac{1}{x-2}}}}{1+\dfrac{1}{2^{\frac{1}{x-2}}}}=1$.

Отже, функція має у точці $x=2$ неусувний розрив першого роду зі стрибком $f(2+0)-f(2-0)=1-(-1)=2$. $\lrcorner$

141. Дослідити на неперервність функцію

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{якщо } x\leq 0, \\ \sin x, & \text{якщо } 0<x<\dfrac{\pi}{2}, \\ 2, & \text{якщо } x\geq\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

⌈ Дана функція не є елементарною. Тому з того, що вона визначена при $x \in (-\infty, +\infty)$, висновок про відсутність точок розриву зробити не можна. Але функції $y = x$, $y = \sin x$ та $y = 2$ елементарні. Тому у внутрішніх точках відповідних проміжків їх задання $(-\infty, 0]$, $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ та $\left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right)$ розривів не існує. Отже, розриви функція $f(x)$ може мати лише у точках $x_1 = 0$ та $x_2 = \frac{\pi}{2}$.

Розглянемо $x_1 = 0$:

$$\lim_{x \to 0-0} f(x) = \lim_{x \to 0-0} x = 0,$$

$$\lim_{x \to 0+0} f(x) = \lim_{x \to 0+0} \sin x = 0,$$

$$f(0) = 0.$$

Оскільки $f(0-0) = f(0+0) = f(0)$, то функція неперервна у точці $x_1 = 0$.

Розглянемо $x_2 = \frac{\pi}{2}$:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-0} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}-0} \sin x = \sin\frac{\pi}{2} = 1,$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}+0} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}+0} 2 = 2,$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2.$$

Оскільки $f\left(\frac{\pi}{2}-0\right) \neq f\left(\frac{\pi}{2}+0\right)$, то функція $f(x)$ має у точці $x_2 = \frac{\pi}{2}$ неусувний розрив першого роду зі стрибком

$$f\left(\frac{\pi}{2}+0\right) - f\left(\frac{\pi}{2}-0\right) = 2 - 1 = 1.$$

Схематичний графік функції $f(x)$ наведено на рис. 21. ⌋

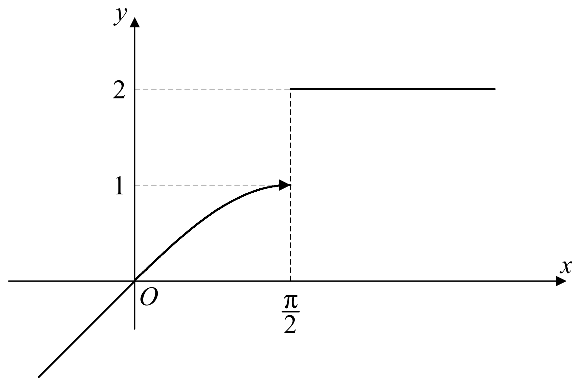


Рис. 21

Вправи для самостійного розв'язання

142. Довести, що при $x = 5$ функція $y = \dfrac{x}{5 - x}$ має розрив.

143. З'ясувати характер розриву функції $y = \dfrac{1}{1 + 2^{\frac{1}{1-x}}}$ при $x = 1$.

144. З'ясувати характер розриву функції $y = \dfrac{\sin x}{x}$ у точці $x = 0$.

145. Дослідити функцію $y = \dfrac{1}{(x-1)(x-3)}$ на неперервність.

146. Дослідити функцію $y = 4^{\frac{2}{x-3}}$ на неперервність.

147. Дослідити функцію $y = \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}$ на неперервність.

148. Дослідити на неперервність функцію

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{якщо } x < 0, \\ x^2, & \text{якщо } x \geq 0. \end{cases}$$

149. Дослідити на неперервність функцію

$$f(x)=\begin{cases} 1+\operatorname{tg} x, & \text{якщо } -\dfrac{\pi}{2}<x\le 0, \\ \cos x, & \text{якщо } 0<x\le\dfrac{\pi}{2}, \\ \sin x, & \text{якщо } \dfrac{\pi}{2}<x<\pi. \end{cases}$$

150. При якому значенні a функція $f(x)=\begin{cases} x-a, & \text{якщо } x<1, \\ 2x+1, & \text{якщо } x\ge 1 \end{cases}$ буде неперервною при $x\in(-\infty,+\infty)$?

Відповіді.

143. 1-го роду, неусувний.

144. 1-го роду, усувний.

145. $x_1=1$ та $x_2=3$ – точки розриву 2-го роду

146. $x=3$ – точка розриву 2-го роду.

147. $x=2$ – точка усувного розриву.

148. $x=0$ – точка розриву 2-го роду.

149. $x=\dfrac{\pi}{2}$ – точка неусувного розриву.

150. -2.

Розділ 5. ПОХІДНА ФУНКЦІЇ

1. Знаходження похідної за означенням

За означенням *похідна функції* $y = f(x)$ у точці x обчислюється за формулою

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \qquad (1)$$

якщо границя існує і скінченна. Тут $\Delta f(x)$ – *приріст функції*; Δx – *приріст аргументу* ($\Delta x \neq 0$).

Для похідної використовують також інші позначення, зокрема: $y'(x)$, y', $\dfrac{dy}{dx}$. Операцію знаходження похідної називають *диференціюванням* функції.

За фізичним змістом похідна характеризує швидкість зміни функції.

Обчислити за означенням похідні функцій:

1. $f(x) = x^2$.

$\ulcorner$ Знайдемо приріст функції: $\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x)$. Для даної функції

$$\Delta f(x) = (x+\Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x \cdot \Delta x + \Delta x^2 - x^2 = 2x \cdot \Delta x + \Delta x^2 =$$
$$= \Delta x(2x + \Delta x).$$

Знаходимо похідну функції за формулою (1):

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x+\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(2x + \Delta x) =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0}(2x) + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = 2x + 0 = 2x$$

(скористалися властивостями границь, див. розділ 4).

Отже, $(x^2)' = 2x$. $\lrcorner$

2. $f(x) = x^3$.

$\ulcorner$ Знайдемо приріст функції

$$\Delta f(x) = (x+\Delta x)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 - x^3 =$$
$$= 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 = \Delta x\left(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2\right).$$

Знаходимо похідну функції за формулою (1):

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\left(3x^2+3x\Delta x+\Delta x^2\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(3x^2+3x\Delta x+\Delta x^2\right)=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(3x^2\right)+3x\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x+\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x^2=3x^2+3x\cdot 0+0=3x^2.$$

Отже, $\left(x^3\right)'=3x^2$. ⌋

Зауваження. Дещо складніше за формулою (1) знаходиться похідна степеневої функції з довільним показником степеня $n\in R$: $\left(x^n\right)'=nx^{n-1}$. Звідси випливають, зокрема, формули, отримані в прикладах **1**, **2** (див. далі підрозділ **2**).

3. $f(x)=\sin x$.

⌜ Знайдемо приріст функції

$$\Delta f(x)=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

(при обчисленні різниці синусів скористалися формулою $\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$).

Знаходимо похідну функції:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(2\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=$$

$$=1\cdot\cos x=\cos x.$$

Отже, $(\sin x)'=\cos x$. ⌋

4. $f(x)=\cos x$.

⌜ Знайдемо приріст функції

$$\Delta f\left(x\right)=\cos\left(x+\Delta x\right)-\cos x=-2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}$$

(при обчисленні різниці косинусів скористалися формулою $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$).

Знаходимо похідну функції:

$$f'\left(x\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f\left(x\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(-\frac{2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}\right)=$$

$$=-2\lim_{\Delta x\to 0}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}=-2\sin x\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\frac{1}{2}\right)=$$

$$=-2\sin x\cdot\frac{1}{2}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=-\sin x\,.$$

Отже, $\left(\cos x\right)'=-\sin x$. ┘

5. $y=\ln x$.

┌ Знайдемо приріст функції

$\Delta f\left(x\right)=\ln\left(x+\Delta x\right)-\ln x=\ln\frac{x+\Delta x}{x}=\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$ (при обчисленні різниці логарифмів скористалися формулою $\ln x-\ln y=\ln\frac{x}{y}$).

Знаходимо похідну функції:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f\left(x\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\cdot\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=$$

$$=\frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x}{\Delta x}\cdot\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}=$$

$$=\frac{1}{x}\ln\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}=\frac{1}{x}\ln e=\frac{1}{x}$$

(при обчисленні границі скористалися формулами $k\ln x = \ln x^k$, $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ та властивостями границь: а) сталий множник виноситься за знак границі; б) якщо функція неперервна, то знак границі та знак функції можна міняти місцями).

Отже, якщо $y = \ln x$, то $y' = \dfrac{1}{x}$. ⌋

6. Знайти похідну функції $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x}, & \textit{якщо } x \neq 0 \\ 0 & , \textit{якщо } x = 0 \end{cases}$ у точці $x = 0$.

⌈ $f'(0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(\Delta x)^2 \sin\dfrac{1}{\Delta x} - 0}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\Delta x \sin\dfrac{1}{\Delta x}\right) = 0$,

оскільки $\left|\sin\dfrac{1}{\Delta x}\right| \leq 1$.

Отже, $f'(0) = 0$. ⌋

7. Довести, що функція $f(x) = |x|$ не має похідної в точці $x = 0$.

⌈ Обчислимо односторонні границі:

$$\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{|0+\Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1,$$

$$\lim_{\Delta x\to 0+0} = \frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{|0+\Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Оскільки односторонні границі різні, то це означає, що границя $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(0)}{\Delta x}$ не існує, тобто функція $f(x) = |x|$ в точці $x = 0$ похідної не має. ⌋

8. Довести, що функція $y = \sqrt[3]{x}$ не має похідної в точці $x = 0$.

⌈ Відповідно до формули (1) знайдемо границю:

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(0)}{\Delta x}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{0+\Delta x} - \sqrt[3]{0}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{(\Delta x)^{\frac{2}{3}}} = \infty$. Отже, похідна функції $y = \sqrt[3]{x}$ в точці $x = 0$ не існує. ⌋

Вправи для самостійного розв'язання

Обчислити за означенням похідні функцій:

9. $y = c$, де c – стала.

10. $y = x$.

11. $y = \sqrt{x}$.

12. $y = \frac{1}{x}$.

13. $y = \frac{1}{x^2}$.

14. Довести, що функція $y = \sqrt{x}$ не має похідної в точці $x = 0$.

15. Довести, що функція $y = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$ не має похідної в точці $x = 0$.

Відповіді:

9. $y' = 0$.

10. $y' = 1$.

11. $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x \in (0, +\infty)$.

12. $y' = -\frac{1}{x^2}$.

13. $y' = -\frac{2}{x^3}$.

2. Таблиця похідних основних елементарних функцій

I. $\left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1}$ (n – будь-яке дійсне число)

II. $\left(a^x\right)' = a^x \ln a \quad (a > 0, a \neq 1)$

Зокрема, при $a = e$

II°. $\left(e^x\right)' = e^x$

III. $\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \ln a}$ ($a > 0,\ a \neq 1$)

Зокрема, при $a = e$

III°. $\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$

IV. $(\sin x)' = \cos x$

V. $(\cos x)' = -\sin x$

VI. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

VII. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

VIII. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

IX. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

X. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

XI. $(\operatorname{arc\,ctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Таблицю похідних потрібно вивчити **напам'ять**!

Скориставшись табличною похідною $\mathbf{I}$, обчислити похідні функцій:

16. $y = x$.

$(x)' = (x^1)' = 1 \cdot x^{1-1} = x^0 = 1$ (в табличній формулі **I** поклали $n = 1$).

Отже, $(x)' = 1$.

17. $y = \dfrac{1}{x}$.

$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}$ (в табличній формулі **I** поклали $n = -1$).

Отже, $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$.

18. $y = x^2$.

⌈ $\left(x^2\right)' = 2x^{2-1} = 2x$ (в табличній формулі **I** поклали $n = 2$).

Отже, $\left(x^2\right)' = 2x$. ⌋

19. $y = \dfrac{1}{x^2}$.

⌈ $\left(\dfrac{1}{x^2}\right)' = \left(x^{-2}\right)' = -2x^{-2-1} = -2x^{-3} = -\dfrac{2}{x^3}$ (в табличній формулі **I** поклали $n = -2$). ⌋

20. $y = \sqrt{x}$.

⌈ $$\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$ (в табличній формулі **I** поклали $n = \dfrac{1}{2}$).

Отже, $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. ⌋

21. $y = \sqrt[3]{x}$.

⌈ $$\left(\sqrt[3]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$ (в табличній формулі **I** поклали $n = \dfrac{1}{3}$).

Отже, $\left(\sqrt[3]{x}\right)' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. ⌋

22. $y = \sqrt[5]{x}$.

⌈ $$\left(\sqrt[5]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{5}}\right)' = \frac{1}{5}x^{\frac{1}{5}-1} = \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x^{\frac{4}{5}}} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt[5]{x^4}} = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$$ (в табличній формулі **I** поклали $n = \dfrac{1}{5}$). ⌋

23. $y = \sqrt[n]{x}$.

⌈ $\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n}x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{x^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt[n]{x^{n-1}}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ (в табличну формулу **I** підставили замість n число $\frac{1}{n}$).

Отже, $\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$. ⌋

24. $y = x^2\cdot\sqrt[6]{x}$.

⌈ $\left(x^2\cdot\sqrt[6]{x}\right)' = \left(x^2\cdot x^{\frac{1}{6}}\right)' = \left(x^{2+\frac{1}{6}}\right)' = \left(x^{\frac{13}{6}}\right)' = \frac{13}{6}x^{\frac{13}{6}-1} = \frac{13}{6}x^{\frac{7}{6}} =$

$$= \frac{13}{6}\sqrt[6]{x^7} = \frac{13}{6}\sqrt[6]{x^6\cdot x^1} = \frac{13}{6}\sqrt[6]{x^6}\cdot\sqrt[6]{x} = \frac{13}{6}x\sqrt[6]{x}.$$ ⌋

Зауваження. Додатково до таблиці основних похідних доцільно **запам'ятати** також похідні, знайдені у прикладах **16**, **17**, **18**, **20**, **21**, **23**.

Обчислити похідні функцій, скориставшись табличною похідною **II** :

25. $y = 2^x$.

⌈ $\left(2^x\right)' = 2^x\ln 2$ (в табличній похідній **II** поклали $a = 2$). ⌋

26. $y = 10^x$.

⌈ $\left(10^x\right)' = 10^x\ln 10$ (в табличній похідній **II** покласти $a = 10$). ⌋

27. $y = e^x$.

⌈ $\left(e^x\right)' = e^x\ln e = e^x$, оскільки $\ln e = 1$ (це таблична формула **II°**, яку дістаємо з формули **II** при $a = e$, де e – Неперове число, $e \approx 2,71$). ⌋

Обчислити похідні вказаних функцій, скориставшись табличною похідною **III** :

28. $y = \log_3 x$.

⌐ $\left(\log_3 x\right)' = \dfrac{1}{x\ln 3}$ (в табличній похідній **III** поклали $a = 3$). ⌟

29. $y = \lg x$.

⌐ $\left(\lg x\right)' = \dfrac{1}{x\ln 10}$ (в табличній похідній **III** поклали $a = 10$). ⌟

30. $y = \log_{\frac{2}{3}} x$.

⌐ $\left(\log_{\frac{2}{3}} x\right)' = \dfrac{1}{x\ln\frac{2}{3}}$ (в табличній похідній **III** поклали $a = \dfrac{2}{3}$). ⌟

31. $y = \ln x$.

⌐ $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x\ln e} = \dfrac{1}{x}$ (це таблична формула **III°**, яку дістаємо з формули **III** при $a = e$, враховуючи, що $\ln e = 1$). ⌟

Вправи для самостійного розв'язання

Обчислити похідні функцій:

32. $y = x^3$.

33. $y = x^5$.

34. $y = \sqrt[4]{x^3}$.

35. $y = \sqrt[7]{x^5}$.

36. $y = \sqrt[4]{x}$.

37. $y = \sqrt[7]{x}$.

38. $y = \dfrac{1}{x^3}$.

39. $y = \dfrac{1}{x^5}$.

40. $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

41. $y = x\cdot\sqrt[3]{x}$.

42. $y = 3^x$.

43. $y = \left(\dfrac{4}{3}\right)^x$.

44. $y = \left(\dfrac{2}{5}\right)^x$.

45. $y = \log_5 x$.

46. $y = \log_{\frac{7}{2}} x$.

Відповіді:

32. $3x^2$.

33. $5x^4$.

34. $\dfrac{3}{4\sqrt[4]{x}}$.

35. $\dfrac{5}{7\sqrt[7]{x^2}}$.

36. $\dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$.

37. $\dfrac{1}{7\sqrt[7]{x^6}}$.

38. $-\dfrac{3}{x^4}$.

39. $-\dfrac{5}{x^6}$.

40. $-\dfrac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$.

41. $\dfrac{4}{3}\sqrt[3]{x}$.

42. $3^x \ln 3$.

43. $\left(\dfrac{4}{3}\right)^x \ln\dfrac{4}{3}$.

44. $\left(\dfrac{2}{5}\right)^x \ln\dfrac{2}{5}$.

45. $\dfrac{1}{x\ln 5}$.

46. $\dfrac{1}{x\ln\dfrac{7}{2}}$.

3. Основні правила диференціювання функцій

1º. Похідна сталої функції $y = c$ дорівнює нулю, тобто $(c)' = 0$.

2º. $\left(c \cdot f(x)\right)' = c \cdot f'(x)$, де c – стала.

3º. $(u \pm v)' = u' \pm v'$, де $u = u(x)$; $v = v(x)$.

Це правило узагальнюється на довільне скінченне число доданків:

$$(u \pm v \pm w \pm \ldots \pm z)' = u' \pm v' \pm w' \pm \ldots \pm z'.$$

4º. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

5º. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$.

6º. Нехай $y = f\left[u(x)\right]$ – складна функція, тобто $y = f(u)$, де $u = u(x)$. Тут u – проміжний аргумент, x – незалежна змінна. Тоді

$$y' = f'(u) \cdot u'(x).$$

Правило. Похідна складної функції дорівнює добутку похідної зовнішньої функції $f(u)$ по проміжному аргументу u і похідної внутрішньої функції $u(x)$ по незалежній змінній x.

3.1. Похідна лінійної комбінації функцій

Знайти похідні функцій, скориставшись правилами $\mathbf{1^o}$, $\mathbf{2^o}$, $\mathbf{3^o}$:

47. $y = 5$.

⌈ $y' = (5)' = 0$ (в $\mathbf{1^o}$ поклали $c = 5$). ⌋

48. $y = \sin\dfrac{\pi}{8}$.

⌈ $y' = \left(\sin\dfrac{\pi}{8}\right)' = 0$ (в $\mathbf{1^o}$ поклали $c = \sin\dfrac{\pi}{8}$). ⌋

49. $y = \arcsin\dfrac{1}{4} + \operatorname{arctg} 3$.

⌈ $y' = \left(\arcsin\dfrac{1}{4} + \operatorname{arctg} 3\right)' = 0$ (в $\mathbf{1^o}$ поклали $c = \arcsin\dfrac{1}{4} + \operatorname{arctg} 3$). ⌋

50. $y = \cos 10^\circ$.

⌈ $y' = (\cos 10^\circ)' = 0$ (в $\mathbf{1^o}$ поклали $c = \cos 10^\circ$). ⌋

51. $y = 5x^7$.

⌈ $y' = (5x^7)' = 5(x^7)' = 5 \cdot 7x^6 = 35x^6$ (використали правило $\mathbf{2^o}$, яке стверджує, що сталий множник виноситься за знак похідної, і взяли похідну функції $f(x) = x^7$ за табличною формулою $\mathbf{I}$, поклавши $n = 7$). ⌋

52. $y = -4\sin x$.

⌈ $y' = (-4\sin x)' = -4(\sin x)' = -4\cos x$ (сталий множник винесли за знак похідної і скористались табличною похідною $\mathbf{IV}$). ⌋

53. $y = \operatorname{arctg} x + \arccos x$.

⌈ $y' = (\operatorname{arctg} x + \arccos x)' = (\operatorname{arctg} x)' + (\arccos x)' =$

$$=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(скористалися правилом $\mathbf{2^o}$, яке стверджує, що похідна суми функцій дорівнює сумі похідних цих функцій, та табличними похідними **X** і **IX**). $\lrcorner$

54. $y=x^3-\frac{1}{x^4}+6\sqrt[3]{x^2}$.

$\ulcorner$ **В**икористовуючи властивості степенів

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n}, \qquad a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m},$$

подамо задану функцію у вигляді $y=x^3-x^{-4}+6\cdot x^{\frac{2}{3}}$. Використаємо правило $\mathbf{3^o}$ диференціювання алгебраїчної суми та формулу диференціювання степеневої функції $\left(x^n\right)'=n\,x^{n-1}$. Одержимо

$$y'=\left(x^3-x^{-4}+6\cdot x^{\frac{2}{3}}\right)'=\left(x^3\right)'-\left(x^{-4}\right)'+\left(6x^{\frac{2}{3}}\right)'=$$

$$=3x^2-(-4)x^{-4-1}+6\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}=3x^2+4x^{-5}+4x^{-\frac{1}{3}}=3x^2+\frac{4}{x^5}+\frac{4}{x^{\frac{1}{3}}}=$$

$$=3x^2+\frac{4}{x^5}+\frac{4}{\sqrt[3]{x}}. \quad \lrcorner$$

55. $y=9x^5-\frac{4}{x^3}+\sqrt[3]{x^7}-3x+4$.

$\ulcorner$ Міркуючи аналогічно до прикладу **54**, одержимо

$$y'=\left(9x^5-\frac{4}{x^3}+\sqrt[3]{x^7}-3x+4\right)'=\left(9x^5\right)'-\left(\frac{4}{x^3}\right)'+\left(\sqrt[3]{x^7}\right)'-(3x)'+(4)'=$$

$$=9\left(x^5\right)'-4\left(x^{-3}\right)'+\left(x^{\frac{7}{3}}\right)'-3(x)'+(4)'=$$

$$=9\cdot5x^4-4(-3)x^{-3-1}+\frac{7}{3}x^{\frac{7}{3}-1}-3\cdot1\cdot x^{1-1}+0=45x^4+12x^{-4}+\frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}}-3x^0=$$

$$=45x^4+\frac{12}{x^4}+\frac{7}{3}\sqrt[3]{x^4}-3=45x^4+\frac{12}{x^4}+\frac{7}{3}x\sqrt[3]{x}-3$$

$\left(x^0=1;\ \sqrt[3]{x^4}=\sqrt[3]{x^3\cdot x}=\sqrt[3]{x^3}\cdot\sqrt[3]{x}=x\sqrt[3]{x}\right)$. ⌋

56. $y=\dfrac{5x^2}{\sqrt[5]{x^2}}+30\sqrt[5]{x}+6x\sqrt[3]{x}$.

⌈ Використаємо підхід, реалізований у прикладах **54** і **55**, та властивості степенів: $a^m a^n=a^{m+n}$; $\dfrac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$.

Спочатку перепишемо задану функцію в іншому вигляді:

$$y=\frac{5x^2}{\sqrt[5]{x^2}}+30\sqrt[5]{x}-6x\sqrt[3]{x}=5\frac{x^2}{x^{\frac{2}{5}}}+30x^{\frac{1}{5}}-6x\cdot x^{\frac{1}{3}}=$$

$$=5x^{2-\frac{2}{5}}+30x^{\frac{1}{5}}-6x^{1+\frac{1}{3}}=5x^{\frac{8}{5}}+30x^{\frac{1}{5}}-6x^{\frac{4}{3}}.$$

Тепер знайдемо похідну цієї функції:

$$y'=\left(5x^{\frac{8}{5}}+30x^{\frac{1}{5}}-6x^{\frac{4}{3}}\right)'=5\left(x^{\frac{8}{5}}\right)'+30\left(x^{\frac{1}{5}}\right)'-6\left(x^{\frac{4}{3}}\right)'=$$

$$=5\cdot\frac{8}{5}x^{\frac{8}{5}-1}+30\cdot\frac{1}{5}x^{\frac{1}{5}-1}-6\cdot\frac{4}{3}x^{\frac{4}{3}-1}=8x^{\frac{3}{5}}+6x^{-\frac{4}{5}}-8x^{\frac{1}{3}}=$$

$$=8\sqrt[5]{x^3}+\frac{6}{x^{\frac{4}{5}}}-8\sqrt[3]{x}=2\left(4\sqrt[5]{x^3}+\frac{3}{\sqrt[5]{x^4}}-4\sqrt[3]{x}\right).$$ ⌋

57. $y=x^5\left(2-\dfrac{x}{3}+3x^2\right)$.

⌈ Похідну заданої функції можна знайти безпосередньо за правилом $\mathbf{4^o}$. Але простіше розкрити спочатку дужки, а далі скористатись правилами $\mathbf{2^o}$ та $\mathbf{3^o}$:

$$y'=\left(2x^5-\frac{x^6}{3}+3x^7\right)'=10x^4-\frac{1}{3}\cdot 6x^5+21x^6=10x^4-2x^5+21x^6.$$ ⌋

Вправи для самостійного розв’язання

Знайти похідні функцій:

58. $y=\cos\dfrac{\pi}{10}$.

59. $y=\arcsin\dfrac{1}{6}+\operatorname{arctg}2$.

60. $y=-\frac{2}{3}\operatorname{tg}x$.

61. $y=\arcsin x+\log_3 x$.

62. $y=\operatorname{ctg}x-6\cos x$.

63. $y=x^3+3\sin x+2e^x$.

64. $y=4\ln x-\frac{2}{3}\operatorname{arctg}x+5\arccos x$.

65. $y=a\sqrt{x}+x\sqrt{a}$ (a – стала).

66. $y=\sqrt{x}+\frac{5}{\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{3x^3}$.

67. $y=x^5\left(x^3+\frac{x}{2}-2\right)$.

Відповіді:

58. 0.

59. 0.

60. $-\frac{2}{3\cos^2 x}$.

61. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{x\ln 3}$.

62. $-\frac{1}{\sin^2 x}+6\sin x$.

63. $3x^2+3\cos x+2e^x$.

64. $\frac{4}{x}-\frac{2}{3\left(1+x^2\right)}-\frac{5}{\sqrt{1-x^2}}$.

65. $\frac{a}{2\sqrt{x}}+\sqrt{a}$.

66. $\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{5}{3x\sqrt[3]{x}}+\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^4}$.

67. $8x^7+3x^5-10x^4$.

3.2. Похідна добутку та частки функцій

Знайти похідні функцій, скориставшись правилом **4°** :

68. $y=\left(x^2-1\right)\operatorname{tg}x$.

⌈ Користуючись правилами диференціювання **4°**, **3°** і **1°**, а також табличними похідними **I** і **VI**, маємо

$$y'=\left(x^2-1\right)'\operatorname{tg}x+\left(x^2-1\right)\left(\operatorname{tg}x\right)'=2x\operatorname{tg}x+\left(x^2-1\right)\frac{1}{\cos^2 x}=$$

$$=2x\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{x^2-1}{\cos^2 x}=\frac{2x\sin x\cdot\cos x+x^2-1}{\cos^2 x}=\frac{x\sin 2x+x^2-1}{\cos^2 x}$$

(тут привели до спільного знаменника і скористались формулою $2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha$). $\lrcorner$

69. $y=\left(x^3+2\right)\cdot\sin x$.

$\ulcorner$ $y'=\left(x^3+2\right)'\cdot\sin x+\left(x^3+2\right)\cdot(\sin x)'=3x^2\sin x+\left(x^3+2\right)\cos x$. $\lrcorner$

70. $y=\arcsin x\cdot\ln x$.

$\ulcorner$ $y'=(\arcsin x)'\cdot\ln x+\arcsin x\cdot(\ln x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ln x+\arcsin x\cdot\dfrac{1}{x}=$

$=\dfrac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{\arcsin x}{x}$ (див. похідні **VIII** і **III°** таблиці). $\lrcorner$

71. $y=\log_5 x\cdot 4^x$.

$\ulcorner$ $y'=(\log_5 x)'\cdot 4^x+\log_5 x\left(4^x\right)'=\dfrac{1}{x\ln 5}\cdot 4^x+\log_5 x\cdot 4^x\ln 4=$

$=\dfrac{4^x}{x\ln 5}+\ln 4\log_5 x\cdot 4^x=\dfrac{4^x\left(1+x\ln 4\ln 5\log_5 x\right)}{x\ln 5}$ (див. похідні **III** і **II** таблиці). $\lrcorner$

Знайти похідні функцій, скориставшись правилом **5°** і таблицею похідних:

72. $y=\dfrac{e^x}{\operatorname{ctg} x}$.

$\ulcorner$ Використаємо похідну частки (правило **5°**) двох функцій:

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}.$$

Вважаючи $e^x=u$, а $\operatorname{ctg} x=v$, одержимо

$$y'=\frac{\left(e^x\right)'\operatorname{ctg} x-e^x(\operatorname{ctg} x)'}{\operatorname{ctg}^2 x}=\frac{e^x\operatorname{ctg} x-e^x\left(-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)}{\operatorname{ctg}^2 x}=$$

$$=\frac{e^x\dfrac{\cos x}{\sin x}+e^x\dfrac{1}{\sin^2 x}}{\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}=\frac{e^x\dfrac{\sin x\cos x+1}{\sin^2 x}}{\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}=$$

$$=\frac{e^x\sin^2 x(\sin x\cos x+1)}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}=\frac{e^x(1+\sin x\cos x)}{\cos^2 x}=\frac{e^x(2+\sin 2x)}{2\cos^2 x}.\ \lrcorner$$

73. $y=\dfrac{\arccos x}{x^2+e^x}$.

$\ulcorner$ Використаємо правила $\mathbf{5^o}$, $\mathbf{3^o}$ та формули $\mathbf{IX}$, $\mathbf{II^o}$:

$$y'=\frac{(\arccos x)'\left(x^2+e^x\right)-\arccos x\left(x^2+e^x\right)'}{\left(x^2+e^x\right)^2}=$$

$$=\frac{-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(x^2+e^x\right)-\arccos x\left(2x+e^x\right)}{\left(x^2+e^x\right)^2}=$$

$$=-\frac{x^2+e^x+\arccos x\left(2x+e^x\right)\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}\left(x^2+e^x\right)^2}.\ \lrcorner$$

74. $y=\dfrac{1+10^x}{1-10^x}$.

$$\ulcorner\quad y'=\left(\frac{1+10^x}{1-10^x}\right)'=\frac{\left(1+10^x\right)'\left(1-10^x\right)-\left(1+10^x\right)\left(1-10^x\right)'}{\left(1-10^x\right)^2}=$$

$$=\frac{10^x\ln10\left(1-10^x\right)-\left(1+10^x\right)\left(-10^x\ln10\right)}{\left(1-10^x\right)^2}=\frac{10^x\ln10\left(1-10^x+1+10^x\right)}{\left(1-10^x\right)^2}=$$

$$=\frac{2\cdot10^x\ln10}{\left(1-10^x\right)^2}$$

(використали правила $\mathbf{5^o}$, $\mathbf{3^o}$, $\mathbf{1^o}$ та формулу $\mathbf{II}$). $\lrcorner$

75. $y=\dfrac{\ln x}{x^n}$.

$$\ulcorner\quad y'=\left(\frac{\ln x}{x^n}\right)'=\frac{(\ln x)'x^n-\ln x\left(x^n\right)'}{\left(x^n\right)^2}=\frac{\frac{1}{x}\cdot x^n-\ln x\cdot n\cdot x^{n-1}}{x^{2n}}=$$

$$=\frac{x^{n-1}-n\cdot x^{n-1}\ln x}{x^{2n}}=\frac{x^{n-1}\left(1-n\ln x\right)}{x^{2n}}=x^{n-1-2n}\left(1-n\ln x\right)=$$

$$=x^{-(n+1)}\left(1-n\ln x\right)=\frac{1-n\ln x}{x^{n+1}}$$

(використали правило $\mathbf{5^o}$, формули $\mathbf{III^o}$ і $\mathbf{I}$ та властивості степенів $\left(a^m\right)^n=a^{mn}$, $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$, $a^{-m}=\frac{1}{a^m}$). $\lrcorner$

76. $y=\dfrac{\arcsin x}{1+\arccos x}$.

$\ulcorner$

$$y'=\left(\frac{\arcsin x}{1+\arccos x}\right)'=\frac{\left(\arcsin x\right)'\left(1+\arccos x\right)-\arcsin x\left(1+\arccos x\right)'}{\left(1+\arccos x\right)^2}=$$

$$=\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(1+\arccos x\right)-\arcsin x\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{\left(1+\arccos x\right)^2}=$$

$$=\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(1+\arccos x+\arcsin x\right)}{\left(1+\arccos x\right)^2}=\frac{1+\arccos x+\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}\left(1+\arccos x\right)^2}=$$

$$=\frac{1+\frac{\pi}{2}}{\sqrt{1-x^2}\left(1+\arccos x\right)^2}=\frac{2+\pi}{2\sqrt{1-x^2}\left(1+\arccos x\right)^2}$$

(використали правила $\mathbf{5^o}$, $\mathbf{3^o}$ і $\mathbf{1^o}$, табличні формули **VIII** і **IX** та формулу $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$). $\lrcorner$

Окремо розглянемо похідну частки функцій, коли чисельник або знаменник є сталою величиною. Нехай маємо функцію $y=\frac{c}{v}$ $\left(c=const,\ v=v\left(x\right)\right)$. Тоді за правилом $\mathbf{5^o}$

$$y=\frac{c'\cdot v-c\cdot v'}{v^2}=\frac{0\cdot v-c\cdot v'}{v^2}=\frac{-cv'}{v^2}=-\frac{c}{v^2}v'.$$

Тому доцільно запам'ятати, що

$$\left(\frac{c}{v}\right)'=-\frac{c}{v^2}v'. \qquad (2)$$

77. $y=\dfrac{1}{x^2+5x-4}$.

$\ulcorner$ За формулою (2)

$$y'=-\frac{1}{\left(x^2+5x-4\right)^2}\cdot\left(x^2+5x-4\right)'=-\frac{1}{\left(x^2+5x-4\right)^2}(2x+5)=$$

$$=-\frac{2x+5}{\left(x^2+5x-4\right)^2}.\ \lrcorner$$

78. $y=\dfrac{1}{\arccos x}+\dfrac{4}{5^x}$.

$\ulcorner$ За правилом диференціювання суми та формулою (2) маємо

$$y'=\left(\frac{1}{\arccos x}\right)'+\left(\frac{4}{5^x}\right)'=-\frac{1}{\arccos^2 x}(\arccos x)'-\frac{4}{5^{2x}}\left(5^x\right)'=$$

$$=-\frac{1}{\arccos^2 x}\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)-\frac{4}{5^{2x}}\cdot 5^x\ln 5=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\arccos^2 x}-\frac{4\ln 5}{5^x}.\ \lrcorner$$

Якщо маємо функцію виду $y=\dfrac{u}{c}=\dfrac{1}{c}\cdot u$ ($c=const$, $u=u(x)$), то за правилом **2°** сталий множник $\dfrac{1}{c}$ $(c\neq 0)$ можна виносити за знак похідної $y'=\dfrac{1}{c}\cdot u'$. Тому доцільно запам'ятати, що

$$\left(\frac{u}{c}\right)'=\frac{u'}{c}. \qquad (3)$$

79. $y=\dfrac{x^5+3^x}{\log_3 5}$.

$\ulcorner$ За формулою (3)

$$y'=\frac{\left(x^5+3^x\right)'}{\log_3 5}=\frac{5x^4+3^x\ln 3}{\log_3 5}\quad(\log_3 5=const).\ \lrcorner$$

80. $y=\dfrac{3\operatorname{tg}x}{\sin\alpha}$.

$\ulcorner$ За формулою (3)

$$y' = \frac{(3\,\mathrm{tg}\,x)'}{\sin\alpha} = \frac{3(\mathrm{tg}\,x)'}{\sin\alpha} = \frac{3\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{\sin\alpha} = \frac{3}{\sin\alpha\cos^2 x} \quad (\sin\alpha = const). \quad \lrcorner$$

<u>Вправи для самостійного розв'язання</u>

Обчислити похідні функцій:

81. $y = 5x + x^6 - \sin 2$.

82. $y = 2\sqrt{x} + 0,2x^5$.

83. $y = \frac{1}{\sqrt{x}} + 2\sqrt[3]{x^2}$.

84. $y = x\ln x$.

85. $y = (x^2+1)\,\mathrm{arctg}\,x$.

86. $y = e^x(\sin x + \cos x)$.

87. $y = \frac{x^2+1}{\ln x}$.

88. $y = \frac{1+\cos x}{\sin x}$.

89. $y = \frac{x-1}{\log_2 x}$.

90. $y = \frac{1-e^x}{1+e^x}$.

91. $y = \frac{3}{1-x^5}$.

92. $y = \frac{1}{x^3 - x^2 + 1}$.

93. $y = \frac{x^2-5x+3}{a^2+5}$.

94. $y = \frac{3-x^8}{\sqrt{e}}$.

Відповіді:

81. $5 + 6x^5$.

82. $\frac{1}{\sqrt{x}} + x^4$.

83. $\frac{4}{3\sqrt[3]{x}}$.

84. $1 + \ln x$.

85. $2x\,\mathrm{arctg}\,x + 1$.

86. $2e^x\cos x$.

87. $\frac{x^2(2\ln x - 1) - 1}{x\ln^2 x}$.

88. $-\frac{1+\cos x}{\sin^2 x}$.

89. $\frac{x\ln x - x + 1}{x\ln^2 x}\ln 2$.

90. $-\frac{2e^x}{(1+e^x)^2}$.

91. $\dfrac{15x^4}{\left(1-x^5\right)^2}$. **92.** $-\dfrac{3x^2-2x}{\left(x^3-x^2+1\right)^2}$.

93. $\dfrac{2x-5}{a^2+5}$. **94.** $-\dfrac{8x^7}{\sqrt{e}}$.

3.3. Похідна складної функції

Знайти похідні функцій, скориставшись правилом $\mathbf{6^o}$:

95. $y=\sqrt{x^2+5}$.

$\ulcorner$ Поклавши $u=x^2+5$, маємо $y=\sqrt{u}$. Тому за правилом $\mathbf{6^o}$

$$y'=\underbrace{\left(\sqrt{u}\right)'}_{\substack{\text{похідна зовнішньої}\\ \text{функції по проміж–}\\ \text{ному аргументу } u}}\cdot\underbrace{u'}_{\substack{\text{похідна внут–}\\ \text{рішньої функції}\\ \text{по незалежній}\\ \text{змінній } x}}=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'=\frac{1}{2\sqrt{x^2+2}}\left(x^2+5\right)'=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x^2+5}}\cdot 2x=\frac{x}{\sqrt{x^2+5}}.$$

Можна було б відразу продиференціювати функцію за правилом $\mathbf{6^o}$, не вводячи проміжний аргумент:

$$y'=\underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x^2+5}}}_{\substack{\text{похідна від квадрат–}\\ \text{ного кореня із функції}}}\cdot\underbrace{2x}_{\substack{\text{похідна від}\\ \text{функції, що}\\ \text{стоїть під}\\ \text{коренем}}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+5}}.\quad\lrcorner$$

96. $y=\sqrt[3]{x^4+\sin x}$.

$\ulcorner$ Поклавши $u=x^4+\sin x$, одержимо $y=\sqrt[3]{u}$. За правилом $\mathbf{6^o}$

$$y'=\left(\sqrt[3]{u}\right)'\cdot u'=\frac{1}{3\sqrt[3]{u^2}}\cdot u'=\frac{1}{3\sqrt[3]{\left(x^4+\sin x\right)^2}}\left(x^4+\sin x\right)'=$$

$$=\frac{1}{3\sqrt[3]{\left(x^4+\sin x\right)^2}}\left(4x^3+\cos x\right)=\frac{4x^3+\cos x}{3\sqrt[3]{\left(x^4+\sin x\right)^2}}.\quad\lrcorner$$

97. $y=\left(5x^2+7x+2\right)^3$.

$\ulcorner$ Поклавши $u=5x^2+7x+2$, одержимо $y=u^3$. Надалі будемо писати так: $y=u^3$; $u=5x^2+7x+2$. За правилом $\mathbf{6^o}$:

$$y' = \left(u^3\right)' \cdot u' = 3u^2 \cdot u' = 3\left(5x^2 + 7x + 2\right)^2 \left(5x^2 + 7x + 2\right)' =$$

$$= 3\left(5x^2 + 7x + 2\right)^2 \left(10x + 7\right). \quad \lrcorner$$

98. $y = \sin 15x$.

$\ulcorner$ $y = \sin u$; $u = 15x$.

$$y' = \left(\sin u\right)' \cdot u' = \cos u \cdot u' = \cos 15x \, \left(15x\right)' = \cos 15x \cdot 15 = 15 \cos x. \quad \lrcorner$$

99. $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x} \quad \left(x > 0\right)$.

$\ulcorner$ $y = \operatorname{arctg} u$; $u = \sqrt{x}$.

$$y' = \left(\operatorname{arctg} u\right)' \cdot u' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u' = \frac{1}{1+x} \cdot \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}\left(1+x\right)}. \quad \lrcorner$$

100. $y = \dfrac{2}{\left(3x^2 - 5\right)^3}$.

$\ulcorner$ $y = \dfrac{2}{u}$; $u = \left(3x^2 - 5\right)^3$, де u – також складна функція від x.

$$y' = \left(\frac{2}{u}\right)' \cdot u' = -\frac{2}{u^2} \cdot u' = -\frac{2}{\left(3x^2 - 5\right)^6} \cdot 3\left(3x^2 - 5\right)^2 6x;$$

$$y' = \frac{36}{\left(3x^2 - 5\right)^4}. \quad \lrcorner$$

101. $y = 7^{\frac{1}{4x}}$.

$\ulcorner$ $y = 7^u$; $u = \dfrac{1}{4x}$.

$$y' = \left(7^u\right)' \cdot u' = 7^u \ln 7 \cdot u' = 7^{\frac{1}{4x}} \ln 7 \cdot \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{4x^2} 7^{\frac{1}{4x}} \ln 7. \quad \lrcorner$$

Після деякого числа вправ студент сам відмовляється від введення проміжного аргументу u, розуміючи його в тих місцях, де він потрібен.

102. $y = \log_5\left(x^2 + 4\right)$.

$$\ulcorner \quad y' = \frac{1}{\left(x^2+4\right)\ln 5}\left(x^2+4\right)' = \underbrace{\frac{1}{\left(x^2+4\right)\ln 5}}_{\substack{\text{похідна логарифмічної}\\ \text{функції}}} \cdot \underbrace{2x}_{\substack{\text{похідна}\\ \text{аргументу}\\ \text{логарифма}}} = \frac{2x}{\left(x^2+4\right)\ln 5}. \quad \lrcorner$$

103. $y = \left(1+2\operatorname{ctg} x\right)^4$.

$$\ulcorner \quad y' = 4\left(1+2\operatorname{ctg} x\right)^3\left(1+2\operatorname{ctg} x\right)' = \underbrace{4\left(1+2\operatorname{ctg} x\right)^3}_{\substack{\text{похідна степеневої}\\ \text{функції}}} \underbrace{2\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)}_{\substack{\text{похідна основи}\\ \text{степеня}}} =$$

$$= -8\frac{\left(1+2\operatorname{ctg} x\right)^3}{\sin^2 x}. \quad \lrcorner$$

104. $y = 10\sin\dfrac{x}{5}$.

$$\ulcorner \quad y' = 10\cos\frac{x}{5}\cdot\left(\frac{x}{5}\right)' = 10\cos\frac{x}{5}\cdot\frac{1}{5} = 2\cos\frac{x}{5}. \quad \lrcorner$$

105. $y = 2\cos\left(7x+3\right)$.

$$\ulcorner \quad y' = 2\cdot\left[-\sin\left(7x+3\right)\right]\cdot\left(7x+3\right)' = -2\sin\left(7x+3\right)\cdot 7 =$$

$$= -14\sin\left(7x+3\right). \quad \lrcorner$$

106. $y = \arcsin\left(x-2\right)$.

$$\ulcorner \quad y' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(x-2\right)^2}}\cdot\left(x-2\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(x^2-4x+4\right)}}\cdot 1 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4x-x^2-3}}. \quad \lrcorner$$

107. $y = \ln\left(1+5x\right)$.

$$\ulcorner \quad y' = \frac{1}{1+5x}\cdot\left(1+5x\right)' = \frac{1}{1+5x}\cdot 5 = \frac{5}{1+5x}. \quad \lrcorner$$

108. $y = \operatorname{arctg} x^3$.

$$\ulcorner \quad y' = \frac{1}{1+\left(x^3\right)^2}\cdot\left(x^3\right)' = \frac{3x^2}{1+x^6}. \quad \lrcorner$$

109. $y = \sin\ln x$.

$\ulcorner$ $y' = \cos \ln x \cdot (\ln x)' = \cos \ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{\cos \ln x}{x}$. $\lrcorner$

110. $y = \cos^2 x$.

$\ulcorner$ $y' = 2\cos x \cdot (\cos x)' = 2\cos x \cdot (-\sin x) = -2\sin x \cos x = -\sin 2x$. $\lrcorner$

111. $y = \ln \sin x$.

$\ulcorner$ $y' = \frac{1}{\sin x}(\sin x)' = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \operatorname{ctg} x$. $\lrcorner$

112. $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$.

$\ulcorner$ $y' = \left(\left(x^2 + x + 1\right)^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}\left(x^2 + x + 1\right)^{-\frac{3}{2}}\left(x^2 + x + 1\right)' =$

$$= -\frac{1}{2\left(x^2 + x + 1\right)^{\frac{3}{2}}}(2x + 1) = -\frac{2x + 1}{2\left(x^2 + x + 1\right)^{\frac{3}{2}}}. \ \lrcorner$$

113. $y = \operatorname{ctg}^4 3x^2$.

$\ulcorner$ $y' = 4\operatorname{ctg}^3 3x^2 \cdot \left(\operatorname{ctg} 3x^2\right)' = 4\operatorname{ctg}^3 3x^2 \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 3x^2}\right) 3 \cdot 2x =$

$$= -\frac{24x \operatorname{ctg}^3 3x^2}{\sin^2 3x^2}. \ \lrcorner$$

114. $y = \sqrt[3]{x \ln x}$.

$\ulcorner$ $y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x \ln x)^2}} \cdot (x \cdot \ln x)' = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x \ln x)^2}}\left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) =$

$$= \frac{1 + \ln x}{3\sqrt[3]{(x \ln x)^2}}. \ \lrcorner$$

115. $y = \operatorname{tg} \frac{1 + x}{x}$.

$\ulcorner$ $y' = \frac{1}{\cos^2 \frac{1 + x}{x}} \cdot \left(\frac{1 + x}{x}\right)' = \frac{1}{\cos^2 \frac{1 + x}{x}} \cdot \frac{1 \cdot x - (1 + x) \cdot 1}{x^2} =$

$$=\frac{1}{\cos^2\frac{1+x}{x}}\cdot\frac{x-1-x}{x^2}=-\frac{1}{x^2\cos^2\frac{1+x}{x}}.\quad \lrcorner$$

116. $y=\sqrt{\sin^2 x+5\cos^5 4x}$.

$$\ulcorner\quad y'=\frac{1}{2\sqrt{\sin^2 x+5\cos^5 4x}}\left[\left(\sin^2 x\right)'+5\left(\cos^5 4x\right)'\right]=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\sin^2 x+5\cos^5 4x}}\left[2\sin x\cos x+5\cdot 5\cos^4 4x\cdot(-\sin 4x)\cdot 4\right]=$$

$$=\frac{\sin 2x-100\sin 4x\cos^4 4x}{2\sqrt{\sin^2 x+5\cos^5 4x}}.\quad \lrcorner$$

117. $y=\dfrac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$.

$\ulcorner$

$$y'=\frac{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2}-\arccos x\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x)}{1-x^2}=\frac{-1+\frac{x\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}=$$

$$=\frac{x\arccos x-\sqrt{1-x^2}}{\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}}.\quad \lrcorner$$

118. $y=\sqrt[3]{1-\ln^2 x}$.

$$\ulcorner\quad y'=\frac{1}{3\sqrt[3]{\left(1-\ln^2 x\right)^2}}(-2\ln x)\cdot\frac{1}{x}=-\frac{2\ln x}{3x\sqrt[3]{\left(1-\ln^2 x\right)^2}}.\quad \lrcorner$$

119. $y=\ln\left(x^3-2x^2+x\right)$.

$$\ulcorner\quad y'=\frac{1}{x^3-2x^2+x}\cdot\left(3x^2-2\cdot 2x+1\right)=\frac{3x^2-4x+1}{x^3-2x^2+x}.\quad \lrcorner$$

120. $y=\log_7\left(x^3+5\right)$.

$$\ulcorner\quad y'=\frac{1}{\left(x^3+5\right)\ln 7}\cdot 3x^2=\frac{3x^2}{\left(x^3+5\right)\ln 7}.\quad \lrcorner$$

121. $y=10^{3x^2-7}$.

$$\ulcorner\quad y'=10^{3x^2-7}\ln 10\cdot 6x=6\ln 10\ x10^{3x^2-7}.\quad \lrcorner$$

122. $y=\cos\left(7^x\right)$.

$\ulcorner$ $y'=-\sin\left(7^x\right)\cdot 7^x\ln 7=-7^x\ln 7\sin\left(7^x\right)$. $\lrcorner$

123. $y=\sqrt[5]{1-e^{2x}}$.

$$\ulcorner \quad y'=\frac{1}{5\sqrt[5]{\left(1-e^{2x}\right)^4}}\cdot\left(-e^{2x}\cdot 2\right)=-\frac{2e^{2x}}{5\sqrt[5]{\left(1-e^{2x}\right)^4}}. \quad \lrcorner$$

124. $y=\operatorname{tg}\sqrt[3]{1+x^4}$.

$$\ulcorner \quad y'=\frac{1}{\cos^2\sqrt[3]{1+x^4}}\cdot\frac{1}{3\sqrt[3]{\left(1+x^4\right)^2}}\cdot 4x^3=\frac{4x^3}{3\sqrt[3]{\left(1+x^4\right)^2}\cos^2\sqrt[3]{1+x^4}}. \quad \lrcorner$$

125. $y=\arccos\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

$$\ulcorner \quad y'=-\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{1-x}{1+x}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}}\cdot\frac{-(1+x)-(1-x)\cdot 1}{(1+x)^2}=$$

$$=-\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x-1+x}}\cdot\frac{\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1-x}}\cdot\frac{-1-x-1+x}{(1+x)^2}=-\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{2x}}\cdot\frac{\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1-x}}\cdot\frac{-2}{(1+x)^2}=$$

$$=\frac{2(1+x)}{\sqrt{2x}\,2\sqrt{1-x}\,(1+x)^2}=\frac{1}{(1+x)\sqrt{2x(1-x)}}. \quad \lrcorner$$

126. $y=\log_3(x+\sin x)$.

$$\ulcorner \quad y'=\frac{1}{(x+\sin x)\ln 3}\cdot(1+\cos x)=\frac{1+\cos x}{(x+\sin x)\ln 3}. \quad \lrcorner$$

127. $y=\sin^4\left(\dfrac{1-\ln x}{x}\right)$.

$$\ulcorner \quad y'=4\sin^3\left(\frac{1-\ln x}{x}\right)\cdot\cos\left(\frac{1-\ln x}{x}\right)\cdot\frac{-\dfrac{1}{x}\cdot x-(1-\ln x)\cdot 1}{x^2}=$$

$$=4\sin^3\left(\frac{1-\ln x}{x}\right)\cdot\cos\left(\frac{1-\ln x}{x}\right)\cdot\frac{-1-1+\ln x}{x^2}=$$

$$=\frac{4}{x^2}(\ln x-2)\sin^3\left(\frac{1-\ln x}{x}\right)\cdot\cos\left(\frac{1-\ln x}{x}\right). \quad \lrcorner$$

128. $y = x\arcsin(\ln x)$.

$\ulcorner$ $y' = 1\cdot\arcsin(\ln x) + x\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-\ln^2 x}}\cdot\dfrac{1}{x} = \arcsin(\ln x) + \dfrac{1}{\sqrt{1-\ln^2 x}}$. $\lrcorner$

129. $y = \dfrac{\ln\sin x}{\ln\cos x}$.

$$\ulcorner\quad y' = \frac{\dfrac{1}{\sin x}\cdot\cos x\cdot\ln\cos x - \ln\sin x\cdot\dfrac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)}{\ln^2\cos x} =$$

$$= \frac{\operatorname{ctg} x\ln\cos x + \operatorname{tg} x\ln\sin x}{\ln^2\cos x}.\quad\lrcorner$$

130. $y = x^2\sqrt{1+\sqrt{x}}$.

$$\ulcorner\quad y' = 2x\sqrt{1+\sqrt{x}} + x^2\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{x}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = 2x\sqrt{1+\sqrt{x}} + \frac{x^2}{4\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}} =$$

$$= \frac{8x\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)+x^2}{4\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}} = \frac{8x\sqrt{x}+8x^2+x^2}{4\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}} = \frac{8x\sqrt{x}+9x^2}{4\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}} = \frac{x\left(8+9\sqrt{x}\right)}{4\sqrt{1+\sqrt{x}}}.\quad\lrcorner$$

<u>Вправи для самостійного розв’язання</u>

Обчислити похідні функцій:

131. $y = \sqrt{x^2+2}$.

132. $y = \sqrt{3x^2+5x+1}$.

133. $y = \sqrt[3]{x^2+\cos x}$.

134. $y = \left(1-\sqrt[5]{x}\right)^5$.

135. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+5}}$.

136. $y = \dfrac{1}{\arccos x}$.

137. $y = \cos 9x$.

138. $y = \sin x - \dfrac{1}{3}\sin^3 x$.

139. $y = \dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x$.

140. $y = \operatorname{ctg}\dfrac{x-3}{4}$.

141. $y = \sqrt{1+2\operatorname{ctg} x}$.

142. $y = \cos(\cos x)$.

143. $y = \cos\sqrt{1+x^3}$.

144. $y = \left(1+\cos^2 x\right)^8$.

145. $y = \arccos\dfrac{3x-1}{\sqrt{5}}$.

146. $y = \arcsin\dfrac{3}{x}$.

147. $y = \operatorname{arctg}^4 \frac{1}{x}$.

148. $y = \ln(\cos x)$.

149. $y = \ln(\arcsin 3x)$.

150. $y = \ln^5(\sin x)$.

151. $y = 2^{\cos x}$.

152. $y = e^{\operatorname{arctg} 3x}$.

153. $y = e^{\sqrt{\ln x}}$.

154. $y = \cos x\sqrt{1+\sin^2 x}$.

155. $y = \operatorname{arcctg} \frac{x+1}{x-1}$.

156. $y = \operatorname{ctg} \frac{1-e^x}{1+e^x}$.

157. $y = \log_3(x^2 - \sin x)$.

158. $y = \sin 3x \ln x$.

159. $y = 10^{1+\cos^3 2x}$.

160. $y = \cos^2 x \cdot \cos x^2$.

Відповіді:

131. $\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$.

132. $\frac{6x+5}{2\sqrt{3x^2+5x+1}}$.

133. $\frac{2x-\sin x}{3\sqrt[3]{(x^2+\cos x)^2}}$.

134. $-\frac{\left(1-\sqrt[5]{x}\right)^4}{\sqrt[5]{x^4}}$.

135. $-\frac{x}{(x^2+5)\sqrt{x^2+5}}$.

136. $\frac{1}{\arccos^2 x \cdot \sqrt{1-x^2}}$.

137. $-9\sin 9x$.

138. $\cos^3 x$.

139. $\operatorname{tg}^4 x$.

140. $-\frac{1}{4\sin^2 \frac{x-3}{4}}$.

141. $-\frac{1}{\sqrt{1+2\operatorname{ctg} x} \cdot \sin^2 x}$.

142. $\sin(\cos x) \cdot \sin x$.

143. $-\frac{3x^2 \sin\sqrt{1+x^3}}{2\sqrt{1+x^3}}$.

144. $-8(1+\cos^2 x)^7 \cdot \sin 2x$.

145. $-\frac{3}{\sqrt{4+6x-9x^2}}$.

146. $-\frac{3}{|x|\sqrt{x^2-9}}$.

147. $-\frac{4\operatorname{arctg}^3 \frac{1}{x}}{1+x^2}$.

148. $-\operatorname{tg} x$.

149. $\dfrac{3}{\arcsin 3x\sqrt{1-9x^2}}$.

150. $5\ln^4 \sin x \cdot \operatorname{ctg} x$.

151. $-2^{\cos x} \sin x \cdot \ln 2$.

152. $\dfrac{3e^{\operatorname{arctg} 3x}}{1+9x^2}$.

153. $\dfrac{e^{\sqrt{\ln x}}}{2x\sqrt{\ln x}}$.

154. $-\dfrac{2\sin^3 x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$.

155. $\dfrac{1}{1+x^2}$.

156. $\dfrac{2e^x}{\left(1+e^x\right)^2} \cdot \dfrac{1}{\sin^2 \dfrac{1-e^x}{1+e^x}}$.

157. $\dfrac{2x-\cos x}{\left(x^2-\sin x\right)\ln 3}$.

158. $3\cos 3x \ln x + \dfrac{\sin 3x}{x}$.

159. $-6\ln 10 \cdot 10^{1+\cos^3 2x} \cos^2 2x \cdot \sin 2x$.

160. $y = -2\cos x\left(\sin x \cos x^2 + x\cos x \sin x^2\right)$.

4. Диференціювання функцій, заданих неявно

Якщо кожному числу x з множини X ставиться у відповідність єдине число y так, що пара чисел $(x;y)$ задовольняє рівняння $F(x,y)=0$, то кажуть, що *функцію* $y=f(x)$, $x\in X$, *задано неявно*.

Незважаючи на те, що рівняння $F(x,y)=0$ не розв’язане відносно y , можна знайти похідну $y'=y'(x)$. Для цього потрібно:

1) обидві частини рівняння $F(x,y)=0$ продиференціювати по x , вважаючи, що y є функцією від x ;
2) одержане рівняння розв’язати відносно y' .

Знайти похідні функцій, що задані неявно:

161. $5x+3y-7=0$.

⌈ 1) Продиференціюємо по x обидві частини рівняння, враховуючи, що y є функцією від x :

$$5+3y'=0 .$$

2) Розв’яжемо рівняння відносно y' :

$$3y'=-5 ,\ y'=-\frac{5}{3} .$$ ⌋

162. $x^3+y^3-3axy=0$, де $a=const$.

⌜ 1) Продиференціюємо по x обидві частини рівняння, враховуючи, що y є функцією від x:

$$3x^2+3y^2y'-3a\left(1\cdot y+xy'\right)=0$$

(за правилом диференціювання складної функції $\left(y^3\right)'=3y^2y'$).

2) Розв'яжемо одержане рівняння відносно y':

$$3x^2+3y^2y'-3ay-3axy'=0, \quad y^2y'-axy'=ay-x^2,$$

$$y'\left(y^2-ax\right)=ay-x^2, \quad y'=\frac{ay-x^2}{y^2-ax}. \quad ⌟$$

163. $\operatorname{arctg} y-y+x=0$.

⌜ 1) Диференціюємо задане співвідношення, розглядаючи y як функцію від x:

$$\frac{1}{1+y^2}y'-y'+1=0$$

(за правилом диференціювання складної функції $\left(\operatorname{arctg} y\right)'=\frac{1}{1+y^2}\cdot y'$).

2) Розв'язуємо рівняння відносно y':

$$\frac{y'}{1+y^2}-y'=-1, \quad y'\left(\frac{1}{1+y^2}-1\right)=-1, \quad y'\cdot\frac{1-1-y^2}{1+y^2}=-1,$$

$$y'\left(-\frac{y^2}{1+y^2}\right)=-1, \quad y'=\frac{1+y^2}{y^2}. \quad ⌟$$

164. $y\ln x=x\ln y$.

⌜ 1) При диференціюванні по x обох частин рівності скористаємося в лівій частині правилом похідної добутку, а в правій частині – як правилом похідної добутку, так і тим, що $\ln y$ є складною функцією від x:

$$y'\cdot\ln x+y\cdot\frac{1}{x}=1\cdot\ln y+x\cdot\frac{1}{y}\cdot y'$$

2) Розв'язуємо рівняння відносно y':

$$y' \ln x - y' \cdot \frac{x}{y} = \ln y - \frac{y}{x}, \quad y'\left(\ln x - \frac{x}{y}\right) = \ln y - \frac{y}{x},$$

$$y' \frac{y \ln x - x}{y} = \frac{x \ln y - y}{x}, \quad y' = \frac{y(x \ln y - y)}{x(y \ln x - x)}. \quad \lrcorner$$

165. $x^3 + \ln y - x^2 e^y = 0$.

$\ulcorner$ 1) Диференціюючи ліву і праву частини рівняння по x, одержуємо

$$3x^2 + \frac{1}{y} y' - \left(2xe^y + x^2 e^y y'\right) = 0.$$

2) Розв'язуємо рівняння відносно y':

$$3x^2 + \frac{y'}{y} - 2xe^y - x^2 e^y y' = 0, \quad y'\left(\frac{1}{y} - x^2 e^y\right) = 2xe^y - 3x^2,$$

$$y' \cdot \frac{1 - x^2 y e^y}{y} = x\left(2e^y - 3x\right), \quad y' = \frac{xy\left(2e^y - 3x\right)}{1 - x^2 y e^y}. \quad \lrcorner$$

166. $y = \operatorname{tg}(x + y)$.

$\ulcorner$ 1) $y' = \dfrac{1}{\cos^2(x+y)} \cdot (1 + y')$.

2) $y' = \dfrac{1}{\cos^2(x+y)} + \dfrac{y'}{\cos^2(x+y)}$, $y'\left(1 - \dfrac{1}{\cos^2(x+y)}\right) = \dfrac{1}{\cos^2(x+y)}$,

$$y' \cdot \frac{\cos^2(x+y) - 1}{\cos^2(x+y)} = \frac{1}{\cos^2(x+y)}, \quad y' = \frac{1}{\cos^2(x+y) - 1}. \quad \lrcorner$$

167. $3^x + 3^y = 3^{x+y}$.

$\ulcorner$ 1) $3^x \ln 3 + 3^y \ln 3 \cdot y' = 3^{x+y} \ln 3 \cdot (1 + y')$. Поділимо обидві частини на $\ln 3$:

$$3^x + 3^y \cdot y' = 3^{x+y} + 3^{x+y} \cdot y'.$$

2) $y'\left(3^y - 3^{x+y}\right) = 3^{x+y} - 3^x$,

$$y' = \frac{3^{x+y} - 3^x}{3^y - 3^{x+y}} = \frac{3^x \cdot 3^y - 3^x}{3^y - 3^x \cdot 3^y} = \frac{3^x\left(3^y - 1\right)}{3^y\left(1 - 3^x\right)} = 3^{x-y} \frac{3^y - 1}{1 - 3^x}. \quad \lrcorner$$

168. $x^2-3xy^2+y^2=5$.

1) $2x-3\left(1\cdot y^2+x\cdot 2yy'\right)+2yy'=0$.

2) $2x-3y^2-6xyy'+2yy'=0$, $\quad 2yy'(1-3x)=3y^2-2x$,

$$y'=\frac{3y^2-2x}{2y(1-3x)}.$$

169. $y=1+xe^y$.

1) $y'=1\cdot e^y+xe^y\cdot y'$.

2) $y'-xe^y\cdot y'=e^y$, $\quad y'\left(1-xe^y\right)=e^y$, $\quad y'=\dfrac{e^y}{1-xe^y}$.

170. $\cos(xy)=x$.

1) $-\sin(xy)\cdot(1\cdot y'+x\cdot y')=1$.

2) $-y'\sin(xy)-xy'\sin(xy)=1$, $\quad y'\cdot\sin(xy)(1+x)=-1$,

$$y'=-\frac{1}{(1+x)\sin(xy)}.$$

<u>Вправи для самостійного розв'язання</u>

Обчислити похідні функцій, що задані неявно:

171 $5x^2+3xy-2y^2+2=0$. **172.** $x^3+y^3-a=0$.

173. $y^5-5axy+x^5=0$. **174.** $a^x-e^{x-y}=0$.

175. $x^3+ax^2y+bxy^2+y^3=0$. **176.** $2y\ln y=x$.

177. $y=\cos(x+y)$. **178.** $y=x+\operatorname{arctg} y$.

179. $y^2\cos x=a^2\sin 3x$.

180. $x-y=\arcsin x-\arcsin y+0,25$.

Відповіді:

171 $\dfrac{10x+3y}{4y-3x}$. **172.** $-\dfrac{x^2}{y^2}$.

173. $\dfrac{ay-x^4}{y^4-ax}$. **174.** $1-\ln a$.

175. $-\dfrac{3x^2+2axy+by^2}{ax^2+2bxy+3y^2}$.

176. $\dfrac{1}{2(1+\ln y)}$.

177. $-\dfrac{\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)}$.

178. $\dfrac{1+y^2}{y^2}$.

179. $\dfrac{3a^2\cos 3x+y^2\sin x}{2y\cos x}$.

180. $\dfrac{\sqrt{1-y^2}\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)}{\sqrt{1-x^2}\left(1-\sqrt{1-y^2}\right)}$.

5. Диференціювання функцій, що задані параметрично

Нехай функція $y=f(x)$ задана параметрично

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases},\ t \text{ – параметр, } t\in T.$$

Її похідна обчислюється за формулою

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}, \qquad (4)$$

де y'_x – похідна функції $y=f(x)$ (надалі цю похідну будемо позначати y'); y'_t – похідна функції y по змінній t; x'_t – похідна функції x по змінній t.

Обчислити похідні функцій, що задані параметрично:

181. $\begin{cases} x=\operatorname{tg} t \\ y=\sin t. \end{cases}$

⌐ Маємо $x'_t=\dfrac{1}{\cos^2 t}$, $y'_t=\cos t$. Ці значення похідних підставляємо у формулу (4): $y'=\dfrac{y'_t}{x_t}=\dfrac{\cos t}{\dfrac{1}{\cos^2 t}}=\cos^3 t$. ⌋

182. $\begin{cases} x=2\cos t-\cos 2t \\ y=2\sin t-\sin 2t. \end{cases}$

⌐ Маємо $x'_t=-2\sin t+\sin 2t\cdot 2=2(\sin 2t-\sin t)$,

$y'_t=2\cos t-\cos 2t\cdot 2=2(\cos t-\cos 2t)$. За формулою (4)

$$y' = \frac{y_t'}{x_t'} = \frac{2(\cos t - \cos 2t)}{2(\sin 2t - \sin t)} = \frac{\cos t - \cos 2t}{\sin 2t - \sin t} = \frac{2\sin\frac{3t}{2}\sin\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{3t}{2}} = \operatorname{tg}\frac{3t}{2}$$

(тут використали формули $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$, $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$). ⌋

183. $\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}. \end{cases}$, $t \neq -1$, ($a = const$).

⌈ $x_t' = \dfrac{3a(1+t^3) - 3at \cdot 3t^2}{(1+t^3)^2} = \dfrac{3a(1+t^3-3t^3)}{(1+t^3)^2} = \dfrac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}$,

$$y_t' = \frac{3a\cdot 2t(1+t^3) - 3at^2\cdot 3t^2}{(1+t^3)^2} = \frac{3at(2+2t^3-3t^3)}{(1+t^3)^2} = \frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2}.$$

$$y' = \frac{y_t'}{x_t'} = \frac{3at(2-t^3)(1+t^3)^2}{(1+t^3)^2\, 3a(1-2t^3)} = \frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}. \quad ⌋$$

184. $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - \operatorname{arctg} t. \end{cases}$

⌈ $x_t' = \dfrac{2t}{1+t^2}$; $y_t' = 1 - \dfrac{1}{1+t^2} = \dfrac{1+t^2-1}{1+t^2} = \dfrac{t^2}{1+t^2}$.

$$y' = \frac{y_t'}{x_t'} = \frac{\frac{t^2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{t^2(1+t^2)}{(1+t^2)2t} = \frac{t}{2}. \quad ⌋$$

185. $\begin{cases} x = e^t \sin t \\ y = e^t \cos t. \end{cases}$

⌈ $x_t' = e^t \sin t + e^t \cos t = e^t(\sin t + \cos t)$,

$$y_t' = e^t \cos t - e^t \sin t = e^t(\cos t - \sin t),$$

$$y' = \frac{y_t'}{x_t'} = \frac{\cos t - \sin t}{\cos t + \sin t}. \quad \lrcorner$$

Вправи для самостійного розв'язання

Обчислити похідні функцій, що задані параметрично:

186. $\begin{cases} x = a(1-t) \\ y = at. \end{cases}$

187. $\begin{cases} x = \sin 2t \\ y = \sin^2 t. \end{cases}$

188. $\begin{cases} x = \cos t + t\sin t \\ y = \sin t - t\cos t. \end{cases}$

189. $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$

190. $\begin{cases} x = \dfrac{1-t}{1+t} \\ y = \dfrac{2t}{1+t}. \end{cases}$

191. $\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t. \end{cases}$

192. $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t. \end{cases}$

193. $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$

194. $\begin{cases} x = t(1 - \sin t) \\ y = t\cos t. \end{cases}$

195. $\begin{cases} x = \dfrac{1+t^3}{t^2-1} \\ y = \dfrac{t}{t^2-1}. \end{cases}$

Відповіді:

186. -1.

187. $\frac{1}{2}\operatorname{tg} 2t$.

188. $\operatorname{tg} t$.

189. $\operatorname{ctg}\frac{t}{2}$.

190. -1.

191. $-\operatorname{ctg} t$.

192. $-\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t$.

193. $-\operatorname{tg} t$.

194. $\dfrac{\cos t - t\sin t}{1 - \sin t - t\cos t}$.

195. $\dfrac{1+t^2}{t(2+3t-t^3)}$.

6. Похідні вищих порядків

Якщо функція $y = f(x)$ *диференційовна на* деякому *інтервалі* (тобто має похідну в кожній точці інтервалу), то за означенням *похідна другого порядку (друга похідна)* цієї функції знаходиться за формулою $y'' = (y')'$. Таким чином, друга похідна від заданої функції є похідна від її першої похідної.

Аналогічно *похідна третього порядку (третя похідна)* $y''' = (y'')'$ і т.д.

Знайти похідні вказаних порядків для заданих функцій:

196. $y = \dfrac{\sin x}{x}$; $y'' = ?$.

⌈ Для знаходження y'' потрібно знайти y':

$$y' = \left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{\cos x \cdot x - \sin x}{x^2};$$

$$y'' = (y')' = \left(\frac{x \cdot \cos x - \sin x}{x^2}\right)' =$$

$$= \frac{\left[1 \cdot \cos x + x(-\sin x) - \cos x\right] \cdot x^2 - (x\cos x - \sin x) \cdot 2x}{x^4} =$$

$$= \frac{(\cos x - x\sin x - \cos x) \cdot x^2 - 2x(x\cos x - \sin x)}{x^4} =$$

$$= \frac{x\left(x\cos x - x^2 \sin x - x\cos x - 2x\cos x + 2\sin x\right)}{x^4} =$$

$$= \frac{2\sin x - x^2 \sin x - 2x\cos x}{x^3}. \quad ⌋$$

197. $y = x^5 - 7x^3 + 2$; $y''' = ?$.

⌈ Знайдемо спочатку y':

$$y' = 5x^4 - 7 \cdot 3x^2 = 5x^4 - 21x^2;$$

$$y'' = (y')' = \left(5x^4 - 21x^2\right)' = 20x^3 - 21 \cdot 2x = 20x^3 - 42x.$$

$$y''' = (y'')' = \left(20x^3 - 42x\right)' = 60x^2 - 42 = 6\left(10x^2 - 7\right). \quad ⌋$$

198. $y=3x^4+5x^3-4x^2+8$ **;** $y^{(4)}=?$.

Γ Тут $y^{(4)}$ – четверта похідна від заданої функції. Знайдемо y' :

$$y'=12x^3+15x^2-8x\,; \quad y''=\left(y'\right)'=36x^2+30x-8\,;$$

$$y'''=\left(y''\right)'=72x+30\,; \quad y^{(4)}=\left(y'''\right)'=72\,. \quad \lrcorner$$

199. $y=\sin^2 x$; $y^{(5)}=?$.

Γ Щоб знайти п'яту похідну від заданої функції потрібно знайти послідовно перші чотири похідні.

$$y'=\left(\sin^2 x\right)'=2\sin x\cos x=\sin 2x\,;\; y''=\left(\sin 2x\right)'=\cos 2x\cdot 2=2\cos 2x\,;$$

$$y'''=\left(2\cos 2x\right)'=-2\sin 2x\cdot 2=-4\sin 2x\,;$$

$$y^{(4)}=\left(-4\sin 2x\right)'=-4\cos 2x\cdot 2=-8\cos 2x\,;$$

$$y^{(5)}=\left(-8\cos 2x\right)'=-8\left(-\sin 2x\right)\cdot 2=16\sin 2x\,. \quad \lrcorner$$

200. $y=\sqrt{x+5}$; $y^{(4)}=?$.

Γ $\quad y'=\left(\sqrt{x+5}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x+5}}$;

$$y''=\left(\frac{1}{2\sqrt{x+5}}\right)'=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x+5}}\right)'=\frac{1}{2}\left(\left(x+5\right)^{-\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x+5\right)^{-\frac{1}{2}-1}=$$
$$=-\frac{1}{4}\left(x+5\right)^{-\frac{3}{2}};$$

$$y'''=\left(-\frac{1}{4}\left(x+5\right)^{-\frac{3}{2}}\right)'=-\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\left(x+5\right)^{-\frac{3}{2}-1}=\frac{3}{8}\left(x+5\right)^{-\frac{5}{2}};$$

$$y^{(4)}=\left(\frac{3}{8}\left(x+5\right)^{-\frac{5}{2}}\right)'=\frac{3}{8}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)\left(x+5\right)^{-\frac{5}{2}-1}=-\frac{15}{16}\left(x+5\right)^{-\frac{7}{2}}=$$
$$=-\frac{15}{16}\cdot\frac{1}{\left(x+5\right)^{\frac{7}{2}}}=-\frac{15}{16}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(x+5\right)^7}}=-\frac{15}{\left(x+5\right)^3\sqrt{\left(x+5\right)}}\,. \quad \lrcorner$$

201. Показати, що функція $y=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}+e^x$, де C_1 , C_2 – сталі, задовольняє рівняння $y''-4y'+4y=e^x$.

$\ulcorner$ Щоб показати, що функція y задовольняє рівняння, потрібно знайти похідні y' та y'', ці похідні та саму функцію y підставити в рівняння і пересвідчитися, що воно перетворюється у тотожність.

$$y' = C_1 e^{2x} \cdot 2 + C_2 \left(1 \cdot e^{2x} + x \cdot e^{2x} \cdot 2\right) + e^x = 2C_1 e^{2x} + C_2 e^{2x} + 2C_2 x e^{2x} + e^x =$$
$$= 2C_1 e^{2x} + C_2 (1+2x) e^{2x} + e^x ;$$
$$y'' = 2C_1 e^{2x} \cdot 2 + C_2 \left[2e^{2x} + (1+2x) e^{2x} \cdot 2\right] + e^x =$$
$$= 4C_1 e^{2x} + 2C_2 e^{2x} + 2C_2 (1+2x) e^{2x} + e^x .$$

Підставимо y, y' та y'' у рівняння:

$$4C_1 e^{2x} + 2C_2 e^{2x} + 2C_2 (1+2x) e^{2x} + e^x - 4\left[2C_1 e^{2x} + C_2 (1+2x) e^{2x} + e^x\right] +$$
$$+4\left(C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + e^x\right) = e^x .$$

Поділимо обидві частини рівняння на $e^x \neq 0$ і розкриємо дужки:

$$4C_1 + 2C_2 + 2C_2 + 4C_2 x + 1 - 8C_1 - 4C_2 - 8xC_2 - 4 + 4C_1 + 4C_2 x + 4 = 1 ,$$
$$1 \equiv 1 . \quad \lrcorner$$

<u>Вправи для самостійного розв'язання</u>

Обчислити похідні вищих порядків:

202. $y = \left(1+x^2\right) \operatorname{arctg} x$; $y'' = ?$.

203. $y = 1 - x^2 - x^4$; $y''' = ?$.

204. $y = \cos^2 x$; $y''' = ?$.

205. $y = x^3 \ln x$; $y^{(4)} = ?$.

206. $y = \dfrac{1}{1-x}$; $y^{(5)} = ?$.

Відповіді:

202. $\dfrac{2x}{1+x^2} + 2 \operatorname{arctg} x$.

203. $-24x$.

204. $4 \sin 2x$.

205. $\dfrac{6}{x}$.

206. $y = \dfrac{5!}{(1-x)^6}$, де $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$.

7. Застосування похідної

7.1. Дотична до кривої

Якщо крива задана рівнянням $y = f(x)$, то рівняння *дотичної* до неї в точці $M_0(x_0; y_0)$ має вигляд

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0), \qquad (5)$$

де $y'(x_0) = k$ – кутовий коефіцієнт дотичної; $y_0 = f(x_0)$.

Скласти рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$:

208. $y = x^3 - 4x + 6$; $M_0(1;3)$.

⌈ Знайдемо похідну заданої функції: $y' = 3x^2 - 4$. За умовою

$$x_0 = 1 \text{. Тому } y'(1) = 3(1)^2 - 4 = 3 - 4 = -1.$$

Тоді шукане рівняння дотичної

$y - 3 = (-1)(x - 1) \;\Leftrightarrow\; y - 3 = -x + 1 \;\Leftrightarrow\; x + y - 4 = 0$. ⌋

209. $y = 2\sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right)$; $M_0\left(0; -\sqrt{3}\right)$.

⌈ $y' = 2\cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) \cdot 4 = 8\cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right)$;

$$y'(0) = 8\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 8\cos\frac{\pi}{3} = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4.$$

Тоді шукане рівняння дотичної

$y + \sqrt{3} = 4(x - 0) \;\Leftrightarrow\; y + \sqrt{3} = 4x \;\Leftrightarrow\; 4x - y - \sqrt{3} = 0$. ⌋

210. В якій точці дотична до параболи $y = x^2$: а) паралельна до прямої $y = 2x - 4$; б) перпендикулярна до прямої $x + y = 1$?

⌈ а) В рівнянні (5) $y'(x_0) = k$ – кутовий коефіцієнт дотичної. Відомо (див. розділ 3), що дві прямі паралельні, якщо їх кутові коефіцієнти рівні.

Задана пряма має кутовий коефіцієнт $k_1 = 2$.

Знайдемо кутовий коефіцієнт дотичної до параболи:

$$y' = 2x; \; k = y'(x_0) = 2x_0.$$

Так як за умовою має бути $k = k_1$, то $2x_0 = 2 \Leftrightarrow x_0 = 1$. Оскільки точка дотику $M_0(x_0, y_0)$ належить параболі, то $y_0 = x_0^{\,2} = 1$.

Таким чином, $M_0(1;1)$ – шукана точка.

б) Пряма $x + y = 1$ має кутовий коефіцієнт $k_2 = -1$. Відома умова перпендикулярності двох прямих (див. розділ 3): $k \cdot k_2 = -1$. Звідси $2x_0(-1) = -1 \Leftrightarrow 2x_0 = 1 \Leftrightarrow x_0 = \dfrac{1}{2}$.

Знайдемо ординату шуканої точки: $y_0 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$.

Таким чином, $M_0\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{4}\right)$ – шукана точка. ⌋

211. Записати рівняння дотичної до кривої $y = 2x^5 + 3x^3 + 4x - 5$ в точці з абсцисою $x_0 = 0$.

⌈ Знайдемо ординату точки дотику: $y_0 = f(0) = -5$.

Знайдемо похідну: $y' = 10x^4 + 9x^2 + 4$; $y'(0) = 4$.

Рівняння дотичної матиме вигляд
$y - (-5) = 4(x - 0) \Leftrightarrow y + 5 = 4x \Leftrightarrow 4x - y + 5 = 0$. ⌋

212. Знайти рівняння дотичної до кривої $y = x^2 - 9x - 4$ в точці з абсцисою $x = -1$.

⌈ Ордината точки дотику $y_0 = f(-1) = 1 + 9 - 4 = 6$.

Знайдемо похідну: $y' = 2x - 9$, $y'(-1) = -2 - 9 = -11$.

Отже, рівняння дотичної $y - 6 = -11(x + 1) \Leftrightarrow y - 6 = -11x - 11 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 11x + y + 5 = 0$. ⌋

213. При якому значенні незалежної змінної дотичні до кривих $y = x^2$ і $y = \dfrac{4}{3}x^3$ перпендикулярні?

⌈ Щоб дотичні до кривих були перпендикулярні, потрібно, щоб їх кутові коефіцієнти задовольняли умову

$$k_1 \cdot k_2 = -1, \qquad (6)$$

де $k_1 = y'(x_0)$, $y = x^2$; $k_2 = y'(x_0)$, $y = \dfrac{4}{3}x^3$.

Знайдемо похідні. Якщо $y = x^2$, то $y' = 2x$; якщо $y = \frac{4}{3}x^3$, то $y' = 4x^2$. Тоді $k_1 = 2x_0$; $k_2 = 4x_0{}^2$. Підставляючи значення k_1 і k_2 у співвідношення (6), одержимо:

$$2x_0 \cdot 4x_0{}^2 = -1 \Leftrightarrow 8x_0{}^3 = -1 \Leftrightarrow x_0{}^3 = -\frac{1}{8} \Leftrightarrow x_0 = \sqrt[3]{-\frac{1}{8}} = -\frac{1}{2}.$$

Отже, $x_0 = -\frac{1}{2}$. ┘

Вправи для самостійного розв'язання

214. Записати рівняння дотичної до кривої $y = x^3$ в точці $M_0(2;8)$.

215. Записати рівняння дотичної до кривої $y = x^4 + 3$ в точці $M_0(1;4)$.

216. Скласти рівняння дотичної до кривої $y = \ln(2x-1)$ в точці з абсцисою $x = 1$.

217. При якому значенні незалежної змінної дотичні до кривих $y = x^3$ і $y = x^4$ паралельні?

218. В якій точці дотична до лінії $y = \ln x$: а) паралельна прямій $y = x + 5$; б) перпендикулярна до прямої $y = -\frac{1}{2}x + 3$?

219. Записати рівняння дотичної до графіка функції $y = \operatorname{tg} 2x$ в точці з абсцисою $x_0 = 0$.

Відповіді:

214. $12x - y - 16 = 0$.

215. $4x - y = 0$.

216. $2x - y - 2 = 0$.

217. $x_1 = 0,\ x_2 = \frac{3}{4}$.

218. а) $(1;0)$; б) $(0,5; -\ln 2)$.

219. $2x - y = 0$.

7.2. Дослідження функцій на монотонність

Функція $y = f(x)$ *зростає* (*спадає*) на (a,b), якщо для будь-яких чисел $x_1 < x_2$ з (a,b) виконується нерівність $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).

Нехай функція $y = f(x)$ диференційовна на інтервалі (a,b). Якщо $y' = f'(x) > 0$ ($y' = f'(x) < 0$) при всіх $x \in (a,b)$, то функція зростає (спадає) на (a,b).

При розв'язуванні задач, в яких потрібно знайти інтервали монотонності (зростання, спадання) функції, треба перш за все знайти область визначення функції.

Знайти інтервали монотонності функцій:

220. $y = 2x + \cos x$.

$\ulcorner$ $D(f) = (-\infty, +\infty)$ ($D(f)$ – область визначення функції).

Знайдемо похідну: $y' = 2 - \sin x$.

Оскільки $y' > 0$ при всіх $x \in D(f)$, то функція зростає на інтервалі $(-\infty, +\infty)$, тобто на всій області визначення. $\lrcorner$

221. $y = -\ln\left(x^3 - 1\right)$.

$\ulcorner$ Область визначення $D(f) = (1, +\infty)$.

Знайдемо похідну: $y' = -\dfrac{1}{x^3 - 1} \cdot \left(x^3 - 1\right)' = -\dfrac{3x^2}{x^3 - 1}$.

Оскільки $y' < 0$ при всіх $x \in D(f)$ ($x^3 - 1 > 0$ і $x^2 > 0$, $x \in D(f)$), то функція спадає на інтервалі $(1, +\infty)$, тобто на всій області визначення. $\lrcorner$

222. $y = \dfrac{e^x}{x}$.

⌈ $D(f)=(-\infty,0)\cup(0,\infty)$.

Знайдемо похідну: $y'=\frac{e^x\cdot x-e^x\cdot 1}{x^2}=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$.

1) Знайдемо інтервали зростання. Для цього накладемо умову $y'>0$: $\frac{e^x(x-1)}{x^2}>0$. Розв'язуємо дану нерівність і знаходимо $x>1$.

Отже, функція зростає на інтервалі $(1,+\infty)$.

2) Знайдемо інтервали спадання. Для цього накладемо умову $y'<0$: $\frac{e^x(x-1)}{x^2}<0$. Розв'язуємо дану нерівність: $x<0$ або $0<x<1$.

Отже, функція спадає на інтервалах $(-\infty,0)$ та $(0,1)$. ⌋

Зауваження. Оскільки будь-яка елементарна функція неперервна в своїй області визначення, то нерівність $y'<0$ можна і не розв'язувати. Досить знайти інтервали зростання функції, а ті інтервали, які входять в область визначення функції але не є інтервалами зростання, будуть інтервалами спадання функції (за умови, що на цих інтервалах похідна не дорівнює тотожно нулю).

223. $y=\ln\left(1-x^2\right)$.

⌈ $D(f)$: $1-x^2>0\Leftrightarrow|x|<1\Leftrightarrow-1<x<1$. Отже, $D(f)=(-1,1)$.

Знайдемо y': $y'=\frac{1}{1-x^2}\cdot(-2x)=-\frac{2x}{1-x^2}$.

Знайдемо інтервали зростання функції. Для цього накладемо умову $y'>0$: $-\frac{2x}{1-x^2}>0\Leftrightarrow x(x-1)(x+1)>0$. Розв'яжемо дану нерівність методом інтервалів, враховуючи, що $x(x-1)(x+1)=0$ при $x=0$, $x=-1$, $x=1$:

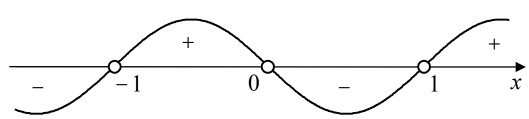


Рис. 1

З рис. 1 маємо $x\in(-1,0)\cup(1,+\infty)$.

Але інтервал $(1,+\infty)$ не входить в $D(f)$. Отже, функція зростає на інтервалі $(-1,0)$.

Відповідно до зробленого зауваження функція спадає на інтервалі $(0,1)$. $\rfloor$

224. $y=\dfrac{2x^2}{1-x^2}$.

$\ulcorner$ $D(f)=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

Знайдемо y':

$$y'=2\frac{2x\left(1-x^2\right)-x^2(-2x)}{\left(1-x^2\right)^2}=2\frac{2x\left(1-x^2+x^2\right)}{\left(1-x^2\right)^2}=\frac{4x}{\left(1-x^2\right)^2}.$$

Знайдемо інтервали зростання функції. Для цього накладемо умову $y'>0$: $\dfrac{4x}{\left(1-x^2\right)^2}>0$. Розв'язуємо дану нерівність і знаходимо $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$.

Отже, функція зростає на інтервалах $(0,1)$ та $(1,+\infty)$.

Згідно із зробленим зауваженням функція спадає на інтервалах $(-\infty,-1)$ та $(-1,0)$. $\rfloor$

225. $y=4x^3-21x^2+18x+20$.

$\ulcorner$ $D(f)=(-\infty,+\infty)$.

Знайдемо y': $y'=12x^2-42x+18=6\left(2x^2-7x+3\right)$.

Знайдемо інтервали зростання функції. Для цього накладемо умову $y'>0$: $6\left(2x^2-7x+3\right)>0\Leftrightarrow 2x^2-7x+3>0$. Спочатку розв'яжемо квадратне рівняння $2x^2-7x+3=0$ і розкладемо праву частину нерівності на множники:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{7\pm\sqrt{49-4\cdot2\cdot3}}{4}=\frac{7\pm5}{4},$$

$$x_1=3,\ x_2=\frac{1}{2};$$

$$2x^2-7x+3>0\Leftrightarrow 2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-3)>0\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-3)>0.$$

Розв’яжемо нерівність методом інтервалів:

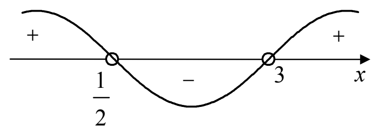


Рис. 2

З рис. 2 маємо $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (3, +\infty)$.

Отже, функція зростає на інтервалах $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ та $(3, +\infty)$, а спадає на інтервалі $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$. ⌋

<u>Вправи для самостійного розв’язання</u>

Знайти інтервали монотонності функцій:

226. $y = x^2 e^{-x}$.

227. $y = \left(x^2 - 9\right)^{\frac{3}{2}}$.

228. $y = \dfrac{2x}{1 + x^2}$.

229. $y = x \ln x$.

230. $y = x\left(1 + 2\sqrt{x}\right)$.

231. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 14$.

Відповіді:

226. Функція спадає на інтервалах $(-\infty, 0)$ та $(2, +\infty)$ і зростає на інтервалі $(0, 2)$.

227. На інтервалі $(-\infty, -3)$ функція спадає, а на $(3, +\infty)$ – зростає.

228. Функція спадає на інтервалах $(-\infty, -1)$, $(1, +\infty)$ і зростає на інтервалі $(-1, 1)$.

229. На інтервалі $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ функція спадає, а на $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ – зростає.

230. На інтервалі $(0, +\infty)$ функція зростає.

231. На інтервалах $(-\infty,-1)$ та $(3,+\infty)$ функція зростає, а на $(-1,3)$ – спадає.

7.3. Дослідження функцій на екстремуми

Функція $y=f(x)$ має у точці x_0 *локальний максимум* (*мінімум*), якщо знайдеться окіл точки x_0 (тобто інтервал виду $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, де $\delta>0$), що для усіх $x\neq x_0$ з цього околу виконується нерівність $f(x)<f(x_0)$ ($f(x)>f(x_0)$).

Дослідження функції на екстремуми (максимуми, мінімуми) доцільно виконувати за такою схемою:

1) Знайти похідну y'.

2) Розв'язати рівняння $y'=0$, а також визначити ті значення x, при яких y' не існує (іншими словами: знайти *критичні точки I роду*). Функція може мати екстремуми лише в критичних точках I роду.

3) Всі критичні точки розмістити в порядку зростання. Нехай в інтервал (a,b) з області визначення $D(f)$ функції потрапили точки $x_1<x_2<...<x_n$.

4) На кожному з інтервалів $(a,x_1),(x_1,x_2),\ldots,(x_n,b)$ потрібно взяти будь-яку точку і встановити в цій точці знак похідної y' (похідна зберігає знак в кожному інтервалі між двома сусідніми критичними точками).

5) Аналізуємо знаки y' при переході зліва направо через кожну критичну точку: якщо знак змінюється з "+" на "–", то в критичній точці функція має максимум; якщо знак змінюється з "–" на "+", то – мінімум. Якщо ж у двох сусідніх інтервалах знак похідної y' зберігається, то екстремуму в критичній точці немає.

6) Знайти значення функції $y=f(x)$ в точках, в яких вона досягає екстремуму (*екстремальні значення* функції).

Зауваження. При дослідженні функції на екстремуми потрібно перш за все знайти область визначення функції.

Дослідити на екстремуми функції:

232. $y=(1-x^2)^3$.

⌈ $D(f)=R$.

1) $y'=3\left(1-x^2\right)^2\cdot(-2x)=-6x\left(1-x^2\right)^2$.

2) Знаходимо критичні точки I роду:

а) $y'=0 \Leftrightarrow -6x\left(1-x^2\right)^2=0 \Leftrightarrow x(1-x)^2(1+x)^2=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=-1; \end{array}\right.$$

б) точки, в яких y' не існує, відсутні.

3) Розмістимо критичні точки в порядку зростання: -1; 0; 1. В результаті одержимо інтервали: $(-\infty,-1)$; $(-1,0)$; $(0,1)$; $(1,+\infty)$.

4) Визначимо знак похідної на кожному з інтервалів.

На інтервалі $(-\infty,-1)$ візьмемо, наприклад, точку $x=-2$:

$$y'(-2)=-6(-2)\left[1-(-2)^2\right]^2=108>0.$$

На інтервалі $(-1,0)$ візьмемо, наприклад, точку $x=-\frac{1}{2}$:

$$y'\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{27}{16}>0.$$

На інтервалі $(0,1)$ візьмемо точку $x=\frac{1}{2}$: $y'\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{27}{16}<0$.

На інтервалі $(1,+\infty)$ візьмемо точку $x=2$: $y'(2)=-108<0$.

Результати досліджень занесемо до таблиці:

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	+	0	+	0	–	0	–

Табл. 1

5) З таблиці бачимо, що похідна змінює знак при переході лише через точку $x=0$. Оскільки знак змінюється з "+" на "–", то в цій точці функція має максимум.

6) Значення функції в точці максимуму $y_{\max}=f(0)=1$. ⌋

Зауваження. За результатами розв'язання задачі **232** можна визначити також інтервали монотонності функції $y=\left(1-x^2\right)^3$. Так, з таблиці 1 випливає, що функція зростає на інтервалі $(-\infty, 0)$ і спадає на інтервалі $(0, +\infty)$. Це зауваження стосується також прикладів **233** – **236**.

233. $y = x\sqrt{1-x^2}$.

Γ $D(f)$: $1-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 1 \Leftrightarrow |x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$.

1) $y' = 1\cdot\sqrt{1-x^2} + x\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x) = \sqrt{1-x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} =$

$$= \frac{1-x^2-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} .$$

2) Знаходимо критичні точки I роду:

а) $y' = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2x^2 = 0 \\ \sqrt{1-x^2} \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \left(1-\sqrt{2}x\right)\left(1+\sqrt{2}x\right) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \end{array}\right.$$

б) похідна y' не існує при $x = -1$ та $x = 1$.

Точками екстремуму функції можуть бути лише точки $x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ і $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Саме вони лежать всередині області визначення $D(f) = [-1, 1]$ функції. В точках $x = -1$ та $x = 1$ функція не може мати локальних екстремумів, оскільки ці точки лежать не всередині області визначення $D(f)$, а на її межі.

3) Розмістимо критичні точки в порядку зростання і, враховуючи $D(f)$, маємо $-1 < -\dfrac{\sqrt{2}}{2} < \dfrac{\sqrt{2}}{2} < 1$. Інтервали: $\left(-1, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$.

4) Визначимо знак похідної на кожному з інтервалів.

На інтервалі $\left(-1,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ візьмемо, наприклад, точку $x=-0,8$:

$$y'(-0,8)=\frac{1-2(-0,8)^2}{\sqrt{1-(0,8)^2}}=-\frac{7}{15}<0.$$

На інтервалі $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ візьмемо точку $x=0$:

$$y'(0)=\frac{1-2\cdot 0}{\sqrt{1-0}}=1>0.$$

На інтервалі $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$ візьмемо точку $x=0,8$: $y'(0,8)=-\frac{7}{15}<0$.

Результати досліджень занесемо до таблиці:

x	$\left(-1,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$
y'	–	0	+	0	–

5) З таблиці бачимо, що похідна змінює знак при переході через обидві точки $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ і $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

При переході через точку $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ знак змінюється з “ – ” на “+”. Отже, в цій точці функція має мінімум.

При переході через точку $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ знак похідної змінюється з “+” на “ – ”. Тому в цій точці функція має максимум.

6) $y_{\min}=f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\frac{1}{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}$;

$$y_{\max}=f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}. \quad \lrcorner$$

234. $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+6x$.

⌐ $D(f)=R$.

1) $y' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 - \frac{5}{2}x + 6 = x^2 - 5x + 6$.

2) Знаходимо критичні точки I роду:

а) $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 3; \end{array}\right.$

б) точки, в яких y' не існує, відсутні.

3) Розмістимо критичні точки в порядку зростання: 2; 3. В результаті одержимо інтервали: $(-\infty, 2)$; $(2,3)$, $(3,+\infty)$.

4) Визначимо знак похідної на кожному з інтервалів.

На інтервалі $(-\infty, 2)$ візьмемо, наприклад, точку $x = 0$:

$$y'(0) = 6 > 0.$$

На інтервалі $(2,3)$ візьмемо точку $x = \frac{5}{2}$:

$$y'\left(\frac{5}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5 \cdot \frac{5}{2} + 6 = -\frac{1}{4} < 0.$$

На інтервалі $(3,+\infty)$ візьмемо точку $x = 4$:

$$y'(4) = 4^2 - 5 \cdot 4 + 6 = 16 - 20 + 6 = 2 > 0.$$

Результати досліджень занесемо до таблиці:

x	$(-\infty, 2)$	2	$(2,3)$	3	$(3,+\infty)$
y'	+	0	–	0	+

5) З таблиці бачимо, що похідна змінює знак при переході через обидві точки $x = 2$ і $x = 3$.

При переході через точку $x = 2$ знак змінюється з “+” на “ – ”. Отже, в цій точці функція має максимум.

При переході через точку $x = 3$ знак похідної змінюється з “ – ” на “+”. Тому в цій точці функція має мінімум.

6) Екстремальні значення функції:

$$y_{\max} = f(2) = \frac{1}{3} \cdot 2^3 - \frac{5}{2} \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 = \frac{8}{3} - 10 + 12 = \frac{14}{3};$$

$$y_{\min} = f(3) = \frac{1}{3} \cdot 3^3 - \frac{5}{2} \cdot 3^2 + 6 \cdot 3 = 9 - \frac{45}{2} + 18 = \frac{9}{2}. \quad \lrcorner$$

235. $y = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x+2}$.

$\ulcorner$ $D(f) = (-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$.

1) $y' = \dfrac{\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}(x+2) - \sqrt[3]{x^2}}{(x+2)^2} = \dfrac{2(x+2)-3x}{3\sqrt[3]{x}(x+2)^2} = \dfrac{4-x}{3\sqrt[3]{x}(x+2)^2}$.

2) Знаходимо критичні точки I роду:

а) $y' = 0 \Leftrightarrow \dfrac{4-x}{3\sqrt[3]{x}(x+2)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4-x=0 \\ 3\sqrt[3]{x}(x+2)^2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x = 4 \in D(f)$;

б) похідна не існує при $x = 0 \in D(f)$, оскільки вираз у знаменнику похідної при цьому значенні x дорівнює нулю.

3) Розмістимо критичні точки в порядку зростання: 0; 4. Враховуючи область визначення функції, одержимо інтервали: $(-2,0)$; $(0,4)$; $(4,+\infty)$.

4) Визначимо знак похідної на кожному з інтервалів.

На інтервалі $(-2,0)$ візьмемо, наприклад, точку $x=-1$:

$$y'(-1) = \frac{4-(-1)}{3\sqrt[3]{-1}(-1+2)^2} = -\frac{5}{3} < 0.$$

На інтервалі $(0,4)$ візьмемо точку $x=1$: $y'(1) = \dfrac{1}{9} > 0$.

На інтервалі $(4,+\infty)$ візьмемо точку $x=5$: $y'(5) = -\dfrac{1}{3\cdot 49\sqrt[3]{5}} < 0$.

Результати досліджень занесемо до таблиці:

x	$(-2,0)$	0	$(0,4)$	4	$(4,+\infty)$
y'	–	не існує	+	0	–

5) З таблиці бачимо, що похідна змінює знак при переході через обидві критичні точки $x=0$ і $x=4$.

Оскільки при переході через точку $x=0$ знак похідної змінюється з “ – ” на “+”, то в цій точці функція має мінімум.

При переході через точку $x=4$ знак змінюється з “+” на “ – ”. Отже, в цій точці функція має максимум.

6) Значення функції в точках екстремуму:

$$y_{\min} = f(0) = 0;$$

$$y_{\max} = f(4) = \frac{\sqrt[3]{2}}{3}. \quad \lrcorner$$

236. $y=\left(x^2-2x\right)\ln x-\dfrac{3}{2}x^2+4x$.

$\ulcorner$ $D(f)=(0,+\infty)$.

1) $y'=(2x-2)\ln x+\left(x^2-2x\right)\cdot\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{2}\cdot 2x+4=$

$$=2(x-1)\ln x+x-2-3x+4=2(x-1)\ln x-2x+2=$$

$$=2(x-1)\ln x-2(x-1)=2(x-1)(\ln x-1).$$

2) Знаходимо критичні точки I роду:

а) $y'=0\Leftrightarrow 2(x-1)(\ln x-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-1=0\\ \ln x-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\in D(f)\\ x=e\in D(f)\end{array}\right.$

($e\approx 2,71$);

б) точки, в яких y' не існує, відсутні.

3) Розмістимо критичні точки в порядку зростання: 1; e. В результаті одержимо інтервали: $(0,1)$; $(1,e)$; $(e,+\infty)$.

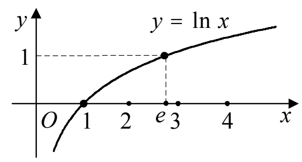


Рис. 3

4) Визначимо знак похідної на кожному з інтервалів.

На інтервалі $(0,1)$ візьмемо точку $x=\dfrac{1}{2}$:

$$y'\left(\frac{1}{2}\right)=2\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\ln\frac{1}{2}-1\right)=-(\ln 1-\ln 2-1)=\ln 2+1>0.$$

На інтервалі $(1,e)$ візьмемо точку $x=2$:

$$y'(2)=2(2-1)(\ln 2-1)=2(\ln 2-1)<0 \text{ (див. рис. 3).}$$

На інтервалі $(e,+\infty)$ візьмемо точку $x=3$:

$$y'(3)=2(3-1)(\ln 3-1)=4(\ln 3-1)>0 \text{ (див. рис. 3).}$$

Результати досліджень занесемо до таблиці:

x	$(0,1)$	1	$(1,e)$	e	$(e,+\infty)$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$

5) З таблиці бачимо, що похідна змінює знак при переході через обидві критичні точки $x=1$ і $x=e$.

Оскільки при переході через точку $x=1$ знак похідної змінюється з “+” на “ – ”, то в цій точці функція має максимум.

При переході через точку $x = e$ знак похідної змінюється з “ $-$ ” на “+”. Тому функція в цій точці має мінімум.

6) Значення функції в точках екстремуму:

$$y_{\max} = f(1) = (1-2)\ln 1 - \frac{3}{2}\cdot 1 + 4\cdot 1 = 0 - \frac{3}{2} + 4 = \frac{5}{2};$$

$$y_{\min} = f(e) = \left(e^2 - 2e\right)\ln e - \frac{3}{2}e^2 + 4e = e^2 - 2e - \frac{3}{2}e^2 + 4e =$$

$$= 2e - \frac{1}{2}e^2 = e\left(2 - \frac{1}{2}e\right). \quad \lrcorner$$

<u>Вправи для самостійного розв’язання</u>

Дослідити на екстремуми функції:

237. $y = x^2(x-6)$.

238. . $y = \dfrac{4x}{x^2+4}$.

239. $y = x^3 - 3x^2 + 3x$.

240. $y = 3 - 2\sqrt[3]{x^2}$.

241. $y = x^2 e^{-x}$.

Відповіді:

237. $y_{\max} = f(0) = 0;\ y_{\min} = f(4) = -32$.

238. $y_{\min} = f(-2) = -1;\ y_{\max} = f(2) = 1$.

239. Немає екстремумів.

240. $y_{\max} = f(0) = 3$.

241. $y_{\min} = f(0) = 0;\ y_{\max} = f(2) = \dfrac{4}{e^2}$.

7.4. Найбільше та найменше значення неперервної функції на відрізку

Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, то вона досягає на цьому відрізку свого найбільшого і найменшого значень, які позначаються M і m, де $M = \max\limits_{[a,b]} f(x)$; $m = \min\limits_{[a,b]} f(x)$. Ці значення досягаються або в точках локального екстремуму, які є критичними точками I роду, або на кінцях відрізка.

Для знаходження найбільшого та найменшого значень функції на відрізку $[a,b]$ потрібно обчислити значення функції в усіх критичних точках I роду, які належать відрізку $[a,b]$, і в точках $x=a$, $x=b$ (кінцях відрізка), після чого серед цих значень вибрати найбільше і найменше. Це і будуть відповідно M і m.

Знайти найбільше та найменше значення функції на відрізку:

242. $y = x + \dfrac{1}{x}$, $\left[\dfrac{1}{2}, 3\right]$.

⌐ $y' = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2-1}{x^2}$.

Знаходимо критичні точки I роду:

а) $y' = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1=0 \\ x^2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1; \end{array}\right.$

б) точки з області визначення функції, в яких y' не існує, відсутні. Отже, маємо критичні точки $x=-1$ та $x=1$.

Відрізку $\left[\dfrac{1}{2}, 3\right]$ належить лише точка $x=1$: $f(1)=2$. Знаходимо значення функції на кінцях відрізка: $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{5}{2}$, $f(3) = \dfrac{10}{3}$. Порівнюємо числа 2, $\dfrac{5}{2}$, $\dfrac{10}{3}$. Найбільше серед них $\dfrac{10}{3}$, а найменше 2. Отже, $M = \max\limits_{\left[\frac{1}{2},3\right]} f(x) = \dfrac{10}{3}$; $m = \min\limits_{\left[\frac{1}{2},3\right]} f(x) = 2$. ⌟

243. $y = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - \dfrac{1}{3}$, $[0,5]$.

⌐ Знаходимо похідну y':

$$y' = \frac{1}{3}\cdot 3x^2 - 2\cdot 2x + 3 = x^2 - 4x + 3$$

Знаходимо критичні точки I роду:

а) $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1,\ x = 3$;

б) точки, в яких y' не існує, відсутні.

Отже, маємо критичні точки $x=1$, $x=3$, які належать відрізку $[0,5]$.

Обчислимо значення функції в точках $x=1$, $x=3$ і на кінцях відрізка: $f(1)=\frac{1}{3}-2+3-\frac{1}{3}=1$, $f(3)=\frac{1}{3}\cdot 3^3-2\cdot 3^2+3\cdot 3-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}$, $y(0)=-\frac{1}{3}$, $f(5)=\frac{19}{3}$.

Серед знайдених чисел вибираємо найбільше і найменше: $M=\max\limits_{[0,5]} f(x)=f(5)=\frac{19}{3}$, $m=\min\limits_{[0,5]} f(x)=f(0)=f(3)=-\frac{1}{3}$. $\lrcorner$

244. $y=3x-x^3$, $[-2,3]$.

$\ulcorner$ Знаходимо y' і критичні точки I роду:

$$y'=3-3x^2=3\left(1-x^2\right),$$

$$y'=0 \Leftrightarrow 3\left(1-x^2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\in[-2,3] \\ x=1\in[-2,3]. \end{array}\right.$$

Обчислюємо значення функції в критичних точках і на кінцях відрізка: $f(-1)=-2$, $f(1)=2$, $f(-2)=2$, $f(3)=-18$.

Порівнюємо одержані значення і маємо

$$M=\max_{[-2,3]} f(x)=f(1)=f(-2)=2,$$

$$m=\min_{[-2,3]} f(x)=f(3)=-18. \ \lrcorner$$

245. $y=\dfrac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$, $[0,1]$.

$\ulcorner$ $$y'=\frac{(-1+2x)\left(1+x-x^2\right)-\left(1-x+x^2\right)(1-2x)}{\left(1+x-x^2\right)^2}=$$

$$=\frac{(2x-1)\left(1+x-x^2+1-x+x^2\right)}{\left(1+x-x^2\right)^2}=\frac{2(2x-1)}{\left(1+x-x^2\right)^2}.$$

а) $y'=0 \Leftrightarrow \dfrac{2(2x-1)}{\left(1+x-x^2\right)^2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-1=0 \\ \left(1+x-x^2\right)^2\neq 0 \end{array}\right. \Rightarrow x=\dfrac{1}{2}$;

б) точки з області визначення заданої функції, в яких y' не існує, відсутні.

Обчислимо значення функції в критичній точці $x=\frac{1}{2}\in[0,1]$ і на кінцях відрізка:

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}}=\frac{3}{5},\ f(0)=1,\ f(1)=1.$$

Порівнявши одержані значення, маємо

$$M=\max_{[0,1]} f(x)=f(0)=f(1)=1,$$

$$m=\min_{[0,1]} f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{5}.\ \lrcorner$$

246. $y=\sin 2x-x,\ \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right].$

$\ulcorner\ \ y'=2\cos 2x-1,$

$$y'=0\Leftrightarrow 2\cos 2x-1=0\Leftrightarrow \cos 2x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2x=\pm\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathrm{Z}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{12}+k\pi,\ k\in\mathrm{Z}.$$

Відрізку $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ належать лише точки $x=-\frac{\pi}{12}$ та $x=\frac{\pi}{12}$.

$$f\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\sin 2\left(-\frac{\pi}{12}\right)+\frac{\pi}{12}=-\sin\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}=-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{12}=\frac{\pi-6}{12},$$

$$f\left(\frac{\pi}{12}\right)=\sin 2\cdot\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{12}=\sin\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{12}=\frac{6-\pi}{12},$$

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\sin 2\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\pi+\frac{\pi}{2}=0+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2},$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin 2\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=\sin\pi-\frac{\pi}{2}=0-\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}.$$

Порівнявши одержані значення, маємо

$$M=\max_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]} f(x)=f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2},$$

$$m=\min_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]} f(x)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}.\ \lrcorner$$

Вправи для самостійного розв’язання

Знайти найбільше та найменше значення неперервної функції на відрізку:

247. $y=-3x^4+6x^2, \quad [-2,2]$.

248. $y=x+2\sqrt{x}, \quad [0,4]$.

249. $y=x^3-3x^2+6x-2, \quad [-1,1]$.

250. $y=\sqrt{100-x^2}, \quad [-6,8]$.

251. $y=\dfrac{x-1}{x+1}, \quad [0,4]$.

Відповіді:

247. $M=3,\ m=-24$.

248. $M=8,\ m=0$.

249. $M=2,\ m=-12$.

250. $M=10,\ m=6$.

251. $M=\dfrac{3}{5},\ m=-1$.

7.5. Обчислення границь функцій за правилом Лопіталя

Правило Лопіталя використовують для знаходження границь диференційовних функцій, якщо є невизначеності типу $\dfrac{0}{0}$ або $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Нехай виконується співвідношення

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0 \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

або

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=\infty \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right),$$

де a – число або один із символів $\infty, +\infty, -\infty$. Тоді

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f'(x)}{\lim\limits_{x\to a} g'(x)},$$

якщо границя справа існує (не обов’язково скінченна).

Правило Лопіталя можна застосовувати кілька разів.

Аналогічне правило має місце і для односторонніх границь.

Знайти границі функцій, використовуючи правило Лопіталя:

252. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2\ln x}$.

$\ulcorner$ $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2\ln x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(x^2-1\right)'}{\left(2\ln x\right)'}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x}{2\cdot\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 1}x^2=1$. $\lrcorner$

253. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x^2}$.

$\ulcorner$ $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1-\cos 3x\right)'}{\left(x^2\right)'}=\left(\dfrac{0}{0}\right)$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin 3x}{2x}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(3\sin 3x\right)'}{\left(2x\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{9\cos 3x}{2}=\frac{9}{2}=4{,}5.\ \lrcorner$$

254. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2}{e^x}$.

$\ulcorner$ $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2}{e^x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\left(x^2\right)'}{\left(e^x\right)'}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x}{e^x}=$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{\left(2x\right)'}{\left(e^x\right)'}=\lim_{x\to +\infty}\frac{2}{e^x}=0.\ \lrcorner$$

255. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$.

$\ulcorner$ $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2}{1-\cos x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2.\ \lrcorner$$

256. $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{\cos x\ln\left(x-a\right)}{\ln\left(e^x-e^a\right)}$.

$\ulcorner$ $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{\cos x\ln\left(x-a\right)}{\ln\left(e^x-e^a\right)}=\cos a\cdot\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{\ln\left(x-a\right)}{\ln\left(e^x-e^a\right)}=$

$$= \cos a \cdot \left(\frac{0}{0}\right) \lim_{x \to a+0} \frac{e^x - e^a}{(x-a)e^x} = \frac{\cos a}{e^a} \cdot \left(\frac{0}{0}\right) \lim_{x \to a+0} \frac{e^x - e^a}{x - a} = \frac{\cos a}{e^a} \lim_{x \to a+0} \frac{e^x}{1} =$$

$$= \frac{\cos a}{e^a} \cdot e^a = \cos a \,. \quad \lrcorner$$

257. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\operatorname{tg} 5x}{\operatorname{tg} 3x}$.

$$\ulcorner \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\operatorname{tg} 3x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\dfrac{1}{\cos^2 5x} \cdot 5}{\dfrac{1}{\cos^2 3x} \cdot 3} = \left(\frac{0}{0}\right) \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{5 \cdot \cos^2 3x}{3 \cos^2 5x} =$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{5 \cdot 2 \cos 3x (-\sin 3x) \cdot 3}{3 \cdot 2 \cos 5x (-\sin 5x) \cdot 5} = \left(\frac{0}{0}\right) \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\cos 5x} \cdot \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 3x}{\sin 5x} =$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{(-\sin 3x) \cdot 3}{(-\sin 5x) \cdot 5} \cdot (-1) = -\frac{3}{5} \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 3x}{\sin 5x} = -\frac{3}{5} \cdot (-1) = \frac{3}{5} \,. \quad \lrcorner$$

Наведемо приклад, коли правило Лопіталя застосувати не можна.

258. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x - \sin x}{x + \sin x}$.

$$\ulcorner \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \lim_{x \to \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = \lim_{x \to \infty} \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \,.$$

Оскільки границя праворуч не існує, то застосовувати правило Лопіталя для знаходження заданої границі не можна. Шукану границю можемо знайти, поділивши попередньо чисельник і знаменник на x :

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 - \dfrac{\sin x}{x}}{1 + \dfrac{\sin x}{x}} = 1, \text{ так як } \lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = 0 \quad (|\sin x| \le 1). \quad \lrcorner$$

<u>Вправи для самостійного розв’язання</u>

Знайти границі функцій, використовуючи правило Лопіталя:

259. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^3 - 12x + 16}$.

260. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{\ln x}$.

261. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$.

262. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos 2x}$.

263. $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\ln\sin x}{\ln\sin 3x}$.

264. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-\cos 2x}{e^{x}-\cos x}$.

265. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\operatorname{tg} x}-e^{x}}{\operatorname{tg} x - x}$.

266. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\pi-2\operatorname{arctg} x}{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$.

267. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2+e^x}{2x^3+e^{2x}}$.

268. $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\ln x}{1+2\ln\sin x}$.

Відповіді:

259. $\dfrac{1}{3}$.

260. $+\infty$.

261. 2.

262. $\dfrac{1}{2}$.

263. 1.

264. 2.

265. 1.

266. 2.

267. 0.

268. $\dfrac{1}{2}$.

8. Диференціал функції

Якщо функція $y=f\left(x\right)$ має похідну у точці x, то з формули (1) випливає, що приріст функції $\Delta f\left(x\right)$ можна записати у вигляді

$$\Delta f\left(x\right)=f'(x)\Delta x+o(\Delta x),\quad \Delta x\to 0 .$$

Диференціалом функції $y=f\left(x\right)$ у точці x називають вираз $f'(x)\Delta x$ і позначають $df\left(x\right)$ або dy. *Диференціалом незалежної змінної* x вважають її приріст Δx і позначають dx. Отже, диференціал функції обчислюється за формулою

$$dy = f'(x)dx \tag{6}$$

З формули (6) випливає, що позначення похідної $\frac{dy}{dx}$ можна розуміти як відношення двох диференціалів.

Обчислити диференціали функцій:

269. $y = x^2$.

⌈ За формулою (6)

$$dy = \left(x^2\right)' dx = 2xdx \,. \quad \rfloor$$

270. $y = \sin x$.

⌈ За формулою (6)

$$dy = (\sin x)' dx = \cos x \, dx \,. \quad \rfloor$$

<u>Вправи для самостійного розв’язання</u>

Обчислити диференціали функцій:

271. $y = x$. **272.** $y = \ln x$.

Відповіді:

271. dx. **272.** $\frac{dx}{x}$.

Розділ 6. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Невизначеним інтегралом $\int f(x)dx$ функції $f(x)$ (на проміжку X) називають вираз $F(x)+C$, де $F(x)$ – одна з *первісних* функції $f(x)$, тобто $F'(x)=f(x)$ ($x\in X$); C – довільна стала.

1. Таблиця основних невизначених інтегралів

I. $\int x^n\,dx=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C \quad (n\neq -1)$.

II. $\int x^{-1}\,dx=\int \dfrac{1}{x}dx=\int\dfrac{dx}{x}=\ln|x|+C$.

III. $\int a^x\,dx=\dfrac{a^x}{\ln a}+C \quad (a>0,\ a\neq 1)$.

Зокрема, при $a=e$

III°. $\int e^x\,dx=e^x+C$.

IV. $\int \cos x\,dx=\sin x+C$.

V. $\int \sin x\,dx=-\cos x+C$.

VI. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg} x+C$.

VII. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg} x+C$.

VIII. $\int \dfrac{dx}{x^2+a^2}=\dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}+C \quad (a>0)$.

Зокрема, при $a=1$

VIII°. $\int \dfrac{dx}{x^2+1}=\operatorname{arctg} x+C$.

IX. $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2}=\dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|+C \quad (a>0)$.

Зокрема, при $a=1$

IX°. $\int \dfrac{dx}{x^2-1}=\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+C$.

X. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C \quad (a>0)$.

Зокрема, при $a=1$

X°. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.

XI. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C \quad (a\neq 0)$.

Зокрема, при $a=1$

XI°. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right| + C = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + C$.

У справедливості формул **I – XI** легко переконатися, використовуючи диференціювання. Розглянемо, наприклад, інтеграл **II** – $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$. Потрібно показати, що $\left(\ln|x|\right)' = \dfrac{1}{x}$ $(x\neq 0)$. Дійсно, якщо $x>0$, то $\left(\ln|x|\right)' = \left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$; якщо ж $x<0$, то $\left(\ln|x|\right)' = \left(\ln(-x)\right)' = \dfrac{1}{-x}\cdot(-x)' = -\dfrac{1}{x}\cdot(-1) = \dfrac{1}{x}$.

Зауважимо, що кожна з формул **I – XI** вірна на будь-якому проміжку з області визначення відповідної підінтегральної функції.

Таблицю основних інтегралів слід вивчити **напам'ять**!

Скориставшись табличним інтегралом **I**, довести формули:

1. $\displaystyle\int dx = x + C$.

⌈ $\displaystyle\int dx = \int 1\,dx = \int x^0\,dx = \frac{x^{0+1}}{0+1} + C = x + C$. ⌋

2. $\displaystyle\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$.

⌈ $\displaystyle\int x\,dx = \int x^1\,dx = \frac{x^{1+1}}{1+1} + C = \frac{x^2}{2} + C$. ⌋

3. $\displaystyle\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$.

$\ulcorner$ $\int x^2\,dx = \dfrac{x^{2+1}}{2+1} + C = \dfrac{x^3}{3} + C$. $\lrcorner$

4. $\int \dfrac{dx}{x^2} = -\dfrac{1}{x} + C$.

$\ulcorner$ $\int \dfrac{dx}{x^2} = \int \dfrac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}\,dx = \dfrac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = \dfrac{x^{-1}}{-1} + C = -\dfrac{1}{x} + C$. $\lrcorner$

5. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$.

$\ulcorner$ $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = \int \dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \dfrac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C$. $\lrcorner$

Обчислити інтеграли, скориставшись табличним інтегралом **I** :

6. $\int \sqrt{x}\,dx$.

$\ulcorner$ $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \dfrac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$. $\lrcorner$

7. $\int \dfrac{dx}{x^3}$.

$\ulcorner$ $\int \dfrac{dx}{x^3} = \int x^{-3}\,dx = \dfrac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = \dfrac{x^{-2}}{-2} + C = -\dfrac{1}{2x^2} + C$. $\lrcorner$

8. $\int \dfrac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

$\ulcorner$ $\int \dfrac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int \dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\,dx = \int x^{-\frac{1}{3}}\,dx = \dfrac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + C = \dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C = \dfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + C$. $\lrcorner$

Обчислити інтеграли, скориставшись табличним інтегралом **III** :

9. $\int 2^x\,dx$.

$\ulcorner$ $\int 2^x\,dx = \dfrac{2^x}{\ln 2} + C$ (в інтегралі **III** поклали $a = 2$). $\lrcorner$

10. $\int \frac{dx}{2^x}$.

$$\ulcorner \quad \int \frac{dx}{2^x} = \int \frac{1}{2^x}\,dx = \int \left(\frac{1}{2}\right)^x dx = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln\frac{1}{2}} + C = \frac{\frac{1}{2^x}}{-\ln 2} + C = -\frac{1}{2^x \ln 2} + C$$

(в інтегралі **III** поклали $a = \frac{1}{2}$). $\lrcorner$

Обчислити невизначені інтеграли:

11. $\int \frac{dx}{x^2+9}$.

$\ulcorner$ Зведемо до інтеграла **VIII** при $a = 3$:

$$\int \frac{dx}{x^2+9} = \int \frac{dx}{x^2+3^2} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3} + C. \quad \lrcorner$$

12. $\int \frac{dx}{x^2-5}$.

$\ulcorner$ Зведемо до інтеграла **IX** ($a = \sqrt{5}$):

$$\int \frac{dx}{x^2-5} = \int \frac{dx}{x^2-\left(\sqrt{5}\right)^2} = \frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{5}}{x+\sqrt{5}}\right| + C. \quad \lrcorner$$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-5}}$.

$\ulcorner$ Використаємо інтеграл **XI** ($a = -5$):

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+(-5)}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+(-5)}\right| + C = \ln\left|x+\sqrt{x^2-5}\right| + C. \quad \lrcorner$$

Зауваження. Додатково до таблиці основних невизначених інтегралів доцільно **запам'ятати** також інтеграли **1 – 5**.

Вправи для самостійного розв'язання

Обчислити невизначені інтеграли:

14. $\int x^4\,dx$. **15.** $\int \frac{dx}{x^5}$.

16. $\int \sqrt[3]{x}\ dx$.

17. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}}$.

18. $\int 5^x\ dx$.

19. $\int \frac{dx}{4^x}$.

20. $\int \frac{dx}{x^2+4}$.

21. $\int \frac{dx}{2+x^2}$.

22. $\int \frac{dx}{x^2-9}$.

23. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}}$.

24. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$.

25. $\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$.

26. Довести формулу $\int k\,dx = kx + C$ (k – стала).

Відповіді:

14. $\frac{x^5}{5}+C$.

15. $-\frac{1}{4x^4}+C$.

16. $\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+C$.

17. $\frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}+C$.

18. $\frac{5^x}{\ln 5}+C$.

19. $-\frac{1}{4^x \ln 4}+C$.

20. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$.

21. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$.

22. $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+C$.

23. $\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}}+C$.

24. $\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C$.

25. $\ln\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)+C$.

2. Безпосереднє інтегрування

Безпосереднє обчислення невизначених інтегралів ґрунтується на тотожних перетвореннях підінтегральної функції та властивостях невизначеного інтеграла.

Властивості невизначеного інтеграла

1º. $\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$ (k – стала, $k \neq 0$).

2°. $\int\left(f_1(x)\pm f_2(x)\right)dx=\int f_1(x)dx\pm\int f_2(x)dx$.

Ця властивість узагальнюється на довільне скінченне число доданків:

$$\int\left(f_1(x)\pm f_2(x)\pm\ldots\pm f_m(x)\right)dx=\int f_1(x)dx\pm\int f_2(x)dx\pm\ldots\pm\int f_m(x)dx.$$

3°. Якщо $\int f(x)dx=F(x)+C$, то для будь-яких сталих k та b ($k\neq 0$)

$$\int f(kx+b)dx=\frac{1}{k}F(kx+b)+C.$$

Частинні випадки властивості **3°** (відповідно при $b=0$ та $k=1$):

3.1°. $\int f(kx)\,dx=\frac{1}{k}F(kx)+C$;

3.2°. $\int f(x+b)\,dx=F(x+b)+C.$

Обчислити невизначені інтеграли, застосувавши властивість **1°**:

27. $\int\frac{3\,dx}{\cos^2 x}$.

⌜ $\int\frac{3\,dx}{\cos^2 x}=3\int\frac{dx}{\cos^2 x}=3\left(\operatorname{tg}x+C\right)=3\operatorname{tg}x+3C$ (після застосування властивості **1°** використали табличний інтеграл **VI**). Позначивши довільну сталу $3C$ знову через C, дістанемо

$$\int\frac{3\,dx}{\cos^2 x}=3\operatorname{tg}x+C.\quad ⌟$$

Зауваження. Надалі після обчислення невизначених інтегралів записуватимемо відразу сталу C, опускаючи подібні до наведених пояснення.

28. $\int\frac{x}{2}\,dx$.

⌜ $\int\frac{x}{2}\,dx=\int\frac{1}{2}x\,dx=\frac{1}{2}\int x\,dx=\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}+C=\frac{x^2}{4}+C$

(після застосування властивості **1°** скористалися табличним інтегралом **I** (приклад **2**)). ⌟

29. $\int\frac{dx}{4-x^2}$.

⌈ $\int \frac{dx}{4-x^2} = \int \frac{dx}{-\left(x^2-4\right)} = -\int \frac{dx}{x^2-2^2} = -\frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C =$

$$= -\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C$$

(скористалися табличним інтегралом **IX** при $a = 2$). ⌋

Обчислити інтеграли, застосувавши властивості $\mathbf{1^o}$ та $\mathbf{2^o}$:

30. $\int\left(6x^2 + \pi\sin x\right) dx \qquad \left(\pi \approx 3,14\right)$.

⌈ Застосуємо послідовно властивості $\mathbf{2^o}$ та $\mathbf{1^o}$:

$$\int\left(6x^2 + \pi\sin x\right) dx = \int 6x^2\, dx + \int \pi\sin x\; dx = 6\int x^2\, dx + \pi\int \sin x\; dx .$$

Для обчислення інтегралів у правій частині рівності використовуємо табличні інтеграли відповідно **I** ($n = 2$, приклад **3**) та **V** і остаточно дістаємо

$$\int\left(6x^2 + \pi\sin x\right) dx = 6\frac{x^3}{3} + \pi\left(-\cos x\right) + C = 2x^3 - \pi\cos x + C . \quad ⌋$$

31. $\int\left(4 - \frac{3}{x} + \frac{e^x}{2}\right) dx$.

⌈ Застосовуємо послідовно властивості $\mathbf{2^o}$, $\mathbf{1^o}$ і табличні інтеграли **I** (приклад **1**), **II** , $\mathbf{III^o}$:

$$\int\left(4 - \frac{3}{x} + \frac{e^x}{2}\right) dx = \int 4\; dx - \int \frac{3}{x} dx + \int \frac{1}{2} e^x\; dx =$$

$$= 4\int dx - 3\int \frac{1}{x} dx + \frac{1}{2}\int e^x\; dx = 4x - 3\ln|x| + 0,5\; e^x + C . \quad ⌋$$

32. $\int x\left(8x^2 + \frac{1}{x^3}\right) dx$.

⌈ Спочатку розкриємо дужки:

$$\int x\left(8x^2 + \frac{1}{x^3}\right) dx = \int\left(8x^2\cdot x + \frac{x}{x^3}\right) dx = \int\left(8x^3 + \frac{1}{x^2}\right) dx .$$

Далі застосуємо властивості $\mathbf{2^o}$, $\mathbf{1^o}$ і табличний інтеграл **I** відповідно при $n = 3$ та $n = -2$ (приклад **4**):

$$\int\left(8x^3 + \frac{1}{x^2}\right) dx = 8\int x^3\; dx + \int \frac{dx}{x^2} = 8\frac{x^4}{4} + \left(-\frac{1}{x}\right) + C = 2x^4 - \frac{1}{x} + C .$$

Отже, $\int x\left(8x^2+\frac{1}{x^3}\right)dx = 2x^4 - \frac{1}{x} + C$. $\lrcorner$

33. $\int \frac{3x^4-2}{x^3}dx$.

$\ulcorner$ Спочатку поділимо почленно чисельник на знаменник:

$$\int \frac{3x^4-2}{x^3}dx = \int\left(\frac{3x^4}{x^3}-\frac{2}{x^3}\right)dx = \int\left(3x-\frac{2}{x^3}\right)dx.$$

Далі застосуємо властивості $\mathbf{2^o}$, $\mathbf{1^o}$ і табличний інтеграл $\mathbf{I}$ (приклади **2** та **7**):

$$\int\left(3x-\frac{2}{x^3}\right)dx = 3\int x\ dx - 2\int\frac{dx}{x^3} = 3\frac{x^2}{2} - 2\left(-\frac{1}{2x^2}\right) + C = \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{x^2} + C.$$

Отже, $\int \frac{3x^4-2}{x^3}dx = \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{x^2} + C$. $\lrcorner$

34. $\int \frac{x^2+5}{x^2-1}dx$.

$\ulcorner$ Підінтегральна функція $\frac{x^2+5}{x^2-1}$ – неправильний раціональний дріб (степінь чисельника дорівнює степеню знаменника). Тому для інтегрування слід виділити цілу частину: $\frac{x^2+5}{x^2-1} = \frac{(x^2-1)+6}{x^2-1} = 1 + \frac{6}{x^2-1}$. Тоді, застосувавши властивості $\mathbf{2^o}$ та $\mathbf{1^o}$, матимемо

$$\int\frac{x^2+5}{x^2-1}dx = \int\left(1+\frac{6}{x^2-1}\right)dx = \int 1\ dx + 6\int\frac{1}{x^2-1}dx =$$

$$= x + 6\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C = x + 3\ \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$$

(скористалися табличними інтегралами $\mathbf{I}$ (приклад **1**) та $\mathbf{IX^o}$). $\lrcorner$

35. $\int \cos^2\frac{x}{2}\,dx$.

$\ulcorner$ Скориставшись відомою з тригонометрії формулою, дістанемо

$$\int\cos^2\frac{x}{2}\,dx = \int\frac{1+\cos x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int(1+\cos x)\,dx =$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int dx+\int \cos x\ dx\right)=\frac{1}{2}\left(x+\sin x\right)+C\ . \quad \lrcorner$$

Застосувавши властивість $\mathbf{3.1^o}$, довести формули:

36. $\int e^{kx}dx=\frac{1}{k}e^{kx}+C$ (k – стала, $k\neq 0$).

$\ulcorner$ Ця формула є наслідком формули $\int e^{x}\,dx=e^{x}+C$ (табличний інтеграл $\mathbf{III^o}$) та властивості $\mathbf{3.1^o}$, в якій $f\left(x\right)=e^{x}$, $F\left(x\right)=e^{x}$. $\lrcorner$

37. $\int \cos kx\ dx=\frac{1}{k}\sin kx+C$ (k – стала, $k\neq 0$).

$\ulcorner$ Ця формула є наслідком формули $\int \cos x\ dx=\sin x+C$ (табличний інтеграл $\mathbf{IV}$) та властивості $\mathbf{3.1^o}$, в якій $f\left(x\right)=\cos x,\ F\left(x\right)=\sin x$. $\lrcorner$

Застосувавши властивість $\mathbf{3.2^o}$, довести формули:

38. $\int \frac{dx}{x+b}=\ln\left|x+b\right|+C$ (b – стала).

$\ulcorner$ Ця формула є наслідком формули $\int \frac{dx}{x}=\ln\left|x\right|+C$ (табличний інтеграл $\mathbf{II}$) та властивості $\mathbf{3.2^o}$, в якій $f\left(x\right)=\frac{1}{x},\ F\left(x\right)=\ln\left|x\right|$. $\lrcorner$

39. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+b}}=2\sqrt{x+b}+C$ (b – стала).

$\ulcorner$ Ця формула є наслідком формули $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}+C$ (приклад **5**) та властивості $\mathbf{3.2^o}$, в якій $f\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{x}},\ F\left(x\right)=2\sqrt{x}$. $\lrcorner$

Обчислити невизначені інтеграли:

40. $\int 3^{\frac{x}{2}}\,dx$.

Γ Оскільки $\int 3^x\,dx = \dfrac{3^x}{\ln 3} + C$ (табличний інтеграл **III** при $a = 3$), то за властивістю **3.1°** ($k = \dfrac{1}{2}$) дістанемо

$$\int 3^{\frac{x}{2}}\,dx = \int 3^{\frac{1}{2}x}\,dx = \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot \frac{3^{\frac{1}{2}x}}{\ln 3} + C = \frac{2}{\ln 3} 3^{\frac{x}{2}} + C. \quad \lrcorner$$

41. $\int \sin 4x\,dx$.

Γ Оскільки $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$ (табличний інтеграл **V**), то за властивістю **3.1°** ($k = 4$) дістанемо

$$\int \sin 4x\,dx = \frac{1}{4}(-\cos 4x) + C = -\frac{1}{4}\cos 4x + C. \quad \lrcorner$$

42. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 \frac{x}{5}}$.

Γ Оскільки $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$ (табличний інтеграл **VII**), то за властивістю **3.1°** ($k = \dfrac{1}{5}$) дістанемо

$$\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{5}} = \int \frac{dx}{\sin^2 \frac{1}{5}x} = \frac{1}{\frac{1}{5}}\left(-\operatorname{ctg}\frac{1}{5}x\right) + C = -5\operatorname{ctg}\frac{x}{5} + C. \quad \lrcorner$$

43. $\int \dfrac{dx}{9x^2 + 1}$.

Γ Оскільки $\int \dfrac{dx}{x^2 + 1} = \operatorname{arctg} x + C$ (табличний інтеграл **VIII°**), то виконавши тотожне перетворення підінтегральної функції, маємо

$$\int \frac{dx}{9x^2 + 1} = \int \frac{dx}{(3x)^2 + 1} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} 3x + C$$

(скористалися властивістю **3.1°** ($k = 3$)). $\lrcorner$

44. $\int (x-1)^4\,dx$.

⌈ Оскільки $\int x^4\,dx = \frac{x^5}{5} + C$, то за властивістю **3.2°** ($b = -1$)

$$\int (x-1)^4\,dx = \int \left(x + (-1)\right)^4\,dx = \frac{\left(x+(-1)\right)^5}{5} + C = \frac{(x-1)^5}{5} + C. \quad ⌋$$

45. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}}$.

⌈ Розглянемо табличний інтеграл **X**, $a = 2$: $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{2} + C$. Тоді за властивістю **3.1°**, виконавши тотожне перетворення, дістанемо

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4-\left(\sqrt{3}x\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{\sqrt{3}x}{2} + C. \quad ⌋$$

46. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$.

⌈ Оскільки $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$ (приклад **5**), то виконавши тотожні перетворення, дістанемо

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-1\cdot x+1}} = \frac{1}{-1}\cdot 2\sqrt{-1\cdot x+1} + C = -2\sqrt{1-x} + C$$

(скористалися властивістю **3°** ($k = -1,\ b = 1$)). ⌋

47. $\int \frac{dx}{(4x+5)^2}$.

⌈ Оскільки $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$ (приклад **4**), то за властивістю **3°** ($k = 4,\ b = 5$) маємо

$$\int \frac{dx}{(4x+5)^2} = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4x+5}\right) + C = -\frac{1}{4(4x+5)} + C. \quad ⌋$$

48. $\int \frac{dx}{x^2+4x+13}$.

⌈ Спочатку виділимо в знаменнику повний квадрат відносно x:

$$x^2 + 4x + 13 = \left(x^2 + 2\cdot x\cdot 2 + 2^2\right) + 9 = (x+2)^2 + 9$$

(скористалися формулою $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$).

Обчислюємо інтеграл:

$$\int\frac{dx}{x^2+4x+13}=\int\frac{dx}{(x+2)^2+9}=\int\frac{dx}{(x+2)^2+3^2}=\frac{1}{3}\text{arctg}\frac{x+2}{3}+C$$

(скористалися табличним інтегралом **VIII** при $a=3$ та властивістю **3.2°** ($b=2$)). ⌋

49. $\int\frac{dx}{\sqrt{6x-x^2-8}}$.

⌈ Спочатку виділимо повний квадрат відносно x :

$$6x-x^2-8=-(x^2-6x+8)=-\left[\left(x^2-2\cdot x\cdot 3+3^2\right)-1\right]=$$

$$=-\left[(x-3)^2-1\right]=1-(x-3)^2$$

(скористалися формулою $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$).

Обчислюємо інтеграл:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{6x-x^2-8}}=\int\frac{dx}{\sqrt{1-(x-3)^2}}=\arcsin(x-3)+C$$

(скористалися табличним інтегралом **X°** та властивістю **3.2°** ($b=-3$)). ⌋

50. $\int\frac{x-3}{5x-4}\,dx$.

⌈ Підінтегральна функція $\frac{x-3}{5x-4}$ – неправильний раціональний дріб (степінь чисельника дорівнює степеню знаменника). Тому для інтегрування слід виділити цілу частину: $\frac{x-3}{5x-4}=\frac{\frac{1}{5}(5x-4)-\frac{11}{5}}{5x-4}=\frac{1}{5}\left(1-\frac{11}{5x-4}\right)$. Тоді, застосувавши властивості **1°** та **2°**, матимемо

$$\int\frac{x-3}{5x-4}\,dx=\frac{1}{5}\int\left(1-\frac{11}{5x-4}\right)dx=0,2\left(\int dx-11\int\frac{dx}{5x+(-4)}\right)=$$

$$= 0,2\left(x - 11\cdot\frac{1}{5}\ln\left|5x + (-4)\right| \right) + C = 0,2\ x - 0,44\ \ln\left|5x - 4\right| + C$$

(для обчислення другого інтеграла скористалися табличним інтегралом **II** та властивістю $\mathbf{3^o}$ ($k = 5$, $b = -4$)). ⌋

51. $\int \frac{x^2 + 3x + 7}{x + 1} dx$.

⌈ Підінтегральна функція – неправильний раціональний дріб (степінь чисельника більший за степінь знаменника). Виділимо цілу частину:

$$\begin{array}{r|l} -\begin{array}{r} x^2 + 3x + 7 \\ \underline{x^2 + x\phantom{{}+7}} \end{array} & \begin{array}{l} x+1 \\ \hline x+2 \end{array} \\ -\begin{array}{r} 2x + 7 \\ \underline{2x + 2} \end{array} & \\ 5 & \end{array} ; \qquad \frac{x^2 + 3x + 7}{x + 1} = x + 2 + \frac{5}{x + 1}.$$

Отже, $\int \frac{x^2 + 3x + 7}{x + 1} dx = \int \left(x + 2 + \frac{5}{x + 1} \right) dx =$

$$= \frac{x^2}{2} + 2x + 5\ \ln\left|x + 1\right| + C\ . \quad ⌋$$

52. $\int \frac{dx}{x^4 + x^2}$.

⌈ Розкладемо підінтегральну функцію на доданки:

$$\frac{1}{x^4 + x^2} = \frac{1}{\left(x^2 + 1\right)x^2} = \frac{\left(x^2 + 1\right) - x^2}{\left(x^2 + 1\right)x^2} =$$

$$= \frac{x^2 + 1}{\left(x^2 + 1\right)x^2} - \frac{x^2}{\left(x^2 + 1\right)x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 + 1}.$$

Тоді матимемо

$$\int \frac{dx}{x^4 + x^2} = \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{x^2 + 1} = -\frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x + C\ . \quad ⌋$$

53. $\int (x + 1)^{10}\, x\, dx$.

⌈ $\int (x + 1)^{10}\, x\, dx = \int (x + 1)^{10} \left((x + 1) - 1\right) dx =$

$$= \int \left((x+1)^{11} - (x+1)^{10} \right) dx = \int (x+1)^{11}\, dx - \int (x+1)^{10}\, dx =$$

$$= \frac{(x+1)^{12}}{12} - \frac{(x+1)^{11}}{11} + C$$

(скористалися табличним інтегралом **I** та властивістю **3.2°** ($b = 1$)). ⌋

54. $\int \frac{4-x}{\sqrt{x-1}}\, dx$.

⌈ $\int \frac{4-x}{\sqrt{x-1}}\, dx = \int \frac{3-(x-1)}{\sqrt{x-1}}\, dx = \int \left(\frac{3}{\sqrt{x-1}} - \frac{x-1}{\sqrt{x-1}} \right) dx =$

$$= 3\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}} - \int \sqrt{x-1}\, dx = 3 \cdot 2\sqrt{x-1} - \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + C =$$

$$= 6\sqrt{x-1} - \frac{2}{3}\left(\sqrt{x-1}\right)^3 + C .$$

Тут скористалися прикладами **5**, **6** та властивістю **3.2°** ($b = -1$). Зауважимо також, що перший інтеграл можна просто обчислити за формулою з прикладу **39**. ⌋

55. $\int \sin 5x \cos 2x \, dx$.

⌈ Скориставшись формулою

$$\sin\alpha \ \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta) \right]$$

та властивостями невизначеного інтеграла, дістанемо

$$\int \sin 5x \cos 2x\, dx = \int \frac{1}{2}\left[\sin(5x - 2x) + \sin(5x + 2x) \right] dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int (\sin 3x + \sin 7x)\, dx = \frac{1}{3}\left(\int \sin 3x\, dx + \int \sin 7x\, dx \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\cos 3x - \frac{1}{7}\cos 7x \right) + C = -\frac{1}{6}\cos 3x - \frac{1}{14}\cos 7x + C .$$ ⌋

56. $\int (4 - \sin 3x)^2\, dx$.

⌈ $\int (4 - \sin 3x)^2\, dx = \int \left(16 - 8\sin 3x + \sin^2 3x\right) dx =$

$$= \int 16\, dx - \int 8 \sin 3x\, dx + \int \frac{1}{2}(1 - \cos 6x)\, dx =$$

$$= 16x - 8\int \sin 3x\, dx + \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 6x\, dx =$$

$$= 16x - 8\cdot\frac{1}{3}(-\cos 3x) + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\sin 6x + C =$$

$$= 16\frac{1}{2}\,x + \frac{8}{3}\cos 3x - \frac{1}{12}\sin 6x + C\,. \quad \lrcorner$$

<u>Вправи для самостійного розв'язання</u>

Обчислити невизначені інтеграли:

57. $\int \sqrt{2}\;dx$.

58. $\int \frac{9dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

59. $\int \left(9x^5 - \sqrt[5]{x}\right)\,dx$.

60. $\int 3^x\left(4+3^{1-x}\right)\,dx$.

61. $\int \mathrm{ctg}^2\,x\;dx$.

62. $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2\,dx$.

63. $\int \frac{x^4\,dx}{x^2+1}$.

64. $\int e^{3x}\,dx$.

65. $\int e^{-x}\,dx$.

66. $\int \cos\frac{x}{6}\,dx$.

67. $\int \frac{dx}{x+4}$.

68. $\int \frac{3dx}{x-9}$.

69 $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$.

70. $\int \frac{dx}{2\sqrt{x-16}}$.

71. $\int \frac{dx}{(6+5x)^3}$.

72. $\int \sqrt{9-4x}\;dx$.

73. $\int \frac{dx}{\cos^2(3x-7)}$.

74. $\int \frac{dx}{\sin^2(6-x)}$.

75. $\int \frac{dx}{9-5x^2}$.

76. $\int \sin^2 x\;dx$.

77. $\int \frac{10\,dx}{x^2-8x-9}$.

78. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-6x-9x^2}}$.

79. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x+0,25}}$.

80. $\int \frac{x\ dx}{3x+2}$.

81. $\int \frac{3x^2-x+1}{x-2}dx$.

82. $\int \frac{8\,dx}{x^4-4x^2}$.

83. $\int \frac{x-5}{(x-4)^3}dx$.

84. $\int \sqrt[3]{x+1}\,x\,dx$.

85. $\int 2\cos(5x+2)\ \cos(4x-3)dx$.

86. $\int (\cos x-\sin x)^2\ dx$.

Відповіді:

57. $\sqrt{2}\,x+C$.

58. $9\arcsin\frac{x}{3}+C$.

59. $\frac{3}{2}x^6-\frac{5}{6}x^{\frac{6}{5}}+C$.

60. $\frac{4}{\ln 3}3^x+3x+C$.

61. $-\operatorname{ctg} x-x+C$.

62. $x-\frac{1}{x}-2\ln|x|+C$.

63. $\frac{1}{3}x^3-x+\operatorname{arctg} x+C$.

64. $\frac{1}{3}e^{3x}+C$.

65. $-e^{-x}+C$.

66. $6\sin\frac{x}{6}+C$.

67. $\ln|x+4|+C$.

68. $3\ln|x-9|+C$.

69 $2\sqrt{x+1}+C$.

70. $\sqrt{x-16}+C$.

71. $-\frac{1}{10(5x+6)^2}+C$.

72. $-\frac{1}{6}(9-4x)^{\frac{3}{2}}+C$.

73. $\frac{1}{3}\operatorname{tg}(3x-7)+C$.

74. $\operatorname{ctg}(6-x)+C$.

75. $-\frac{1}{6\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}x-3}{\sqrt{5}x+3}\right|+C$.

76. $\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+C$.

77. $\ln\left|\frac{x-9}{x+1}\right|+C$.

78. $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x+1}{\sqrt{3}}+C$.

79. $\ln\left|x+1,5+\sqrt{x^2+3x+0,25}\right|+C$.

80. $\frac{x}{3}-\frac{2}{9}\ln|3x+2|+C$.

81. $1,5x^2+5x+11\ln|x-2|+C$.

82. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+\frac{2}{x}+C$.

83. $\frac{1}{2(x-4)^2}-\frac{1}{x-4}+C$.

84. $\frac{3}{7}(x+1)^{7/3}-\frac{3}{4}(x+1)^{4/3}+C$.

85. $\sin(x+5)+\frac{1}{9}\sin(9x-1)+C$.

86. $x+\frac{1}{2}\cos 2x+C$.

3. Заміна змінної

Обчислення невизначених інтегралів методом заміни змінної ґрунтується на формулі

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx=F(\varphi(x))+C, \tag{1}$$

де $F(x)$ – первісна функції $f(x)$; $\varphi'(x)$ – похідна функції $\varphi(x)$.

При застосуванні формули (1) на практиці зручно перейти до нової змінної t, поклавши $t=\varphi(x)$. Розглядаючи t як функцію змінної x, запишемо диференціал $dt=\varphi'(x)\,dx$. В результаті приходимо до інтеграла відносно змінної t: $\int f(t)\,dt=F(t)+C$. Поклавши у правій частині цієї рівності $t=\varphi(x)$, дістаємо остаточно $F(\varphi(x))+C$.

Якщо маємо інтеграл $\int p(x)\,dx$, то його обчислення методом заміни змінної зручно оформляти в загальному випадку наступним чином:

$$\int p(x)\,dx = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \begin{vmatrix} t = \varphi(x) \\ dt = \varphi'(x)\,dx \end{vmatrix} =$$

$$= \int f(t)\,dt = F(t) + C = F(\varphi(x)) + C\,. \qquad (1')$$

Обчислити невизначені інтеграли:

87. $\int \sin^2 x \cos x\,dx$.

⌈ Оскільки $(\sin x)' = \cos x$, то за формулою (1), яку застосовуємо у спосіб ($1'$), дістанемо

$$\int \sin^2 x \cos x\,dx = \begin{vmatrix} t = \sin x \\ dt = \cos x\,dx \end{vmatrix} = \int t^2\,dt = \frac{1}{3}t^3 + C = \frac{1}{3}\sin^3 x + C$$

(обчислення інтеграла $\int t^2\,dt$ можна виконати як за аналогією з прикладом **3**, так і у вже відомій формулі $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$ покласти $x = t$). ⌋

88. $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

⌈ Оскільки $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, то за формулою (1) дістанемо

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \begin{vmatrix} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x}\,dx = \frac{dx}{x} \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{\ln x} + C$$

(для обчислення інтеграла $\int \frac{dt}{\sqrt{t}}$ скористалися прикладом **5**, в якому поклали $x = t$). ⌋

89. $\int e^x \cos(e^x)\,dx$.

⌈ Оскільки $(e^x)' = e^x$, то за формулою (1) дістанемо

$$\int e^x \cos(e^x)\,dx = \int \cos(e^x)\cdot e^x\,dx = \begin{vmatrix} t = e^x \\ dt = e^x\,dx \end{vmatrix} =$$

$$= \int \cos t \ dt = \sin t + C = \sin\left(e^x\right) + C \ . \quad \lrcorner$$

90. $\int \frac{\cos x \ dx}{\sin^2 x}$.

$\ulcorner$ $\int \frac{\cos x \ dx}{\sin^2 x} = \begin{vmatrix} t = \sin x \\ dt = \cos x \ dx \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{\sin x} + C$

(скористалися прикладом **4**). $\lrcorner$

91. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} \ dx$.

$\ulcorner$ Оскільки $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, то дістанемо

$$\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} \ dx = \begin{vmatrix} t = \operatorname{tg} x \\ dt = \dfrac{1}{\cos^2 x} \ dx \end{vmatrix} = \int \sqrt{t} \ dt = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} (\operatorname{tg} x)^{\frac{3}{2}} + C$$

(скористалися прикладом **6**). $\lrcorner$

92. $\int \frac{6^{\operatorname{arctg} x}}{x^2 + 1} \ dx$.

$\ulcorner$ Оскільки $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{x^2 + 1}$, то дістанемо

$$\int \frac{6^{\operatorname{arctg} x}}{x^2 + 1} \ dx = \begin{vmatrix} t = \operatorname{arctg} x \\ dt = \dfrac{1}{x^2 + 1} \ dx \end{vmatrix} = \int 6^t \ dt = \frac{6^t}{\ln 6} + C = \frac{1}{\ln 6} 6^{\operatorname{arctg} x} + C$$

(скористалися табличним інтегралом **III** при $a = 6$). $\lrcorner$

93. $\int \frac{(\arcsin x)^5}{\sqrt{1 - x^2}} \ dx$.

$\ulcorner$ Оскільки $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, то дістанемо

$$\int \frac{(\arcsin x)^5}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \left| \begin{matrix} t = \arcsin x \\ dt = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \end{matrix} \right| = \int t^5\,dt = \frac{t^6}{6} + C = \frac{1}{6}(\arcsin x)^6 + C$$

(скористалися табличним інтегралом **I** при $n = 5$). ⌋

94. $\displaystyle\int \frac{\sin x\,dx}{(1-\cos x)^2+1}$.

⌈ Помічаємо, що $(1-\cos x)' = 0-(-\sin x) = \sin x$. Тому за формулою (1)

$$\int \frac{\sin x\,dx}{(1-\cos x)^2+1} = \left| \begin{matrix} t = 1-\cos x \\ dt = \sin x\,dx \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t + C =$$

$$= \operatorname{arctg}(1-\cos x) + C. \ ⌋$$

95. $\displaystyle\int \frac{2x+\cos x}{\sqrt{x^2+\sin x+1}}\,dx$.

⌈ Помічаємо, що $\left(x^2+\sin x+1\right)' = 2x+\cos x$. Тому можемо застосувати формулу (1):

$$\int \frac{2x+\cos x}{\sqrt{x^2+\sin x+1}}\,dx = \left| \begin{matrix} t = x^2+\sin x+1 \\ dt = (2x+\cos x)\,dx \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} =$$

$$= 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{x^2+\sin x+1} + C. \ ⌋$$

96. $\displaystyle\int e^{x\ln x}(\ln x+1)\,dx$.

⌈ Помічаємо, що $(x\cdot\ln x)' = 1\cdot\ln x + x\cdot\dfrac{1}{x} = \ln x + 1$. Тому

$$\int e^{x\ln x}(\ln x+1)\,dx = \left| \begin{matrix} t = x\ln x \\ dt = (\ln x+1)\,dx \end{matrix} \right| = \int e^t\,dt = e^t + C = e^{x\ln x} + C. \ ⌋$$

97. $\displaystyle\int \frac{\sin 2x\,dx}{\sqrt{\sin^4 x+1}}$.

$\ulcorner$ Зауважимо, що $\left(\sin^2 x\right)' = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x$. Тому

$$\int \frac{\sin 2x\ dx}{\sqrt{\sin^4 x + 1}} = \int \frac{\sin 2x\ dx}{\sqrt{\left(\sin^2 x\right)^2 + 1}} = \left| \begin{matrix} t = \sin^2 x \\ dt = \sin 2x\ dx \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 1}} =$$

$$= \ln\left(t + \sqrt{t^2 + 1}\right) + C = \ln\left(\sin^2 x + \sqrt{\sin^4 x + 1}\right) + C . \ \lrcorner$$

Розглянемо ряд інтегралів, в яких підінтегральну функцію потрібно помножити (і поділити) на деяке число, щоб звести їх обчислення до формули (1).

Обчислити невизначені інтеграли:

98. $\int \frac{x\ dx}{x^2 - 1}$.

$\ulcorner$ Оскільки $\left(x^2 - 1\right)' = 2x$, то виконавши тотожне перетворення підінтегральної функції, дістанемо

$$\int \frac{x\ dx}{x^2 - 1} = \int \frac{2x\ dx}{2\left(x^2 - 1\right)} = \left| \begin{matrix} t = x^2 - 1 \\ dt = 2x\ dx \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{2t} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln\left|x^2 - 1\right| + C . \ \lrcorner$$

99. $\int x^2 \sin\left(x^3\right) dx$.

$\ulcorner$ Зауваживши, що $\left(x^3\right)' = 3x^2$, дістанемо

$$\int x^2 \sin\left(x^3\right) dx = \int \frac{1}{3}\sin\left(x^3\right) \cdot 3x^2\ dx = \left| \begin{matrix} t = x^3 \\ dt = 3x^2\ dx \end{matrix} \right| = \int \frac{1}{3}\sin t\ dt =$$

$$= \frac{1}{3}\int \sin t\ dt = \frac{1}{3}\left(-\cos t\right) + C = -\frac{1}{3}\cos\left(x^3\right) + C . \ \lrcorner$$

100. $\int \operatorname{tg} x\ dx$.

$\ulcorner$ Нагадаємо, що $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Так як $\left(\cos x\right)' = -\sin x$, то маємо

$$\int \operatorname{tg} x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = \int (-1)\frac{-\sin x}{\cos x}\, dx = \begin{vmatrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x\, dx \end{vmatrix} = -\int \frac{dt}{t} =$$

$$= -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C. \quad \lrcorner$$

101. $\int \frac{\operatorname{ctg}^3 x}{\sin^2 x}\, dx$.

$\ulcorner$ Зауваживши, що $(\operatorname{ctg} x)' = \frac{1}{-\sin^2 x}$, дістанемо

$$\int \frac{\operatorname{ctg}^3 x}{\sin^2 x}\, dx = \int (-1)\frac{(\operatorname{ctg} x)^3}{-\sin^2 x}\, dx = \begin{vmatrix} t = \operatorname{ctg} x \\ dt = \dfrac{dx}{-\sin^2 x} \end{vmatrix} =$$

$$= -\int t^3\, dt = -\frac{t^4}{4} + C = -\frac{\operatorname{ctg}^4 x}{4} + C. \quad \lrcorner$$

102. $\int \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^2}\, dx$.

$\ulcorner$ Зауваживши, що $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, дістанемо

$$\int \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^2}\, dx = -\int \sin\frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx = \begin{vmatrix} t = \dfrac{1}{x} \\ dt = -\dfrac{1}{x^2}\, dx \end{vmatrix} =$$

$$= -\int \sin t\, dt = -(-\cos t) + C = \cos\frac{1}{x} + C. \quad \lrcorner$$

103. $\int \frac{4^x\, dx}{\cos^2 4^x}$.

$\ulcorner$ Оскільки $(4^x)' = 4^x \ln 4$, то маємо

$$\int \frac{4^x\, dx}{\cos^2 4^x}\, dx = \frac{1}{\ln 4}\int \frac{4^x \ln 4\, dx}{\cos^2 4^x} = \begin{vmatrix} t = 4^x \\ dt = 4^x \ln 4\, dx \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\ln 4}\int \frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{1}{\ln 4}\operatorname{tg} t + C = \frac{\operatorname{tg} 4^x}{\ln 4} + C\,. \quad \lrcorner$$

104. $\displaystyle\int \frac{\cos\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}}\,dx$.

⌜ Знайдемо похідну: $\left(\sqrt[3]{x^2}\right)' = \left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Тому

$$\int \frac{\cos\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \frac{3}{2}\int \cos\sqrt[3]{x^2}\,\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\,dx = \left| \begin{matrix} t = \sqrt[3]{x^2} \\ dt = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}\,dx \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{3}{2}\int \cos t\,dt = \frac{3}{2}\sin t + C = \frac{3}{2}\sin\sqrt[3]{x^2} + C\,. \quad \lrcorner$$

105. $\displaystyle\int \frac{(2x+1)\,dx}{2x^2+2x-5}$.

⌜ Зауваживши, що $\left(2x^2+2x-5\right)' = 4x+2 = 2(2x+1)$, знаходимо

$$\int \frac{(2x+1)\,dx}{2x^2+2x-5} = \frac{1}{2}\int \frac{(4x+2)\,dx}{2x^2+2x-5} = \left| \begin{matrix} t = 2x^2+2x-5 \\ dt = (4x+2)\,dx \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln\left|2x^2+2x-5\right| + C\,. \quad \lrcorner$$

106. $\displaystyle\int \frac{3^x\,dx}{9^x-1}$.

⌜ Виконавши тотожні перетворення підінтегральної функції, дістанемо

$$\int \frac{3^x\,dx}{9^x-1} = \int \frac{3^x\,dx}{\left(3^x\right)^2-1} = \frac{1}{\ln 3}\int \frac{3^x\ln 3\,dx}{\left(3^x\right)^2-1} = \left| \begin{matrix} t = 3^x \\ dt = 3^x\ln 3\,dx \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{\ln 3}\int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{\ln 3}\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \frac{1}{2\ln 3}\ln\left|\frac{3^x-1}{3^x+1}\right| + C\,. \quad \lrcorner$$

107. $\int \frac{\sin x\, dx}{3+\sin^2 x}$.

$\ulcorner$ Скористаємося формулою $\sin^2 x = 1-\cos^2 x$:

$$\int \frac{\sin x\, dx}{3+\sin^2 x} = \int \frac{\sin x\, dx}{4-\cos^2 x} = \left| \begin{array}{l} t=\cos x \\ dt = -\sin x\, dx \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{-dt}{4-t^2} = \int \frac{dt}{t^2-2^2} = \frac{1}{2\cdot 2} \ln \left| \frac{t-2}{t+2} \right| + C =$$

$$= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\cos x - 2}{\cos x + 2} \right| + C = \frac{1}{4} \ln \frac{2-\cos x}{2+\cos x} + C . \quad \lrcorner$$

108. $\int \frac{dx}{4\sin^2 x + 7\cos^2 x}$.

$\ulcorner$ Виконуючи тотожні перетворення та заміну змінної, дістанемо

$$\int \frac{dx}{4\sin^2 x + 7\cos^2 x} = \int \frac{dx}{\left(4\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 7\right)\cos^2 x} =$$

$$= \int \frac{dx}{\left(4\,\mathrm{tg}^2 x + 7\right)\cos^2 x} = \left| \begin{array}{l} t = \mathrm{tg}\, x \\ dt = \dfrac{dx}{\cos^2 x} \end{array} \right| = \int \frac{dt}{4t^2+7} =$$

$$= \int \frac{dt}{(2t)^2 + \left(\sqrt{7}\right)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{7}} \,\mathrm{arctg}\, \frac{2t}{\sqrt{7}} + C =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{7}} \,\mathrm{arctg}\, \frac{2\,\mathrm{tg}\, x}{\sqrt{7}} + C . \quad \lrcorner$$

<u>Вправи для самостійного розв’язання</u>

Обчислити невизначені інтеграли:

109. $\int 2^{\sin x} \cos x \; dx$.

110. $\int \frac{(2x+5)\; dx}{\sqrt{x^2+5x+9}}$.

111. $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x - 4}}$.

112. $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^3 \sqrt{1-x^2}}$.

113. $\int \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{1+x^2}\,dx$.

114. $\int \cos^3 x\,dx$.

115. $\int \frac{e^x\,dx}{e^{2x}+9}$.

116. $\int \operatorname{ctg} x\,dx$.

117. $\int \frac{\sin x}{e^{\cos x}}\,dx$.

118. $\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$.

119. $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}}\,dx$.

120. $\int \frac{e^{2x}\,dx}{e^{2x}+9}$.

121. $\int \frac{\cos x\,\sin x\,dx}{\cos^2 x-16}$.

122. $\int \frac{x^4\,dx}{\sin^2\left(x^5\right)}$.

123. $\int \frac{x^3\,dx}{x^4+1}$.

124. $\int \frac{x\,dx}{x^4+1}$.

125. $\int \frac{5^x\,dx}{\sqrt{1-25^x}}$.

126. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}$.

127. $\int \frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x^2}}\,dx$.

128. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{6-\cos^2 x}}$.

129. $\int \frac{dx}{\sqrt{\cos^2 x\,\left(9\cos^2 x-\sin^2 x\right)}}$.

130. $\int \frac{(x+1)\,dx}{\sqrt{3-4x-6x^2-4x^3-x^4}}$.

Відповіді:

109. $\frac{1}{\ln 2}2^{\sin x}+C$.

110. $2\sqrt{x^2+5x+9}+C$.

111. $\ln\left|\ln x+\sqrt{\ln^2 x-4}\right|+C$.

112. $-\frac{1}{2(\arcsin x)^2}+C$.

113. $0,25\,(\operatorname{arctg} x)^4+C$.

114. $\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+C$.

115. $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{e^x}{3}+C$.

116. $\ln|\sin x|+C$.

117. $e^{-\cos x}+C$.

118. $-\frac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}+C$.

119. $-1{,}5\,(\cos x)^{\frac{2}{3}}+C$.

120. $\frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}+9\right)+C$.

121. $-\frac{1}{2}\ln\left(16-\cos^2 x\right)+C$.

122. $-0{,}2\ \mathrm{ctg}\left(x^5\right)+C$.

123. $\frac{1}{4}\ln\left(x^4+1\right)+C$.

124. $\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left(x^2\right)+C$.

125. $\frac{1}{\ln 5}\arcsin\left(5^x\right)+C$.

126. $2\,\mathrm{tg}\sqrt{x}+C$.

127. $-0{,}5\,e^{\frac{1}{x^2}}+C$.

128. $\ln\left(\sin x+\sqrt{\sin^2 x+5}\right)+C$.

129. $\arcsin\frac{\mathrm{tg}\,x}{3}+C$.

130. $\frac{1}{2}\arcsin\frac{(x+1)^2}{2}+C$.

4. Інтегрування частинами

Обчислення невизначених інтегралів методом інтегрування частинами полягає у використанні формули

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du\,, \qquad (2)$$

де u та v – функції змінної x; $du=u'(x)\,dx$, $dv=v'(x)\,dx$.

Якщо потрібно обчислити інтеграл $\int f(x)\,dx$, то підінтегральний вираз $f(x)\,dx$ слід представити у вигляді $u\,dv$ так, щоб інтеграл у правій частині формули (2) був простішим за заданий $\int f(x)\,dx=\int u\,dv$. Зауважимо, що функція v, яка фігурує у правій частині (2), знаходиться за очевидною формулою $v=\int v'(x)\,dx=\int dv$, яка означає, що функція $v(x)$ є первісною своєї похідної $v'(x)$. Звідси випливає, що функція v визначається неоднозначно.

Обчислити невизначені інтеграли:

131. $\int x\cos x\,dx$.

Γ Покладемо $u=x$, $dv=\cos x\,dx$. Тоді $du=(x)'\,dx=1\cdot dx=dx$, $v=\int dv=\int\cos x\,dx=\sin x$ (беремо заради простоти $C=0$). Застосовуючи формулу (2), дістанемо

$$\int x\cos x\,dx = x\cdot\sin x - \int \sin x\,dx =$$
$$= x\sin x - (-\cos x) + C = x\sin x + \cos x + C. \quad \lrcorner$$

Зауваження. Якщо для обчислення інтеграла $\int x\cos x\,dx$ покласти, наприклад, $u = \cos x$ і $dv = x\,dx$, то після застосування формули (2) дістанемо праворуч інтеграл $\int\left(-\frac{x^2}{2}\right)\sin x\,dx$, який <u>складніший</u> за заданий.

132. $\int (3x-1)e^x\,dx$.

$\ulcorner$ Покладемо $u = 3x-1$, $dv = e^x\,dx$. Тоді $du = (3x-1)'\,dx = 3dx$, $v = \int dv = \int e^x\,dx = e^x$. Застосовуючи формулу (2), дістанемо

$$\int (3x-1)e^x\,dx = (3x-1)e^x - \int e^x 3\,dx = (3x-1)e^x - 3\int e^x\,dx =$$
$$= (3x-1)e^x - 3e^x + C = e^x(3x-4) + C. \quad \lrcorner$$

133. $\int xe^{2x}\,dx$.

$\ulcorner$ Покладемо $u = x$, $dv = e^{2x}\,dx$. Тоді $du = dx$, $v = \int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}$. За формулою (2) знаходимо

$$\int xe^{2x}\,dx = x\frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}e^{2x} + C = \frac{1}{2}e^{2x}\left(x - \frac{1}{2}\right) + C = \frac{1}{4}e^{2x}(2x-1) + C. \quad \lrcorner$$

134. $\int x^2\cos 3x\,dx$.

$\ulcorner$ Для обчислення даного інтеграла формулу (2) доведеться застосовувати двічі. Покладемо $u = x^2$, $dv = \cos 3x\,dx$. Тоді $du = \left(x^2\right)'dx = 2x\,dx$, $v = \int \cos 3x\,dx = \frac{1}{3}\sin 3x$. Застосуємо формулу (2):

$$\int x^2\cos 3x\,dx = x^2\frac{1}{3}\sin 3x - \int \frac{1}{3}\sin 3x\cdot 2x\,dx =$$
$$= \frac{1}{3}x^2\sin 3x - \frac{2}{3}\int x\sin 3x\,dx. \qquad (3)$$

Обчислимо інтеграл $\int x\sin 3x\,dx$. Покладемо $u = x$, $dv = \sin 3x\,dx$. Тоді $du = dx$, $v = \int \sin 3x\,dx = -\frac{1}{3}\cos 3x$. Отже,

$$\int x\sin 3x\,dx = x\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right) - \int\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right)dx = -\frac{1}{3}x\cos 3x + \frac{1}{3}\int\cos 3x\,dx =$$

$$= -\frac{1}{3}x\cos 3x + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\sin 3x + C = -\frac{1}{3}x\cos 3x + \frac{1}{9}\sin 3x + C.$$

Підставляючи знайдений вираз у формулу (3) замість $\int x\sin 3x\,dx$, остаточно знаходимо

$$\int x^2\cos 3x\,dx = \frac{1}{3}x^2\sin 3x - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}x\cos 3x + \frac{1}{9}\sin 3x\right) + C =$$

$$= \frac{1}{3}x^2\sin 3x + \frac{2}{9}x\cos 3x - \frac{2}{27}\sin 3x + C =$$

$$= \left(\frac{x^2}{3} - \frac{2}{27}\right)\sin 3x + \frac{2}{9}x\cos 3x + C. \quad ⌋$$

135. $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$.

⌈ Покладемо $u = x$, $dv = \frac{dx}{\cos^2 x}$. Тоді $du = dx$, $v = \int\frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$. За формулою (2) знаходимо

$$\int\frac{x\,dx}{\cos^2 x} = x\operatorname{tg} x - \int\operatorname{tg} x\,dx = x\operatorname{tg} x - \left(-\ln\left|\cos x\right|\right) + C =$$

$$= x\operatorname{tg} x + \ln\left|\cos x\right| + C$$

(скористалися прикладом **100**). ⌋

136. $\int x\operatorname{arctg} x\,dx$.

⌈ Покладемо $u = \operatorname{arctg} x$, $dv = x\,dx$. Тоді $du = \left(\operatorname{arctg} x\right)'dx = \frac{1}{x^2+1}dx$, $v = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{x^2+1}{2}$ (тут зручно взяти $C = \frac{1}{2}$). За формулою (2)

$$\int x \operatorname{arctg} x\, dx = \operatorname{arctg} x \cdot \frac{x^2+1}{2} - \int \frac{x^2+1}{2} \cdot \frac{1}{x^2+1}\, dx =$$

$$= \frac{x^2+1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int dx = \frac{1}{2}\left(x^2+1\right) \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} x + C . \quad \lrcorner$$

137. $\int \ln x\, dx$.

$\ulcorner$ Покладемо $u = \ln x$, $dv = dx$. Тоді $du = \frac{1}{x}\, dx$, $v = \int dx = x$. Застосовуючи формулу (2), дістанемо

$$\int \ln x\, dx = \ln x \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x}\, dx = x \ln x - \int dx =$$

$$= x \ln x - x + C = x\left(\ln x - 1\right) + C . \quad \lrcorner$$

138. $\int \frac{\ln(x-1)}{x^2}\, dx$.

$\ulcorner$ Покладемо $u = \ln(x-1)$, $dv = \frac{dx}{x^2}$. Тоді $du = \left(\ln(x-1)\right)' dx = \frac{1}{x-1}\, dx$, $v = \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}$. За формулою (2)

$$\int \frac{\ln(x-1)}{x^2}\, dx = \ln(x-1) \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) - \int \left(-\frac{1}{x}\right) \frac{1}{x-1}\, dx =$$

$$= -\frac{\ln(x-1)}{x} + \int \frac{dx}{x(x-1)} . \tag{4}$$

Обчислимо інтеграл у правій частині формули (4). Для цього використаємо прийом розкладу підінтегральної функції на доданки (див. приклад **52**):

$$\int \frac{dx}{x(x-1)} = \int \frac{x-(x-1)}{x(x-1)} dx = \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\right) dx =$$

$$= \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x} = \ln|x-1| - \ln|x| + C = \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + C .$$

Підставляючи знайдений вираз у формулу (4), остаточно знаходимо

$$\int \frac{\ln(x-1)}{x^2}\, dx = -\frac{\ln(x-1)}{x} + \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + C . \quad \lrcorner$$

139. $\int \arcsin x \; dx$.

Γ Покладемо $u = \arcsin x$, $dv = dx$. Тоді $du = (\arcsin x)' \, dx = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$, $v = \int dx = x$. За формулою (2)

$$\int \arcsin x \; dx = \arcsin x \cdot x - \int x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \; dx . \qquad (5)$$

Обчислимо інтеграл у правій частині (5) методом заміни змінної:

$$\int \frac{x \; dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x \; dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{vmatrix} t = 1 - x^2 \\ dt = -2x \; dx \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{t} + C = -\sqrt{1-x^2} + C .$$

Підставляючи знайдений вираз у формулу (5), остаточно знаходимо

$$\int \arcsin x \; dx = x \arcsin x - \left(-\sqrt{1-x^2}\right) + C = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C . \quad \lrcorner$$

140. $\int \operatorname{arctg} x \; dx$.

Γ Покладемо $u = \operatorname{arctg} x$, $dv = dx$. Тоді $du = \dfrac{1}{x^2+1} \, dx$, $v = x$. Застосовуючи формулу (2) і виконуючи заміну змінної, дістанемо

$$\int \operatorname{arctg} x \; dx = \operatorname{arctg} x \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x^2+1} \; dx = \begin{vmatrix} t = x^2 + 1 \\ dt = 2x \; dx \end{vmatrix} = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} =$$

$$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln|t| + C = x \operatorname{arctg} x - 0{,}5 \; \ln\left(x^2+1\right) + C . \quad \lrcorner$$

<u>Вправи для самостійного розв’язання</u>

Обчислити невизначені інтеграли:

141. $\int x \sin 5x \; dx$. **142.** $\int (3-4x)\cos 2x \; dx$.

143. $\int x e^{-x} \, dx$. **144.** $\int x^2 e^x \; dx$.

145. $\int \dfrac{x \cos x}{\sin^3 x} \; dx$. **146.** $\int x \ln x \; dx$.

147. $\int \ln\left(x^2+4\right) \, dx$. **148.** $\int \arccos x \; dx$.

149. $\int \operatorname{arcctg} x \, dx$.

150. $\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{x^2+1}} \, dx$.

Відповіді:

141. $\frac{\sin 5x}{25} - \frac{x}{5}\cos 5x + C$.

142. $\frac{3-4x}{2}\sin 2x - \cos 2x + C$.

143. $-e^{-x}(x+1) + C$.

144. $(x^2 - 2x + 2)e^x + C$.

145. $-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sin^2 x} + \operatorname{ctg} x\right) + C$.

146. $\frac{x^2}{4}(2\ln x - 1) + C$.

147. $x\ln(x^2+4) - 2x + 4\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C$.

148. $x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$.

149. $x\operatorname{arcctg} x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$.

150. $\sqrt{x^2+1}\cdot\operatorname{arctg} x - \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C$.

5. Додаткові вправи на інтегрування функцій

1º. Розглянемо ряд інтегралів, для обчислення яких використовується як метод безпосереднього інтегрування, так і метод заміни змінної.

151. $I = \int \frac{(2x+3)dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

Γ Перший доданок у чисельнику – це з точністю до знака похідна квадратичної функції: $\left(4-x^2\right)' = -2x$. Тому поділимо почленно чисельник на знаменник і скористаємося властивостями невизначеного інтеграла:

$$I=\int\left(\frac{2x}{\sqrt{4-x^2}}+\frac{3}{\sqrt{4-x^2}}\right)dx=\int\frac{2xdx}{\sqrt{4-x^2}}+3\int\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=I_1+3I_2 .$$

Перший інтеграл обчислимо методом заміни змінної, а другий зведемо до табличного:

$$I_1=\int\frac{2xdx}{\sqrt{4-x^2}}=\begin{vmatrix}t=4-x^2\\ dt=-2xdx\end{vmatrix}=-\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=-2\sqrt{t}+C=-2\sqrt{4-x^2}+C ;$$

$$I_2=\int\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{2^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{2}+C .$$

Остаточно маємо

$$I=-2\sqrt{4-x^2}+3\arcsin\frac{x}{2}+C . \quad \lrcorner$$

152. $I=\int\frac{(4x-5)dx}{\sqrt{x^2-6x+13}}$.

$\ulcorner$ Знайдемо похідну квадратичної функції: $\left(x^2-6x+13\right)'=2x-6$. Виділимо у чисельнику доданок, який містить цю похідну: $4x-5=2(2x-6)+7$. Далі діємо так само, як у попередньому прикладі – ділимо почленно чисельник на знаменник і отримуємо

$$I=\int\left(\frac{2(2x-6)}{\sqrt{x^2-6x+13}}+\frac{7}{\sqrt{x^2-6x+13}}\right)dx=$$

$$=2\int\frac{(2x-6)dx}{\sqrt{x^2-6x+13}}+7\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+13}}=2I_1+7I_2 .$$

Перший інтеграл обчислимо методом заміни змінної, а для другого інтеграла використаємо прийом виділення повного квадрата:

$$I_1=\begin{vmatrix}t=x^2-6x+13\\ dt=(2x-6)dx\end{vmatrix}=\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=2\sqrt{t}+C=2\sqrt{x^2-6x+13}+C ;$$

$$x^2-6x+13=x^2-2\cdot x\cdot 3+3^2+4=(x-3)^2+4 ,$$

$$I_2=\int\frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2+4}}=\ln\left|x-3+\sqrt{(x-3)^2+4}\right|+C=$$

$$=\ln\left(x-3+\sqrt{x^2-6x+13}\right)+C$$

(скористалися табличним інтегралом **XI** $(a=4)$ та властивістю **3.2°** $(b=-3)$ невизначеного інтеграла).

Остаточно маємо

$$I = 4\sqrt{x^2-6x+13}+7\ln\left(x-3+\sqrt{x^2-6x+13}\right)+C\,. \quad \lrcorner$$

153. $I=\int \frac{6x^2+22x-1}{x^2+4x+5}\,dx$.

$\ulcorner$ Підінтегральна функція – неправильний раціональний дріб. Виділимо цілу частину:

$$\begin{array}{r|l} -\,6x^2+22x-1 & x^2+4x+5 \\ \cline{2-2} \underline{6x^2+24x+30} & 6 \\ -2x-31 & \end{array}\;; \qquad \frac{6x^2+22x-1}{x^2+4x+5}=6-\frac{2x+31}{x^2+4x+5}\,.$$

Тоді маємо

$$I=\int\left(6-\frac{2x+31}{x^2+4x+5}\right)dx = 6x-\int\frac{2x+31}{x^2+4x+5}\,dx\,.$$

Оскільки $\left(x^2+4x+5\right)' = 2x+4$, то аналогічно до попереднього прикладу дістанемо

$$I=6x-\int\frac{(2x+4)+27}{x^2+4x+5}\,dx = 6x-\int\frac{(2x+4)\,dx}{x^2+4x+5}-$$

$$-27\int\frac{dx}{x^2+4x+5} = 6x-I_1-27\,I_2\,.$$

Перший інтеграл обчислимо методом заміни змінної, а для другого інтеграла використаємо прийом виділення повного квадрата:

$$I_1=\left|\begin{array}{l} t=x^2+4x+5 \\ dt=(2x+4)\,dx \end{array}\right| = \int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|x^2+4x+5\right|+C\,;$$

$$I_2=\int\frac{dx}{(x+2)^2+1}=\operatorname{arctg}(x+2)+C\,.$$

Остаточно маємо

$$I=6x-\ln\left(x^2+4x+5\right)-27\operatorname{arctg}(x+2)+C\,. \lrcorner$$

154. $\int\frac{dx}{x^3+x}$.

$\ulcorner$ Розкладемо підінтегральну функцію на доданки:

$$\frac{1}{x^3+x}=\frac{1}{\left(x^2+1\right)x}=\frac{\left(x^2+1\right)-x^2}{\left(x^2+1\right)x}=\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}.$$

Тоді матимемо

$$\int\frac{dx}{x^3+x}=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}\right)dx=\int\frac{1}{x}dx-\int\frac{x}{x^2+1}dx=$$

$$=\left|\begin{matrix}t=x^2+1\\ dt=2xdx\end{matrix}\right|=\ln|x|-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|t|+C=$$

$$=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+C. \quad ┘$$

2º. Обчислення невизначених інтегралів методом заміни змінної інколи зручно виконувати, використовуючи відповідну *підстановку* $x=\varphi(t)$, де функція φ має обернену функцію φ^{-1} на певному проміжку:

$$\int f(x)\,dx=\int f\left(\varphi(t)\right)\,\varphi'(t)\,dt, \qquad (6)$$

де після інтегрування слід покласти $t=\varphi^{-1}(x)$.

155. $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx \quad (a>0)$.

┌ Застосуємо підстановку $x=a\sin t$, $-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$. Обернена функція $t=\arcsin\frac{x}{a}$. Матимемо

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\left|\begin{matrix}x=a\sin t\\ dx=a\cos t\,dt\end{matrix}\right|=\int\sqrt{a^2-(a\sin t)^2}\,a\cos t\,dt=$$

$$=a^2\int\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt=a^2\int\sqrt{\cos^2 t}\cos t\,dt=$$

$$=a^2\int\cos^2 t\,dt=\frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)dt=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(t+\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}\right)+C=\frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{a}\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\right)+C=$$

$$=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C. \quad ┘$$

До застосування формули (6) зводиться також інтегрування функцій, що містять ірраціональності, зокрема виду $\sqrt[m]{kx+b}$ $(k \neq 0)$. У цьому випадку слід покласти $\sqrt[m]{kx+b} = t$, звідки $x = \frac{1}{k}\left(t^m - b\right)$, $dx = \frac{m}{k} t^{\,m-1}\, dt$.

156. $\int \frac{\sqrt{x}\, dx}{x-3}$.

$$\ulcorner \quad \int \frac{\sqrt{x}\, dx}{x-3} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x} = t \\ x = t^2 \\ dx = 2tdt \end{array} \right| = \int \frac{t \cdot 2t\, dt}{t^2-3} = 2\int \frac{t^2 dt}{t^2-3} = 2\int \frac{\left(t^2-3\right)+3}{t^2-3}\, dt =$$

$$= 2\int \left(1 + \frac{3}{t^2-3}\right) dt = 2\left(\int dt + 3\int \frac{dt}{t^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2}\right) =$$

$$= 2\left(t + 3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln\left|\frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}\right|\right) + C = 2t + \sqrt{3}\ln\left|\frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}\right| + C =$$

$$= 2\sqrt{x} + \sqrt{3}\ \ln\left|\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}\right| + C. \quad \lrcorner$$

157. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}-2}$.

$$\ulcorner \quad \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}-2} = \left| \begin{array}{l} \sqrt[3]{x+1} = t \\ x = t^3 - 1 \\ dx = 3t^2 dt \end{array} \right| = \int \frac{3t^2\, dt}{t-2} = 3\int \frac{\left(t^2-4\right)+4}{t-2}\, dt =$$

$$= 3\int \frac{(t+2)(t-2)+4}{t-2}\, dt = 3\int \left(t + 2 + \frac{4}{t-2}\right) dt = 3\left(\frac{t^2}{2} + 2t + 4\ln|t-2|\right) + C =$$

$$= \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2 + 6\sqrt[3]{x+1} + 12\ \ln\left|\sqrt[3]{x+1} - 2\right| + C. \quad \lrcorner$$

Формулу (6) можна застосовувати до інтегрування функцій, що є раціональними функціями від $\sin x$ та $\cos x$. У загальному випадку використовується підстановка $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, звідки $x=2\operatorname{arctg}t$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$. При цьому $\sin x$ та $\cos x$ виражаються через t так: $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$.

158. $\int\frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}$.

$$\ulcorner\quad \int\frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}=\left|\begin{matrix}\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t\\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}\end{matrix}\right|=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}+5}=$$

$$=2\int\frac{dt}{4t-\left(1-t^2\right)+5\left(1+t^2\right)}=2\int\frac{dt}{6t^2+4t+4}=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t^2+\frac{2}{3}t+\frac{2}{3}}=$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{\left(t+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{5}{9}}=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{\left(t+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2}=\frac{1}{3}\frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{3}}\operatorname{arctg}\frac{t+\frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}}+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3t+1}{\sqrt{5}}+C=\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}+C.\quad \lrcorner$$

3º. Обчислення невизначених інтегралів методом інтегрування частинами інколи можна звести до лінійного рівняння відносно заданого інтеграла. Продемонструємо це на двох прикладах.

159. $I=\int e^x\cos\frac{x}{2}\,dx$.

$$\ulcorner\quad I=\int e^x\cos\frac{x}{2}\,dx=\left|\begin{matrix}u=e^x,\ dv=\cos\frac{x}{2}dx\\ du=e^x dx,\ v=2\sin\frac{x}{2}\end{matrix}\right|=$$

$$= e^x \cdot 2\sin\frac{x}{2} - 2\int \sin\frac{x}{2}\, e^x\, dx = \left| \begin{matrix} u = e^x,\ dv = \sin\dfrac{x}{2}dx \\ du = e^x dx,\ v = -2\cos\dfrac{x}{2} \end{matrix} \right| =$$

$$= 2e^x \sin\frac{x}{2} - 2\left[e^x\left(-2\cos\frac{x}{2}\right) + 2\int \cos\frac{x}{2}\, e^x dx \right] =$$

$$= 2e^x \sin\frac{x}{2} + 4e^x \cos\frac{x}{2} - 4\int e^x \cos\frac{x}{2}\, dx =$$

$$= 2e^x\left(\sin\frac{x}{2} + 2\cos\frac{x}{2}\right) - 4I\,.$$

Звідси

$$5I = 2e^x\left(\sin\frac{x}{2} + 2\cos\frac{x}{2}\right) + C\,,$$

$$I = \frac{2}{5}e^x\left(\sin\frac{x}{2} + 2\cos\frac{x}{2}\right) + C\,. \quad \lrcorner$$

160. $I = \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx \quad (a > 0)$.

$\ulcorner$ Цей інтеграл було обчислено раніше методом заміни змінної (приклад **155**). Обчислимо його методом інтегрування частинами.

$$I = \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \left| \begin{matrix} u = \sqrt{a^2 - x^2},\ dv = dx \\ du = \dfrac{-xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}},\ v = x \end{matrix} \right| =$$

$$= \sqrt{a^2 - x^2}\ x - \int x \frac{-xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{-x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx =$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{\left(a^2 - x^2\right) - a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx =$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} =$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} - I + a^2 \arcsin\frac{x}{a}\,.$$

Звідси

$$2I = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a} + C\ ,$$

$$I = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C\ . \quad \lrcorner$$

Вправи для самостійного розв'язання

Обчислити невизначені інтеграли:

161. $\int \frac{6-5x}{x^2+16}dx$.

162. $\int \frac{4x+3\sqrt{\ln(2x-1)}}{2x-1}dx$.

163. $\int \frac{2x^3-x+4}{x^2-2x+10}dx$.

164. $\int \frac{dx}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}$ (підстановка $x = \operatorname{tg} t$).

165. $\int \frac{\sqrt{x-1}}{x}dx$.

166. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{x}-1\right)}$.

167. $\int \frac{dx}{\sin x}$.

168. $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$.

169. $\int e^{2x}\sin x\ dx$.

170. $\int \sqrt{x^2+a}\ dx \quad (a \neq 0)$.

Відповіді:

161. $\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{4} - \frac{5}{2}\ln\left(x^2+16\right) + C$.

162. $2x + \ln(2x-1) + \left(\ln(2x-1)\right)^{3/2} + C$.

163. $x^2 + 4x - \frac{13}{2}\ln\left(x^2-2x+10\right) - \frac{49}{3}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{3} + C$.

164. $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + C$.

165. $2\left(\sqrt{x-1} - \operatorname{arctg}\sqrt{x-1}\right) + C$.

166. $3\left(\sqrt[3]{x} + \ln\left|\sqrt[3]{x}-1\right|\right) + C$.

167. $\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right|+C$.

168. $\ln\left|\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}-5}{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}-3}\right|+C$.

169. $\dfrac{1}{5}e^{2x}\left(2\sin x-\cos x\right)+C$.

170. $\dfrac{x}{2}\sqrt{x^2+a}+\dfrac{a}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C$.

Розділ 7. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

1. Формула Ньютона-Лейбніца. Безпосереднє обчислення визначених інтегралів

Визначений інтеграл функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ – це число, яке позначають $\int\limits_a^b f(x)dx$. Тут $f(x)$ – підінтегральна функція; $[a,b]$ – відрізок інтегрування; a та b – відповідно нижня та верхня межі інтегрування.

Визначений інтеграл обчислюється за *формулою Ньютона-Лейбніца*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

де $F(x)$ – первісна функції $f(x)$, тобто $F'(x) = f(x)$. Для знаходження первісної доцільно використати відповідний невизначений інтеграл – $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Властивості визначеного інтеграла: а) сталий множник можна виносити з-під знака визначеного інтеграла; б) визначений інтеграл суми (різниці) двох функцій дорівнює сумі (різниці) визначених інтегралів кожної з цих функцій.

Обчислити визначені інтеграли:

1. $\int\limits_1^2 x^2 dx$.

⌈ З таблиці невизначених інтегралів $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$. Тому, застосовуючи формулу Ньютона-Лейбніца, дістанемо

$$\int\limits_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}. \quad ⌋$$

2. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx$.

⌈ З таблиці невизначених інтегралів $\int \cos x\, dx = \sin x + C$. Тому, застосовуючи формулу Ньютона-Лейбніца, дістанемо

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \sin x\Big|_0^{\pi/2} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1\ . \quad \lrcorner$$

3. $\int_0^1 \left(4x^3 - 3x^2 + 5x + 7\right) dx$.

$\ulcorner$ Знайшовши первісну підінтегральної функції та застосувавши формулу Ньютона-Лейбніца, дістанемо

$$\int_0^1 \left(4x^3 - 3x^2 + 5x + 7\right) dx = \left(4\cdot\frac{x^4}{4} - 3\cdot\frac{x^3}{3} + 5\cdot\frac{x^2}{2} + 7x\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \left(x^4 - x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 7x\right)\Bigg|_0^1 = \left(1^4 - 1^3 + \frac{5}{2}\cdot 1^2 + 7\cdot 1\right) - \left(0^4 - 0^3 + \frac{5}{2}\cdot 0^2 + 7\cdot 0\right) =$$

$$= 1 - 1 + \frac{5}{2} + 7 - 0 = 2{,}5 + 7 = 9{,}5\ . \quad \lrcorner$$

4. $\int_1^2 \left(\frac{5}{x} + \frac{2}{x^3} - 1\right) dx$.

$$\ulcorner \quad \int_1^2 \left(\frac{5}{x} + \frac{2}{x^3} - 1\right) dx = \int_1^2 \left(5\cdot\frac{1}{x} + 2\cdot x^{-3} - 1\right) dx = \left(5\ln|x| + 2\cdot\frac{x^{-3+1}}{-3+1} - x\right)\Bigg|_1^2 =$$

$$= \left(5\ln|x| - x^{-2} - x\right)\Big|_1^2 = \left(5\ln|x| - \frac{1}{x^2} - x\right)\Bigg|_1^2 =$$

$$= \left(5\ln 2 - \frac{1}{2^2} - 2\right) - \left(5\ln 1 - \frac{1}{1^2} - 1\right) = 5\ln 2 - \frac{1}{4} - 2 - 5\cdot 0 + 1 + 1 =$$

$$= 5\ln 2 - \frac{1}{4}\ . \quad \lrcorner$$

5. $\int_0^1 \left(5e^x - 10x^4 + \frac{1}{1+x^2}\right) dx$.

$$\ulcorner \quad \int_0^1 \left(5e^x - 10x^4 + \frac{1}{1+x^2}\right) dx = \left(5\cdot e^x - 10\cdot\frac{x^5}{5} + \operatorname{arctg} x\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \left(5\cdot e^x - 2x^5 + \operatorname{arctg} x\right)\Big|_0^1 = \left(5\cdot e^1 - 2\cdot 1^5 + \operatorname{arctg} 1\right) - \left(5\cdot e^0 - 2\cdot 0^5 + \operatorname{arctg} 0\right) =$$

$$= 5e - 2 + \frac{\pi}{4} - (5 - 0 + 0) = 5e + \frac{\pi}{4} - 7\ . \quad \lrcorner$$

6. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{2}}$.

$\ulcorner$ $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} \operatorname{tg} \frac{x}{2}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0} = 2\operatorname{tg} \frac{x}{2}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0} = 2\operatorname{tg} 0 - 2\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 0 + 2 = 2$. $\lrcorner$

<u>Вправи для самостійного розв’язання</u>

Обчислити визначені інтеграли:

7. $\int\limits_{1}^{4} \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

8. $\int\limits_{0}^{1} \left(2x - 3x^2 - \frac{1}{3}\right) dx$.

9. $\int\limits_{2}^{5} \frac{dx}{x+1}$.

10. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sin 2x\, dx$.

Відповіді:

7. 2.

8. $-\frac{1}{3}$.

9. $\ln 2$.

10. $-0,5$.

2. Заміна змінної у визначеному інтегралі

Якщо у визначеному інтегралі $\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$ вводиться нова змінна $\begin{cases} t = t(x) \\ dt = t'(x)\,dx, \end{cases}$ то слід змінити межі інтегрування. Нижня межа інтегрування t_1 визначається як значення введеної змінної в точці $x = a$, а верхня межа t_2 – в точці $x = b$, тобто $\begin{cases} t_1 = t(a) \\ t_2 = t(b). \end{cases}$

11. $\int\limits_0^2 \frac{2x\,dx}{x^2+1}$.

┌ Введемо нову змінну $t = x^2 + 1$. Тоді $dt = \left(x^2+1\right)' dx = 2x\,dx$.

Обчислимо нові межі інтегрування: $\begin{cases} t_1 = t(0) = 0^2 + 1 = 1 \\ t_2 = t(2) = 2^2 + 1 = 5. \end{cases}$ Маємо

$$\int\limits_0^2 \frac{2x\,dx}{x^2+1} = \int\limits_1^5 \frac{dt}{t} = \ln|t|\Big|_1^5 = \ln 5 - \ln 1 = \ln 5 - 0 = \ln 5\,. \quad ┘$$

12. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \,\cos x\,dx$.

┌ Введемо нову змінну $t = \sin x$, тоді $dt = (\sin x)' dx = \cos x\,dx$.

Нові межі інтегрування: $\begin{cases} t_1 = t(0) = \sin 0 = 0 \\ t_2 = t\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1. \end{cases}$ Маємо

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x\,dx = \int\limits_0^1 t^2 dt = \frac{t^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}\,. \quad ┘$$

13. $\int\limits_0^2 x e^{x^2} dx$.

┌ Нехай $t = x^2$. Тоді $dt = \left(x^2\right)' dx = 2x\,dx$ або $x\,dx = \frac{1}{2}dt$,

$\begin{cases} t_1 = t(0) = 0^2 = 0 \\ t_2 = t(2) = 2^2 = 4. \end{cases}$

Маємо $\int\limits_0^2 x e^{x^2} dx = \int\limits_0^2 e^{x^2} \cdot x\,dx = \int\limits_0^4 e^t \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^4 e^t\,dt = \frac{1}{2}e^t\Big|_0^4 =$

$$= \frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2}e^0 = \frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(e^4 - 1\right). \quad ┘$$

14. $\int\limits_{-1}^{1}\frac{x^2dx}{x^6+1}$.

⌈ Нехай $t=x^3$. Тоді $dt=3x^2dx$ або $x^2dx=\frac{1}{3}dt$,

$\begin{cases} t_1=t(-1)=(-1)^3=-1 \\ t_2=t(1)=1^3=1. \end{cases}$ Маємо

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{x^2dx}{x^6+1}=\int\limits_{-1}^{1}\frac{x^2dx}{\left(x^3\right)^2+1}=\int\limits_{-1}^{1}\frac{\frac{1}{3}dt}{t^2+1}=\frac{1}{3}\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{t^2+1}dt=\frac{1}{3}\operatorname{arctg}t\Big|_{-1}^{1}=$$

$$=\frac{1}{3}\operatorname{arctg}t\Big|_{-1}^{1}=\frac{1}{3}\left(\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}(-1)\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{6}.$$ ⌋

Якщо у визначеному інтегралі робимо заміну: $\begin{cases} x=x(t) \\ dx=x'(t)\,dt, \end{cases}$ то для встановлення меж нової змінної t потрібно з рівняння $x=x(t)$ виразити $t=t(x)$. Тоді нові межі інтегрування $\begin{cases} t_1=t(a) \\ t_2=t(b). \end{cases}$

15. $\int\limits_{4}^{9}\frac{1}{\sqrt{x}+1}dx$.

⌈ Покладемо $\sqrt{x}=t$. Тоді $x=t^2$, $dx=2t\,dt$. Межі інтегрування нової змінної: $\begin{cases} t_1=\sqrt{4}=2 \\ t_2=\sqrt{9}=3. \end{cases}$ Маємо

$$\int\limits_{4}^{9}\frac{1}{\sqrt{x}+1}dx=\int\limits_{2}^{3}\frac{1}{t+1}2t\,dt=2\int\limits_{2}^{3}\frac{t}{t+1}dx=2\int\limits_{2}^{3}\frac{t+1-1}{t+1}dx=$$

$$=2\int\limits_{2}^{3}\left(\frac{t+1}{t+1}-\frac{1}{t+1}\right)dt==2\int\limits_{2}^{3}\left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt=2\left(t-\ln|t+1|\right)\Big|_{2}^{3}=$$

$$= 2\left(3 - \ln|3+1|\right) - 2\left(2 - \ln|2+1|\right) == 6 - 2\ln 4 - 4 + 2\ln 3 =$$

$$= 2 + 2\left(\ln 3 - \ln 4\right) = 2 + 2\ln\frac{3}{4}. \quad \lrcorner$$

16. $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$.

$\ulcorner$ Нехай $x = \sin t$, тоді $dx = (\sin t)' dt = \cos t\, dt$. Нові межі інтегрування знаходимо за формулою $t = \arcsin x$:

$\begin{cases} t_1 = \arcsin 0 = 0 \\ t_2 = \arcsin 1 = \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$ Маємо

$$\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\,dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t}\cdot\cos t\,dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\cdot\cos t\,dt =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\left(1+\cos 2t\right)dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1+\cos 2t\right)dt = \frac{1}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sin 2\cdot\frac{\pi}{2}}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(0 + \frac{\sin 2\cdot 0}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sin\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\sin 0}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{0}{2}\right) - \frac{1}{2}\cdot\frac{0}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

(в ході розв’язання скористались формулою $\cos^2 t = \dfrac{1}{2}\left(1+\cos 2t\right)$). $\lrcorner$

17. $\int\limits_0^1 \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}\,dx$.

$\ulcorner$ Для того щоб позбутися ірраціональності в підінтегральній функції, тобто кубічного і квадратного коренів, потрібно зробити підстановку $\sqrt[6]{x} = t$. Тоді $x = t^6$, $dx = \left(t^6\right)' dt = 6t^5 dt$. Межі інтегрування нової змінної:

$$\begin{cases} t_1 = \sqrt[6]{0} = 0 \\ t_2 = \sqrt[6]{1} = 1. \end{cases}$$ Маємо

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}dx = \int_0^1 \frac{1}{t^2+t^3}\cdot 6t^5 dt = 6\int_0^1 \frac{t^5}{t^2+t^3}dt = 6\int_0^1 \frac{t^3}{t+1}dt =$$

$$= \left| \begin{array}{r|l} -\,t^3 & t+1 \\ \underline{t^3+t^2} & \overline{t^2-t+1} \\ -\,-t^2 & \\ \underline{-t^2-t} & \\ -\,t & \\ \underline{t+1} & \\ -1 & \end{array} \right| = 6\int_0^1 \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1} \right) dt = 6\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t+1| \right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= 6\left(\frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2} + 1 - \ln|1+1| \right) - 6\left(\frac{0^3}{3} - \frac{0^2}{2} + 0 - \ln|0+1| \right) =$$

$$= 6\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 - \ln 2 \right) - 6\left(0 - 0 + 0 - \ln 1\right) = 2 - 3 + 6 - 6\ln 2 + 6\cdot 0 =$$

$$= 5 - 6\ln 2 .$$

Зауважимо, що використаний у прикладі прийом виділення цілої частини раціонально дробу $\frac{t^3}{t+1}$ є стандартним. В даному прикладі це можна було б зробити ще й так:

$$\frac{t^3}{t+1} = \frac{t^3+1-1}{t+1} = \frac{t^3+1^3}{t+1} - \frac{1}{t+1} = \frac{(t+1)(t^2-t+1)}{t+1} - \frac{1}{t+1} = t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1} . \quad \lrcorner$$

<u>Вправи для самостійного розв'язання</u>

Обчислити визначені інтеграли:

18. $\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln^2 x}dx$.

19. $\int_4^9 \frac{2}{\sqrt{x}+3}dx$.

20. $\int_0^{\ln\sqrt{3}} \frac{e^x dx}{e^{2x}+1}$.

21. $\int_1^e \frac{4\ln^3 x}{x}dx$.

22. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x+1}$.

Відповіді:

18. $\frac{1}{2}$. **19.** $4-\ln\frac{36}{25}$. **20.** $\frac{\pi}{12}$. **21.** 1. **22.** $\frac{\pi}{4}$.

3. Інтегрування частинами

Обчислення визначених інтегралів методом інтегрування частинами полягає у використанні формули

$$\int\limits_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du .$$

23. $\int\limits_0^1 xe^x dx$.

⌐ Нехай $\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx. \end{cases}$ Тоді $\begin{cases} du = (x)' \,dx = 1\cdot dx = dx \\ v = \int dv = \int e^x dx = e^x. \end{cases}$ Маємо

$$\int\limits_0^1 xe^x dx = x\cdot e^x\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 e^x dx = \left(1\cdot e^1 - 0\cdot e^0\right) - e^x\Big|_0^1 = e - \left(e^1 - e^0\right) =$$
$$= e - e + 1 = 1 .$$ ⌟

24. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$.

⌐ Нехай $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos x dx. \end{cases}$ Тоді $\begin{cases} du = x' dx = dx \\ v = \int \cos x\,dx = \sin x. \end{cases}$ Маємо

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx = x\cdot\sin x\Big|_0^{\pi/2} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \left(\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} - 0\cdot\sin 0\right) + \cos x\Big|_0^{\pi/2} =$$
$$= \frac{\pi}{2}\cdot 1 + \left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = \frac{\pi}{2} + 0 - 1 = \frac{\pi}{2} - 1 .$$ ⌟

25. $\int\limits_1^e x^2 \ln x\, dx$.

⌈ Нехай $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x^2 dx \end{cases}$. Тоді $\begin{cases} du = (\ln x)'\, dx \\ v = \int x^2 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \frac{x^3}{3}. \end{cases}$

$$\int\limits_1^e x^2 \ln x\, dx = \frac{x^3}{3} \ln x \Big|_1^e - \int\limits_1^e \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx = \left(\frac{e^3}{3} \ln e - \frac{1^3}{3} \ln 1 \right) - \frac{1}{3} \int\limits_1^e x^2 dx =$$

$$= \left(\frac{e^3}{3} \cdot 1 - \frac{1}{3} \cdot 0 \right) - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_1^e = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{e^3}{3} - \frac{1^3}{3} \right) = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2e^3 + 1}{9}. \quad ⌋$$

26. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx$.

⌈ Нехай $\begin{cases} u = x \\ dv = \frac{1}{\cos^2 x} dx \end{cases}$. Тоді $\begin{cases} du = (x)'\, dx \\ v = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \operatorname{tg} x. \end{cases}$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = x \cdot \operatorname{tg} x \Big|_0^{\pi/4} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x\, dx = \left(\frac{\pi}{4} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - 0 \cdot \operatorname{tg} 0 \right) + \ln |\cos x| \Big|_0^{\pi/4} =$$

$$= \frac{\pi}{4} \cdot 1 + \ln \left(\cos \frac{\pi}{4} \right) - \ln (\cos 0) = \frac{\pi}{4} + \ln \frac{\sqrt{2}}{2} - \ln 1 = \frac{\pi}{4} + \ln \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \ln \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad ⌋$$

27. $\int\limits_0^1 \operatorname{arctg} x\, dx$.

⌈ Нехай: $\begin{cases} u = \operatorname{arctg} x \\ dv = dx. \end{cases}$ Тоді $\begin{cases} du = (\operatorname{arctg} x)'\, dx = \frac{1}{x^2 + 1} dx \\ v = \int dx = x. \end{cases}$ Маємо

$$\int_0^1 \operatorname{arctg} x\, dx = x \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 - \int_0^1 x \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{xdx}{x^2+1}.$$

Обчислимо інтеграл $\int_0^1 \frac{xdx}{x^2+1}$. Нехай $t = x^2+1$, тоді $dt = \left(x^2+1\right)' dx = 2xdx$ або $xdx = \frac{1}{2}dt$. Нові межі інтегрування: $\begin{cases} t_1 = t(0) = 0^2+1 = 1 \\ t_2 = t(1) = 1^2+1 = 2. \end{cases}$ Маємо

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{x^2+1} = \int_1^2 \frac{\frac{1}{2}dt}{t} = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{t}dt = \frac{1}{2}\ln|t|\Big|_1^2 = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 1 = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\cdot 0 = \frac{1}{2}\ln 2.$$

Отже, $\int_0^1 \operatorname{arctg} x\, dx = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\ln 2$. ⌋

Вправи для самостійного розв’язання

Обчислити визначені інтеграли:

28. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+1)\sin x\, dx$.

29. $\int_0^1 (4x-2)e^x dx$.

30. $\int_0^1 \arcsin x\, dx$.

31. $\int_1^2 x^4 \ln x\, dx$.

32. $\int_0^1 x \operatorname{arctg} x\, dx$.

Відповіді:

28. 3.

29. 4.

30. $\frac{\pi}{2} - 1$.

31. $\frac{32}{5}\ln 2 - \frac{31}{25}$.

32. $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.

4. Невласні інтеграли

4.1. Невласні інтеграли I роду

За означенням *невласні інтеграли I роду* обчислюються за формулами:

1) $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx$; $\quad(1)$

2) $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx$; $\quad(2)$

3) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^0 f(x)\,dx + \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_0^b f(x)\,dx$. $\quad(3)$

Якщо вказані границі існують і скінченні, то відповідні невласні інтеграли дорівнюють значенню цих границь, а у випадку **3)** сумі значень двох границь. При цьому невласні інтеграли називають *збіжними*.

Якщо ж вказані границі дорівнюють нескінченності або не існують (для випадку **3)** хоча б одна з двох границь), то відповідні невласні інтеграли називають *розбіжними*.

Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

33. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x^4}\,dx$.

$\ulcorner$ Згідно з формулою (1) маємо

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x^4}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^b\frac{1}{x^4}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^b x^{-4}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{x^{-3}}{-3}\right)\Bigg|_1^b = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{3x^3}\Bigg|_1^b\right) =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{3b^3}+\frac{1}{3\cdot1^3}\right) = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{3b^3}\right)+\frac{1}{3} = 0+\frac{1}{3} = \frac{1}{3}. \quad \lrcorner$$

34. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$.

$$\ulcorner \quad \int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^b\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^b x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\Bigg|_1^b = \lim_{b\to+\infty}\left(2\sqrt{x}\right)\Big|_1^b =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left(2\sqrt{b}-2\sqrt{1}\right).$$

Так як $\lim\limits_{b\to+\infty}\sqrt{b}=+\infty$, то $\lim\limits_{b\to+\infty}\left(2\sqrt{b}-2\right)=+\infty$ (див. розділ 4).

Отже, заданий інтеграл розбіжний. ⌋

35. $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$.

$$⌜\ \int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_0^{b} xe^{-x^2}dx=\left|\begin{array}{l} t=-x^2\\ dt=\left(-x^2\right)' dx=-2xdx\\ xdx=-\dfrac{1}{2}dt\\ \textit{межі}:\\ t_1=-0^2=0\\ t_2=-b^2\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_0^{-b^2}\left(-\frac{1}{2}e^t\right)dt=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^{-b^2}e^t dt\right)=-\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left(e^t\right)\Big|_0^{-b^2}=$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left(e^{-b^2}-e^0\right)=-\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{e^{b^2}}-1\right)=-\frac{1}{2}\left(\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{e^{b^2}}-1\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}(0-1)=\frac{1}{2}.\ ⌋$$

36. $\int\limits_2^{+\infty}\dfrac{dx}{x\ln x}$.

$$⌜\ \int\limits_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_2^{b}\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}dx=\left|\begin{array}{l} t=\ln x\\ dt=\dfrac{1}{x}dx\\ \textit{межі}:\\ t_1=\ln 2,\ t_2=\ln b\end{array}\right|=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_{\ln 2}^{\ln b}\frac{1}{t}dt=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\ln|t|\Big|_{\ln 2}^{\ln b}=\lim_{b\to+\infty}\left(\ln|\ln b|-\ln|\ln 2|\right).$$

Так як $\lim\limits_{b\to+\infty}\ln b=+\infty$, то $\lim\limits_{b\to+\infty}\left(\ln|\ln b|-\ln\ln|2|\right)=+\infty$ (див. розділ 4).

Отже, заданий інтеграл розбіжний. ⌋

37. $\int\limits_2^{+\infty}\dfrac{dx}{x\ln^2 x}$.

$\ulcorner$ $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}=\lim_{b\to+\infty}\int_2^b\frac{1}{\ln^2 x}\frac{1}{x}dx=\left|\begin{array}{l} t=\ln x\\ dt=\frac{1}{x}dx\\ \text{межі}:\\ t_1=\ln 2\\ t_2=\ln b\end{array}\right|=\lim_{b\to+\infty}\int_{\ln 2}^{\ln b}\frac{1}{t^2}dt=$

$$=\lim_{b\to+\infty}\int_{\ln 2}^{\ln b}t^{-2}dt==\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{t^{-1}}{-1}\right)\Bigg|_{\ln 2}^{\ln b}=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{-1}{t}\right)\Bigg|_{\ln 2}^{\ln b}=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{-1}{\ln b}+\frac{1}{\ln 2}\right)=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{\ln b}\right)+\frac{1}{\ln 2}=0+\frac{1}{\ln 2}=\frac{1}{\ln 2}.\ \lrcorner$$

38. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\cos x\,dx$.

$\ulcorner$ $\displaystyle\int_0^{+\infty}\cos x\,dx=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\cos x\,dx=\lim_{b\to+\infty}\sin x\Big|_0^b=\lim_{b\to+\infty}(\sin b-\sin 0)=\lim_{b\to+\infty}\sin b$.

Отримана границя не існує (див. розділ 4, рис. 4).

Отже, заданий невласний інтеграл I роду розбіжний. $\lrcorner$

39. $\displaystyle\int_{-\infty}^{1}\frac{x\,dx}{x^4+1}$.

$\ulcorner$ Відповідно до формули (2) маємо

$$\int_{-\infty}^{1}\frac{x\,dx}{x^4+1}=\lim_{a\to-\infty}\int_a^1\frac{x\,dx}{\left(x^2\right)^2+1}=\left|\begin{array}{l} t=x^2,\ dt=2x\,dx,\\ x\,dx=\frac{1}{2}dt\\ \text{межі}:\\ t_1=a^2,\ t_2=1^2=1\end{array}\right|=\lim_{a\to-\infty}\int_{a^2}^{1}\frac{\frac{1}{2}dt}{t^2+1}=$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\frac{1}{2}\int_{a^2}^{1}\frac{1}{t^2+1}dt=\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\operatorname{arctg}t\Big|_{a^2}^{1}=\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\left(\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}a^2\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}a^2\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{8},$$

оскільки $\displaystyle\lim_{a\to-\infty}\operatorname{arctg}a^2=\frac{\pi}{2}$ (див. розділ 4, рис. 5). $\lrcorner$

40. $\int\limits_{-\infty}^{0} xe^x dx$.

⌐ Використаємо формулу інтегрування частинами $\int\limits_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du$. Нехай $\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx. \end{cases}$ Тоді $\begin{cases} du = dx \\ v = \int e^x dx = e^x. \end{cases}$

Маємо $\int\limits_{-\infty}^{0} xe^x dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\left(xe^x\Big|_a^0 - \int\limits_a^0 e^x dx \right) = \lim\limits_{a\to-\infty}\left(0\cdot e^0 - a\cdot e^a - e^x\Big|_a^0 \right) =$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left(\frac{-a}{e^{-a}} - \left(e^0 - e^a\right) \right) = \lim_{a\to-\infty}\left(\frac{-a}{e^{-a}} - 1 + e^a \right).$$

Оскільки $\lim\limits_{a\to-\infty} e^a = 0$ (див. розділ 4, рис. 2) то потрібно обчислити границю $\lim\limits_{a\to-\infty} \frac{-a}{e^{-a}}$. Так як $\begin{cases} \lim\limits_{a\to-\infty}(-a) = +\infty \\ \lim\limits_{a\to-\infty} e^{-a} = +\infty \end{cases}$ (див. розділ 4, рис. 2), то для обчислення цієї границі можна скористатися правилом Лопіталя (див. розділ 5): $\lim\limits_{a\to-\infty} \frac{-a}{e^{-a}} = \lim\limits_{a\to-\infty} \frac{(-a)_a'}{\left(e^{-a}\right)_a'} = \lim\limits_{a\to-\infty} \frac{-1}{-e^{-a}} = \lim\limits_{a\to-\infty} e^a = 0$.

Отже, $\int\limits_{-\infty}^{0} xe^x dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\left(\frac{-a}{e^{-a}} - 1 + e^a \right) = 0 - 1 + 0 = -1$. ⌟

41. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx$.

⌐ Згідно з формулою (3) маємо

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+1} dx + \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_a^0 \frac{1}{x^2+1} dx + \lim_{b\to+\infty} \int\limits_0^b \frac{1}{x^2+1} dx =$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left(\operatorname{arctg} x\Big|_a^0 \right) + \lim_{b\to+\infty}\left(\operatorname{arctg} x\Big|_0^b \right) = \lim_{a\to-\infty}\left(\operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg} a \right) + \lim_{b\to+\infty}\left(\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 0 \right) =$$

$$= -\lim_{a\to-\infty} \operatorname{arctg} a + \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} b = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Тут $\begin{cases} \lim\limits_{a\to-\infty} \operatorname{arctg} a = -\frac{\pi}{2} \\ \lim\limits_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} b = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ (див. розділ 4, рис. 5). ⌟

42. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^x dx$.

⌈ $$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^x dx = \int\limits_{-\infty}^{0} e^x dx + \int\limits_{0}^{+\infty} e^x dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{0} e^x dx + \lim_{b\to+\infty}\int\limits_{0}^{b} e^x dx =$$

$$= \lim_{a\to-\infty} e^x\Big|_a^0 + \lim_{b\to+\infty} e^x\Big|_0^b = \lim_{a\to-\infty}\left(e^0 - e^a\right) + \lim_{b\to+\infty}\left(e^b - e^0\right) =$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left(1 - e^a\right) + \lim_{b\to+\infty}\left(e^b - 1\right) = +\infty ,$$

так як перша границя дорівнює 1, а друга – ($+\infty$).

Отже, заданий інтеграл є розбіжним. ⌋

43. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3}{1+x^4} dx$.

⌈ $$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3}{1+x^4} dx = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{x^3}{1+x^4} dx + \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^3}{1+x^4} dx =$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{0} \frac{x^3}{1+x^4} dx + \lim_{b\to+\infty}\int\limits_{0}^{b} \frac{x^3}{1+x^4} dx = \left| \begin{array}{l} t = 1+x^4, \\ dt = 4x^3 dx, \\ x^3 dx = \frac{1}{4} dt \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\int\limits_{1+a^4}^{1} \frac{\frac{1}{4}dt}{t} + \lim_{b\to+\infty}\int\limits_{1}^{1+b^4} \frac{\frac{1}{4}dt}{t} = \lim_{a\to-\infty}\frac{1}{4}\int\limits_{1+a^4}^{1}\frac{1}{t}dt + \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{4}\int\limits_{1}^{1+b^4}\frac{1}{t}dt =$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{a\to-\infty}\ln|t|\Big|_{1+a^4}^{1} + \frac{1}{4}\lim_{b\to+\infty}\ln|t|\Big|_{1}^{1+b^4} =$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{a\to-\infty}\left(\ln 1 - \ln\left|1+a^4\right|\right) + \frac{1}{4}\lim_{b\to+\infty}\left(\ln\left|1+b^4\right| - \ln 1\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{a\to-\infty}\left(0 - \ln\left(1+a^4\right)\right) + \frac{1}{4}\lim_{b\to+\infty}\left(\ln\left(1+b^4\right) - 0\right) =$$

$$= -\frac{1}{4}\lim_{a\to-\infty}\ln\left(1+a^4\right) + \frac{1}{4}\lim_{b\to+\infty}\ln\left(1+b^4\right).$$

Оскільки $\begin{cases} \lim\limits_{a\to-\infty}\ln\left(1+a^4\right) = +\infty \\ \lim\limits_{b\to+\infty}\ln\left(1+b^4\right) = +\infty \end{cases}$, то заданий інтеграл є розбіжним. ⌋

Вправи для самостійного розв'язання

Обчислити невласні інтеграли I роду або довести їх розбіжність:

44. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{4}{x^5} dx$.

45. $\int\limits_{1}^{+\infty} (2x+1) dx$.

46. $\int\limits_{-\infty}^{1} e^x dx$.

47. $\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2} dx$.

48. $\int\limits_{0}^{+\infty} xe^{-x} dx$.

49. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 dx}{x^8+1}$.

50. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^5 dx}{x^6+2}$.

51. $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{1}{x \ln^3 x} dx$.

52. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2} dx$.

53. $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\operatorname{arcctg} x}{1+x^2} dx$.

Відповіді:

44. 1.

45. Розбіжний.

46. e.

47. 1.

48. 1.

49. $\frac{\pi}{4}$.

50. Розбіжний.

51. $\frac{1}{2\ln^2 2}$.

52. $\frac{\pi^3}{12}$.

53. $-\frac{\pi^2}{8}$.

4.2. Невласні інтеграли II роду

Невласний інтеграл II роду є узагальненням визначеного інтеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ на випадок, коли підінтегральна функція $f(x)$ необмежена на відрізку $[a,b]$.

Розрізняють три випадки:

1) $f(x)$ необмежена у точці $x=a$ ($\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$). Тоді

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx. \tag{4}$$

Тут і далі $\varepsilon > 0$, тобто ε прямує до нуля справа.

2) $f(x)$ необмежена у точці $x = b$ ($\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = \infty$). Тоді

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx \quad (\varepsilon > 0). \tag{5}$$

3) $f(x)$ необмежена у точці $c \in (a,b)$ ($\lim\limits_{x \to c} f(x) = \infty$). Тоді

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx \quad (\varepsilon > 0). \tag{6}$$

Якщо вказані границі існують і скінченні, то відповідні невласні інтеграли дорівнюють значенню цих границь, а у випадку **3)** сумі значень двох границь. При цьому невласні інтеграли називають *збіжними*. Якщо ж вказані границі дорівнюють нескінченності або не існують (для випадку **3)** хоча б одна з двох), то відповідні невласні інтеграли називають *розбіжними*.

Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

54. $\int\limits_2^3 \frac{1}{(x-2)^2}\,dx$.

$\ulcorner$ Оскільки $\lim\limits_{x \to 2+0} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty$ (див. розділ 4), то підінтегральна функція необмежена у точці $x = 2$. Згідно з формулою (4) дістанемо

$$\int_2^3 \frac{1}{(x-2)^2}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{2+\varepsilon}^{3} \frac{1}{(x-2)^2}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{2+\varepsilon}^{3} (x-2)^{-2}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left.\left(\frac{(x-2)^{-1}}{-1} \right)\right|_{2+\varepsilon}^{3} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left.\left(\frac{-1}{x-2} \right)\right|_{2+\varepsilon}^{3} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{-1}{3-2} - \frac{-1}{2+\varepsilon-2} \right) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(-1 + \frac{1}{\varepsilon} \right).$$

Так як $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} = \infty$, то $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \left(-1 + \frac{1}{\varepsilon} \right) = \infty$.

Отже, заданий невласний інтеграл II роду розбіжний. $\lrcorner$

55. $\int\limits_3^4 \frac{1}{\sqrt{x-3}}\,dx$.

$\ulcorner$ Підінтегральна функція необмежена у точці $x = 3$. Знаходимо

$$\int_3^4 \frac{1}{\sqrt{x-3}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{3+\varepsilon}^4 \frac{1}{\sqrt{x-3}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(2\sqrt{x-3}\right)\Big|_{3+\varepsilon}^4 =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(2\sqrt{4-3} - 2\sqrt{3+\varepsilon-3}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(2\cdot 1 - 2\cdot\sqrt{\varepsilon}\right) = 2 - 0 = 2 .\ \lrcorner$$

56. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

$\ulcorner$ Підінтегральна функція необмежена у точці $x = 1$. Відповідно до формули (5) дістанемо

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\arcsin x\Big|_0^{1-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\arcsin(1-\varepsilon) - \arcsin 0\right) = \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2} .\ \lrcorner$$

57. $\displaystyle\int_3^5 \frac{1}{x-5}\,dx$.

$\ulcorner$ Підінтегральна функція необмежена у точці $x = 5$. Знаходимо

$$\int_3^5 \frac{1}{x-5}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_3^{5-\varepsilon} \frac{1}{x-5}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\ln|x-5|\Big|_3^{5-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln|5-\varepsilon-5| - \ln|3-5|\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln\varepsilon - \ln 2\right) = -\infty$$

(див. розділ 4, рис. 3). Отже, заданий інтеграл розбіжний. $\lrcorner$

58. $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{(x-2)^3}\,dx$.

$\ulcorner$ $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^3} = \infty$ (див. розділ 4), тобто підінтегральна функція необмежена у точці $x = 2$. Згідно з формулою (6) дістанемо

$$\int_1^3 \frac{1}{(x-2)^3}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{(x-2)^3}\,dx + \int_2^3 \frac{1}{(x-2)^3}\,dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_1^{2-\varepsilon} \frac{1}{(x-2)^3}\,dx + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{2+\varepsilon}^3 \frac{1}{(x-2)^3}\,dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_1^{2-\varepsilon} (x-2)^{-3}\, dx + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{2+\varepsilon}^{3} (x-2)^{-3}\, dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(x-2)^{-2}}{-2} \Bigg|_1^{2-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(x-2)^{-2}}{-2} \Bigg|_{2+\varepsilon}^{3} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{-1}{2(x-2)^2} \Bigg|_1^{2-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{-1}{2(x-2)^2} \Bigg|_{2+\varepsilon}^{3} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{-1}{2(2-\varepsilon-2)^2} - \frac{-1}{2(1-2)^2} \right) + \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{-1}{2(3-2)^2} - \frac{-1}{2(2+\varepsilon-2)^2} \right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{-1}{2\varepsilon^2} + \frac{1}{2} \right) + \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{-1}{2} + \frac{1}{2\varepsilon^2} \right).$$

Так як $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{1}{\varepsilon^2} = \infty$, то заданий інтеграл є розбіжним. ⌋

59. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x \ln x}\, dx$.

⌈ Так як $\ln 1 = 0$, то підінтегральна функція необмежена у точці $x = 1$.

$$\int_1^2 \frac{1}{x \ln x}\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{1+\varepsilon}^{2} \frac{1}{x \ln x}\, dx = \left| \begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = (\ln x)'\, dx = \dfrac{1}{x} dx \\ \textit{межі} \;\; t_1 = \ln 2 \\ \qquad\quad\; t_2 = \ln(1+\varepsilon) \end{array} \right| = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\ln(1+\varepsilon)}^{\ln 2} \frac{1}{t}\, dt =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \ln|t| \Big|_{\ln(1+\varepsilon)}^{\ln 2} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\ln \ln 2 - \ln \ln(1+\varepsilon) \right).$$

Оскільки $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \ln \ln(1+\varepsilon) = -\infty$, то заданий інтеграл розбіжний. ⌋

60. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

⌈ Аналогічно попередньому прикладу маємо

$$\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{1+\varepsilon}^{2} \frac{1}{x \cdot \sqrt{\ln x}}\, dx = \left| \begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \dfrac{1}{x} dx \end{array} \right| = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\ln(1+\varepsilon)}^{\ln 2} \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(2\sqrt{t}\right)\Big|_{\ln(1+\varepsilon)}^{\ln 2} = 2\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sqrt{\ln 2}-\sqrt{\ln(1+\varepsilon)}\right) = 2\left(\sqrt{\ln 2}-\sqrt{\lim_{\varepsilon\to 0}\ln(1+\varepsilon)}\right) =$$

$$= 2\left(\sqrt{\ln 2}-\sqrt{\ln 1}\right) = 2\sqrt{\ln 2}\ . \quad \lrcorner$$

61. $\int\limits_0^1 \ln x\,dx$.

$\ulcorner$ Оскільки $\lim\limits_{x\to 0+0}\ln x = -\infty$ (див. розділ 4, рис. 3а), то підінтегральна функція необмежена у точці $x=0$. Перш, ніж застосувати формулу (4) , обчислимо інтеграл ($\varepsilon\in(0,1)$):

$$\int\limits_\varepsilon^1 \ln x\,dx = \left|\begin{matrix} u=\ln x,\ dv=dx \\ du=\dfrac{1}{x}dx,\ v=x\end{matrix}\right| = \ln x\cdot x\Big|_\varepsilon^1 - \int\limits_\varepsilon^1 x\frac{1}{x}dx = \varepsilon\ln\varepsilon - \ln 1 - x\Big|_\varepsilon^1 =$$

$$= \varepsilon\ln\varepsilon - 1 + \varepsilon\ .$$

За формулою (4) дістанемо

$$\int\limits_0^1 \ln x\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\varepsilon^1 \ln x\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\varepsilon\ln\varepsilon - 1 + \varepsilon\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\ln\varepsilon - 1\ .$$

Маємо границю з невизначеністю $0\cdot\infty$. Звівши дану невизначеність до невизначеності $\dfrac{\infty}{\infty}$, використаємо правило Лопіталя:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\ln\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln\varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(\ln\varepsilon)'}{\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)'} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2}} = -\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon = 0\ .$$

Остаточно маємо $\int\limits_0^1 \ln x\,dx = 0 - 1 = -1$. $\lrcorner$

Вправи для самостійного розв’язання

Обчислити невласні інтеграли II роду або довести їх розбіжність:

62. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x\,dx}{\sin^2 x}$.

63. $\int\limits_1^2 \dfrac{2}{x\ln^3 x}dx$.

64. $\int_{-1}^{0}\frac{3}{(x+1)^4}dx$.

65. $\int_{0}^{1}\frac{1}{\operatorname{arctg}x\cdot(1+x^2)}dx$.

66. $\int_{1}^{2}\frac{1}{\sqrt{2-x}}dx$.

67. $\int_{0}^{2}\frac{1}{x-1}dx$.

68. $\int_{-3}^{-2}\frac{1}{\sqrt[3]{x+2}}dx$.

69. $\int_{1}^{2}\frac{3}{x\sqrt[4]{\ln x}}dx$.

70. $\int_{2}^{3}\frac{4}{\sqrt[5]{x-2}}dx$.

Відповіді:

62. Розбіжний.

63. Розбіжний.

64. Розбіжний.

65. Розбіжний.

66. 2.

67. Розбіжний.

68. $-1{,}5$.

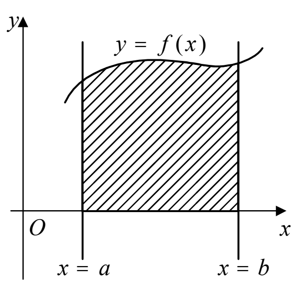
69. $4\sqrt[4]{\ln^3 2}$.

70. 5.

5. Застосування визначеного інтеграла

5.1. Обчислення площ плоских фігур

1. Якщо на відрізку $[a,b]$ функція $y=f(x)$ неперервна і $f(x)\geq 0$, то площа *криволінійної трапеції* (рис. 1), обмеженої графіком функції $y=f(x)$, прямими $x=a$, $x=b$ та віссю Ox, обчислюється за формулою



$$S=\int_{a}^{b}f(x)dx. \qquad (7)$$

Рис. 1

2. Площа фігури (рис. 2), обмеженої знизу графіком функції $y = f_1(x)$, зверху – $y = f_2(x)$ та прямими $x = a$, $x = b$, обчислюється за формулою

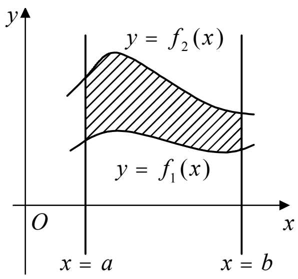


Рис. 2

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right) dx. \qquad (8)$$

Відрізки, які обмежують зліва та справа фігуру на рис. 2, можуть вироджуватись у точки.

3. Якщо криволінійна трапеція обмежена кривою, заданою параметрично

$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, прямими $x = a$, $x = b$ та віссю Ox, то її площа обчислюється за формулою

$$S = \int_\alpha^\beta y(t) \cdot x'(t)\, dt \qquad (9)$$

де $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$ і $y(t) \geq 0$.

4. Площа криволінійного сектора (рис. 3), обмеженого у полярній системі координат неперервною кривою $\rho = \rho(\varphi)$ та променями $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, обчислюється за формулою

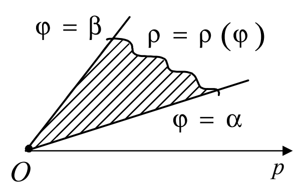


Рис. 3

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)\, d\varphi. \qquad (10)$$

71. Обчислити площу криволінійної трапеції, обмеженої параболою $y=\frac{1}{2}x^2$, прямими $x=3$, $x=6$ та віссю Ox.

Γ Криволінійна трапеція позначена на рис. 4 штрихуванням.

Знайдемо її площу за формулою (7):

$$S=\int_3^6 \frac{1}{2}x^2dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_3^6=$$

$$=\frac{1}{6}\left(6^3-3^3\right)=\frac{1}{6}(216-27)=$$

$$=\frac{63}{2}=31{,}5 \quad \text{(кв. од.).} \quad \lrcorner$$

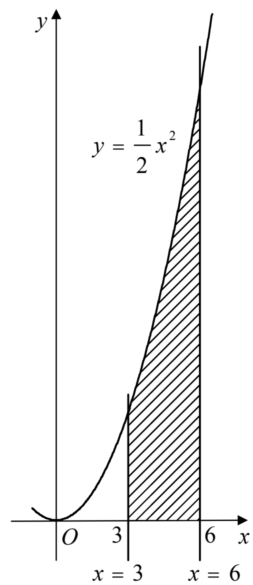


Рис. 4

72. Обчислити площу криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y=\sin x$, $0\le x\le\pi$, та віссю Ox.

Γ Криволінійна трапеція позначена на рис. 5 штрихуванням. Знайдемо її площу за формулою (7):

$$S=\int_0^\pi \sin x\,dx=-\cos x\Big|_0^\pi=$$

$$=1+1=2 \quad \text{(кв. од.).} \quad \lrcorner$$

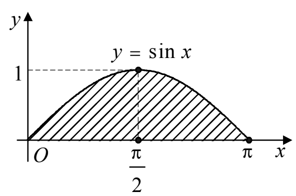


Рис. 5

73. Знайти площу фігури, обмеженої графіками функцій $y=6-x^2$, $y=x$.

Γ $y=6-x^2$ – парабола, вітки якої направлені вниз. Заповнимо таблицю для зображення параболи:

x	0	$\sqrt{6}$	$-\sqrt{6}$
$y=6-x^2$	6	0	0

Для знаходження абсцис ($x_1 = a$, $x_2 = b$) точок перетину параболи з прямою розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} y = 6 - x^2 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow 6 - x^2 = x,$$

або $x^2 + x - 6 = 0$.

$D = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25$,

$$x_1 = a = \frac{-1 - \sqrt{25}}{2} = -3,$$

$$x_2 = b = \frac{-1 + \sqrt{25}}{2} = 2.$$

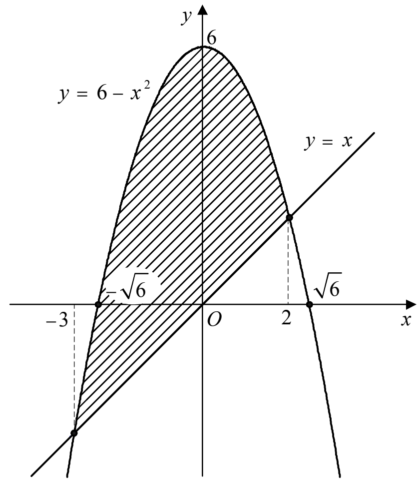


Рис. 6

Шукана фігура (рис. 6) обмежена знизу прямою, а зверху – параболою.
Тому за формулою (8) отримаємо

$$S = \int_{-3}^{2} \left(\left(6 - x^2\right) - x \right) dx = \left(6x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) \Bigg|_{-3}^{2} =$$

$$= \left(6 \cdot 2 - \frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2} \right) - \left(6 \cdot (-3) - \frac{(-3)^3}{3} - \frac{(-3)^2}{2} \right) =$$

$$= 12 - \frac{8}{3} - 2 + 18 - 9 + \frac{9}{2} = \frac{125}{6} = 20\frac{5}{6} \text{ (кв. од.).}$$ ⌋

74. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = \sqrt{8x}$ та $y = \dfrac{x^2}{8}$.

⌈ Для побудови ліній складемо таблиці:

x	0	2	8
$y = \sqrt{8x}$	0	4	8

;

x	0	4	8
$y = \dfrac{x^2}{8}$	0	2	8

.

Шукана фігура позначена на рис. 7 штрихуванням.

За формулою (8)

$$S=\int_0^8\left(\sqrt{8x}-\frac{x^2}{8}\right)dx=$$

$$=\left(\sqrt{8}\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{1}{8}\cdot\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^8=$$

$$=\left(\frac{2}{3}\sqrt{8}\cdot\sqrt{x^3}-\frac{1}{24}x^3\right)\Bigg|_0^8=$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{8}\cdot\sqrt{8^3}-\frac{1}{24}8^3=$$

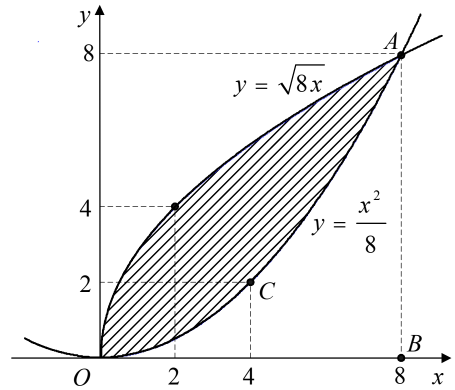


Рис. 7

$$\frac{2}{3}\cdot 8^2-\frac{8^2}{3}=\frac{128}{3}-\frac{64}{3}=\frac{64}{3}=21\frac{1}{3}\ \text{(кв. од.).}$$ ⌋

75. Знайти площу фігури, обмеженої графіками функцій $y=x$, $y=\frac{1}{x}$ та $y=2$.

⌈ Для побудови графіка функції $y=\frac{1}{x}$ складаємо таблицю:

x	1	2	$\frac{1}{2}$
$y=\frac{1}{x}$	1	$\frac{1}{2}$	2

Розіб'ємо прямою $x=1$ область на дві частини ADB та BDC. Тоді шукана площа

$$S=S_{ADB}+S_{BDC}.$$

За формулою (8)

$$S_{ADB}=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(2-\frac{1}{x}\right)dx=$$

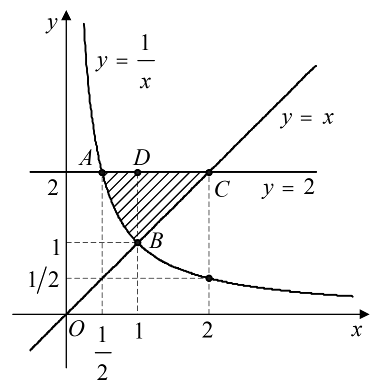


Рис. 8

$$= (2x - \ln x)\Big|_{1/2}^{1} = (2\cdot 1 - \ln 1) - \left(2\cdot\frac{1}{2} - \ln\frac{1}{2}\right) = 2 - 1 + \ln\frac{1}{2} = 1 - \ln 2.$$

За формулою (8):

$$S_{BDC} = \int_1^2 (2 - x)\,dx = \left(2x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^2 = \left(2\cdot 2 - \frac{2^2}{2}\right) - \left(2\cdot 1 - \frac{1^2}{2}\right) = 4 - 2 - 2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Отже, $S = S_{ADB} + S_{BDC} = 1 - \ln 2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - \ln 2$ (кв. од.). $\lrcorner$

76. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = \sqrt{x}$, $y = x - 2$, $y = 2 - x$.

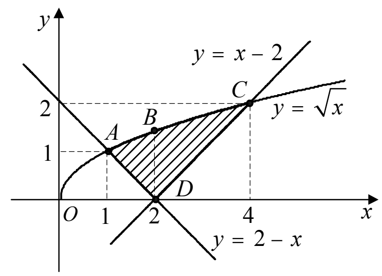


Рис. 9

$\ulcorner$ Складаємо таблиці для побудови графіків:

x	0	1	4
$y = \sqrt{x}$	0	1	2

;

x	2	4
$y = x - 2$	0	2

;

x	0	2
$y = 2 - x$	2	0

.

Штрихована область обмежена знизу двома лініями $y = 2 - x$ та $y = x - 2$. Потрібно розбити область на два криволінійні трикутники ABD та DBC. Тоді

$$S = S_{ABD} + S_{DBC}.$$

За формулою (8)

$$S_{ABD} = \int_1^2 \left(\sqrt{x} - (2 - x)\right)dx = \left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 2\cdot x + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^2 = \left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - 2x + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^2 =$$

$$= \left(\frac{2}{3}\sqrt{2^3} - 2\cdot 2 + \frac{2^2}{2}\right) - \left(\frac{2}{3}\sqrt{1^3} - 2\cdot 1 + \frac{1^2}{2}\right) = \frac{4}{3}\sqrt{2} - 4 + 2 - \frac{2}{3} + 2 - \frac{1}{2} = \frac{4}{3}\sqrt{2} - \frac{7}{6}.$$

За формулою (8)

$$S_{DBC}=\int_2^4\left(\sqrt{x}-(x-2)\right)dx=\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{x^2}{2}+2x\right)\Bigg|_2^4=\left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-\frac{x^2}{2}+2x\right)\Bigg|_2^4=$$

$$=\left(\frac{2}{3}\sqrt{4^3}-\frac{4^2}{2}+2\cdot4\right)-\left(\frac{2}{3}\sqrt{2^3}-\frac{2^2}{2}+2\cdot2\right)=\frac{16}{3}-8+8-\frac{4}{3}\sqrt{2}+2-4=\frac{10}{3}-\frac{4}{3}\sqrt{2}.$$

Отже, $S=\frac{4}{3}\sqrt{2}-\frac{7}{6}+\frac{10}{3}-\frac{4}{3}\sqrt{2}=\frac{13}{6}$ (кв. од.). ┘

77. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y=\frac{5}{x}$ та $y=6-x$.

┌ Для побудови графіків функцій складаємо таблиці:

x	1	5	2
$y=\frac{5}{x}$	5	1	$\frac{5}{2}$

;

x	0	6
$y=6-x$	6	0

.

Абсциси точок перетину ліній знайдемо із системи:

$$\left.\begin{array}{l} y=\frac{5}{x} \\ y=6-x \end{array}\right\}\Rightarrow\frac{5}{x}=6-x\Rightarrow$$

$\Rightarrow 5=6x-x^2$

або $x^2-6x+5=0$.

$D=36-4\cdot1\cdot5=16$,

$x_1=a=\frac{6-4}{2}=1$, $x_2=b=\frac{6+4}{2}=5$.

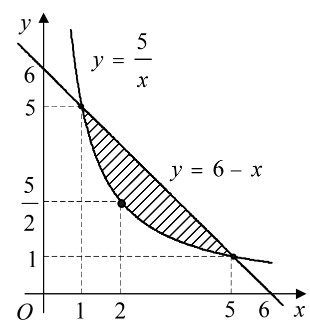


Рис. 10

За формулою (8)

$$S=\int_1^5\left((6-x)-\frac{5}{x}\right)dx=\left(6\cdot x-\frac{x^2}{2}-5\ln x\right)\Bigg|_1^5=$$

$$=\left(6\cdot5-\frac{25}{2}-5\ln5\right)-\left(6\cdot1-\frac{1}{2}-5\ln1\right)=30-\frac{25}{2}-5\ln5-6+\frac{1}{2}=12-5\ln5 \text{ (кв. од.).}$$ ┘

78. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y=\frac{x^3}{8}$, $y=1$, $x=3$.

⌈ Складаємо таблицю для побудови графіка функції $y=\frac{x^3}{8}$:

x	0	2	3
$y=\frac{x^3}{8}$	0	1	$3\frac{3}{8}$

.

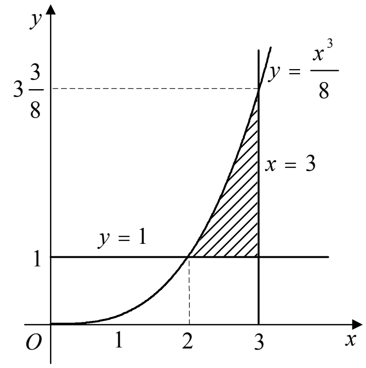


Рис. 11

За формулою (8)

$$S=\int_2^3\left(\frac{x^3}{8}-1\right)dx=\left(\frac{x^4}{32}-x\right)\Bigg|_2^3=$$

$$=\frac{81}{32}-3-\frac{16}{32}+2=1\frac{1}{32}\quad \text{(кв. од.).}$$ ⌋

79. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y=\frac{1}{1+x^2}$ та $y=0$.

⌈ Фігуру зображено на рис. 12. Це необмежена область. Узагальнюючи формулу (7), площу фігури обчислимо за формулою

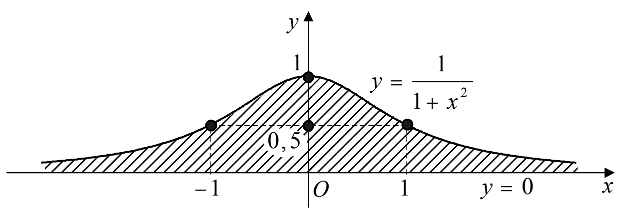


Рис. 12

$S=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$. Маємо невласний інтеграл першого роду (див. підрозділ 4). Тому

$$S=\lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{dx}{1+x^2}+\lim_{b\to\infty}\int_0^b\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{a\to-\infty}\operatorname{arctg}x\Big|_a^0+\lim_{b\to\infty}\operatorname{arctg}x\Big|_0^b=$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left(\operatorname{arctg}0-\operatorname{arctg}a\right)+\lim_{b\to\infty}\left(\operatorname{arctg}b-\operatorname{arctg}0\right)=0-\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}-0=$$

$$=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi \quad \text{(кв. од.).} \quad \lrcorner$$

80. Обчислити площу фігури, обмеженої аркою циклоїди $\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases}$, $t\in[0,2\pi]$, та віссю Ox.

$\ulcorner$ Складаємо таблицю для побудови графіка арки циклоїди:

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
$x=t-\sin t$	0	$\frac{\pi}{2}-1$	π	2π
$y=1-\cos t$	0	1	2	0

Площу заштрихованої області обчислимо за формулою (9). Так як $x=t-\sin t$, то $x'=(t-\sin t)'=1-\cos t$. Тоді

$$S=\int_0^{2\pi}(1-\cos t)(1-\cos t)\,dt=\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\,dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\cos^2 t\right)dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\frac{1}{2}(1+\cos 2t)\right)dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}-2\cos t+\frac{1}{2}\cos 2t\right)dt=$$

$$=\left(\frac{3}{2}t-2\sin t+\frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi}=$$

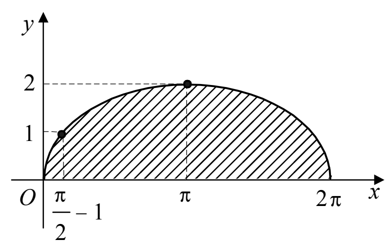


Рис. 13

$$=\left(\frac{3}{2}\cdot 2\pi-2\sin 2\pi+\frac{1}{4}\sin 4\pi\right)-\left(\frac{3}{2}\cdot 0-2\sin 0+\frac{1}{4}\sin 0\right)=3\pi \quad \text{(кв. од.).} \quad \lrcorner$$

81. Обчислити площу фігури, обмеженої астроїдою $\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t. \end{cases}$

⌐ Для побудови астроїди у першій чверті складаємо таблицю:

t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$x=\cos^3 t$	1	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3=\frac{\sqrt{2}}{4}$	0
$y=\sin^3 t$	0	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3=\frac{\sqrt{2}}{4}$	1

Фігура симетрична відносно осей Ox та Oy (рис. 14). Тому її площа $S=4S_{AOB}$.

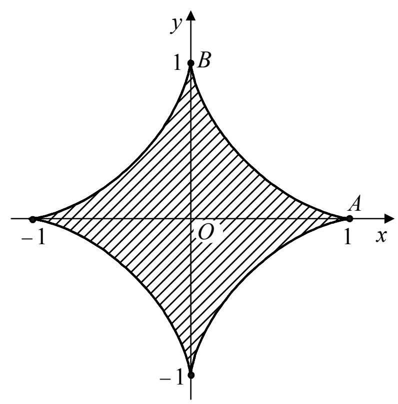


Рис. 14

Так як $x=\cos^3 t$, то $x'=-3\cos^2 t\cdot\sin t$.

За формулою (9)

$$S_{AOB}=-3\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^3 t\cdot\cos^2 t\cdot\sin t dt=$$

$$=3\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cdot\cos^2 t\cdot\sin^2 t dt=$$

$$=3\frac{1}{4}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t\cdot\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)dt=$$

$$=\frac{3}{8}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t\,(1-\cos 2t)\,dt=\frac{3}{8}\left(\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 4t}{2}dt-\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t\cdot\cos 2t dt\right)=$$

$$=\frac{3}{8}\left(\frac{t}{2}-\frac{1}{8}\sin 4t\right)\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}}-\left(\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^3 2t}{3}\right)\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{8}\cdot\frac{\pi}{4}-0=\frac{3\pi}{32}$$

Отже, $S=4\cdot\frac{3\pi}{32}=\frac{3\pi}{8}$ (кв. од). ⌋

82. Обчислити площу фігури, обмеженої кардіоїдою $\rho = a(1-\cos\varphi)$, де $a>0$ ($(\varphi;\rho)$ – полярні координати точки на площині).

$\ulcorner$ Складаємо таблицю для побудови графіка функції:

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\rho = a(1-\cos\varphi)$	0	$0{,}14a$	$a\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\approx 0{,}3a$	a	$2a$	a	0

Фігура симетрична відносно осі Ox. Тому її площа $S = 2S_{AOB}$.

За формулою (10)

$$S_{AOB} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} a^2(1-\cos\varphi)^2\,d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}\left(1-2\cos\varphi+\cos^2\varphi\right)d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}\left(1-2\cos\varphi+\frac{1}{2}(1+\cos 2\varphi)\right)d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}\left(\frac{3}{2}-2\cos\varphi+\frac{1}{2}\cos 2\varphi\right)d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\frac{3}{2}\varphi-2\sin\varphi+\frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{3}{4}\pi a^2.$$

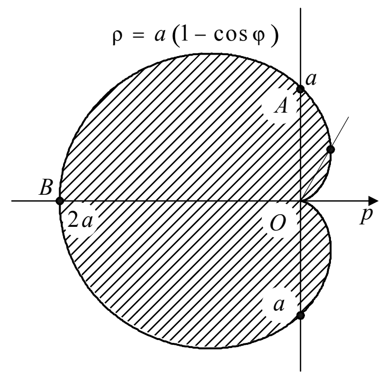


Рис. 15

Отже $S = 2\cdot\frac{3}{4}\pi a^2 = \frac{3}{2}\pi a^2$ (кв. од.). $\lrcorner$

<u>Вправи для самостійного розв'язання</u>

Обчислити площі плоских фігур, обмежених кривими:

83. $y = 2^x$, $y = 2x - x^2$, $x = 0$, $x = 2$.

84. $y^2 = 9x$, $y = 3x$.

85. $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$, $x + 2y - 4 = 0$.

86. $y=3+2x-x^2$, $y=x+1$.

87. $y=2-x^2$, $y=2x-1$.

88. $y=\sqrt{1-x}$, $y=x+1$, $y=0$.

89. $y=2x-x^2$, $y=0$, $x=3$.

90. $y=\dfrac{1}{x}$, $y=x^2$, $x=3$, $y=0$.

91. $y=x^4-2x^2$, $y=0$, $x\ge 0$.

92. Знайти площу еліпса за його параметричним рівнянням $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t, \end{cases}$ (a, b – півосі еліпса).

93. Знайти площу фігури, обмеженої кардіоїдою $\rho=1+\sin\varphi$.

94. Знайти площу одного пелюстка фігури, обмеженої кривою $\rho=\sin 2\varphi$.

Відповіді:

83. $\dfrac{3}{\ln 2}-\dfrac{4}{3}$.	**84.** $\dfrac{1}{2}$.	**85.** $\dfrac{1}{12}$.	**86.** $4{,}5$.
87. $\dfrac{32}{3}$.	**88.** $\dfrac{7}{6}$.	**89.** $\dfrac{4}{3}$.	**90.** $\dfrac{1}{3}+\ln 3$.
91. $\dfrac{8\sqrt{2}}{15}$.	**92.** πab.	**93.** $\dfrac{3}{2}\pi$.	**94.** $\dfrac{\pi}{8}$.

5.2. Довжина кривої

1. Якщо крива задана рівнянням $y=f(x)$, $x\in[a,b]$, то її довжина обчислюється за формулою:

$$l=\int_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx. \tag{11}$$

2. Якщо крива задана параметрично $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t), \end{cases}$ $t\in[\alpha,\beta]$, то її довжина

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\,dt. \tag{12}$$

3. Якщо крива задана в полярній системі координат рівнянням $\rho=\rho(\varphi)$, $\varphi\in[\varphi_1,\varphi_2]$, то

$$l=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{(\rho(\varphi))^2+(\rho'(\varphi))^2}\,d\varphi. \qquad (13)$$

95. Обчислити довжину відрізка прямої $y=3x-5$ від точки $A(2;1)$ до точки $B(4;7)$.

⌈ За формулою (11) знаходимо

$$l=\int_2^4\sqrt{1+\left((3x-5)'\right)^2}\,dx=\int_2^4\sqrt{1+(3)^2}\,dx=$$

$$=\sqrt{10}\int_2^4 dx=\sqrt{10}\cdot x\Big|_2^4=\sqrt{10}\,(4-2)=$$

$=2\sqrt{10}$ (лін. од.). ⌋

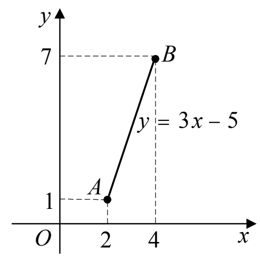


Рис. 16

96. Обчислити довжину кривої $y=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}$ від точки з абсцисою $x=3$ до точки з абсцисою $x=8$.

⌈ За формулою (11) $l=\int_3^8\sqrt{1+\left(\left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right)'\right)^2}\,dx$. Обчислимо окремо

$$\left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right)'=\frac{2}{3}\left(x^{\frac{3}{2}}\right)'=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x},\ \left(\sqrt{x}\right)^2=x.$$

Тому $l=\int_3^8\sqrt{1+x}\,dx=\frac{2}{3}\left(\sqrt{1+x}\right)^3\Big|_3^8=\frac{2}{3}\left(\left(\sqrt{9}\right)^3-\left(\sqrt{4}\right)^3\right)=$

$$=\frac{2}{3}(27-8)=\frac{38}{3}=12\frac{2}{3}\ \text{(лін. од.)}. ⌋$$

97. Обчислити довжину кривої $y=e^x$ від точки $A(0;1)$ до точки $B(1;e)$.

⌈ Згідно з формулою (11)

$$l=\int_0^1\sqrt{1+\left(\left(e^x\right)'\right)^2}\,dx=\int_0^1\sqrt{1+\left(e^x\right)^2}\,dx=$$

$$=\int_0^1\sqrt{1+e^{2x}}\,dx.$$

Для обчислення цього інтеграла виконаємо заміну змінної у визначеному інтегралі (див. підрозділ 2). Нехай $\sqrt{1+e^{2x}}=t$. Звідси $e^{2x}=t^2-1$, $2x=\ln\left(t^2-1\right)$, $x=\dfrac{1}{2}\ln\left(t^2-1\right)$ і

$$dx=\left(\frac{1}{2}\ln\left(t^2-1\right)\right)'dt=\frac{t}{t^2-1}dt.$$

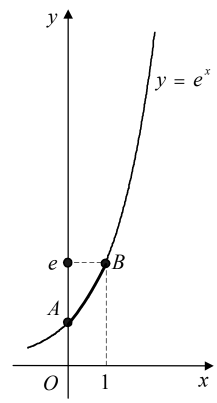


Рис. 17

Нові межі інтегрування $t(0)=\sqrt{2}$, $t(1)=\sqrt{1+e^2}$.

Тому $l=\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} t\cdot\frac{t}{t^2-1}dt=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}}\frac{\left(t^2-1\right)+1}{t^2-1}dt=$

$$=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}}\frac{t^2-1}{t^2-1}dt+\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}}\frac{dt}{t^2-1}=t\Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}}=$$

$$=\sqrt{1+e^2}-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{1+e^2}-1}{\sqrt{1+e^2}+1}\right)-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)\approx 0,99 \text{ (лін. од.).} \quad \lrcorner$$

98. Обчислити довжину арки циклоїди $\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t, \end{cases}$ де $t\in[0,2\pi]$.

$\ulcorner$ Арка циклоїди зображена на рис. 13. Згідно з формулою (12) знайдемо підкореневий вираз:

$$\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2=(1-\cos t)^2+(\sin t)^2=1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t=$$

$$=2(1-\cos t)=2\cdot 2\sin^2\frac{t}{2}=4\sin^2\frac{t}{2}.$$

Тоді за формулою (12)

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt=2\int_0^{2\pi}\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt=2\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt=$$

$$=2\cdot\left(-2\cos\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=-4\cos\frac{t}{2}\Bigg|_0^{2\pi}=-4\left(\cos\frac{2\pi}{2}-\cos 0\right)=-4(-1-1)=8 \text{ (лін. од.).} \quad \lrcorner$$

99. Обчислити довжину дуги астроїди $\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases}$.

$\ulcorner$ Астроїду зображено на рис. 14. Фігура симетрична відносно осей Ox та Oy. Тому $l=4l_1$, де l_1 – дуга AB. Згідно з формулою (12) знайдемо похідні та підкореневий вираз:

$$x'=\left(\cos^3 t\right)'=3\cos^2 t\cdot(-\sin t)=-3\cos^2 t\sin t,$$

$$y'=3\sin^2 t\cdot\cos t=3\sin^2 t\cos t,$$

$$(x')^2+(y')^2=\left(\left(\cos^3 t\right)'\right)^2+\left(\left(\sin^3 t\right)'\right)^2=$$

$$=9\cos^4 t\sin^2 t+9\sin^4 t\cos^2 t=9\cos^2 t\sin^2 t\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)=$$

$$=9\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(4\cos^2 t\sin^2 t\right)=\frac{9}{4}\sin^2 2t.$$

За формулою (12)

$$l_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{9}{4}\sin^2 2t}\,dt=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\,dt=-\frac{3}{2}\cdot\frac{\cos 2t}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{3}{4}\left(\cos 2\cdot\frac{\pi}{2}-\cos 0\right)=$$

$$=-\frac{3}{4}(-1-1)=\frac{3}{4}\cdot 2=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}.$$

Отже, $l=4l_1=4\cdot\frac{3}{2}=6$ (лін. од.). $\lrcorner$

100. Обчислити довжину кардіоїди $\rho=a(1-\cos\varphi)$ $(a>0)$.

$\ulcorner$ Кардіоїду зображено на рис. 15. Крива симетрична відносно осі Ox. Тому $l=2l_1$, де l_1 – дуга OAB. Згідно з формулою (13) знайдемо підкореневий вираз. Так як $\rho'(\varphi)=\left(a(1-\cos\varphi)\right)'=a\cdot\sin\varphi$, то

$$\left(\rho(\varphi)\right)^2+\left(\rho'(\varphi)\right)^2=\left(a(1-\cos\varphi)\right)^2+\left(a\sin\varphi\right)^2=$$

$$=a^2\left(1-2\cos\varphi+\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)=a^2\left(2-2\cos\varphi\right)=a^2\cdot 2\cdot 2\sin^2\frac{\varphi}{2}=4a^2\sin^2\frac{\varphi}{2}$$

(врахували, що $1-\cos\varphi=2\sin^2\dfrac{\varphi}{2}$).

За формулою (13)

$$l_1=\int_0^{\pi}\sqrt{4a^2\sin^2\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi=2a\int_0^{\pi}\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi=2a\left(-2\cos\frac{\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi}=-4a\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos 0\right)=$$

$$=-4a\left(0-1\right)=4a\ .$$

Отже, $l=2\cdot 4a=8a$ (лін. од.). ⌋

101. Знайти довжину логарифмічної спіралі $\rho=e^{\varphi}$, де $\varphi\in\left[0,2\pi\right]$.

⌈ Крива задана в полярній системі координат. Тому за формулою (13)

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(e^{\varphi}\right)^2+\left(\left(e^{\varphi}\right)'\right)^2}\,d\varphi=\int_0^{2\pi}\sqrt{e^{2\varphi}+e^{2\varphi}}\,d\varphi=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}e^{\varphi}d\varphi=\sqrt{2}e^{\varphi}\Big|_0^{2\pi}=$$

$$=\sqrt{2}\left(e^{2\pi}-e^{0}\right)=\sqrt{2}\left(e^{2\pi}-1\right)\ \text{(лін. од.).}$$ ⌋

<u>Вправи для самостійного розв’язання</u>

Обчислити довжину кривої:

102. $y=5x-1$, від точки $A(0;1)$ до точки $B(3;14)$.

103. $y^2=(x+1)^3$, що відтинається прямою $x=4$.

104. $y=\ln\sin x$, $x\in\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right]$.

105. $\rho=6\cos^3\dfrac{\varphi}{3}$, де $\varphi\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

106. $\rho=3(1-\cos\varphi)$.

107. $\begin{cases}x=e^t\sin t\\ y=e^t\cos t\end{cases}$, $t\in[0,1]$.

108. $\begin{cases}x=\sqrt{3}t^2\\ y=t-t^3\end{cases}$.

Відповіді:

102. $3\sqrt{26}$. **103.** $\dfrac{670}{27}$. **104.** $\dfrac{1}{2}\ln 3$. **105.** $\dfrac{9\sqrt{3}+6\pi}{4}$.

106. 24. **107.** $\sqrt{2}\left(e-1\right)$. **108.** 4.

5.3. Обчислення об'ємів тіл обертання

Якщо навколо осі Ox обертається криволінійна трапеція, що обмежена графіком функції $y = f\left(x\right)$, віссю Ox та прямими $x = a$, $x = b$, то об'єм *тіла обертання* знаходиться за формулою

$$V = \pi\int_a^b f^2\left(x\right)dx\,. \tag{14}$$

Якщо криволінійна трапеція, обмежена лініями $x = f\left(y\right)$, $y = c$, $y = d$ та віссю Oy, обертається навколо осі Oy, то об'єм тіла обертання обчислюється за формулою

$$V = \pi\int_c^d f^2\left(y\right)dy\,. \tag{15}$$

109. Обчислити об'єм параболоїда, який утворений обертанням параболи $y=\sqrt{8x}$ навколо осі Ox і який обмежений площиною $x=10$.

⌈ Тіло обертання зображене на рис 18. За формулою (14)

$$V=\pi\int_0^{10}8x\,dx=8\pi\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{10}=$$

$$=4\pi\cdot10^2=400\pi \quad \text{(куб. од.)}. \;⌋$$

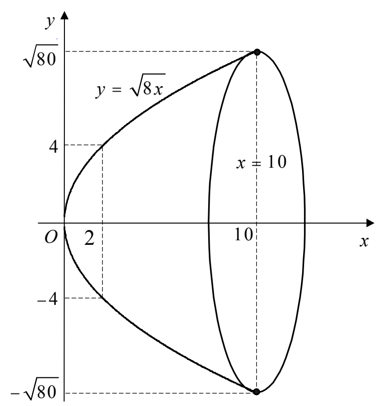


Рис. 18

110. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, що обмежена лініями $y=\frac{4}{x}$, $x=1$, $x=4$ та віссю Ox.

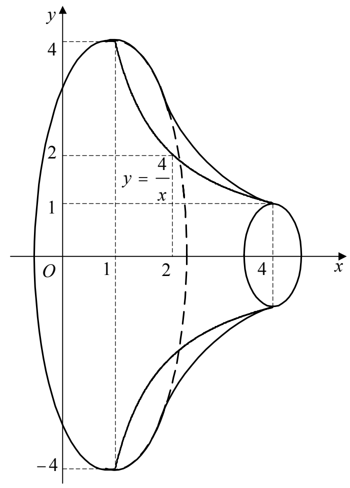


Рис. 19

⌈ Тіло обертання зображене на рис. 19.

За формулою (14)

$$V=\pi\int_1^4\left(\frac{4}{x}\right)^2dx=16\pi\int_1^4 x^{-2}dx=$$

$$=-16\pi\cdot\frac{1}{x}\Bigg|_1^4=-4\pi+16\pi=12\pi$$

(куб. од.). ⌋

111. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, що обмежена лініями $y=\frac{x}{2}$, $x=4$, $x=6$, $y=0$.

⌈ За формулою (14)

$$V=\pi\int_4^6\left(\frac{x}{2}\right)^2dx=\frac{\pi}{4}\int_4^6 x^2dx=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_4^6=\frac{\pi}{12}\left(6^3-4^3\right)=$$

$$=\frac{\pi}{12}(216-64)=12\frac{2}{3}\text{ (куб. од.).}$$ ⌋

112. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лінією $y=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ та віссю Ox.

⌈

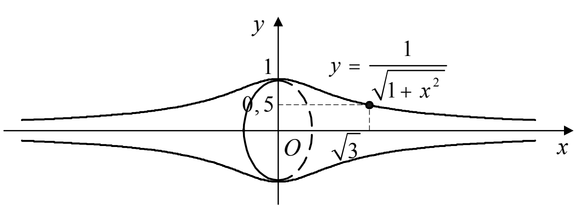


Рис. 20

Узагальнюючи формулу (14), знаходимо

$V = \pi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \right)^2 dx = \pi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2} = \pi^2$ (куб. од.) (див. приклад **79**). ⌋

113. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Oy фігури, обмеженої лініями $y = \frac{x^2}{4}$, $y = 1$, $y = 5$ та віссю Oy.

⌈ Тіло обертання зображене на рис. 21.

Застосуємо формулу (15). Якщо $y = \frac{x^2}{4}$, то $x = 2\sqrt{y}$ при $x \geq 0$. Тому

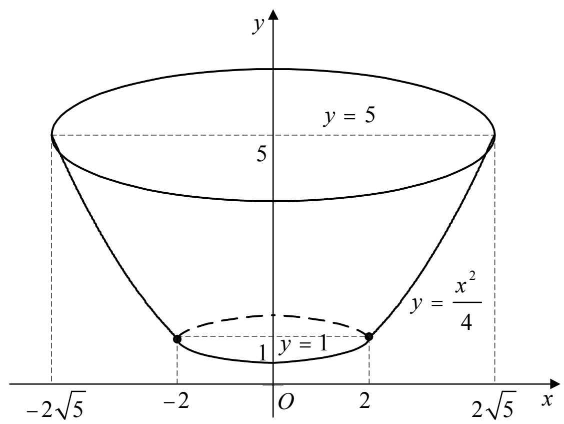


Рис. 21

$$V = \pi \int\limits_{1}^{5} \left(2\sqrt{y}\right)^2 dy = 4\pi \int\limits_{1}^{5} y\,dy = 4\pi \frac{y^2}{2}\bigg|_1^5 = 2\pi y^2\Big|_1^5 =$$

$$= 2\pi(25 - 1) = 2\pi \cdot 24 = 48\pi \text{ (куб. од.)}. ⌋$$

114. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Oy фігури, обмеженої лінією $y^2 = 4 - x$ та віссю Oy.

⌈ Так як $y^2 = 4 - x$, то $x = 4 - y^2$. Тому за формулою (15)

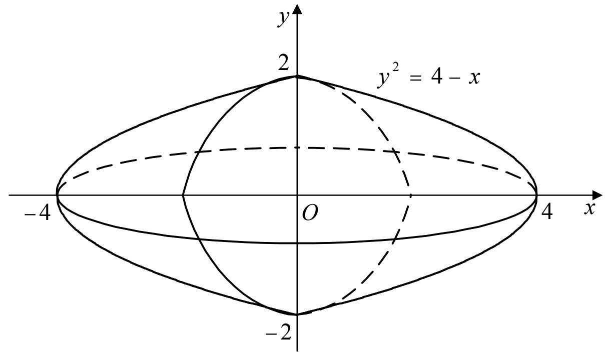


Рис. 22

$$V = \pi\int_0^2 \left(4 - y^2\right)^2 dy = \pi\int_0^2 \left(16 - 8y^2 + y^4\right) dy = \pi\left(16y - 8\cdot\frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5}\right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= \pi\left(16\cdot 2 - 8\cdot\frac{2^3}{3} + \frac{2^5}{5}\right) = \frac{256}{15}\pi = 17\frac{1}{15}\pi \text{ (куб. од.).} \quad \lrcorner$$

Вправи для самостійного розв'язання

Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо вказаної осі фігури, що обмежена лініями:

115. $y = x^2 - 2x$ та $y = 0$, вісь Ox.

116. $y = e^x$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, вісь Ox.

117. $y = x^3$, $x = 0$, $y = 8$, вісь Oy.

118. $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$, вісь Ox.

119. $y = 2 - x^2$ та $y = x^2$, вісь Ox.

Відповіді:

115. $\frac{16}{15}\pi$. **116.** $\frac{\pi}{2}\left(e^2 - 1\right)$. **117.** $\frac{96\pi}{5}$.

118. $\frac{3\pi}{10}$. **119.** $\frac{8\pi}{3}$.

Розділ 8. ФУНКЦІЇ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ

1. Основні поняття

1.1. Поняття функції кількох змінних

Змінну величину z називають *функцією двох змінних* $x,\ y$, якщо кожній парі їх значень $(x;y)$ із даної області площини поставлено у відповідність єдине значення z. Позначення: $z=f(x,\ y)$. Змінні $x,\ y$ називають *аргументами* або *незалежними змінними*.

Аналогічно означуються функції трьох та більшого числа змінних.

1. Виразити об'єм конуса V як функцію його твірної x і радіуса основи y.

⌐ Із геометрії відомо, що об'єм конуса $V=\frac{1}{3}\pi y^2\cdot h$, де h – висота конуса. Але $h=\sqrt{x^2-y^2}$. Тому $V=\frac{1}{3}\pi y^2\sqrt{x^2-y^2}$. Це і є шукана функціональна залежність. ⌡

Значення функції $z=f(x,\ y)$ у точці $P(a;\ b)$, тобто при $x=a$ і $y=b$, позначається $f(a,\ b)$ або $f(P)$.

2. Знайти $f(2,\ -3)$, якщо $f(x,\ y)=\frac{x^2+y^2}{2xy}$.

⌐ Підставляючи у функцію $x=2$ і $y=-3$, знаходимо

$$f(2,\ -3)=\frac{2^2+(-3)^2}{2\cdot 2\cdot(-3)}=-\frac{13}{12}.$$ ⌡

1.2. Область визначення функції

Під *областю визначення* функції $z=f(x,\ y)$ розуміють сукупність точок $(x;y)$ площини xOy, в яких задана функція визначена, тобто набуває певних дійсних значень.

3. Знайти область визначення функції $z=x^2y+4x-y$.

$\ulcorner$ У даному прикладі вираз має числовий зміст при довільних значеннях x і y. Тому функція визначена на всій площині. $\lrcorner$

4. Знайти область визначення функції

$$z = \frac{x+y}{2x-y}.$$

$\ulcorner$ Вираз втрачає зміст лише при тих значеннях x і y, при яких знаменник перетворюється на нуль. Тому область визначення заданої функції є вся площина, з якої видалена пряма $y = 2x$. $\lrcorner$

5. Знайти область визначення функції

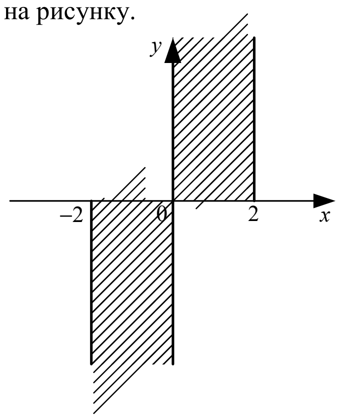
$$z = \frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}.$$

$\ulcorner$ Функція має дійсні значення, якщо $4-x^2-y^2>0$ або $x^2+y^2<4$. Останню нерівність задовольняють координати точок, що знаходяться всередині кола з центром у початку координат і радіусом 2. $\lrcorner$

6. Знайти область визначення функції

$$z = \arcsin\frac{x}{2} + \sqrt{xy}.$$

$\ulcorner$ Перший доданок функції визначений при $-1 \le \frac{x}{2} \le 1$ або $-2 \le x \le 2$. Другий доданок має дійсні значення, якщо $xy \ge 0$, тобто у двох випадках: при $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$ або при $\begin{cases} x \le 0 \\ y \le 0 \end{cases}$. Область визначення всієї функції зображена на рисунку.



$\lrcorner$

Вправи для самостійного розв'язання

Знайти області визначення функцій:

7. $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$. **8.** $z=1+\sqrt{-(x-y)^2}$.

9. $z=\ln(x+y)$. **10.** $z=x+\arccos y$.

11. $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}$.

Відповіді:

7. Одиничний круг з центром у початку координат, включно з колом $\left(x^2+y^2\le 1\right)$.

8. Бісектриса $y=x$ I і III координатних кутів.

9. Півплощина, що розташована над прямою $x+y=0$ $(x+y>0)$.

10. Смуга, що обмежена прямими $y=\pm 1$, включно з прямими $(-1\le y\le 1)$.

11. Квадрат, що утворюють відрізки прямих $x=\pm 1$ і $y=\pm 1$, включно з його сторонами $(-1\le x\le 1,\ -1\le y\le 1)$.

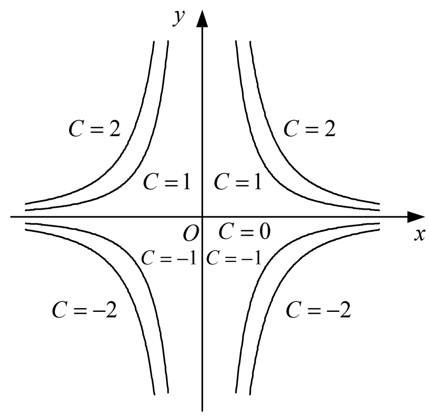
1.3. Лінії і поверхні рівня функції

Лінією рівня функції $z=f(x,\,y)$ називається така лінія на площині xOy , у точках якої функція набуває сталого значення $z=C$.

Поверхнею рівня функції трьох аргументів $u=f(x,\,y,\,z)$ називається така поверхня, у точках якої функція набуває сталого значення $u=C$.

12. Побудувати лінії рівня функції $z=x^2y$.

Γ Рівняння ліній рівня має вигляд $x^2y=C$ або $y=\dfrac{C}{x^2}$. Покладаючи $C=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots$, отримаємо сім'ю ліній рівня зображених на рисунку.



13. Знайти поверхні рівня функцій трьох незалежних змінних.

а) $u = x + y + z$; б) $u = x^2 + y^2 + z^2$.

а) Рівняння поверхонь рівня має вигляд $x + y + z = C$. Покладаючи $C = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, отримаємо площини, що паралельні площині $x + y + z = 0$.

б) Рівняння поверхонь рівня має вигляд $x^2 + y^2 + z^2 = C$. Надаючи C додатних значень, отримаємо концентричні сфери з центром у початку координат.

Вправи для самостійного розв'язання

Побудувати лінії рівня даних функцій:

14. $z = x + y$. **15.** $z = x^2 + y^2$.

16. $z = x^2 - y^2$.

Відповіді:

14. Лінії рівня – прямі, що паралельні до прямої $x + y = 0$.

15. Лінії рівня – концентричні кола з центром у початку координат.

16. Лінії рівня – рівнобічні гіперболи.

2. Границя і неперервність функції кількох змінних

Число A називають *границею* функції $z = f(x, y)$ у точці $P(a; b)$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta > 0$, що для всіх точок $P'(x; y)$, які задовольняють умову $0 < \rho(P, P') < \delta$ ($\rho(P, P') = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ – відстань між P та P'), виконується нерівність

$$\left| f(x, y) - A \right| < \varepsilon .$$

У цьому випадку пишуть

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = A .$$

Зауваження. Згідно з означенням границя функції $z = f(x, y)$ у точці P не залежить від способу наближення змінної точки P', наприклад, вздовж тієї чи іншої прямої.

Функція $z = f(x, y)$ називається *неперервною у точці* $P(a; b)$, якщо

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = f(a, b) .$$

Функція, що неперервна в усіх точках деякої області, називається *неперервною на цій області*.

Порушення умов неперервності для функції $f(x, y)$ можуть відбуватися як в окремих точках (ізольована точка розриву), так і у точках, що утворюють одну або декілька ліній (лінії розриву), а іноді і більш складні геометричні образи.

17. Обчислити границю $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 2}} (1 + xy)^{\frac{2}{x^2 + xy}}$.

⌈ Подамо функцію у вигляді $\left[(1 + xy)^{\frac{1}{xy}} \right]^{\frac{2y}{x+y}}$. Оскільки $z = xy \to 0$ при $\begin{pmatrix} x \to 0 \\ y \to 2 \end{pmatrix}$, то $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 2}} (1 + xy)^{\frac{1}{xy}} = \lim\limits_{z \to 0} (1 + z)^{\frac{1}{z}} = e$. Крім того, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 2}} \dfrac{2y}{x + y} = 2$. Тому шукана границя дорівнює e^2. ⌋

18. Чи існує границя $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$?

$\ulcorner$ Нехай точка $M(x;y)$ прямує до точки $O(0;0)$ вздовж прямої $y=kx$, що проходить через точку O. Тоді отримаємо

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}.$$

Таким чином, наближаючись до точки $O(0;0)$ вздовж різних прямих, отримаємо різні граничні значення. З цього випливає, що границя даної функції у точці $O(0;0)$ не існує (див. зауваження вище). $\lrcorner$

19. Обчислити границю $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$.

$\ulcorner$ Покладемо $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$. Тоді $\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=r\cos^2\varphi\sin\varphi$.

Оскільки функція $\cos^2\varphi\sin\varphi$ обмежена, то

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=\lim_{r\to 0}r\cos^2\varphi\sin\varphi=0. \quad \lrcorner$$

20. Довести, що функція $u=\dfrac{e^{x^2-y^2}}{1+\sin^4\left(x^2+3xy+y^2\right)}$ неперервна при всіх значеннях x і y.

$\ulcorner$ Функції x^2-y^2 і $x^2+3xy+y^2$ неперервні при всіх значеннях x і y як многочлени від x і y. За теоремою про неперервність суперпозиції неперервних функцій випливає, що $e^{x^2-y^2}$ і $1+\sin^4\left(x^3+3xy+y^2\right)$ є також неперервними. При цьому $1+\sin^4\left(x^2+3xy+y^2\right)\neq 0$, а тому і задана функція є неперервною при всіх значення x і y. $\lrcorner$

21. Знайти точки розриву функції $u=\dfrac{x^2+y^2}{\left(x^2-y\right)\left(x+3y\right)}$.

$\ulcorner$ Функція має розрив у точках, в яких знаменник

$\left(x^2-y\right)\cdot\left(x+3y\right)$ перетворюється у нуль. Розв'язуючи рівняння $\left(x^2-y\right)\cdot\left(x+3y\right)=0$ відносно y, отримаємо $y=x^2$, $y=-\dfrac{x}{3}$. Отже, задана функція має розрив на прямій $y=-\dfrac{x}{3}$ і на параболі $y=x^2$. ⌟

22. Знайти точки розриву функції $u=\dfrac{1}{\sin^2\pi x+\sin^2\pi y}$.

⌜ Прирівнюючи знаменник до нуля, отримуємо рівняння $\sin^2\pi x+\sin^2\pi y=0$. Це рівняння рівносильне системі $\begin{cases}\sin\pi x=0\\ \sin\pi y=0\end{cases}$, з якої знаходимо, що x і y цілі числа. Отже, функція розривна в усіх точках вигляду $M\left(m;n\right)$, де m, n – цілі числа. ⌟

<u>Вправи для самостійного розв'язання</u>

Знайти границі:

23. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(x^2+y^2\right)\cdot\sin\dfrac{1}{xy}$.

24. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$.

25. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\dfrac{\sin xy}{x}$.

26. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\left(1+\dfrac{y}{x}\right)^x$.

Знайти точки розриву функцій:

27. $u=\dfrac{1}{x^2+y^2}$.

28. $u=\ln\left(4-x^2-y^2\right)$.

29. $u=\dfrac{1}{x^2+y^2-z^2}$.

30. $u=\sin\dfrac{x}{y}$.

Відповіді:

23. 0.

24. 0.

25. 2.

26. e^k.

27. $O\left(0;\,0\right)$.

28. Всі точки кола $x^2+y^2=4$.

29. Всі точки конічної поверхні $x^2+y^2=z^2$.

30. Всі точки прямої $y=0$.

3. Частинні похідні функції кількох змінних

За означенням *частинна похідна* функції $z = f(x,\ y)$ у точці $P(x; y)$ *по змінній* x –

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x,\ y) - f(x,\ y)}{\Delta x}.$$

Частинна похідна по змінній y –

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x,\ y + \Delta y) - f(x,\ y)}{\Delta y}.$$

Поряд з позначеннями $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ та $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ використовують також інші позначення – відповідно z'_x, $f'_x(x,\ y)$ та z'_y, $f'_y(x,\ y)$.

З означення частинних похідних випливає, що для їх знаходження можна використовувати відомі формули обчислення похідних функцій однієї змінної, вважаючи іншу змінну сталою.

Аналогічно означуються і знаходяться частинні похідні функцій трьох та більшого числа змінних.

Знайти частинні похідні функцій:

31. $z = 3x^2 y + x^2 - y^2 + 5$.

$\ulcorner$ Вважаючи y сталою, знаходимо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3y \cdot \left(x^2\right)'_x + \left(x^2\right)'_x - \left(y^2\right)'_x + (5)'_x = 3y \cdot 2x + 2x - 0 + 0 = 6xy + 2x.$$

Вважаючи x сталою, знаходимо

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 \cdot (y)'_y + \left(x^2\right)'_y - \left(y^2\right)'_y + (5)'_y = 3x^2 \cdot 1 + 0 - 2y + 0 =$$

$$= 3x^2 - 2y. \ \lrcorner$$

32. $z = \dfrac{y}{x}$.

$\ulcorner$ Вважаючи y сталою, знаходимо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\frac{y}{x}\right)'_x = y \cdot \left(\frac{1}{x}\right)'_x = y \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2}.$$

Вважаючи x сталою, знаходимо

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\frac{y}{x}\right)_y'=\frac{1}{x}\cdot(y)_y'=\frac{1}{x}\cdot 1=\frac{1}{x}. \quad \lrcorner$$

33. $z=2e^x y+y^3-x^3y+y-x-1$.

$\ulcorner$ Вважаючи y сталою, знаходимо

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(2e^x\cdot y+y^3-x^3y+y-x-1\right)_x'=$$

$$=2y\cdot\left(e^x\right)_x'-y\cdot\left(x^3\right)_x'-(x)_x'=2ye^x-y\cdot 3x^2-1=$$

$$=2ye^x-3yx^2-1.$$

Вважаючи x сталою, знаходимо

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(2e^x\cdot y+y^3-x^3y+y-x-1\right)_y'=$$

$$=2e^x(y)_y'-\left(y^3\right)_y'-x^3\cdot(y)_y'+(y)_y'=2e^x+3y^2-x^3+1. \quad \lrcorner$$

34. $z=5x\sin y-\cos x+3$.

$\ulcorner$ $$\frac{\partial z}{\partial x}=(5x\sin y-\cos x+3)_x'=5\sin y(x)_x'-(\cos x)_x'=$$

$$=5\sin y+\sin x.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=(5x\sin y-\cos x+3)_y'=5x(\sin y)_y'=5x\cos y. \quad \lrcorner$$

35. $z=x^3y+e^yx-xy+x^2-y^2$.

$\ulcorner$ $$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(x^3y+e^yx-xy+x^2-y^2\right)_x'=y\cdot\left(x^3\right)_x'+e^y\cdot(x)_x'-$$

$$-y\cdot(x)_x'+\left(x^2\right)_x'=3yx^2+e^y-y+2x.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(x^3y+e^yx-xy+x^2-y^2\right)_y'=x^3\cdot(y)_y'+x\cdot\left(e^y\right)_y'-x(y)_y'-\left(y^2\right)_y'=$$

$$=x^3+xe^y-x-2y. \quad \lrcorner$$

36. $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$.

$\ulcorner$ Враховуючи правило диференціювання складної функції, дістанемо

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)'_x=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)'_x=\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot\frac{1}{y}\cdot(x)'_x=$$

$$=\frac{y^2}{y^2+x^2}\cdot\frac{1}{y}\cdot 1=\frac{y^2}{\left(y^2+x^2\right)\cdot y}=\frac{y}{y^2+x^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)'_y=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)'_y=\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot x\cdot\left(\frac{1}{y}\right)'_y=$$

$$=\frac{y^2}{y^2+x^2}\cdot x\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)=\frac{-y^2x}{\left(y^2+x^2\right)\cdot y^2}=\frac{-x}{y^2+x^2}.\quad\lrcorner$$

37. $z=\sqrt{x^2-y^2}$.

$\ulcorner$ Враховуючи правило диференціювання складної функції, дістанемо

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\sqrt{x^2-y^2}\right)'_x=\frac{1}{2\sqrt{x^2-y^2}}\cdot\left(x^2-y^2\right)'_x=\frac{1}{2\sqrt{x^2-y^2}}\cdot 2x=$$

$$=\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\sqrt{x^2-y^2}\right)'_y=\frac{1}{2\sqrt{x^2-y^2}}\cdot(-2y)=\frac{-y}{\sqrt{x^2-y^2}}.\quad\lrcorner$$

38. $z=\ln\left(\operatorname{tg}\frac{x}{y}\right)$.

$\ulcorner$ $$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\ln\left(\operatorname{tg}\frac{x}{y}\right)\right)'_x=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{y}}\cdot\left(\operatorname{tg}\frac{x}{y}\right)'_x=\operatorname{ctg}\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{y}}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)'_x=$$

$$=\frac{\cos\frac{x}{y}}{\sin\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{y}\cdot 1=\frac{1}{\sin\frac{x}{y}\cdot\cos\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{y}=\frac{1}{y\cdot\frac{1}{2}\sin\frac{2x}{y}}=\frac{2}{y\cdot\sin\frac{2x}{y}}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\ln\left(\operatorname{tg}\frac{x}{y}\right)\right)'_y=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{y}}\cdot\left(\operatorname{tg}\frac{x}{y}\right)'_y=\operatorname{ctg}\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{y}}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)'_y=$$

$$=\frac{\cos\frac{x}{y}}{\sin\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{y}}\cdot x\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)=\frac{-x}{y^2\cdot\sin\frac{x}{y}\cdot\cos\frac{x}{y}}=\frac{-x}{y^2\cdot\frac{1}{2}\sin\frac{2x}{y}}=$$

$$=\frac{-2x}{y^2\cdot\sin\frac{2x}{y}}. \quad \lrcorner$$

39. $z=e^{\sin\frac{y}{x}}$.

$\ulcorner$ $$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(e^{\sin\frac{y}{x}}\right)'_x=e^{\sin\frac{y}{x}}\cdot\left(\sin\frac{y}{x}\right)'_x=e^{\sin\frac{y}{x}}\cdot\cos\frac{y}{x}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)'_x=$$

$$=e^{\sin\frac{y}{x}}\cdot\cos\frac{y}{x}\cdot y\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'_x=e^{\sin\frac{y}{x}}\cdot\cos\frac{y}{x}\cdot y\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{-y\cdot e^{\sin\frac{y}{x}}\cdot\cos\frac{y}{x}}{x^2}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(e^{\sin\frac{y}{x}}\right)'_y=e^{\sin\frac{y}{x}}\cdot\left(\sin\frac{y}{x}\right)'_y=e^{\sin\frac{y}{x}}\cdot\cos\frac{y}{x}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)'_y=$$

$$=e^{\sin\frac{y}{x}}\cdot\cos\frac{y}{x}\cdot\frac{1}{x}\cdot(y)'_y=e^{\sin\frac{y}{x}}\cdot\cos\frac{y}{x}\cdot\frac{1}{x}\cdot 1=\frac{e^{\sin\frac{y}{x}}\cdot\cos\frac{y}{x}}{x}. \quad \lrcorner$$

40. $u=x^3y^2z+2x-3y+z+5$.

$\ulcorner$ Вважаючи y та z сталими, знаходимо

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\left(x^3y^2z+2x-3y+z+5\right)'_x=y^2z\left(x^3\right)'_x+(2x)'_x-(3y)'_x+(z)'_x+$$

$$+(5)'_x=y^2z\cdot 3x^2+2-0+0+0=3x^2y^2z+2.$$

Вважаючи x та z сталими, знаходимо

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\left(x^3y^2z+2x-3y+z+5\right)'_y=x^3z\left(y^2\right)'_y+(2x)'_y-(3y)'_y+(z)'_y+$$

$$+(5)'_y=x^3\cdot z\cdot 2y+0-3+0+0=2x^3yz-3.$$

Вважаючи x та y сталими, знаходимо

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\left(x^3y^2z+2x-3y+z+5\right)'_z=x^3y^2\,(z)'_z+(2x)'_z-(3y)'_z+(z)'_z+$$

$$+(5)'_z=x^3y^2\cdot 1+0-0+1+0=x^3y^2+1. \quad \lrcorner$$

41. $u = z^{xy}$.

$\ulcorner$ $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \left(z^{xy}\right)'_x = z^{xy} \cdot \ln z \cdot (xy)'_x = z^{xy} \cdot \ln z \cdot y \cdot (x)'_x =$

$= z^{xy} \cdot \ln z \cdot y \cdot 1 = z^{xy} y \ \ln z$.

$\dfrac{\partial u}{\partial y} = \left(z^{xy}\right)'_y = z^{xy} \cdot \ln z \cdot (xy)'_y = z^{xy} \cdot \ln z \cdot x \cdot (y)'_y =$

$= z^{xy} \cdot \ln z \cdot x \cdot 1 = z^{xy} x \ \ln z$.

$\dfrac{\partial u}{\partial z} = \left(z^{xy}\right)'_z = xy\, z^{xy-1}$. $\lrcorner$

42. $u = (xy)^z$.

$\ulcorner$ $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \left((xy)^z\right)'_x = z \cdot (xy)^{z-1} \cdot (x \cdot y)'_x = z \cdot (xy)^{z-1} \cdot y \cdot (x)'_x =$

$= z \cdot (xy)^{z-1} \cdot y \cdot 1 = zy\ (xy)^{z-1}$.

$\dfrac{\partial u}{\partial y} = \left((xy)^z\right)'_y = z \cdot (xy)^{z-1} \cdot (xy)'_y = z \cdot (xy)^{z-1} \cdot x \cdot (y)'_y =$

$= z \cdot (xy)^{z-1} \cdot x \cdot 1 = z\, x\ (xy)^{z-1}$.

$\dfrac{\partial u}{\partial z} = \left((xy)^z\right)'_z = (xy)^z \ln(xy)$. $\lrcorner$

43. Знайти частинні похідні $f'_x(1,\ 2,\ 0)$, $f'_y(1,\ 2,\ 0)$, $f'_z(1,\ 2,\ 0)$, якщо $f(x,\ y,\ z) = \ln(xy+z)$.

$\ulcorner$ $\dfrac{\partial f}{\partial x} = f'_x = \left(\ln(xy+z)\right)'_x = \dfrac{1}{xy+z} \cdot (xy+z)'_x = \dfrac{y}{xy+z}$.

Для знаходження $f'_x(1,\ 2,\ 0)$ підставимо в останній вираз значення $x=1$, $y=2$, $z=0$ і отримаємо $f'_x(1,\ 2,\ 0) = \dfrac{2}{1 \cdot 2 + 0} = 1$.

Аналогічно

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = f'_y = \left(\ln(xy+z)\right)'_y = \dfrac{1}{xy+z} \cdot (xy+z)'_y = \dfrac{x}{xy+z}$.

$f'_y(1,\ 2,\ 0) = \dfrac{1}{1 \cdot 2 + 0} = \dfrac{1}{2}$.

$$\frac{\partial f}{\partial z} = f_z' = \left(\ln\left(xy+z\right)\right)_z' = \frac{1}{xy+z}\cdot\left(xy+z\right)_z' = \frac{1}{xy+z}.$$

$$f_z'\left(1,\ 2,\ 0\right) = \frac{1}{1\cdot 2+0} = \frac{1}{2}. \quad \lrcorner$$

<u>Вправи для самостійного розв'язання</u>

Знайти частинні похідні функцій:

44. $z = x^2 y - xy^2 + 3$.

45. $z = \dfrac{3x^2}{y^3}$.

46. $z = xy - \dfrac{y}{x}$.

47. $z = x - 3\sin y$.

48. $z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$.

49. $z = \dfrac{x}{y}\cdot e^{xy}$.

50. $u = y^{\frac{x}{z}}$.

51. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

52. $u = \arcsin\left(x\,y\,z\right)$.

53. $u = x^{y\,z}$.

Відповіді:

44. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2xy - y^2$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^2 - 2xy$.

45. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{6x}{y^3}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{-9x^2}{y^4}$.

46. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = y + \dfrac{y}{x^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x - \dfrac{1}{x}$.

47. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 1$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -3\cos y$.

48. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2x}{x^2+y}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{x^2+y}$.

49. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = e^{xy}\left(\dfrac{1}{y} + x\right)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x}{y}e^{xy}\left(x - \dfrac{1}{y}\right)$.

50. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = y^{\frac{x}{z}}\,\dfrac{\ln y}{z}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{x}{z}\,y^{\frac{x}{z}-1}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z} = -\dfrac{x\ln y}{z^2}\,y^{\frac{x}{z}}$.

51. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

52. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y\cdot z}{\sqrt{1-x^2y^2z^2}}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{xz}{\sqrt{1-x^2y^2z^2}}$, $\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{xy}{\sqrt{1-x^2y^2z^2}}$.

53. $\frac{\partial u}{\partial x}=y\,z\,x^{yz-1}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=x^{yz}z\ln x$, $\frac{\partial u}{\partial z}=x^{yz}\ y\ \ln x$.

4. Повний диференціал функції

4.1. Повний приріст та повний диференціал функції

Повним приростом функції $z=f(x,\ y)$ називається різниця

$$\Delta z=\Delta f(x,\ y)=f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y).$$

Повним диференціалом функції $z=f(x,\ y)$ називається та частина повного приросту Δz, що є лінійною відносно приростів аргументів Δx і Δy (див. нижче приклад 54).

Різниця між повним приростом і повним диференціалом функції є нескінченно мала вищого порядку у порівнянні з $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$.

Функція має повний диференціал у випадку неперервності її частинних похідних. У цьому випадку функцію називають *диференційовною*.

Диференціали незалежних змінних за означенням покладають рівними їх приростам: $dx=\Delta x$ і $dy=\Delta y$.

Повний диференціал функції $z=f(x,\ y)$ обчислюється за формулою

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\ .$$

Аналогічно, повний диференціал функції $u=f(x,\ y,\ z)$ обчислюється за формулою

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz\ .$$

54. Для функції $f(x,\ y)=x^2+xy-y^2$ знайти повний приріст і повний диференціал.

$\ulcorner$ $f(x+\Delta x,\, y+\Delta y)=(x+\Delta x)^2+(x+\Delta x)\cdot(y+\Delta y)-$

$-(y+\Delta y)^2$;

$\Delta f(x,\, y)=\left[(x+\Delta x)^2+(x+\Delta x)\cdot(y+\Delta y)-(y+\Delta y)^2\right]-$

$-\left(x^2+xy-y^2\right)=x^2+2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2+xy+x\cdot\Delta y+y\Delta x+\Delta x\cdot\Delta y-$

$-y^2-2y\Delta y-(\Delta y)^2-x^2-xy+y^2=2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2+x\cdot\Delta y+y\cdot\Delta x+$

$+\Delta x\cdot\Delta y-2y\cdot\Delta y-(\Delta y)^2=\left[(2x+y)\cdot\Delta x+(x-2y)\cdot\Delta y\right]+$

$+\left[(\Delta x)^2+\Delta x\cdot\Delta y-(\Delta y)^2\right]$ – повний приріст.

Тут вираз $df=(2x+y)\Delta x+(x-2y)\Delta y$ є повним диференціалом функції, а $\left[(\Delta x)^2+\Delta x\cdot\Delta y+(\Delta y)^2\right]$ є нескінченно малою вищого порядку у порівнянні з нескінченно малою $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$. $\lrcorner$

Знайти повні диференціали функцій:

55. $z=x^3+y^3-3xy$.

$\ulcorner$ Знайдемо частинні похідні функції $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ та підставимо їх у вираз $dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(x^3+y^3-3xy\right)'_x=3x^2-3y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(x^3+y^3-3xy\right)'_y=3y^2-3x.$$

Отримаємо $dz=3\left(x^2-y\right)dx+3\left(y^2-x\right)dy$ – повний диференціал заданої функції. $\lrcorner$

56. $z=x^2y^3$.

$\ulcorner$ Аналогічно до попереднього прикладу:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(x^2y^3\right)'_x=2xy^3,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(x^2y^3\right)'_y=x^2\cdot 3y^2=3x^2y^2;$$

$$dz=2xy^3dx+3x^2y^2dy. \quad \lrcorner$$

57. $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

$\ulcorner$ $$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)'_x=\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\left(x^2+y^2\right)'_x=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}=$$

$$=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)'_y=\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\left(x^2+y^2\right)'_y=\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

$$dz=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy. \quad \lrcorner$$

58. $z=\ln\left(x^2+y^2\right)$.

$\ulcorner$ $$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\ln\left(x^2+y^2\right)\right)'_x=\frac{1}{x^2+y^2}\cdot 2x,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\ln\left(x^2+y^2\right)\right)'_y=\frac{1}{x^2+y^2}\cdot 2y;$$

$$dz=\frac{2x}{x^2+y^2}dx+\frac{2y}{x^2+y^2}dy. \quad \lrcorner$$

59. $z=\sin^2 x+\cos^2 y$.

$\ulcorner$ $$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\sin^2 x+\cos^2 y\right)'_x=2\sin x\cdot\left(\sin x\right)'=2\sin x\cdot\cos x=\sin 2x,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\sin^2 x+\cos^2 y\right)'_y=2\cos y\cdot\left(\cos y\right)'=-2\cos y\cdot\sin y=-\sin 2y;$$

$$dz=\sin 2x\,dx+\left(-\sin 2y\right)dy. \quad \lrcorner$$

60. $u=xyz$.

$\ulcorner$ Для функції трьох змінних знайдемо частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial z}{\partial z}$ і підставимо їх у вираз $du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz$.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=(xyz)'_x=yz\,,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=(xyz)'_y=xz\,,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=(xyz)'_z=xy\,;$$

$du=yz\,dx+xz\,dy+xy\,dz$ – повний диференціал. ⌋

61. $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

⌈ Аналогічно до попереднього прикладу:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)'_x=\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot\left(x^2+y^2+z^2\right)'_x=$$

$$=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)'_y=\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot\left(x^2+y^2+z^2\right)'_y=$$

$$=\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)'_z=\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot\left(x^2+y^2+z^2\right)'_z=$$

$$=\frac{2z}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,;$$

$$du=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dx+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dy+\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dz\,.$$ ⌋

62. Знайти повний диференціал функції $f(x,\,y,\,z)=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$ у точці $P(3;\,4;\,5)$.

⌈ Для знаходження значення повного диференціала $df(3,\,4,\,5)$ знаходимо повний диференціал аналогічно до попереднього прикладу і підставляємо в нього $x=3$, $y=4$, $z=5$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)'_x=z\left[\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right]'_x=z\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot\left(x^2+y^2\right)'_x=$$

$$=-\frac{z}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x=\frac{-x\cdot z}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}}\,,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)'_y=z\left[\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right]'_y=z\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot\left(x^2+y^2\right)'_y=$$

$$=-\frac{z}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2y=\frac{-y\cdot z}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)'_z=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(z\right)'_z=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 1=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

$$df=\frac{-xz}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}}dx+\frac{-yz}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}}dy+\frac{1}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}}dz.$$

$$df\left(3,\,4,\,5\right)=\frac{-3\cdot 5}{\sqrt{\left(3^2+4^2\right)^3}}dx-\frac{4\cdot 5}{\sqrt{\left(3^2+4^2\right)^3}}dy+\frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}}dz,$$

$$df\left(3,\,4,\,5\right)=-\frac{3}{25}dx-\frac{4}{25}dy+\frac{1}{5}dz. \quad \lrcorner$$

<u>Вправи для самостійного розв'язання</u>

Знайти повні диференціали функцій:

63. $z=5x^3y^2+xy^3-3$.

64. $z=7x^4\cdot y^2$.

65. $z=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

66. $z=\cos^3 x+\sin^3 y$.

67. $z=x^y$.

68. $u=\sqrt{x\,y\,z}$.

69. $u=\arcsin\left(x\,y\,z\right)$.

Відповіді:

63. $dz=15x^2y^2dx+3xy^2dy$.

64. $dz=28x^3y^2dx+14x^4y\,dy$.

65. $dz=\dfrac{4xy^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}dx-\dfrac{4x^2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}dy$.

66. $dz=-3\cos^2 x\cdot\sin x\,dx+3\sin^2 y\cdot\cos y\,dy$.

67. $dz=y\cdot x^{y-1}dx+x^y\ln x\,dy$.

68. $du = \frac{yz}{2\sqrt{x\,y\,z}}dx + \frac{xz}{2\sqrt{x\,y\,z}}dy + \frac{xy}{2\sqrt{x\,y\,z}}dz = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{yz}{x}}dx +$
$+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{xz}{y}}dy + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{xy}{z}}dz$.

69. $du = \frac{yz}{\sqrt{1-x^2y^2z^2}}dx + \frac{xz}{\sqrt{1-x^2y^2z^2}}dy + \frac{xy}{\sqrt{1-x^2y^2z^2}}dz$.

4.2. Застосування повного диференціала функції до наближених обчислень

Якщо $|\Delta x|$ і $|\Delta y|$, тому і $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ достатньо малі, то для диференційовної функції $z = f(x,\, y)$ має місце наближена рівність $\Delta z \approx dz$ або

$$\Delta z \approx \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y \ .$$

70. Висота конуса $H = 30$ см, радіус основи $R = 10$ см. Як зміниться об'єм конуса, якщо збільшити H на 3 мм і зменшити R на 1 мм?

⌐ Об'єм конуса дорівнює $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$. Зміну об'єму (приріст) замінимо наближено диференціалом

$\Delta V \approx dV = \frac{1}{3}\pi\left(2RHdR + R^2 dH\right) = \frac{1}{3}\pi\left(-2\cdot 10\cdot 30\cdot 0{,}1 + 100\cdot 0{,}3\right) =$
$= -10\pi \approx -31{,}4$ см^3.

Оскільки приріст об'єму від'ємний, то об'єм конуса зменшиться на $31{,}4$ см^3. ⌟

71. Знайти для функції $z = 5x^2 - xy + 3y^2 + 5x + 2y - 1$ повний приріст і повний диференціал у точці $(1;\, 2)$ при $\Delta x = 0{,}1$ і $\Delta y = 0{,}2$. Оцінити абсолютну і відносну похибки, що виникають при заміні приросту функції її диференціалом.

⌐ Знаходимо повний приріст Δz :

$$\Delta z = 5(x+\Delta x)^2 - (x+\Delta x)\cdot(y+\Delta y) + 3(y+\Delta y)^2 + 5(x+\Delta x) +$$
$$+2(y+\Delta y) - 1 - 5x^2 + xy - 3y^2 - 5x - 2y + 1 = 10x\cdot\Delta x + 5(\Delta x)^2 -$$
$$-x\cdot\Delta y - y\cdot\Delta x - \Delta x\cdot\Delta y + 6y\Delta y + 3(\Delta y)^2 + 5\Delta x + 2\Delta y =$$
$$= (10x - y + 5)\Delta x + (6y - x + 2)\Delta y + 5(\Delta x)^2 - \Delta x\cdot\Delta y + 3(\Delta y)^2 .$$

Знаходимо повний диференціал dz:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = (10x - y + 5)dx + (6y - x + 2)dy .$$

Підставляємо у вирази для Δz і dz значення $x = 1$, $y = 2$, $\Delta x = dx = 0{,}1$, $\Delta y = dy = 0{,}2$. Отримаємо

$$\Delta z = (10\cdot 0{,}1 - 2 + 5)\cdot 0{,}1 + (6\cdot 2 + 1)\cdot 0{,}2 + 5(0{,}1)^2 - 0{,}1\cdot 0{,}2 + 3(0{,}2)^2 =$$
$$= 4{,}05 .$$
$$dz = (10\cdot 0{,}1 - 2 + 5)\cdot 0{,}1 + (6\cdot 2 + 1)\cdot 0{,}2 = 3 .$$

Абсолютна похибка $|\Delta z - dz| = 4{,}05 - 3 = 1{,}05$.

Відносно похибка $\left|\dfrac{\Delta z - dz}{\Delta z}\right| = \dfrac{1{,}05}{4{,}05} \approx \dfrac{1}{4}$ $(\approx 25\%)$. ⌟

72. Обчислити наближено $1{,}02^{3{,}01}$.

⌜ Розглянемо функцію $z = x^y$. Покладемо $x = 1$, $y = 3$, $\Delta x = 0{,}02$, $\Delta y = 0{,}01$.

Початкове значення функції $z = 1^3 = 1$.

$$\Delta z \approx dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y , \quad \frac{\partial z}{\partial x} = y\cdot x^{y-1} , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x .$$

Тоді при зазначених числових значеннях змінних і їх приростах отримаємо:

$$\Delta z \approx dz = y\cdot x^{y-1}\Delta x + x^y\cdot \ln x\cdot\Delta y = 3\cdot 1\cdot 0{,}02 + 1\cdot\ln 1\cdot 0{,}01 = 0{,}06 .$$

Отже, $1{,}02^{3{,}01} \approx 1 + 0{,}06 = 1{,}06$. ⌟

<u>Вправи для самостійного розв’язання</u>

73. Одна сторона прямокутника $a = 10$ см, інша $b = 24$ см. Як зміниться діагональ l прямокутника, якщо сторону a збільшити на 4 мм, а сторону b зменшити на 1 мм? Знайти наближену величину зміни і порівняти з точною.

74. Обчислити наближено:

а) $(1{,}02)^3 \cdot (0{,}97)^2$; б) $\sqrt{(4{,}05)^2 + (2{,}93)^2}$.

Відповіді:

73. $dl = 0{,}062$ см; $\Delta l = 0{,}065$.

74. а) $1{,}00$; б) $4{,}998$.

5. Диференціювання складних функцій

5.1. Випадок однієї незалежної змінної

Якщо $z = f(x,\ y)$ є диференційовною функцією аргументів x і y, які в свою чергу є диференційовними функціями змінної t

$$x = \varphi(t),\quad y = \psi(t),$$

то похідна складної функції $z = f\left[\varphi(t),\ \psi(t)\right]$ обчислюється за формулою

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} . \qquad (1)$$

У випадку, якщо t збігається з одним із аргументів, наприклад x, то “*повна*” похідна функції z по x дорівнює

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} . \qquad (2)$$

75. Знайти $\dfrac{\partial z}{\partial t}$, якщо $z = e^{3x+2y}$, де $x = \cos t$, $y = t^2$.

Γ Знайдемо похідні з правої частини формули (1):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(e^{3x+2y}\right)_x' = e^{3x+2y} \cdot (3x+2y)_x' = 3e^{3x+2y} ,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(e^{3x+2y}\right)_y' = e^{3x+2y} \cdot (3x+2y)_y' = 2e^{3x+2y} ,$$

$$\frac{dx}{dt} = (\cos t)' = -\sin t ,\quad \frac{dy}{dt} = \left(t^2\right)' = 2t .$$

Підставимо отримані вирази у формулу (1):

$$\frac{dz}{dt} = 3e^{3x+2y} \cdot (-\sin t) + 2e^{3x+2y} \cdot 2t = e^{3x+2y}(4t - 3\sin t) =$$

$= e^{3\cos t + 2t^2}\left(4t - 3\sin t\right)$. ⌟

76. Знайти $\dfrac{dz}{dt}$, якщо $z = \dfrac{x}{y}$, де $x = e^t$, $y = \ln t$.

⌜ Знайдемо похідні з правої частини формули (1):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\frac{x}{y}\right)'_x = \frac{1}{y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \left(\frac{x}{y}\right)'_y = -\frac{x}{y^2}.$$

$$\frac{dx}{dt} = \left(e^t\right)' = e^t, \quad \frac{dy}{dt} = \left(\ln t\right)' = \frac{1}{t}.$$

Підставимо знайдені вирази у формулу (1):

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{y}\cdot e^t - \frac{x}{y^2}\cdot\frac{1}{t} = \frac{1}{\ln t}\cdot e^t - \frac{e^t}{\ln^2 t}\cdot\frac{1}{t} = \frac{e^t}{\ln t}\left(1 - \frac{1}{t\ln^2 t}\right).$$ ⌟

77. Знайти частинну похідну $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ функції $z = \ln\left(e^x + e^y\right)$ і повну похідну $\dfrac{dz}{dx}$, якщо $y = x^3$.

⌜ Знаходимо частинну похідну:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\ln\left(e^x + e^y\right)\right)'_x = \frac{1}{e^x + e^y}\cdot\left(e^x + e^y\right)'_x = \frac{e^x}{e^x + e^y}.$$

"Повну" похідну $\dfrac{dz}{dx}$ знайдемо за формулою (2):

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\ln\left(e^x + e^y\right)\right)'_y = \frac{1}{e^x + e^y}\cdot\left(e^x + e^y\right)'_y = \frac{e^y}{e^x + e^y}, \quad \frac{dy}{dx} = \left(x^3\right)' = 3x^2.$$

Отже, $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{e^x}{e^x + e^y} + \dfrac{e^y}{e^x + e^y}\cdot 3x^2 = \dfrac{e^x + 3x^2 e^y}{e^x + e^y}$. ⌟

78. Знайти частинну похідну $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ і повну похідну $\dfrac{dz}{dx}$, якщо $z = e^{xy}$, де $y = \sin x$.

⌜ Частинна похідна:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(e^{xy}\right)'_x = e^{xy}\cdot\left(xy\right)'_x = y\cdot e^{xy}.$$

Знаходимо повну похідну за формулою (2):

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(e^{xy}\right)'_y = e^{xy}\cdot\left(xy\right)'_y = xe^{xy}, \quad \frac{dy}{dx} = \left(\sin x\right)' = \cos x.$$

Отже, $\dfrac{dz}{dx} = ye^{xy} + xe^{xy} \cdot \cos x = e^{xy}\left(y + x\cos x\right)$. ⌋

Вправи для самостійного розв'язання

79. Знайти $\dfrac{dz}{dt}$, якщо $z = \arcsin\left(x - y\right)$, де $x = 3t$, $y = 4t^3$.

80. Знайти $\dfrac{dz}{dt}$, якщо $z = e^{x-2y}$, де $x = \sin t$, $y = t^3$.

81. Знайти частинну похідну $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ і повну похідну $\dfrac{dz}{dx}$, якщо $z = \operatorname{arctg}\left(xy\right)$, де $y = e^x$.

82. Знайти повну похідну $\dfrac{dz}{dx}$, якщо $z = x^y$, де $y = \operatorname{tg} x$.

Відповіді:

79. $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{3 - 12t^2}{\sqrt{1 - \left(3t - 4t^3\right)^2}}$.

80. $\dfrac{dz}{dt} = e^{\sin t - 2t^3}\left(\cos t - 6t^2\right)$.

81. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{y}{1 + x^2 y^2}$; $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{1}{1 + x^2 y^2}\left(y + x \cdot e^x\right)$.

82. $\dfrac{dz}{dx} = y \cdot x^{y-1} + \dfrac{x^y \ln x}{\cos^2 x}$.

5.2. Випадок кількох незалежних змінних

Якщо z є складною функцією кількох незалежних змінних, наприклад, $z = f\left(x, y\right)$, де $x = \varphi\left(u, v\right)$, $y = \psi\left(u, v\right)$ (u, v – незалежні змінні; f, φ, ψ – диференційовні функції), то частинні похідні z по u і v знаходяться за формулами:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \tag{3}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}. \tag{4}$$

Незалежно від того, є змінні x та y незалежними, чи залежать від інших змінних, справедлива формула

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

(властивість *інваріантності* форми повного диференціала).

83. Знайти $\frac{\partial z}{\partial u}$ і $\frac{\partial z}{\partial v}$, якщо $z = f(x, y)$, де $x = u \cdot v$, $y = \frac{u}{v}$.

⌈ Знайдемо $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial v}$ і застосуємо формули (3), (4).

$\frac{\partial x}{\partial u} = (u \cdot v)'_u = v$, $\frac{\partial x}{\partial v} = (u \cdot v)'_v = u$, $\frac{\partial y}{\partial u} = \left(\frac{u}{v}\right)'_u = \frac{1}{v}$,

$\frac{\partial y}{\partial v} = \left(\frac{u}{v}\right)'_v = -\frac{u}{v^2}$.

$\frac{\partial z}{\partial u} = f'_x(x, y) \cdot v + f'_y(x, y) \cdot \frac{1}{v}$.

$\frac{\partial z}{\partial v} = f'_x(x, y) \cdot u + f'_y(x, y) \cdot \left(-\frac{u}{v^2}\right)$. ⌋

84. Знайти $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$, якщо $z = x^2 y - y^2 x$, де $x = u \cdot \cos v$, $y = u \cdot \sin v$.

⌈ Знайдемо похідні з правих частин формул (3), (4):

$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(xy^2 - y^2 x\right)'_x = 2xy - y^2$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \left(x^2 y - y^2 x\right)'_y = x^2 - 2xy$,

$\frac{\partial x}{\partial u} = (u \cdot \cos v)'_u = \cos v$, $\frac{\partial x}{\partial v} = (u \cdot \cos v)'_v = -u \sin v$,

$\frac{\partial y}{\partial u} = (u \cdot \sin v)'_u = \sin v$, $\frac{\partial y}{\partial v} = (u \cdot \sin v)'_v = u \cos v$.

Підставимо отримані вирази у формули (3), (4):

$\frac{\partial z}{\partial u} = \left(2xy - y^2\right) \cdot \cos v + \left(x^2 - 2xy\right) \cdot \sin v =$

$= \left(2u \cos v \cdot u \sin v - u^2 \sin^2 v\right) \cdot \cos v +$

$+ \left(u^2 \cos^2 v - 2u \cos v \cdot u \sin v\right) \cdot \sin v =$

$= u^2 \sin v \cos v (2\cos v - \sin v) + u^2 \sin v \cos v (\cos v - 2\sin v) =$

$= u^2 \sin v \cos v (2\cos v - \sin v + \cos v - 2\sin v) =$

$$= u^2 \sin v \cos v \left(3\cos v - 3\sin v\right) = 3u^2 \sin v \cos v \left(\cos v - \sin v\right) .$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \left(2xy - y^2\right) \cdot \left(-u \sin v\right) + \left(x^2 - 2xy\right) \cdot u \cos v =$$

$$= \left(2u \cos v \cdot u \sin v - u^2 \sin^2 v\right) \cdot \left(-u \sin v\right) + \left(u^2 \cos^2 v - 2u^2 \cos v \sin v\right) \times$$

$$\times u \cos v = -u^3 \sin^2 v \left(2\cos v - \sin v\right) + u^3 \cos^2 v \left(\cos v - 2\sin v\right) =$$

$$= u^3 \left(\underline{-2\sin^2 v \cos v} + \underline{\underline{\sin^3 v}} + \underline{\underline{\cos^3 v}} - \underline{2\cos^2 v \sin v}\right) =$$

$$= u^3 \left[-2\sin v \cos v \left(\sin v + \cos v\right) + \left(\sin v + \cos v\right) \times\right.$$

$$\left.\times \left(\sin^2 v - \sin v \cos v + \cos^2 v\right)\right] = u^3 \left(\sin v + \cos v\right)\left(1 - 3\sin v \cos v\right) . \quad \lrcorner$$

<u>Вправи для самостійного розв’язання</u>

85. Показати, що функція $z = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{y}$, де $x = u + v$, $y = u - v$, задовольняє співвідношенню $\dfrac{\partial z}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial v} = \dfrac{u - v}{v^2 + u^2}$.

86. Знайти $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ і $\dfrac{\partial z}{\partial v}$, якщо $z = x^2 \cdot \ln y$, де $x = \dfrac{u}{v}$, $y = 3u - 2v$.

Відповіді:

85. $\dfrac{\partial z}{\partial u} = 2\dfrac{u}{v^2} \ln\left(3u - 2v\right) + \dfrac{3u^2}{v^2\left(3u - 2v\right)}$.

86. $\dfrac{\partial z}{\partial v} = -\dfrac{2u^2}{v^3} \ln\left(3u - 2v\right) - \dfrac{2u^2}{v^2\left(3u - 2v\right)}$.

6. Частинні похідні вищих порядків

Частинними похідними другого порядку функції $z = f\left(x, y\right)$ називаються частинні похідні від її частинних похідних першого порядку.

Для похідних другого порядку використовують позначення

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}\left(x, y\right);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}\left(x, y\right);$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{yx}(x,\ y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}(x,\ y).$$

Аналогічно означуються і позначаються частинні похідні порядку вище другого.

Якщо частинні похідні, що обчислюються, неперервні, то результат повторного диференціювання не залежить від порядку диференціювання:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}.$$

Знайти частинні похідні другого порядку функцій:

87. $z=x^3y^4+2x^2-y^3+1$.

$\ulcorner$ $\frac{\partial z}{\partial x}=z_x'=\left(x^3y^4+2x^2-y^3+1\right)_x'=3x^2y^4+4x$,

$\frac{\partial z}{\partial y}=z_y'=\left(x^3y^4+2x^2-y^3+1\right)_y'=4x^3y^3-3y^2$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\left(3x^2y^4+4x\right)_x'=6xy^4+4$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\left(4x^3y^3-3y^2\right)_y'=12x^3y^2-6y$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\left(3x^2y^4+4x\right)_y'=12x^2y^3$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\left(4x^3y^4-3y^2\right)_x'=12x^2y^3$. $\lrcorner$

88. $z=e^{xy}$.

$\ulcorner$ $\frac{\partial z}{\partial x}=\left(e^{xy}\right)_x'=e^{xy}\cdot(xy)_x'=e^{xy}\cdot y$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\left(e^{xy}\right)_y'=e^{xy}\cdot(xy)_y'=e^{xy}x$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(e^{xy}\cdot y\right)_x'=y\cdot e^{xy}\cdot(xy)_x'=y\cdot e^{xy}\cdot y=y^2e^{xy}$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(e^{xy}\cdot x\right)_y'=x\cdot e^{xy}\cdot(xy)_y'=xe^{xy}\cdot x=x^2e^{xy}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(e^{xy}\cdot y\right)'_y = \left(e^{xy}\right)'_y \cdot y + \left(y\right)'_y \cdot e^{xy} = e^{xy}\cdot x \cdot y + 1\cdot e^{xy} = e^{xy}\left(xy+1\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left(e^{xy}\cdot x\right)'_x = \left(e^{xy}\right)'_x \cdot x + \left(x\right)'_x \cdot e^{xy} = e^{xy}\cdot y \cdot x + 1\cdot e^{xy} =$$

$$= e^{xy}\left(xy+1\right). \quad \lrcorner$$

89. $z = \cos(xy)$.

$\ulcorner$ $$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\cos(xy)\right)'_x = -\sin(xy)\cdot(xy)'_x = -y\sin(xy),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\cos(xy)\right)'_y = -\sin(xy)\cdot(xy)'_y = -x\sin(xy),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(-y\sin(xy)\right)'_x = -y\cdot\cos(xy)\cdot(xy)'_x = -y^2\cos(xy),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(-x\sin(xy)\right)'_y = -x\cdot\cos(xy)\cdot(xy)'_y = -x^2\cos(xy),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(-y\sin(xy)\right)'_y = -\left[(y)'_y\cdot\sin(xy) + \left(\sin(xy)\right)'_y\cdot y\right] =$$

$$= -\left[\sin(xy) + \cos(xy)\cdot(xy)'_y\cdot y\right] = -\left[\sin(xy) + xy\cos(xy)\right],$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left(-x\sin(xy)\right)'_x = -\left[(x)'_x\cdot\sin(xy) + \left(\sin(xy)\right)'_x\cdot x\right] =$$

$$= -\left[\sin(xy) + xy\cos(xy)\right]. \quad \lrcorner$$

90. $z = x^y$.

$\ulcorner$ $$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(x^y\right)'_x = yx^{y-1},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(x^y\right)'_y = x^y\ln x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(y\cdot x^{y-1}\right)'_x = y(y-1)x^{y-2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(x^y\cdot\ln x\right)'_y = \ln x\cdot\left(x^y\right)'_y = \ln x\cdot x^y\cdot\ln x = x^y\ln^2 x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(y \cdot x^{y-1}\right)_y' = (y)_y' \cdot x^{y-1} + \left(x^{y-1}\right)_y' \cdot y =$$

$$= 1 \cdot x^{y-1} + x^{y-1} \cdot \ln x \cdot y = x^{y-1} + x^{y-1} y \ln x ,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left(x^y \cdot \ln x\right)_x' = \left(x^y\right)_x' \cdot \ln x + (\ln x)_x' \cdot x^y = yx^{y-1} \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot x^y =$$

$$= x^{y-1} + x^{y-1} y \ln x . \quad \lrcorner$$

91. $z = \ln\left(x^2 + y\right)$.

$\ulcorner$ $$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\ln\left(x^2 + y\right)\right)_x' = \frac{1}{x^2 + y} \cdot \left(x^2 + y\right)_x' = \frac{2x}{x^2 + y} ,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\ln\left(x^2 + y\right)\right)_y' = \frac{1}{x^2 + y} \cdot \left(x^2 + y\right)_y' = \frac{1}{x^2 + y} ,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(\frac{2x}{x^2 + y}\right)_x' = 2 \cdot \frac{(x)_x' \cdot \left(x^2 + y\right) - \left(x^2 + y\right)_x' \cdot x}{\left(x^2 + y\right)^2} =$$

$$= 2 \cdot \frac{1 \cdot \left(x^2 + y\right) - 2x \cdot x}{\left(x^2 + y\right)^2} = 2 \frac{x^2 + y - 2x^2}{\left(x^2 + y\right)^2} = \frac{2\left(y - x^2\right)}{\left(x^2 + y\right)^2} ,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(\frac{1}{x^2 + y}\right)_y' = -\frac{1}{\left(x^2 + y\right)^2} \cdot \left(x^2 + y\right)_y' = -\frac{1}{\left(x^2 + y\right)^2} ,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(\frac{2x}{x^2 + y}\right)_y' = 2x \cdot \left(\frac{1}{x^2 + y}\right)_y' = 2x \cdot \left(-\frac{1}{\left(x^2 + y\right)^2} \cdot \left(x^2 + y\right)_y'\right) =$$

$$= 2x \left(-\frac{1}{\left(x^2 + y\right)^2}\right) = \frac{-2x}{\left(x^2 + y\right)^2} ,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left(\frac{1}{x^2 + y}\right)_x' = -\frac{1}{\left(x^2 + y\right)^2} \cdot \left(x^2 + y\right)_x' = \frac{-2x}{\left(x^2 + y\right)^2} . \quad \lrcorner$$

92. $z = \sqrt{2xy + y^2}$.

$\ulcorner$ Обчислимо лише похідні $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ та $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\sqrt{2xy+y^2}\right)_x'=\frac{1}{2\sqrt{2xy+y^2}}\cdot\left(2xy+y^2\right)_x'=\frac{2y}{2\sqrt{2xy+y^2}}=$$

$$=\frac{y}{\sqrt{2xy+y^2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\sqrt{2xy+y^2}\right)_y'=\frac{1}{2\sqrt{2xy+y^2}}\cdot\left(2xy+y^2\right)_y'=\frac{2x+2y}{2\sqrt{2xy+y^2}}=\frac{x+y}{\sqrt{2xy+y^2}},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(\frac{y}{\sqrt{2xy+y^2}}\right)_y'=\frac{(y)_y'\cdot\sqrt{2xy+y^2}-\left(\sqrt{2xy+y^2}\right)_y'\cdot y}{\left(\sqrt{2xy+y^2}\right)^2}=$$

$$=\frac{1\cdot\sqrt{2xy+y^2}-\frac{1}{2\sqrt{2xy+y^2}}\cdot\left(2xy+y^2\right)_y'\cdot y}{2xy+y^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{2xy+y^2}-\frac{2x+2y}{2\sqrt{2xy+y^2}}\cdot y}{2xy+y^2}=\frac{\sqrt{2xy+y^2}-\frac{y(x+y)}{\sqrt{2xy+y^2}}}{2xy+y^2}=$$

$$=\frac{2xy+y^2-y(x+y)}{\left(2xy+y^2\right)\cdot\sqrt{2xy+y^2}}=\frac{2xy+y^2-xy-y^2}{\left(2xy+y^2\right)\cdot\sqrt{2xy+y^2}}=$$

$$=\frac{xy}{\left(2xy+y^2\right)\cdot\sqrt{2xy+y^2}},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\left(\frac{x+y}{\sqrt{2xy+y^2}}\right)_x'=\frac{(x+y)_x'\cdot\sqrt{2xy+y^2}-\left(\sqrt{2xy+y^2}\right)_x'\cdot(x+y)}{\left(\sqrt{2xy+y^2}\right)^2}=$$

$$=\frac{1\cdot\sqrt{2xy+y^2}-\frac{1}{2\sqrt{2xy+y^2}}\cdot\left(2xy+y^2\right)_x'\cdot(x+y)}{2xy+y^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{2xy+y^2}-\frac{2y}{2\sqrt{2xy+y^2}}\cdot(x+y)}{2xy+y^2}=\frac{\sqrt{2xy+y^2}-\frac{y(x+y)}{\sqrt{2xy+y^2}}}{2xy+y^2}=$$

$$=\frac{2xy+y^2-y(x+y)}{\left(2xy+y^2\right)\sqrt{2xy+y^2}}=\frac{2xy+y^2-xy-y^2}{\left(2xy+y^2\right)\sqrt{2xy+y^2}}=\frac{xy}{\left(2xy+y^2\right)\sqrt{2xy+y^2}}. \quad \lrcorner$$

Зауважимо, що у всіх розглянутих прикладах $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

<u>Вправи для самостійного розв'язання</u>

Знайти частинні похідні другого порядку функцій:

93. $z=\frac{x-y}{x+y}$.

94. $z=\arcsin(xy)$.

95. $z=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$.

96. $z=\sin^2(ax+by)$.

97. $z=\frac{1}{3}\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}$.

Відповіді:

93. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{4y}{(x+y)^3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{4x}{(x+y)^3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{2(x-y)}{(x+y)^3}$.

94. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{xy^3}{\sqrt{\left(1-x^2y^2\right)^3}}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{x^3y}{\sqrt{\left(1-x^2y^2\right)^3}}$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}=\frac{1}{\sqrt{\left(1-x^2y^2\right)^3}}$.

95. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{x}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{x^3+\left(x^2-y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}\cdot\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}=-\frac{y}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}}$.

96. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2a^2\cos 2(ax+by)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2b^2\cos 2(ax+by)$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 2ab\cos 2(ax+by).$$

97. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

7. Диференціювання неявних функцій

7.1. Випадок однієї незалежної змінної

Якщо рівняння $f(x,\ y)=0$, де $f(x,\ y)$ – диференційовна функція змінних x і y, визначає y як функцію від x (див. підрозділ 4 розділу 5), то похідна цієї неявно заданої функції (за умови $f_y'(x,\ y)\neq 0$) знаходиться за формулою

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x'(x,\ y)}{f_y'(x,\ y)}. \qquad (5)$$

Похідні вищих порядків знаходяться послідовним диференціюванням цієї рівності.

98. Знайти $\frac{dy}{dx}$ і $\frac{d^2y}{dx^2}$, якщо

$$\left(x^2+y^2\right)^3 - 3\left(x^2+y^2\right)+1=0.$$

Γ Позначимо ліву частину даного рівняння через $f(x,\ y)$ і знайдемо частинні похідні $f_x'(x,\ y)$ і $f_y'(x,\ y)$:

$$f(x,\ y)=\left(x^2+y^2\right)^3-3\left(x^2+y^2\right)+1;$$

$$f_x'(x,\ y)=3\left(x^2+y^2\right)^2\cdot 2x-3\cdot 2x=6x\left[\left(x^2+y^2\right)^2-1\right],$$

$$f_y'(x,\ y)=3\left(x^2+y^2\right)^2\cdot 2y-3\cdot 2y=6y\left[\left(x^2+y^2\right)^2-1\right].$$

Підставляючи знайдені частинні похідні у формулу (5) отримаємо:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{f_x'(x,\ y)}{f_y'(x,\ y)}=-\frac{6x\left[\left(x^2+y^2\right)^2-1\right]}{6y\left[\left(x^2+y^2\right)-1\right]}=-\frac{x}{y}.$$

Для знаходження другої похідної продиференціюємо по x

знайдену першу похідну, пам’ятаючи при цьому, що y є функцією змінної x:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(-\frac{x}{y}\right)=-\frac{1\cdot y-x\cdot\dfrac{dy}{dx}}{y^2}=-\frac{y-x\cdot\left(-\dfrac{x}{y}\right)}{y^2}=-\frac{y^2+x^2}{y^2}. \quad \lrcorner$$

99. Знайти $\dfrac{dy}{dx}$ і $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, якщо $y=x+\ln y$.

$\ulcorner$ Покладемо $f(x,\ y)=y-x-\ln y$.

Знайдемо частинні похідні $f_x'(x,\ y)$ і $f_y'(x,\ y)$:

$$f_x'(x,\ y)=-1,\quad f_y'(x,\ y)=1-\frac{1}{y}.$$

Отже, $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{f_x'(x,\ y)}{f_y'(x,\ y)}=-\dfrac{-1}{1-\dfrac{1}{y}}=\dfrac{y}{y-1}$.

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{y-1}\right)=\frac{\dfrac{dy}{dx}\cdot(y-1)-\dfrac{d}{dx}(y-1)\cdot y}{(y-1)^2}=$$

$$=\frac{\dfrac{dy}{dx}\cdot(y-1)-\dfrac{dy}{dx}\cdot y}{(y-1)^2}=\frac{\dfrac{dy}{dx}(y-1-y)}{(y-1)^2}=\frac{-\dfrac{dy}{dx}}{(y-1)^2}=$$

$$=\frac{-\dfrac{y}{y-1}}{(y-1)^2}=\frac{-y}{(y-1)^3}=\frac{y}{(1-y)^3}. \quad \lrcorner$$

100. Знайти $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{x=1}$ і $\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=1}$, якщо $x^2-2xy+y^2+x+y-2=0$.

$\ulcorner$ Покладемо $f(x,\ y)=x^2-2xy+y^2+x+y-2$.

Знайдемо частинні похідні $f_x'(x,\ y)$ і $f_y'(x,\ y)$:

$$f_x'(x,\ y)=2x-2y+1,\quad f_y'(x,\ y)=-2x+2y+1.$$

Отже, $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{f_x'(x,\ y)}{f_y'(x,\ y)}=-\dfrac{2x-2y+1}{-2x+2y+1}$.

Підставляючи у задане рівняння значення $x=1$, знайдемо відповідне значення y:

$1-2y+y^2+1+y-2=0$, $y^2-y=0$ або $y(y-1)=0$, звідси $y=0$, $y=1$. Маємо точки $(1;\,0)$ і $(1;\,1)$.

Знаходимо значення похідної:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{x=1\\y=0}}=-\frac{2\cdot 1-0+1}{-2\cdot 1+0+1}=3 \quad \text{при } y(1)=0,$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{x=1\\y=1}}=-\frac{2\cdot 1-2\cdot 1+1}{-2\cdot 1+2\cdot 1+1}=-1 \quad \text{при } y(1)=1.$$

Друга похідна:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(-\frac{2x-2y+1}{-2x+2y+1}\right)=$$

$$=-\frac{(-2x+y+1)\cdot\frac{d}{dx}(2x-2y+1)-(2x-2y+1)\cdot\frac{d}{dx}(-2x+2y+1)}{(-2x+2y+1)^2}=$$

$$=-\frac{(-2x+y+1)\cdot\left(2-2\frac{dy}{dx}\right)-(2x-2y+1)\cdot\left(-2+2\frac{dy}{dx}\right)}{(-2x+2y+1)^2}=$$

$$=-\frac{\left(2-2\frac{dy}{dx}\right)(-2x+y+1+2x-2y+1)}{(-2x+2y+1)^2}=$$

$$=-\frac{\left(2-2\frac{dy}{dx}\right)(2-y)}{(-2x+2y+1)^2}=-\frac{2\left(1-\frac{dy}{dx}\right)(2-y)}{(-2x+2y+1)^2}=$$

$$=\frac{2\left(\frac{dy}{dx}-1\right)\cdot(2-y)}{(-2x+2y+1)^2}=\frac{2\left(-\frac{2x-2y+1}{-2x+2y+1}-1\right)\cdot(2-y)}{(-2x+2y+1)^2}=$$

$$=\frac{2(-2x+2y-1+2x-2y-1)\cdot(2-y)}{(-2x+2y+1)^3}=\frac{-4(2-y)}{(-2x+2y+1)^3}=$$

$$=\frac{4(y-2)}{(-2x+2y+1)^3}.$$

Знаходимо значення похідної:

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=1}=\frac{4(0-2)}{(-2\cdot1+2\cdot0+1)^3}=\frac{-8}{-1}=8 \quad \text{при} \quad y(1)=0,$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=1}=\frac{4(1-2)}{(-2\cdot1+2\cdot1+1)^3}=\frac{-4}{1}=-4 \quad \text{при} \quad y(1)=1. \quad \lrcorner$$

Вправи для самостійного розв’язання

Знайти $\dfrac{dy}{dx}$ від функцій, заданих неявно рівняннями:

101. $x^3y-y^3x=a^4$.

102. $x^2y^2-x^4y^4=a^4$.

103. $x\cdot e^y+y\cdot e^x-e^{xy}=0$.

104. $\left(x^2+y^2\right)^2-a^2\left(x^2-y^2\right)=0$.

105. $\sin(xy)-e^{xy}-x^2y=0$.

Відповіді:

101. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3x^2y-y^3}{3xy^2-x^3}$.

102. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x\left(y^2-2x^2\right)}{y\left(2y^2-x^2\right)}$.

103. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{ye^{xy}-ye^x-e^y}{xe^y+e^x-xe^{xy}}$.

104. $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{2\left(x^2+y^2\right)-a^2}{2\left(x^2+y^2\right)+a^2}$.

105. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}\cdot\dfrac{2x+e^{xy}-\cos xy}{\cos xy-e^{xy}-x}$.

7.2. Випадок кількох незалежних змінних

Функцію двох змінних $z=z(x,y)$ називають *неявною* функцією, що визначається рівнянням $F(x,\,y,\,z)=0$, якщо вона неперервна і перетворює це рівняння у тотожність $F(x,\,y,\,z(x,y))\equiv0$.

Якщо рівняння $F(x,\ y,\ z)=0$, де $F(x,\ y,\ z)$ – диференційовна функція змінних $x,\ y$ і z, визначає z як функцію незалежних змінних x і y і $F_z'(x,\ y,\ z)\neq 0$, то частинні похідні цієї неявно заданої функції знаходяться за формулами

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'(x,\ y,\ z)}{F_z'(x,\ y,\ z)},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'(x,\ y,\ z)}{F_z'(x,\ y,\ z)},\tag{6}$$

де $z=z(x,y)$.

106. Знайти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, якщо $x^2-2y^2+3z^2-yz+y=0$.

⌜ Позначимо $F(x,\ y,\ z)=x^2-2y^2+3z^2-yz+y$.

Знайдемо частинні похідні:

$F_x'(x,\ y,\ z)=2x$, $F_y'(x,\ y,\ z)=-4y-z+1$, $F_z'(x,\ y,\ z)=6z-y$.

За формулами (6):

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{2x}{6z-y}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{1-4y-z}{6z-y}$. ⌟

107. Знайти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, якщо $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

⌜ Позначимо $F(x,\ y,\ z)=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1$. Знайдемо частинні похідні

$F_x'(x,\ y,\ z)=\dfrac{2x}{a^2}$, $F_y'(x,\ y,\ z)=\dfrac{2y}{b^2}$, $F_z'(x,\ y,\ z)=\dfrac{2z}{c^2}$.

За формулами (6):

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{\frac{2x}{a^2}}{\frac{2z}{c^2}}=-\dfrac{c^2x}{a^2z}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=--\dfrac{\frac{2y}{b^2}}{\frac{2z}{c^2}}=-\dfrac{c^2y}{b^2z}$. ⌟

108. Знайти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, якщо $e^z-xyz=0$.

⌜ Позначимо $F(x,\ y,\ z)=e^z-xyz$. Знайдемо частинні похідні:

$F_x'(x,\ y,\ z)=-yz$, $F_y'(x,\ y,\ z)=-xz$, $F_z'(x,\ y,\ z)=e^z-xy$.

За формулами (6):

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{-yz}{e^z-xy}=\frac{yz}{e^z-xy},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{-xz}{e^z-xy}=\frac{xz}{e^z-xy}.$$

Враховуючи задане рівняння $e^z-xyz=0$, отримаємо $e^z=xyz$. Тоді знайдені вище похідні запишуться так:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz}{xyz-xy}=\frac{yz}{xy(z-1)}=\frac{z}{x(z-1)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz}{xyz-xy}=\frac{xz}{xy(z-1)}=\frac{z}{y(z-1)}.\ \lrcorner$$

Вправи для самостійного розв’язання

109. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо $x^2-2y^2+z^2-4x+2z-5=0$.

110. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо $z^3+3xyz=a^2$.

111. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо $x\cos y+y\cos z+z\cos x=1$.

Відповіді:

109. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2-x}{z+1}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{z+1}$.

110. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{yz}{xy+z^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{xy}{xy+z^2}$.

111. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z\sin x-\cos y}{\cos x-y\sin z}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x\sin y-\cos z}{\cos x-y\sin z}$.

8. Похідна за напрямом і градієнт функції

8.1. Похідна функції за напрямом

Похідною функції $z=f(x,y)$ у точці $P(x;y)$ *за напрямом* $\vec{e}=\overrightarrow{PP_1}$ називається

$$\frac{\partial z}{\partial e}=\lim_{PP_1\to 0}\frac{f(P_1)-f(P)}{PP_1},$$

де $f(P)$ і $f(P_1)$ – значення функції у точках P і P_1, PP_1 – відстань між цими точками.

Якщо функція z диференційовна, то має місце формула

$$\frac{\partial z}{\partial e}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha, \tag{7}$$

де α – кут, що утворює вектор $\vec{e}$ з віссю Ox.

Аналогічно означується і обчислюється похідна за напрямом $\vec{e}$ для функції трьох аргументів $u=f(x,\ y,\ z)$. У цьому випадку

$$\frac{\partial u}{\partial e}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma, \tag{8}$$

де α, β, γ – кути між вектором $\vec{e}$ і відповідними осями координат. Похідна за напрямом характеризує швидкість зміни функції у даному напрямі.

112. Знайти похідну функції $z=2x^2-3y^2$ у точці $P(1;\ 0)$ за напрямом, що складає з віссю Ox кут 120°.

⌜ Знайдемо частинні похідні даної функції та їх значення у точці P:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=4x,\ \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_P=4;\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-6y,\ \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P=0.$$

$$\cos\alpha=\cos120^\circ=-\frac{1}{2},\ \sin\alpha=\sin120^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

За формулою (7): $\dfrac{\partial z}{\partial e}=4\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)+0\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=-2.$

Знак мінус вказує, що функція у точці P у даному напрямі спадає. ⌟

113. Знайти похідну функції $z=3x^2+4y^2+x-2y+1$ у точці $P(-1;\ 2)$ за напрямом $\vec{e}=3\vec{i}-\vec{j}$.

⌜ Знайдемо частинні похідні даної функції та їх значення у точці P:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=6x+1;\ \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_P=-5;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=8y-2;\ \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P=14.$$

Знайдемо координати орта $\vec{e}_0$ вектора $\vec{e}$ за формулою $\vec{e}_0 = \dfrac{\vec{e}}{|\vec{e}|}$:

$\vec{e} = \{3; -1\}$, $|\vec{e}| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$, $\vec{e}_0 = \left\{\dfrac{3}{\sqrt{10}}; -\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right\}$.

Звідси маємо $\cos\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$, $\sin\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

За формулою (7): $\dfrac{\partial z}{\partial e} = -5\cdot\dfrac{3}{\sqrt{10}} + 14\cdot\left(-\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right) = -\dfrac{29}{\sqrt{10}}$. ⌟

114. Знайти похідну функції $z = x^3 - 3x^2 y + 3xy^2 + 1$ у точці $P(3; 1)$ у напрямі від цієї точки до точки $N(6; 5)$.

⌜ Знайдемо частинні похідні даної функції та їх значення у точці P:

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 6xy + 3y^2$; $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)_P = 3\cdot 3^2 - 6\cdot 3\cdot 1 + 3\cdot 1^2 = 12$;

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = -3x^2 + 6xy$; $\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)_P = -3\cdot 3^2 + 6\cdot 3\cdot 1 = -9$.

Знайдемо координати вектора $\vec{e} = \overrightarrow{PN}$: $\vec{e} = \{6-3; 5-1\} = \{3; 4\}$.

Знайдемо координати орта $\vec{e}_0$ вектора $\vec{e}$:

$|\vec{e}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = 5$, $\vec{e}_0 = \left\{\dfrac{3}{5}; \dfrac{4}{5}\right\}$.

Звідси $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$, $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$.

За формулою (7) $\dfrac{\partial z}{\partial e} = 12\cdot\dfrac{3}{5} + (-9)\cdot\dfrac{4}{5} = 0$. ⌟

115. Знайти похідну функції $u = xy + yz + zx$ у точці $M(2; 1; 3)$ в напрямі від цієї точки до точки $N(5; 5; 15)$.

⌜ Знайдемо частинні похідні даної функції та їх значення у точці M:

$\dfrac{\partial u}{\partial x} = y + z$; $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)_M = 1 + 3 = 4$;

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x + z\ ; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_M = 2 + 3 = 5\ ;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = y + x\ ; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_M = 1 + 2 = 3\ .$$

Знайдемо координати вектора $\vec{e} = \overrightarrow{MN}$: $\vec{e} = \{3;\ 4;\ 12\}$. Координати його орта $\vec{e}_0$:

$$|\vec{e}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2} = \sqrt{9 + 16 + 144} = 13\ , \quad \vec{e}_0 = \left\{\frac{3}{13};\ \frac{4}{13};\ \frac{12}{13}\right\}.$$

Напрямні косинуси $\cos\alpha = \frac{3}{13}$, $\cos\beta = \frac{4}{13}$, $\cos\gamma = \frac{12}{13}$.

За формулою (8) $\frac{\partial u}{\partial e} = 4 \cdot \frac{3}{13} + 5 \cdot \frac{4}{13} + 3 \cdot \frac{12}{13} = \frac{68}{13}$. ┘

Вправи для самостійного розв'язання

116. Знайти похідну функції $z = \operatorname{arctg} xy$ у точці $(1;\ 1)$ за напрямом бісектриси першого координатного кута.

117. Знайти похідну функції $z = x^2y^2 - xy^3 - 3y - 1$ у точці $(2;\ 1)$ за напрямом від цієї точки до початку координат.

118. Знайти похідну функції $u = xy^2 + z^3 - xyz$ у точці $M(1;\ 1;\ 2)$ за напрямом, що утворює з осями координат кути відповідно 60°, 45°, 60°.

Відповіді:

116. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **117.** $-\sqrt{5}$. **118.** 5.

8.2. Градієнт функції

Градієнтом функції $z = f(x,\ y)$ у точці $P(x;\ y)$ називається вектор, проекціями якого на координатні осі є відповідні частинні похідні даної функції:

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, z = \frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}\ .$$

Похідна даної функції за напрямом $\vec{e}$ пов'язана з градієнтом функції формулою

$$\frac{\partial z}{\partial e} = \text{пр}_{\vec{e}}\, \overrightarrow{\text{grad}}\, z .$$

Градієнт функції у точці співпадає з напрямом нормалі до відповідної лінії рівня функції.

Напрям вектора градієнта функції у заданій точці є напрямом найбільшої швидкості зміни функції у цій точці.

Аналогічно визначається градієнт функції трьох змінних $u = f(x, y, z)$:

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} .$$

Градієнт функції трьох змінних у точці співпадає з напрямом нормалі до поверхні рівня, що проходить через цю точку.

119. Знайти градієнт функції $z = x^2 y$ у точці $P(1;\,1)$.

$\ulcorner$ Знаходимо частинні похідні та їх значення в точці P :

$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy$; $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_P = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$;

$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2$; $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P = 1^2 = 1$.

Отже, $\overrightarrow{\text{grad}}\, z = 2\vec{i} + \vec{j}$. $\lrcorner$

120. Знайти $\overrightarrow{\text{grad}}\, u$ у точці $P(1;\,2;\,3)$, якщо $u = xyz$.

$\ulcorner$ Знаходимо частинні похідні та їх значення у даній точці:

$\frac{\partial u}{\partial x} = yz$; $\frac{\partial u}{\partial y} = xz$; $\frac{\partial u}{\partial z} = xy$; $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 2 \cdot 3 = 6$;

$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 1 \cdot 3 = 3$; $\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = 1 \cdot 2 = 2$.

Отже, $\overrightarrow{\text{grad}}\, u = 6\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$.

Вправи для самостійного розв'язання

121. Знайти $\overrightarrow{\text{grad}}\, z$ у точці $(2;\,1)$, якщо $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

122. Знайти $\overrightarrow{\text{grad}}\, z$ у точці $(5;\,3)$, якщо $z = \sqrt{x^2 - y^2}$.

123. Знайти величину і напрям $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,u$ у точці $(2;\,-2;\,1)$, якщо $u = x^2 + y^2 + z^2$.

Відповіді:

121. $9\vec{i} - 3\vec{j}$. **122.** $\frac{1}{4}\left(5\vec{i} - 3\vec{j}\right)$.

123. $\left|\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,u\right| = 6$; $\cos\alpha = \frac{2}{3}$; $\cos\beta = -\frac{2}{3}$; $\cos\gamma = \frac{1}{3}$.

9. Дотична площина і нормаль до поверхні

9.1. Рівняння дотичної площини і нормалі у випадку явного задання поверхні

Дотичною площиною до поверхні у точці M (*точка дотику*) називається площина, в якій знаходяться всі дотичні у точці M до різних кривих, що проведені на поверхні через цю точку.

Нормаллю до поверхні називається перпендикуляр до дотичної площини у точці дотику.

Якщо рівняння поверхні у декартовій системі координат задано у явній формі $z = f(x,\,y)$, де $f(x,\,y)$ – диференційовна функція, то рівняння дотичної площини у точці $M(x_0;\,y_0;\,z_0)$ поверхні має вигляд

$$z - z_0 = f_x'(x_0,\,y_0)(x - x_0) + f_y'(x_0,\,y_0)(y - y_0). \qquad (9)$$

Рівняння нормалі має вигляд

$$\frac{x - x_0}{f_x'(x_0,\,y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y'(x_0,\,y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}. \qquad (10)$$

124. Написати рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $z = \frac{x^2}{2} - y^2$ у точці $M(2;\,-1;\,1)$.

Γ Знайдемо частинні похідні даної функції та їх значення у точці M:

$\frac{\partial z}{\partial x} = x$, $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M = 2$;

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-2y$, $\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)_M=2$.

Застосовуючи формули (9) і (10) маємо:

$z-1=2(x-2)+2(y+1)$ або $2x+2y-z-1=0$ – рівняння дотичної площини;

$\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$ – рівняння нормалі. ⌋

Вправи для самостійного розв’язання

125. Написати рівняння дотичної площини і рівняння нормалі до параболоїда $z=x^2+y^2$ у точці $(1;-2;5)$.

Відповідь:

125. $2x-4y-z-5=0$; $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-4}=\dfrac{z-5}{-1}$.

9.2. Рівняння дотичної площини і нормалі у випадку неявного задання поверхні

У випадку, коли рівняння поверхні задано у неявній формі

$F(x,\ y,\ z)=0$ і $F(x_0,\ y_0,\ z_0)=0$, відповідні рівняння мають вигляд

$$F_x'(x_0,\ y_0,\ z_0)(x-x_0)+F_y'(x_0,\ y_0,\ z_0)(y-y_0)+$$
$$+F_z'(x_0,\ y_0,\ z_0)(z-z_0)=0 \ - \qquad (11)$$

рівняння дотичної площини і

$$\frac{x-x_0}{F_x'(x_0,\ y_0,\ z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y'(x_0,\ y_0,\ z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z'(x_0,\ y_0,\ z_0)} \ - \qquad (12)$$

рівняння нормалі.

126. Написати рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $3xyz-z^3=a^3$ у точці, для якої $x=0$, $y=a$.

⌈ Знайдемо аплікату точки дотику. Для цього підставимо $x=0$, $y=a$ у рівняння поверхні: $-z^3=a^3$. Звідси $z=-a$. Таким чином, точкою дотику є $M(0;\ a;\ -a)$.

Позначимо через $F(x, y, z)$ ліву частину рівняння і знайдемо частинні похідні та їх значення у точці M:

$F_x' = 3yz$, $\left(F_x'\right)_M = -3a^2$; $F_y' = 3xz$, $\left(F_y'\right)_M = 0$; $F_z' = 3xy - 3z^2$, $\left(F_z'\right)_M = -3a^2$.

Застосуємо формули (11) і (12):

$-3a^2(x-0) + 0(y-a) - 3a^2(z+a) = 0$ або $x + z + a = 0$ – рівняння дотичної площини;

$\frac{x-0}{-3a^2} = \frac{y-a}{0} = \frac{z+a}{-3a^2}$ або $\frac{x}{1} = \frac{y-a}{0} = \frac{z+a}{1}$ – рівняння нормалі. ⌋

Вправи для самостійного розв'язання

127. Написати рівняння дотичної площини і рівняння нормалі до конуса $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{8} = 0$ у точці $(4; 3; 4)$.

Відповідь:

127. $3x + 4y - 6z = 0$; $\frac{x-4}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{-6}$.

10. Екстремуми функції двох змінних

10.1. Локальний екстремум функції

Функція $f(x, y)$ має *локальний максимум* (*мінімум*) $f(a, b)$ у точці $P(a; b)$, якщо для всіх відмінних від P точок $P'(x; y)$ у деякому околі точки P виконується нерівність $f(a, b) > f(x, y)$ (відповідно $f(a, b) < f(x, y)$). Максимум або мінімум функції називається її *екстремумом*. Аналогічно визначається екстремум функції трьох і більшого числа змінних.

Необхідна умова екстремуму. Точки, в яких диференційовна функція $f(x, y)$ може набувати екстремуму, знаходять шляхом розв'язання системи рівнянь

$$\begin{cases} f_x'(x, y) = 0 \\ f_y'(x, y) = 0. \end{cases} \tag{13}$$

Розв'язки системи (13) називають *стаціонарними точками*.

У загальному випадку в точці екстремуму $P(a;\,b)$ функції $f(x,\,y)$ або виконуються умови (13), або принаймні одна з похідних f'_x, f'_y не існує.

Достатня умова екстремуму. У стаціонарній точці $P(a;\,b)$ знаходимо

$$A = f''_x(a,\,b),\quad B = f''_{xy}(a,\,b),\quad C = f''_{yy}(a,\,b),\quad \Delta = AC - B^2 .$$

Тоді: 1) якщо $\Delta > 0$, то функція має екстремум у точці $P(a;\,b)$, а саме – максимум, якщо $A < 0$, і мінімум, якщо $A > 0$;

2) якщо $\Delta < 0$, то екстремуму в точці $P(a;\,b)$ немає;

3) якщо $\Delta = 0$, то потрібні подальші дослідження.

128. Дослідити на екстремуми функцію

$$z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y .$$

⌐ Знайдемо частинні похідні і складемо систему (13):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15,\qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 6xy - 12,\qquad \begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \\ 6xy - 12 = 0 \end{cases}$$ або

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 5 = 0 \\ xy - 2 = 0. \end{cases}$$

Розв'язуємо систему і знаходимо чотири стаціонарні точки: $P_1(1;\,2)$, $P_2(2;\,1)$, $P_3(-1;\,-2)$, $P_4(-2;\,-1)$.

Знайдемо похідні 2-го порядку $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6y$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x$ і обчислимо $\Delta = AC - B^2$ для кожної стаціонарної точки.

1) Точка P_1: $A = \left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{P_1} = 6$, $B = \left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_{P_1} = 12$, $C = \left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{P_1} = 6$; $\Delta = AC - B^2 = 36 - 144 = -108$. Оскільки $\Delta < 0$, то у точці P_1 екстремуму немає.

2) Точка P_2: $A = 12$, $B = 6$, $C = 12$; $\Delta = 144 - 36 = 108$. Оскільки $\Delta > 0$ і $A > 0$, то у точці P_2 функція має мінімум. Цей мінімум

дорівнює значенню функції при $x = 2$, $y = 1$: $z_{\min} = 8 + 6 - 30 - 12 = -28$.

3) Точки P_3: $A = -6$, $B = -12$, $C = -6$; $\Delta = 36 - 144 = -108$. Оскільки $\Delta < 0$, то у точці P_3 екстремуму немає.

4) Точка P_4: $A = -12$, $B = -6$, $C = -12$; $\Delta = 144 - 36 = 108$. Оскільки $\Delta > 0$ і $A < 0$, то у точці P_4 функція має максимум, що дорівнює $z_{\max} = -8 - 6 + 30 + 12 = 28$. $\lrcorner$

Вправи для самостійного розв'язання

129. Дослідити на екстремуми функцію $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$.

130. Дослідити на екстремуми функцію $z = (x-1)^2 - 2y^2$.

Відповіді:

129. $z_{\min} = -1$ при $x = 1$, $y = 0$.

130. Екстремумів немає.

10.2. Умовний екстремум

У найпростішому випадку *умовним екстремумом* функції $f(x, y)$ називається максимум або мінімум цієї функції за умови, що її аргументи пов'язані рівнянням зв'язку $\varphi(x, y) = 0$. Для знаходження умовного екстремуму функції $f(x, y)$ при співвідношенні $\varphi(x, y) = 0$ складають *функцію Лагранжа*

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda \cdot \varphi(x, y),$$

де λ – невизначений сталий множник. *Необхідні умови екстремуму* зводяться до системи трьох рівнянь з трьома невідомими x, y, λ:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = \varphi(x, y) = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Достатні умови умовного екстремуму. Нехай x_0, y_0, λ_0 – розв'язок системи (14). Складемо визначник

$$\Delta = -\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 F(x_0, y_0, \lambda_0)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 F(x_0, y_0, \lambda_0)}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial \varphi(x_0, y_0)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial^2 F(x_0, y_0, \lambda_0)}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 F(x_0, y_0, \lambda_0)}{\partial y^2} & \dfrac{\partial \varphi(x_0, y_0)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \varphi(x_0, y_0)}{\partial x} & \dfrac{\partial \varphi(x_0, y_0)}{\partial y} & 0 \end{vmatrix}. \qquad (15)$$

Якщо $\Delta < 0$, то функція $f(x, y)$ має у точці (x_0, y_0, λ_0) умовний максимум; якщо $\Delta > 0$ – умовний мінімум.

131. Знайти екстремуми функції $z = 6 - 4x - 3y$ за умови, що змінні x і y задовольняють рівняння $x^2 + y^2 = 1$.

Г Геометрично задача зводиться до знаходження найбільшого і найменшого значень аплікати z площини $z = 6 - 4x - 3y$ для точок її перетину із циліндром $x^2 + y^2 = 1$.

Складаємо функцію Лагранжа

$$F(x, y, \lambda) = 6 - 4x - 3y + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Маємо $\dfrac{\partial F}{\partial x} = -4 + 2\lambda x$, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = -3 + 2\lambda y$, $\dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 1$.

З необхідної умови дістаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} -4 + 2\lambda x = 0 \\ -3 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1, \end{cases}$$

розв’язуючи яку знаходимо

$\lambda_1 = \dfrac{5}{2}$, $x_1 = \dfrac{4}{5}$, $y_1 = \dfrac{3}{5}$ і $\lambda_2 = -\dfrac{5}{2}$, $x_2 = -\dfrac{4}{5}$, $y_2 = -\dfrac{3}{5}$.

Знайдемо частинні похідні

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2\lambda, \ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0, \ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2\lambda.$$

При $\lambda = \dfrac{5}{2}$, $x = \dfrac{4}{5}$, $y = \dfrac{3}{5}$ маємо визначник (15)

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 5 & 0 & 1,4 \\ 0 & 5 & 1,2 \\ 1,4 & 1,2 & 0 \end{vmatrix} = 20 > 0 .$$

Отже, у точці $\left(\frac{4}{5};\frac{3}{5}\right)$ функція має умовний мінімум.

При $\lambda = -\frac{5}{2}$, $x = -\frac{4}{5}$, $y = -\frac{3}{5}$ маємо визначник (15)

$$\Delta = -\begin{vmatrix} -5 & 0 & -1,4 \\ 0 & -5 & -1,2 \\ -1,4 & -1,2 & 0 \end{vmatrix} = -20 < 0 .$$

Отже, у точці $\left(\frac{4}{5};\frac{3}{5}\right)$ функція має умовний максимум.

Таким чином,

$z_{\max} = 6 + \frac{16}{5} + \frac{9}{5} = 11$, $\qquad$ $z_{\min} = 6 - \frac{16}{5} - \frac{9}{5} = 1$. $\lrcorner$

<u>Вправи для самостійного розв’язання</u>

132. Знайти умовні екстремуми функції $z = xy$ при $x + y = 1$.

133. Знайти умовні екстремуми функції $z = x + 2y$ при $x^2 + y^2 = 5$.

Відповіді:

132. $z_{\max} = \frac{1}{4}$ при $x = y = \frac{1}{2}$.

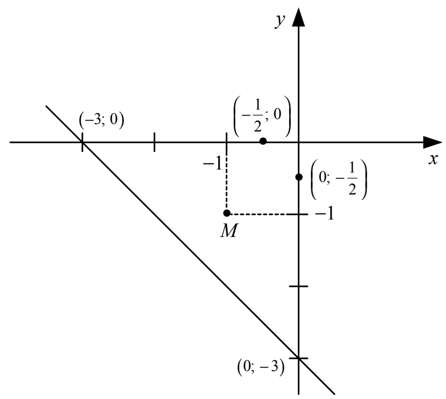
133. $z_{\max} = 5$ при $x = 1$, $y = 2$; $z_{\min} = -5$ при $x = -1$, $y = -2$.

10.3. Найбільше і найменше значення функції

Диференційовна функція в обмеженій замкненій області набуває свого найбільшого (найменшого) значення або у стаціонарній точці або у точці межі області.

134. Визначити найбільше і найменше значення функції $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ в області $x \le 0$, $y \le 0$, $x + y \ge -3$.

$\ulcorner$ Зазначена область є трикутником.



1) Знайдемо стаціонарні точки: $z'_x = 2x - y + 1$, $z'_y = 2y - x + 1$, $\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 2y - x + 1 = 0 \end{cases}$. Розв'язуючи систему, знаходимо $\begin{cases} x = -1 \\ y = -1. \end{cases}$ Точка $M(-1; -1)$ належить області.

У точці M значення функції $z(M) = -1$. Дослідження на екстремум не є обов'язковим.

2) Досліджуємо функцію на межі області.

Якщо $x = 0$, то $z = y^2 + y$ і задача зводиться до знаходження найбільшого і найменшого значень цієї функції одного аргументу (див. розділ 5) на відрізку $-3 \le y \le 0$. Похідна функції:

$z' = \left(y^2 + y\right)' = 2y + 1$. Знаходимо критичні точки з умови $z' = 0$: $2y + 1 = 0$, $y = -\frac{1}{2}$. Ця точка належить відрізку $[-3, 0]$. Знаходимо значення функції:

$$z\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4},$$

$$z(-3) = (-3)^2 - 3 = 9 - 3 = 6,$$

$$z(0) = 0 + 0 = 0.$$

При $y = 0$ маємо $z = x^2 + x$. Аналогічно проводимо дослідження на найбільше і найменше значення цієї функції одного аргументу на відрізку $-3 \le x \le 0$.

$z' = \left(x^2 + x\right)' = 2x + 1$.

$z' = 0$: $2x + 1 = 0$, $x = -\dfrac{1}{2} \in [-3, 0]$.

$z\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{4}$,

$z(-3) = (-3)^2 - 3 = 6$,

$z(0) = 0 + 0 = 0$.

При $x + y = -3$, або $y = -3 - x$ маємо функцію $z = x^2 + (-3 - x)^2 - x \cdot (-3 - x) + x + (-3 - x) = 3x^2 + 9x + 6$ на відрізку $-3 \le x \le 0$. Дослідження проводимо аналогічно попередньому.

$z' = \left(3x^2 + 9x + 6\right)' = 6x + 9$.

$z' = 0$: $6x + 9 = 0$, $x = -\dfrac{3}{2} \in [-3, 0]$.

$z\left(-\dfrac{3}{2}\right) = 3 \cdot \left(-\dfrac{3}{2}\right)^2 + 9 \cdot \left(-\dfrac{3}{2}\right) + 6 = -\dfrac{3}{4}$,

$z(-3) = 3 \cdot (-3)^2 + 9 \cdot (-3) + 6 = 6$,

$z(0) = 0 + 0 + 6 = 6$.

3) Порівнюємо всі знайдені значення функції z. Робимо висновок, що $z_{\text{найб.}} = 6$ у точках $(0; -3)$ і $(-3; 0)$; $z_{\text{найм.}} = -1$ у стаціонарній точці $M(-1; -1)$. ⌋

Вправи для самостійного розв'язання

135. Знайти найбільше значення функції $z = x + y + 2$ в областях: 1) $x \ge 0$, $y \ge 0$, $x + y \le 1$; 2) $x \ge 0$, $y \le 0$, $x - y \le 1$.

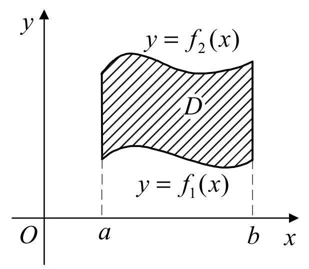
Відповідь:

135. 1) $z_{\text{найб.}} = 3$ при $x = 0$, $y = 1$.

2) $z_{\text{найб.}} = 3$ при $x = 1$, $y = 0$.

11. Подвійний інтеграл

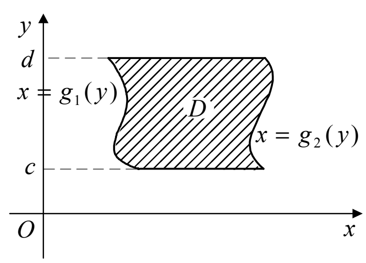
Подвійний інтеграл функції $f(x,y)$ по області D – це число, яке позначають $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$. Обчислення подвійного інтеграла зводиться до обчислення звичайних визначених інтегралів, якщо зробити певні припущення відносно області D.



а) Якщо область D задовольняє умови $a \le x \le b$, $f_1(x) \le y \le f_2(x)$, то

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx. \qquad (16)$$

При обчисленні внутрішнього інтеграла у правій частині формули (16) змінну x слід вважати сталою.



б) Якщо область D задовольняє умови $c \le y \le d$, $g_1(y) \le x \le g_2(y)$, то

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy. \qquad (17)$$

При обчисленні внутрішнього інтеграла у правій частині формули (17) змінну y слід вважати сталою.

Обчислити подвійні інтеграли:

136. $\iint\limits_D 2x^2y^3\,dxdy$, де D – прямокутник з вершинами у точках $O(0;\,0)$, $A(2;\,0)$, $B(2;\,1)$, $C(0;\,1)$.

⌈ Область D можна задати нерівностями $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 1$ (див. рис. 1). Тому за формулою (16) матимемо

$$\iint_D 2x^2y^3dxdy = 2\int_0^2\left(x^2\int_0^1 y^3dy\right)dx =$$

$$= 2\int_0^2\left(x^2\cdot\frac{y^4}{4}\Bigg|_0^1\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^2 x^2dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^2 = \frac{4}{3}. \quad \lrcorner$$

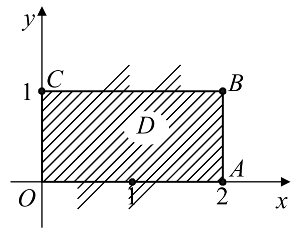


Рис. 1

137. $\iint_D (3x+y)dxdy$, де D – трикутник з вершинами у точках $O(0;0)$, $A(2;0)$, $B(2;2)$.

$\ulcorner$ Область D можна задати нерівностями $0\le x\le 2$, $0\le y\le x$ (див. рис. 2). Тому за формулою (16) матимемо

$$\iint_D (3x+y)dxdy = \int_0^2\left(3\int_0^x x\,dy + \int_0^x y\,dy\right)dx =$$

$$= \int_0^2\left(3x\int_0^x dy + \int_0^x y\,dy\right)dx =$$

$$= \int_0^2\left(3x\cdot y\Big|_0^x + \frac{y^2}{2}\Bigg|_0^x\right)dx =$$

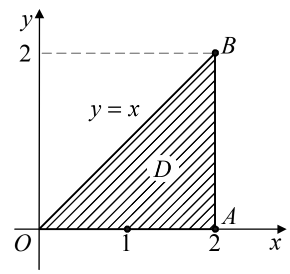


Рис. 2

$$= \int_0^2\left(3x^2+\frac{x^2}{2}\right)dx = \frac{7}{2}\int_0^2 x^2\,dx = \frac{7}{2}\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^2 = \frac{28}{3}. \quad \lrcorner$$

138. $\iint_D x\,dx\,dy$, де D – трикутник з вершинами у точках $O(0;0)$, $A(1;1)$, $B(0;1)$.

$\ulcorner$ Область D можна задати нерівностями $0\le x\le 1$, $x\le y\le 1$ (див. рис. 3). Тому за формулою (16) матимемо

$$\iint_D x\,dx\,dy = \int_0^1\left(\int_x^1 x\,dy\right)dx =$$
$$= \int_0^1\left(x\int_x^1 dy\right)dx = \int_0^1 x\cdot\left(y\Big|_x^1\right)dx =$$
$$= \int_0^1 x(1-x)\,dx = \int_0^1\left(x-x^2\right)dx =$$
$$= \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1 - \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}. \quad \lrcorner$$

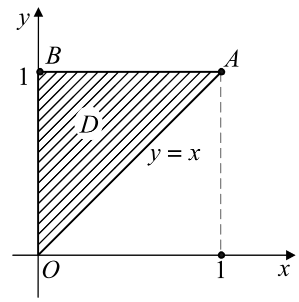


Рис. 3

139. $\iint_D e^{\frac{x}{y}}\,dxdy$, де D – криволінійний трикутник OAB, обмежений параболою $y^2 = x$ і прямими $x=0$, $y=1$.

$\ulcorner$ Область D можна задати нерівностями $0 \le y \le 1$, $0 \le x \le y^2$ (див. рис. 4). Тому за формулою (17) матимемо

$$\iint_D e^{\frac{x}{y}}dxdy = \int_0^1\left(\int_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}}\,dx\right)dy =$$
$$= \int_0^1\left(y\cdot e^{\frac{x}{y}}\Bigg|_0^{y^2}\right)dy = \int_0^1 y\left(e^{\frac{y^2}{y}} - e^0\right)dy =$$
$$= \int_0^1\left(y\left(e^y-1\right)\right)dy = \int_0^1 ye^y dy - \int_0^1 y\,dy =$$

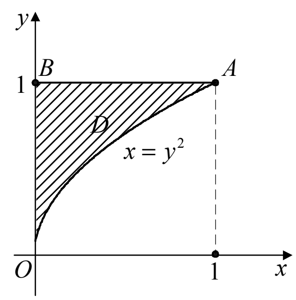


Рис. 4

$$= \begin{vmatrix} u = y, & du = dy \\ dv = e^y dy, & v = e^y \end{vmatrix} = y\cdot e^y\Big|_0^1 - \int_0^1 e^y dy - \frac{y^2}{2}\Bigg|_0^1 =$$
$$= y\cdot e^y\Big|_0^1 - e^y\Big|_0^1 - \frac{1}{2} = e-(e-1)-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \quad \lrcorner$$

140. $\iint_D \frac{x\,dxdy}{x^2+y^2}$, де D – параболічний сегмент, обмежений параболою $y=\frac{x^2}{2}$ і прямою $y=x$.

Область D можна задати нерівностями $0 \le x \le 2$, $\frac{x^2}{2} \le y \le x$ (див. рис. 5). Тому за формулою (16) матимемо

$$\iint\limits_D \frac{x\,dxdy}{x^2+y^2} = \int_0^2 \left(\int_{\frac{x^2}{2}}^{x} \frac{x\,dy}{x^2+y^2} \right) dx =$$

$$= \int_0^2 \left(x \int_{\frac{x^2}{2}}^{x} \frac{dy}{x^2+y^2} \right) dx =$$

$$\int_0^2 \left(x \cdot \frac{1}{x} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \Big|_{\frac{x^2}{2}}^{x} \right) dx =$$

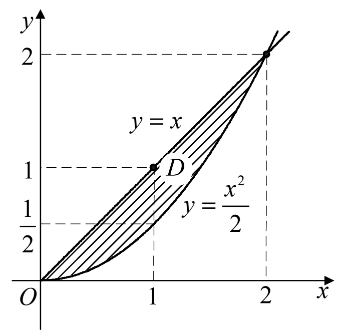


Рис. 5

$$= \int_0^2 \left(\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \right) dx = \frac{\pi}{4} \int_0^2 dx - \int_0^2 \operatorname{arctg} \frac{x}{2}\, dx =$$

$$= \frac{\pi}{4} \cdot x \Big|_0^2 - I = \frac{\pi}{2} - I\,,$$

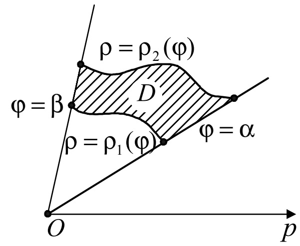
де $I = \int_0^2 \operatorname{arctg} \frac{x}{2}\, dx$. Обчислимо цей інтеграл за формулою інтегрування частинами. Покладемо $u = \operatorname{arctg} \frac{x}{2}$, $dv = dx$. Тоді $du = \frac{dx}{1+\frac{x^2}{4}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2\,dx}{4+x^2}$, $v = x$. Отже,

$$I = x \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{2x\,dx}{4+x^2} = x \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \Big|_0^2 - \ln\left(4+x^2\right) \Big|_0^2 =$$

$$= 2 \cdot \frac{\pi}{4} - \left(\ln 8 - \ln 4\right) = \frac{\pi}{2} - \ln 2\,.$$

Остаточно маємо $\iint\limits_D \frac{x\,dxdy}{x^2+y^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \ln 2 = \ln 2$.

В деяких випадках зручно зробити заміну змінних у подвійному інтегралі. Якщо область D задовольняє у полярних координатах $(\varphi;\rho)$ умови $\alpha\le\varphi\le\beta$, $\rho_1(\varphi)\le\rho\le\rho_2(\varphi)$, то має місце формула



$$\iint_D f(x,\ y)\,dxdy=\int_\alpha^\beta\left(\int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\rho\,d\rho\right)d\varphi. \qquad (18)$$

Обчислити подвійні інтеграли:

141. $\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$, де D – круг радіуса $R=1$ з центром у початку координат.

⌈ Перейдемо до полярних координат за формулами $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. Тоді $\sqrt{1-x^2-y^2}=$
$=\sqrt{1-(\rho\cos\varphi)^2-(\rho\sin\varphi)^2}=\sqrt{1-\rho^2}$.
Область D задається нерівностями $0\le\varphi<2\pi$, $0\le\rho\le1$ (див. рис. 6). Тому за формулою (18) матимемо

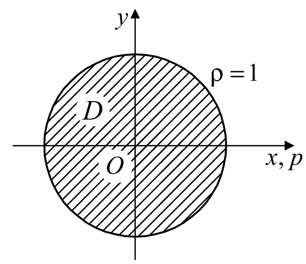


Рис. 6

$$\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1\sqrt{1-\rho^2}\,\rho\,d\rho\right)d\varphi=$$

$$=\begin{vmatrix} t=1-\rho^2 \\ dt=-2\rho d\rho \\ t_1=t(0)=1 \\ t_2=t(1)=0\end{vmatrix}=\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{2}\int_1^0\sqrt{t}\,dt\right)d\varphi=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\left.\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_1^0\right)d\varphi=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(0-\frac{2}{3}\right)d\varphi=\frac{1}{3}\varphi\Big|_0^{2\pi}=\frac{2\pi}{3}.$$ ⌋

142. $\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy$, де $D: x^2+y^2 \le 4$, $x \ge 0$.

Γ Область D – права половина круга радіуса $R=2$ з центром у початку координат (див. рис. 7). Перейдемо до полярних координат:

$$x^2+y^2=(\rho\cos\varphi)^2+(\rho\sin\varphi)^2=\rho^2.$$

Область D можна задати нерівностями $0\le\rho\le 2$ $-\dfrac{\pi}{2}\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}$. За формулою (18) матимемо

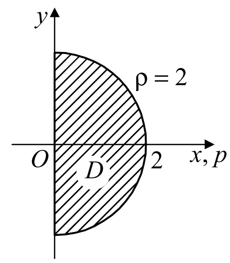


Рис. 7

$$\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int\limits_0^2 \rho^3\,d\rho\right)d\varphi=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\left.\frac{\rho^4}{4}\right|_0^2\right)d\varphi=$$

$$=4\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi=4\cdot\varphi\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}=4\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=4\pi. \quad \lrcorner$$

143. Обчислити $\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy$, де D частина круга $x^2+y^2\le Rx$, що знаходиться у першому октанті.

Γ Перейдемо до полярних координат: $\sqrt{R^2-x^2-y^2}=$ $=\sqrt{R^2-(\rho\cos\varphi)^2-(\rho\sin\varphi)^2}=$ $=\sqrt{R^2-\rho^2}$; рівняння кола $x^2+y^2=Rx$ набуває вигляду $\rho^2=R\rho\cos\varphi$, або $\rho=R\cos\varphi$. Область D задається

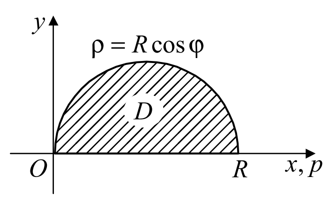


Рис. 8

нерівностями $0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}$, $0\le\rho\le R\cos\varphi$ (див. рис. 8). За формулою (18) матимемо

$$\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int\limits_0^{R\cos\varphi}\sqrt{R^2-\rho^2}\,\rho\,d\rho\right)d\varphi=$$

$$=\left|\begin{array}{l} t=R^2-\rho^2,\ dt=-2\rho\,d\rho \\ t_1=t(0)=R^2 \\ t_2=t(R\cos\varphi)=R^2\left(1-\cos^2\varphi\right)=R^2\sin^2\varphi \end{array}\right|=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{1}{2}\int_{R^2}^{R^2\sin^2\varphi}\sqrt{t}\,dt\right)d\varphi=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2}{3}\left(\sqrt{t}\right)^3\Big|_{R^2}^{R^2\sin^2\varphi}\right)d\varphi=$$

$$=-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(R^3\sin^3\varphi-R^3\right)d\varphi=-\frac{1}{3}R^3\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\ \sin\varphi\ d\varphi-\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\right]=$$

$$=-\frac{R^3}{3}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos^2\varphi\right)\sin\varphi\ d\varphi-\varphi\Big|_0^{\pi/2}\right]=\left|\begin{array}{l} t=\cos\varphi \\ dt=-\sin\varphi\,d\varphi \\ t_1=t(0)=1 \\ t_2=t\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0 \end{array}\right|=$$

$$=-\frac{R^3}{3}\left[-\int_1^0\left(1-t^2\right)dt-\frac{\pi}{2}\right]=\frac{R^3}{3}\left[\left(t-\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_1^0+\frac{\pi}{2}\right]=$$

$$=\frac{R^3}{3}\left(0-1+\frac{1}{3}+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{R^3}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{18}(3\pi-4)R^3.\ \lrcorner$$

Вправи для самостійного розв'язання

Обчислити подвійні інтеграли:

144. $\iint\limits_D xy\,dxdy$, $D: 0\le x\le 1,\ \ 0\le y\le 2$.

145. $\iint\limits_D e^{x+y}\,dxdy$, $D: 0\le x\le 1,\ \ 0\le y\le 1$.

146. $\iint\limits_D \cos(x+y)\,dx\,dy$, D – область, обмежена прямими $x=0$, $y=\pi$ і $y=x$.

147. $\iint\limits_D x^3y^2\,dxdy$, D: круг $x^2+y^2\le R^2$.

148. $\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy$, D: круг $x^2+y^2\le 2x$.

Відповіді:

144. 1.

145. $(e-1)^2$.

146. -2.

147. 0.

148. $\frac{3}{2}\pi$.

Розділ 9. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

1. Основні поняття

Диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння, яке містить незалежну змінну x, невідому функцію $y = y(x)$ та її похідну y':

$$F(x,\ y,\ y') = 0. \qquad (1)$$

Розв'язавши рівняння (1) відносно y' (якщо це можливо), приходимо до диференціального рівняння

$$y' = f(x,\ y), \qquad (2)$$

яке називають *розв'язаним відносно похідної*.

Розв'язком рівняння (1) (або (2)) на інтервалі $(a,\ b)$ називають диференційовну на цьому інтервалі функцію $y = \varphi(x)$, яка при підстановці в рівняння перетворює його в тотожність при всіх x з інтервалу $(a,\ b)$.

Загальним розв'язком рівняння (1) (або (2)) називають функцію $y = \varphi(x,\ C)$, яка є розв'язком даного рівняння при будь-якому фіксованому значенні сталої C і для довільної *початкової умови* $y(x_0) = y_0$ існує єдине значення $C = C_0$, при якому розв'язок $y = \varphi(x,\ C_0)$ задовольняє початкову умову. Розв'язок $y = \varphi(x,\ C_0)$ називають *частинним* або *розв'язком задачі Коші*.

Співвідношення $G(x,\ y,\ C) = 0$, яким загальний розв'язок $y = \varphi(x,\ C)$ рівняння (1) задається неявно, називають *загальним інтегралом* рівняння (1). При конкретному значенні $C = C_0$ співвідношення $G(x,\ y,\ C_0) = 0$ називають *частинним інтегралом*.

Найпростіше диференціальне рівняння першого порядку

$$y' = f(x) \qquad (3)$$

зводиться до обчислення невизначеного інтеграла. Так як $y' = \dfrac{dy}{dx}$, то маємо $\dfrac{dy}{dx} = f(x)$, або $dy = f(x)dx$. Інтегруємо $\int dy = \int f(x)dx + C$ і отримуємо $y = \int f(x)\,dx + C$. Тут під невизначеним інтегралом розуміємо одну з первісних функції $f(x)$.

Розв’язати диференціальні рівняння:

1. $y' = x^2 + 4x - 7$.

⌜ Це рівняння виду (3). Розв’яжемо його за наведеною вище схемою:

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + 4x - 7, \quad dy = \left(x^2 + 4x - 7\right)dx,$$

$$\int dy = \int \left(x^2 + 4x - 7\right)dx, \quad y = \frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} - 7x + C, \text{ або}$$

$y = \dfrac{x^3}{3} + 2x^2 - 7x + C$ – загальний розв’язок заданого диференціального рівняння. ⌟

2. $y' = 8^x$.

⌜ $\dfrac{dy}{dx} = 8^x$, $dy = 8^x\,dx$, $\int dy = \int 8^x\,dx$, звідки знаходимо загальний розв’язок $y = \dfrac{8^x}{\ln 8} + C$. ⌟

3. $y' = \cos x$, якщо $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 3$.

⌜ Спочатку знайдемо загальний розв’язок диференціального рівняння:

$$y' = \cos x, \quad \frac{dy}{dx} = \cos x, \quad dy = \cos x\,dx,$$

$\int dy = \int \cos x\,dx$, $y = \sin x + C$ – загальний розв’язок.

Тепер знайдемо розв’язок задачі Коші. За умовою задачі $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 3$. Тому, підставляючи в загальний розв’язок $y = 3$ та $x = \dfrac{\pi}{2}$, маємо $3 = \sin\dfrac{\pi}{2} + C$, $3 = 1 + C$, $C = 3 - 1 = 2$. Підставивши $C = 2$ в загальний розв’язок, знаходимо частинний розв’язок $y = \sin x + 2$. ⌟

Вправи для самостійного розв'язання

Розв'язати диференціальні рівняння:

4. $y' = \dfrac{1}{\sin^2 x}$.

5. $y' = x^3 - 5x^2 + 4$.

6. $y' = \operatorname{arctg} x$.

7. $y' = \dfrac{1}{x^2}$, якщо $y(-1) = 5$.

Відповіді:

4. $y = -\operatorname{ctg} x + C$.

5. $y' = \dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{5}{2}x^2 + 4x + C$.

6. $y = \operatorname{arctg} x - \dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C$.

7. $y = -\dfrac{1}{x} + 4$.

2. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

Диференціальне рівняння виду

$$y' = f(x)\cdot g(y) \tag{4}$$

називають *диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними*. Права частина рівняння (4) є добутком двох функцій, залежних лише від однієї змінної: перша функція залежить лише від x, а друга – лише від y.

Подамо схему розв'язання диференціального рівняння (4). Так як $y' = \dfrac{dy}{dx}$, то маємо $y' = f(x)\cdot g(y)$, або $\dfrac{dy}{dx} = f(x)\cdot g(y)$. Помножимо обидві частини рівності на вираз $\dfrac{dx}{g(y)}$ (припускаємо, що $g(y) \neq 0$). Отримаємо рівняння з *відокремленими змінними*

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx. \tag{5}$$

У лівій частині рівності (5) маємо диференціал деякої функції по змінній y, а у правій – по змінній x.

Інтегруючи рівняння (5)

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C, \tag{6}$$

отримаємо загальний інтеграл (розв'язок) диференціального рівняння (4).

Диференціальне рівняння

$$f_1(x)g_1(y)dy + f_2(x)g_2(y)dx = 0 \qquad (7)$$

зводиться до диференціального рівняння (4). Поділимо ліву і праву частини рівняння (7) на добуток функцій $f_1(x)\cdot g_2(y)\neq 0$ і перенесемо вираз, який містить диференціал dx, вправо:

$$\frac{g_1(y)}{g_2(y)}dy = -\frac{f_2(x)}{f_1(x)}dx .$$

Інтегруючи ліву частину за змінною y, а праву – за змінною x, дістанемо загальний інтеграл диференціального рівняння (7):

$$\int\frac{g_1(y)}{g_2(y)}dy = -\int\frac{f_2(x)}{f_1(x)}dx + C .$$

Розв'язати диференціальні рівняння:

8. $y' = \frac{y}{x}$.

⌜ Це диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними: $y' = \frac{y}{x} = \frac{1}{x}\cdot y$. Оскільки $y' = \frac{dy}{dx}$, то запишемо його у вигляді

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} .$$

Для відокремлення змінних помножимо дану рівність на dx і поділимо на y. Отримаємо

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} .$$

Інтегруємо дане рівняння:

$\int\frac{dy}{y} = \int\frac{dx}{x}$, $\quad \ln|y| = \ln|x| + \ln C$, $\quad \ln|y| = \ln|C\,x|$, звідки знаходимо загальний розв'язок заданого диференціального рівняння – $y = Cx$. ⌟

9. $\frac{dy}{dx} = 3\sqrt{\frac{x}{y}}$, якщо $y(1) = 9$.

$\ulcorner$ Так як $\dfrac{dy}{dx}=3\sqrt{\dfrac{x}{y}}=3\sqrt{x}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{y}}$, то це диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Помноживши рівняння на $\sqrt{y}\,dx$, дістанемо

$$\sqrt{y}\,dy=3\sqrt{x}\,dx .$$

Інтегруємо дане рівняння:

$\int\sqrt{y}\,dy=3\int\sqrt{x}\,dx$, $\int y^{\frac{1}{2}}\,dy=3\int x^{\frac{1}{2}}\,dx$, $\dfrac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}=3\dfrac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}+C$, звідки знаходимо загальний інтеграл $y^{\frac{3}{2}}=3x^{\frac{3}{2}}+\dfrac{3}{2}C$, або

$$y^{\frac{3}{2}}=3x^{\frac{3}{2}}+C. \qquad (8)$$

Знайдемо частинний інтеграл. За умовою задачі $y=9$ при $x=1$. Підставляючи вказані значення y та x у формулу (8), знаходимо сталу C:

$$9^{\frac{3}{2}}=3\cdot1^{\frac{3}{2}}+C,\quad 27=3+C,\quad C=24 .$$

Підставивши знайдене значення $C=24$ у формулу (8), дістаємо частинний інтеграл заданого диференціального рівняння – $y^{\frac{3}{2}}=3x^{\frac{3}{2}}+24$. $\lrcorner$

10. $\left(1+e^{2x}\right)y^2y'=e^x$.

$\ulcorner$ Розв’яжемо задане рівняння відносно y':

$$y'=\frac{e^x}{\left(1+e^{2x}\right)y^2}.$$

Отже, це диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Підставимо $y'=\dfrac{dy}{dx}$ і відокремимо змінні, помноживши рівняння на y^2dx:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{e^x}{\left(1+e^{2x}\right)y^2},\quad y^2\,dy=\frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx .$$

Звідси маємо

$\int y^2\,dy = \int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$, $\int y^2 dy = \int \frac{e^x dx}{1+\left(e^x\right)^2}$, $\frac{y^3}{3} = \operatorname{arctg} e^x + C$,

$y^3 = 3\operatorname{arctg} e^x + C$, звідки маємо загальний розв'язок $y = \sqrt[3]{3\operatorname{arctg} e^x + C}$. ⌋

11. $y\sqrt{1+x^2}\,y' + x\sqrt{1+y^2} = 0$, якщо $y\left(\sqrt{3}\right) = 0$.

⌈ Розв'яжемо задане рівняння відносно y':

$$y' = \frac{-x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+y^2}}{y}.$$

Отже, це диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Підставимо $y' = \frac{dy}{dx}$ і відокремимо змінні, помноживши рівняння на $\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}dx$:

$$\frac{ydy}{\sqrt{1+y^2}} = -\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Звідси маємо

$$\int \frac{ydy}{\sqrt{1+y^2}} = -\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \sqrt{1+y^2} = -\sqrt{1+x^2} + C, \text{ або}$$

$$\sqrt{1+y^2} = C - \sqrt{1+x^2}. \qquad (*)$$

Знайдемо частинний інтеграл. За умовою задачі $y = 0$ при $x = \sqrt{3}$. Тому, підставляючи вказані значення y та x у формулу $(*)$, знаходимо сталу C:

$$\sqrt{1+0^2} = C - \sqrt{1+3}, \quad 1+2 = C, \quad C = 3.$$

Отже, частинний інтеграл заданого рівняння має вигляд $\sqrt{1+y^2} = 3 - \sqrt{1+x^2}$. ⌋

12. $x^2\left(y^3+5\right)dx + \left(x^3+5\right)y^2 dy = 0$, якщо $y(0) = 1$.

⌈ Це диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними виду (7).

$$\frac{y^2}{y^3+5}dy = -\frac{x^2}{x^3+5}dx, \quad \int \frac{y^2}{y^3+5}dy = -\int \frac{x^2}{x^3+5}dx,$$

$$\frac{1}{3}\ln\left|y^3+5\right| = -\frac{1}{3}\ln\left|x^3+5\right| + \frac{1}{3}\ln C, \quad \ln\left|y^3+5\right| = -\ln\left|x^3+5\right| + \ln C,$$

$$\ln\left|y^3+5\right| + \ln\left|x^3+5\right| = \ln C, \quad \ln\left|\left(y^3+5\right)\cdot\left(x^3+5\right)\right| = \ln C,$$

$$\left(y^3+5\right)\left(x^3+5\right) = C.$$

За умовою задачі $y=1$ при $x=0$. Тому маємо $C=\left(1^3+5\right)\left(0^3+5\right)=30$. Отже, частинний інтеграл рівняння – $\left(y^3+5\right)\left(x^3+5\right)=30$. ⌟

13. $\left(x^2+1\right)y'+2xy^2=0$, якщо $y(0)=1$.

⌜ $y' = -\frac{2xy^2}{x^2+1}$, $\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy^2}{x^2+1}$, $\frac{dy}{y^2} = -\frac{2x}{x^2+1}dx$,

$$\int\frac{dy}{y^2} = -\int\frac{2x}{x^2+1}dx, \quad \frac{-1}{y} = -\ln\left|x^2+1\right| + C,$$

$$\frac{1}{y} = \ln\left(x^2+1\right) + C, \text{ звідки } \quad y = \frac{1}{\ln\left(x^2+1\right)+C}.$$

За умовою задачі $y=1$ при $x=0$. Тому

$$1 = \frac{1}{\ln\left(0^2+1\right)+C}, \quad 1 = \frac{1}{C}, \quad C=1.$$

Частинний розв’язок рівняння – $y = \frac{1}{\ln\left(x^2+1\right)+1}$. ⌟

<u>Вправи для самостійного розв’язання</u>

Розв’язати диференціальні рівняння:

14. $x^2y'+y=0$.

15. $y' = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y$.

16. $yy' = \frac{1-2x}{y}$.

17. $y'\left(x^2+1\right)=2xy$, якщо $y(0)=1$.

18. $y=2y'\sqrt{x}$, якщо $y(4)=1$.

19. $y'=(2y+1)\operatorname{ctg} x$, якщо $y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$.

Відповіді:

14. $y = Ce^{\frac{1}{x}}$.

15. $\sin y = \dfrac{C}{\cos x}$.

16. $y = \sqrt[3]{3\left(x - x^2 + C\right)}$.

17. $y = x^2 + 1$.

18. $y = e^{\sqrt{x}-2}$.

19. $y = \dfrac{1}{2}\left(4\sin^2 x - 1\right)$.

3. Однорідні диференціальні рівняння

Диференціальне рівняння $y' = f\left(x,\, y\right)$ називають *однорідним*, якщо функція $f\left(x,\, y\right)$ є *однорідною функцією нульового виміру*, тобто для будь-якого $t > 0$

$$f\left(tx,\, ty\right) = f\left(x,\, y\right). \tag{9}$$

Покладемо $t = \dfrac{1}{x}$: $f\left(tx,\, ty\right) = f\left(1,\, \dfrac{y}{x}\right) = g\left(\dfrac{y}{x}\right)$. Тоді, з урахуванням (9), рівняння (2) запишеться у вигляді

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right). \tag{10}$$

Для розв'язання рівняння (10) введемо допоміжну невідому функцію $u = u\left(x\right)$, поклавши

$$\frac{y}{x} = u \quad \text{або}$$

$$y = ux, \tag{11}$$

і перетворимо однорідне рівняння у рівняння з відокремлюваними змінними. З (11) знаходимо $y' = u'x + u$. Тому рівняння (10) запишеться у вигляді

$$u + xu' = g\left(u\right), \quad \text{або} \quad x\frac{du}{dx} = g\left(u\right) - u.$$

Відокремимо змінні:

$$\frac{du}{g\left(u\right) - u} = \frac{dx}{x}. \tag{12}$$

Проінтегрувавши рівняння (12), одержимо $\int \frac{du}{g(u)-u} = \ln|x| + C$. Обчисливши інтеграл у лівій частині і підставивши замість u вираз $\frac{y}{x}$, отримаємо загальний інтеграл диференціального рівняння.

Розв'язати диференціальні рівняння:

20. $y' = \frac{x^2 + y^2}{2x^2}$.

Γ Права частина даного рівняння – функція $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2x^2}$ є однорідною функцією нульового виміру, оскільки

$$f(tx, ty) = \frac{(tx)^2 + (ty)^2}{2(tx)^2} = \frac{t^2(x^2 + y^2)}{2t^2x^2} = \frac{x^2 + y^2}{2x^2} = f(x, y),$$

тобто має місце рівність (9).

Застосуємо підстановку $y = ux$, $y' = u'x + u$:

$$u'x + u = \frac{x^2 + x^2u^2}{2x^2}, \quad u'x + u = \frac{x^2(1+u^2)}{2x^2}, \quad u'x + u = \frac{1+u^2}{2},$$

$$u'x = \frac{1+u^2}{2} - u, \qquad u'x = \frac{u^2 - 2u + 1}{2}, \qquad u'x = \frac{(u-1)^2}{2},$$

$$u' = \frac{(u-1)^2}{2} \cdot \frac{1}{x}. \qquad (*)$$

Диференціальне рівняння $(*)$ – рівняння з відокремлюваними змінними. Розв'яжемо його:

$$\frac{du}{dx} = \frac{(u-1)^2}{2} \cdot \frac{1}{x}, \qquad \frac{2du}{(u-1)^2} = \frac{dx}{x}, \qquad \int \frac{2du}{(u-1)^2} = \int \frac{dx}{x},$$

$$\frac{-2}{u-1} = \ln|x| + \ln C, \quad \frac{-2}{u-1} = \ln C|x|.$$

Підставимо в отримане рівняння $u = \frac{y}{x}$:

$\frac{-2}{\frac{y}{x} - 1} = \ln C|x|$, $\quad \frac{-2x}{y-x} = \ln C|x|$, звідки знаходимо загальний розв'язок заданого диференціального рівняння – $y = x - \dfrac{2x}{\ln C|x|}$. ⌋

21. $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$.

⌈ Права частина рівняння – функція $f(x,\,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$ є однорідною функцією нульового виміру, оскільки

$$f(tx,\,ty) = \frac{tx+ty}{tx-ty} = \frac{t(x+y)}{t(x-y)} = \frac{x+y}{x-y} = f(x,\,y),$$

тобто має місце рівність (9).

Застосуємо підстановку $y = ux$, $y' = u'x + u$.

$$u'x + u = \frac{x+ux}{x-ux}, \qquad u'x + u = \frac{x(1+u)}{x(1-u)}, \qquad u'x + u = \frac{1+u}{1-u},$$

$$u'x = \frac{1+u}{1-u} - u, \qquad u'x = \frac{1+u-u+u^2}{1-u}, \qquad u'x = \frac{u^2+1}{1-u},$$

$$u' = \frac{u^2+1}{1-u}\cdot\frac{1}{x}, \qquad \frac{du}{dx} = \frac{u^2+1}{1-u}\cdot\frac{1}{x}, \qquad \frac{1-u}{u^2+1}\,du = \frac{dx}{x},$$

$$\int\frac{1-u}{u^2+1}du = \int\frac{dx}{x}, \qquad \int\frac{du}{u^2+1} - \int\frac{udu}{u^2+1} = \int\frac{dx}{x},$$

$$\operatorname{arctg} u - \frac{1}{2}\ln\left|u^2+1\right| = \ln|x| + \ln C, \quad \operatorname{arctg} u = \ln C|x| + \ln\sqrt{u^2+1},$$

$$\operatorname{arctg} u = \ln\left(C|x|\sqrt{u^2+1}\right), \quad \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \ln\left(C|x|\sqrt{\frac{y^2}{x^2}+1}\right),$$

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \ln\left(C|x|\cdot\sqrt{\frac{y^2+x^2}{x^2}}\right), \text{ або } \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \ln C\sqrt{y^2+x^2}. \;⌋$$

22. $(x+y)dx - xdy = 0$.

⌈ $xdy = (x+y)dx$, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y}{x}$, $y' = \dfrac{x+y}{x}$.

Права частина рівняння – функція $f(x,\,y) = \dfrac{x+y}{x}$ є однорідною функцією нульового виміру, оскільки

$$f(tx,\, ty) = \frac{tx + ty}{tx} = \frac{t(x + y)}{tx} = \frac{x + y}{x} = f(x,\, y).$$

Застосуємо підстановку $y = ux$, $y' = u'x + u$.

$$u'x + u = \frac{x + ux}{x},\ \ u'x + u = \frac{x(1 + u)}{x},\ \ u'x + u = 1 + u,\ \ u'x = 1,\ \ u' = \frac{1}{x},$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x},\quad du = \frac{dx}{x},\quad \int du = \int \frac{dx}{x},\quad u = \ln|x| + \ln C,\quad u = \ln C|x|,$$

$\frac{y}{x} = \ln C|x|$, звідки маємо загальний розв'язок $y = x \ln C|x|$. ⌋

23. $\left(x^2 - xy\right)dy + y^2 dx = 0$.

⌜ $\left(x^2 - xy\right)dy = -y^2 dx$, $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{-y^2}{x^2 - xy}$, $\quad y' = \frac{-y^2}{x^2 - xy}$.

Права частина рівняння – функція $f(x,\, y) = \frac{-y^2}{x^2 - xy}$ є однорідною функцією нульового виміру, оскільки

$$f(tx,\, ty) = \frac{-(ty)^2}{(tx)^2 - txty} = \frac{-t^2 y^2}{t^2\left(x^2 - y^2\right)} = \frac{-y^2}{x^2 - y^2} = f(x,\, y).$$

Застосуємо підстановку $y = ux$, $y' = u'x + u$.

$$u'x + u = \frac{-u^2 x^2}{x^2 - x \cdot ux},\quad u'x + u = \frac{-u^2 x^2}{x^2(1 - u)},\quad u'x + u = \frac{-u^2}{1 - u},$$

$$u'x = \frac{-u^2}{1 - u} - u,\quad u'x = \frac{-u^2 - u + u^2}{1 - u},\quad u'x = \frac{-u}{1 - u},\quad u'x = \frac{u}{u - 1},$$

$$u' = \frac{u}{u - 1} \cdot \frac{1}{x},\quad \frac{du}{dx} = \frac{u}{u - 1} \cdot \frac{1}{x},\quad \frac{u - 1}{u} \cdot du = \frac{dx}{x},\quad \int \frac{u - 1}{u} du = \int \frac{dx}{x},$$

$$\int du - \int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x},\quad u - \ln|u| = \ln|x| + \ln C,\ \ u = \ln C|x| + \ln|u|,$$

$u = \ln\left(C|xu|\right)$, $\frac{y}{x} = \ln\left(C\left|x \cdot \frac{y}{x}\right|\right)$, звідки $y = x \ln C|y|$. ⌋

24. $\left(2\sqrt{xy} - x\right)dy + y dx = 0$.

⌜ $\left(2\sqrt{xy} - x\right)dy = -y\, dx$, $\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{2\sqrt{xy} - x}$, $y' = \frac{-y}{2\sqrt{xy} - x}$.

Права частина рівняння – функція $f(x,\ y)=\dfrac{-y}{2\sqrt{xy}-x}$ є однорідною функцією нульового виміру, оскільки

$$f(tx,\ ty)=\frac{-ty}{2\sqrt{tx\,ty}-tx}=\frac{-ty}{2t\sqrt{xy}-tx}=\frac{-ty}{t\left(2\sqrt{xy}-x\right)}=\frac{-y}{2\sqrt{xy}-x}=$$
$$=f(x,\ y).$$

Застосуємо підстановку $y=ux$, $y'=u'x+u$.

$$u'x+u=\frac{-ux}{2\sqrt{x\cdot ux}-x},\quad u'x+u=\frac{-ux}{2x\sqrt{u}-x},\quad u'x+u=\frac{-ux}{x\left(2\sqrt{u}-1\right)},$$

$$u'x+u=\frac{-u}{2\sqrt{u}-1},\qquad u'x=\frac{-u}{2\sqrt{u}-1}-u,\qquad u'x=\frac{-u-2u\sqrt{u}+u}{2\sqrt{u}-1},$$

$$u'x=\frac{-2u\sqrt{u}}{2\sqrt{u}-1},\qquad u'=\frac{-2u\sqrt{u}}{2\sqrt{u}-1}\cdot\frac{1}{x},\qquad \frac{du}{dx}=\frac{-2u\sqrt{u}}{2\sqrt{u}-1}\cdot\frac{1}{x},$$

$$\frac{2\sqrt{u}-1}{-2u\sqrt{u}}du=\frac{dx}{x},\qquad \int\frac{2\sqrt{u}-1}{-2u\sqrt{u}}du=\int\frac{dx}{x},$$

$$\int\frac{2\sqrt{u}}{-2u\sqrt{u}}du+\int\frac{du}{2u\sqrt{u}}=\int\frac{dx}{x},\qquad -\int\frac{du}{u}+\frac{1}{2}\int u^{-\frac{3}{2}}du=\int\frac{dx}{x},$$

$$-\ln|u|-\frac{1}{\sqrt{u}}=\ln C|x|,\qquad \frac{-1}{\sqrt{u}}=\ln C|x\cdot u|,\qquad -\sqrt{\frac{x}{y}}=\ln C\left|x\cdot\frac{y}{x}\right|,$$

$$\sqrt{\frac{x}{y}}+\ln C|y|=0.\ \lrcorner$$

25. $y'=\dfrac{y}{x}+\sin\dfrac{y}{x}$.

$\ulcorner$ Права частина рівняння – функція $f(x,\ y)=\dfrac{y}{x}+\sin\dfrac{y}{x}$ є однорідною функцією нульового виміру, оскільки

$$f(tx,\ ty)=\frac{ty}{tx}+\sin\frac{ty}{tx}=\frac{y}{x}+\sin\frac{y}{x}=f(x,\ y).$$

Застосуємо підстановку $y=ux$, $y'=u'x+u$.

$$u'x+u=\frac{ux}{x}+\sin\frac{ux}{x},\qquad u'x+u=u+\sin u,\qquad u'x+u-u=\sin u,$$

$$u'x = \sin u, \qquad u' = \sin u \cdot \frac{1}{x}, \qquad \frac{du}{dx} = \sin u \cdot \frac{1}{x}, \qquad \frac{du}{\sin u} = \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{du}{\sin u} = \int \frac{dx}{x}, \qquad \ln\left|\mathrm{tg}\frac{u}{2}\right| = \ln C|x|, \qquad \mathrm{tg}\frac{u}{2} = Cx,$$

$$\mathrm{tg}\frac{y}{2x} = Cx. \quad \lrcorner$$

<u>Вправи для самостійного розв'язання</u>

Розв'язати диференціальні рівняння:

26. $y' = \frac{y}{x} + 5\cos^2\frac{y}{x}$.

27. $y' + \sqrt{4 - \frac{y^2}{x^2}} = \frac{y}{x}$.

28. $xy' - y = \sqrt{y^2 + 2x^2}$.

29. $y' = \frac{y}{x} + \mathrm{tg}\frac{y}{x}$.

30. $\left(x^2 + 3xy + y^2\right)dx - x^2 dy = 0$.

31. $xy' = y\ln\frac{y}{x}$, якщо $y(1) = 1$.

Відповіді:

26. $\mathrm{tg}\frac{y}{x} = \ln C\left|x^5\right|$.

27. $\arcsin\frac{y}{2x} + \ln C|x| = 0$.

28. $y = \frac{Cx^2}{2} - \frac{1}{C}$.

29. $\sin\frac{y}{x} = Cx$.

30. $y = -x\left(1 + \frac{1}{\ln C|x|}\right)$.

31. $y = xe^{1-x}$.

4. Лінійні диференціальні рівняння

Диференціальне рівняння виду

$$y' + P(x)y = Q(x) \quad \text{або} \quad y' = -P(x)y + Q(x), \qquad (13)$$

де $P(x)$ і $Q(x)$ – неперервні функції на деякому інтервалі (a, b), називається *лінійним диференціальним рівнянням першого порядку*.

У випадку, коли $P(x) = \pm Q(x)$ або $Q(x) = 0$, рівняння (13) є диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними.

Є кілька методів розв'язання рівняння (13). Розглянемо один із них – *метод Бернуллі*. Розв'язок рівняння шукаємо у вигляді добутку

$$y = u \cdot v\,, \tag{14}$$

де $u = u(x)$ і $v = v(x)$ – невідомі функції. Одну з цих функцій можна вибрати довільним чином, а інша визначається згідно з рівнянням (13).

Знаходимо похідну функції y: $y' = u'v + uv'$. Підставляючи y та y' в рівняння (13), отримаємо

$$u'v + uv' + P(x)uv = Q(x),$$

$$u'v + u\left(v' + P(x)v\right) = Q(x)\,. \tag{15}$$

Виберемо функцію v так, щоб вираз у дужках дорівнював нулю, тобто

$$v' + P(x)v = 0\,. \tag{16}$$

Знаходимо v з рівняння (16), яке є диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними:

$\dfrac{dv}{dx} = -P(x)v$, $\quad \dfrac{dv}{v} = -P(x)dx$, звідки $\ln|v| = -\int P(x)dx$, або $v = e^{-\int P(x)dx}$. Під невизначеним інтегралом тут розуміємо одну з первісних функції $P(x)$.

Знаючи v, знаходимо u з рівняння $u'v = Q(x)$, яке випливає з (15) та (16):

$$v\frac{du}{dx} = Q(x), \qquad \frac{du}{dx} = \frac{Q(x)}{v} = Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx},$$

$$du = Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\,, \qquad u = \int Q(x)e^{\int P(x)}dx + C\,.$$

Підставляємо знайдені функції u та v у формулу (14) і отримуємо загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння:

$$y = u \cdot v = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right). \tag{17}$$

При розв'язуванні конкретних задач простіше виконувати вказаний вище алгоритм, аніж застосовувати готову формулу (17).

Розв'язати диференціальні рівняння:

32. $y' - \dfrac{2}{x}y = 2x^3$.

$\ulcorner$ Маємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Його розв'язок шукаємо у вигляді $y = uv$ (див. формулу (14)). Тоді $y' = u'v + uv'$. Підставляємо y та y' у задане рівняння:

$$u'v + uv' - \frac{2uv}{x} = 2x^3,$$

$$u'v + u\left(v' - \frac{2v}{x}\right) = 2x^3. \qquad (*)$$

Виберемо функцію v так, щоб

$$v' - \frac{2v}{x} = 0. \qquad (**)$$

Знаходимо v:

$v' = \frac{2v}{x}$, $\quad \frac{dv}{dx} = \frac{2v}{x}$, $\quad \frac{dv}{v} = 2\frac{dx}{x}$, $\quad \int \frac{dv}{v} = 2\int \frac{dx}{x}$, $\quad \ln|v| = 2\ln|x|$, $\ln|v| = \ln x^2$, звідки $v = x^2$.

Зауважимо, що оскільки в якості функції v ми вибираємо один з розв'язків рівняння $(**)$, то тут і надалі у методі Бернуллі, після інтегрування диференціального рівняння для знаходження v, покладаємо $C = 0$.

Підставляючи знайдену функцію v в рівняння $(*)$, отримуємо рівняння для знаходження u: $u' \cdot x^2 = 2x^3$, $u' = \frac{2x^3}{x^2}$,

$$\frac{du}{dx} = 2x, \quad du = 2x\,dx, \quad \int du = \int 2x\,dx, \quad u = 2\cdot\frac{x^2}{2} + C, \quad u = x^2 + C.$$

За формулою (14) знаходимо загальний розв'язок заданого диференціального рівняння – $y = uv = \left(x^2 + C\right)x^2$. $\lrcorner$

33. $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \cos^2 x$.

$\ulcorner$ Маємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Його розв'язок шукаємо у вигляді $y = uv$. Тоді $y' = u'v + uv'$.

$$u'v + uv' + uv\,\mathrm{tg}\,x = \cos^2 x,$$

$$u'v + u\left(v' + v\,\mathrm{tg}\,x\right) = \cos^2 x. \qquad (*)$$

Виберемо функцію v так, щоб $v' + v\,\mathrm{tg}\,x = 0$. Знаходимо v:

$v'+v\,\mathrm{tg}\,x=0$, $\quad \dfrac{dv}{dx}=-v\,\mathrm{tg}\,x$, $\quad \dfrac{dv}{v}=-\mathrm{tg}\,x\,dx$, $\quad \int\dfrac{dv}{v}=-\int\mathrm{tg}\,x\,dx$, $\ln|v|=\ln|\cos x|$, звідки $v=\cos x$.

Підставляючи знайдену функцію v в рівняння $(*)$, отримуємо рівняння для знаходження u: $\quad u'\cdot\cos x=\cos^2 x$, $\quad u'=\dfrac{\cos^2 x}{\cos x}$, $\dfrac{du}{dx}=\cos x$, $\quad du=\cos x\,dx$, $\quad \int du=\int\cos x\,dx$, звідки $u=\sin x+C$.

За формулою (14) маємо $y=uv=(\sin x+C)\cos x$. ┘

34. $y'+\dfrac{y}{x}=\dfrac{\sin 2x}{x}$.

┌ Маємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Його розв'язок шукаємо у вигляді $y=uv$. Тоді $y'=u'v+uv'$.

$$u'v+uv'+\frac{uv}{x}=\frac{\sin 2x}{x},$$

$$u'v+u\left(v'+\frac{v}{x}\right)=\frac{\sin 2x}{x}. \qquad (*)$$

Виберемо функцію v так, щоб $v'+\dfrac{v}{x}=0$. Знаходимо v:

$\dfrac{dv}{dx}=-\dfrac{v}{x}$, $\quad \dfrac{dv}{v}=-\dfrac{dx}{x}$, $\quad \int\dfrac{dv}{v}=-\int\dfrac{dx}{x}$, $\ln|v|=-\ln|x|$, $\quad \ln|v|=\ln\dfrac{1}{|x|}$, звідки $v=\dfrac{1}{x}$.

Підставляючи знайдену функцію v в рівняння $(*)$, отримуємо рівняння для знаходження u: $\quad u'\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{\sin 2x}{x}$, $\quad u'=\dfrac{\sin 2x}{x}\cdot x$, $\dfrac{du}{dx}=\sin 2x$, $du=\sin 2x\,dx$, $\int du=\int\sin 2x\,dx$, звідки $u=-\dfrac{1}{2}\cos 2x+C$.

За формулою (14) маємо $y=uv=\left(C-\dfrac{1}{2}\cos 2x\right)\dfrac{1}{x}$. ┘

35. $xy'-y=x^2\cos x$.

$\ulcorner$ Задане рівняння запишемо як $y' - \frac{y}{x} = x\cos x$. Отже, це лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Його розв'язок шукаємо у вигляді $y = uv$.

$$u'v + uv' - \frac{uv}{x} = x\cos x,$$

$$u'v + u\left(v' - \frac{v}{x}\right) = x\cos x. \qquad (*)$$

Виберемо функцію v так, щоб $v' - \frac{v}{x} = 0$. Знаходимо v:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{v}{x}, \quad \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x}, \quad \ln|v| = \ln|x|, \text{ звідки } v = x.$$

Підставляючи знайдену функцію v в рівняння $(*)$, отримуємо рівняння для знаходження u:

$$u'x = x\cos x, \quad u' = x\cos x \cdot \frac{1}{x},$$

$$\frac{du}{dx} = \cos x, \quad du = \cos x\, dx, \quad \int du = \int \cos x\, dx, \quad u = \sin x + C.$$

За формулою (14) маємо $y = uv = (\sin x + C)x$. $\lrcorner$

36. $x^2 y' + 5xy + 4 = 0$.

$\ulcorner$ $y' + \frac{5xy}{x^2} = -\frac{4}{x^2}$, $y' + \frac{5y}{x} = -\frac{4}{x^2}$, і, отже, маємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Його розв'язок шукаємо у вигляді $y = uv$.

$$u'v + uv' + \frac{5uv}{x} = -\frac{4}{x^2},$$

$$u'v + u\left(v' + \frac{5v}{x}\right) = -\frac{4}{x^2}. \qquad (*)$$

Виберемо функцію v так, щоб $v' + \frac{5v}{x} = 0$. Знаходимо v:

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{5v}{x}, \qquad \frac{dv}{v} = -5\frac{dx}{x}, \qquad \int \frac{dv}{v} = -5\int \frac{dx}{x}, \qquad \ln|v| = -5\ln|x|,$$

$\ln|v| = \ln\frac{1}{|x^5|}$, звідки $v = \frac{1}{x^5}$.

Підставляючи знайдену функцію v в рівняння $(*)$, отримуємо рівняння для знаходження u: $u' \cdot \frac{1}{x^5} = -\frac{4}{x^2}$, $u' = -\frac{4}{x^2} \cdot x^5$, $\frac{du}{dx} = -4x^3$,

$$du = -4x^3 dx\ ,\ \int du = -4\int x^3 dx\ ,\ u = -4 \cdot \frac{x^4}{4} + C\ ,\ u = -x^4 + C\ .$$

Отже, $y = uv = \frac{C - x^4}{x^5}$. ⌋

37. $y' - \frac{2x}{x^2+1} y = x\sqrt{x^2+1}$, якщо $y(0) = 2$.

⌈ Маємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Його розв'язок шукаємо у вигляді $y = uv$.

$$u'v + uv' - \frac{2x}{x^2+1} uv = x\sqrt{x^2+1}\ ,$$

$$u'v + u\left(v' - \frac{2x}{x^2+1} v\right) = x\sqrt{x^2+1}\ . \qquad (*)$$

Виберемо функцію v так, щоб $v' - \frac{2xv}{x^2+1} = 0$. Знаходимо v:

$\frac{dv}{dx} = \frac{2xv}{x^2+1}$, $\quad \frac{dv}{v} = \frac{2x}{x^2+1} dx$, $\quad \int\frac{dv}{v} = \int\frac{2x}{x^2+1} dx$, $\quad \ln|v| = \ln\left|x^2+1\right|$, $v = x^2 + 1$.

Підставляючи знайдену функцію v в рівняння $(*)$, отримуємо рівняння для знаходження u: $\quad u'\left(x^2+1\right) = x\sqrt{x^2+1}$,

$$u' = x\sqrt{x^2+1} \cdot \frac{1}{x^2+1}\ , \qquad \frac{du}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\ , \qquad du = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx\ ,$$

$$\int du = \int\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx\ , \qquad u = \sqrt{x^2+1} + C\ .$$

Отже, $y = uv = \left(\sqrt{x^2+1} + C\right) \cdot \left(x^2+1\right)$.

Знайдемо частинний розв'язок. За умовою задачі $y = 2$ при $x = 0$. Тоді отримаємо $2 = (1 + C) \cdot 1$, $\quad C = 1$. Отже, частинний розв'язок

$y=\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\left(x^2+1\right)$, $\quad y=\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}+x^2+1$,

або $y=\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}+x^2+1$. ⌋

Вправи для самостійного розв'язання

Розв'язати диференціальні рівняння:

38. $y'-y\operatorname{ctg}x=\sin x$.

39. $\left(x^2+1\right)y'+4xy=3$.

40. $y'-y=e^x$.

41. $y'-\dfrac{y}{x\ln x}=x\ln x$.

42. $y'+y\operatorname{tg}x=\dfrac{1}{\cos x}$, якщо $y(0)=0$.

43. $\left(1-x^2\right)y'+xy=1$, якщо $y(0)=1$.

Відповіді:

38. $y=(C+x)\sin x$.

39. $y=\dfrac{x^3+3x+C}{x^2+1}$.

40. $y=e^x(C+x)$.

41. $y=\left(\dfrac{x^2}{2}+C\right)\cdot\ln x$.

42. $y=\dfrac{x}{\cos x}$.

43. $y=x+\sqrt{1-x^2}$.

5. Диференціальне рівняння Бернуллі

Рівняння виду

$$y'+P(x)y=Q(x)\cdot y^{\alpha} \text{ або } y'=-P(x)y+Q(x)\cdot y^{\alpha}, \qquad (18)$$

де функції $P(x)$ та $Q(x)$ неперервні на деякому інтервалі (a,b), $\alpha\in R$, причому $\alpha\neq 0$ і $\alpha\neq 1$, називається *рівнянням Бернуллі*.

При $\alpha=0$ рівняння (18) перетворюється в лінійне диференціальне рівняння $y'+P(x)y=Q(x)$, розглянуте раніше, а при $\alpha=1$ – в рівняння з відокремлюваними змінними $y'=\left(Q(x)-P(x)\right)y$.

Розв'язок рівняння Бернуллі зручно шукати у вигляді $y=u\cdot v$.

Розв'язати диференціальні рівняння:

44. $x^2y^2\dfrac{dy}{dx}+xy^3=a^2$ (a – стала).

Γ $x^2y^2y'+xy^3=a^2$, $y^2y'+\dfrac{xy^3}{x^2}=\dfrac{a^2}{x^2}$, $y'+\dfrac{y}{x}=\dfrac{a^2}{x^2y^2}$. Отже, це рівняння Бернуллі. Зробимо заміну $y=uv$.

$$u'v+uv'+\frac{uv}{x}=\frac{a^2}{x^2u^2v^2},$$

$$u'v+u\left(v'+\frac{v}{x}\right)=\frac{a^2}{x^2u^2v^2}. \qquad (*)$$

Виберемо функцію v так, щоб $v'+\dfrac{v}{x}=0$. Знаходимо v:

$\dfrac{dv}{v}=-\dfrac{dx}{x}$, $\displaystyle\int\frac{dv}{v}=-\int\frac{dx}{x}$, $\ln|v|=-\ln|x|$, $v=\dfrac{1}{x}$.

Підставляючи v в рівняння $(*)$, отримуємо рівняння для знаходження u: $\dfrac{du}{dx}\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{a^2}{x^2\cdot u^2\,\frac{1}{x^2}}$, $\dfrac{du}{dx}\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{a^2}{u^2}$, $u^2du=a^2xdx$,

$\displaystyle\int u^2du=a^2\int x\,dx$, $\dfrac{u^3}{3}=a^2\left(\dfrac{x^2}{2}+C\right)$, $u=\sqrt[3]{3a^2\left(\dfrac{x^2}{2}+C\right)}$.

$y=uv=\dfrac{1}{x}\sqrt[3]{3a^2\left(\dfrac{x^2}{2}+C\right)}$, або $y^3=\dfrac{3}{2}\dfrac{a^2}{x}+\dfrac{C}{x^3}$. $\lrcorner$

45. $y'+xy=3xy^3$.

Γ Це рівняння Бернуллі. Зробимо заміну $y=uv$, $y'=u'v+uv'$.

$$u'v+uv'+xuv=3x(uv)^3,$$

$$u'v+u(v'+xv)=3x\cdot(vu)^3. \qquad (*)$$

Виберемо функцію v так, щоб $v'+xv=0$. Знаходимо v:

$\dfrac{dv}{dx}=-xv$, $\dfrac{dv}{v}=-xdx$, $\displaystyle\int\frac{dv}{v}=-\int xdx$, $\ln|v|=-\dfrac{x^2}{2}$, $v=e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Підставляючи v в рівняння $(*)$, отримуємо рівняння для знаходження u: $u'\,e^{\frac{-x^2}{2}}=3xu^3\left(e^{\frac{-x^2}{2}}\right)^3$, $\dfrac{du}{dx}=3xe^{-x^2}u^3$;

$$\frac{du}{u^3}=3xe^{-x^2}dx\,,\quad \int\frac{du}{u^3}=3\int xe^{-x^2}dx\,.$$

1) $\int\frac{du}{u^3}=\int u^{-3}du=-\frac{u^{-2}}{2}+C=-\frac{1}{2u^2}+C$;

2) $\int xe^{-x^2}dx=\begin{vmatrix}t=-x^2\\ dt=-2xdx\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}\int e^t dt=-\frac{1}{2}e^t+C=-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$.

Отже, $\frac{1}{u^2}=\frac{3}{e^{x^2}}+C$, $\frac{1}{u^2}=3e^{-x^2}+C$, $u^2=\frac{e^{x^2}}{3+Ce^{x^2}}$, $u=\pm\frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{3+Ce^{x^2}}}$.

$$y=uv=\pm\frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{3+Ce^{x^2}}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\,,\ \text{або}\quad y=\pm\frac{1}{\sqrt{3+Ce^{x^2}}}\,.\quad \lrcorner$$

<u>Вправи для самостійного розв’язання</u>

Розв’язати диференціальні рівняння:

46. $y'-\frac{1}{x}y=-y^2$. **47.** $y'+\frac{2y}{x}=y^2x$.

48. $y'+2xy=2y^3x^3$.

Відповіді:

46. $y=\frac{2x}{x^2+C}$. **47.** $y=\frac{-1}{x^2\ln C|x|}$.

48. $\frac{1}{y^2}=Ce^{2x^2}+x^2+\frac{1}{2}$.

6. Класифікація диференціальних рівнянь першого порядку

При розв’язанні диференціальних рівнянь першого порядку найпершим (і принциповим) кроком є визначення типу рівняння. Від цього у великій мірі залежить можливість розв’язання диференціального рівняння. Тому слід запам’ятати основні типи диференціальних рівнянь першого порядку, які класифіковано у наступній таблиці:

№ п/п	*Вид рівняння*	*Назва диференціального рівняння*
I	$y' = f(x)$	Найпростіше рівняння
II	$y' = f(x)\cdot g(y)$	Рівняння з відокремлюваними змінними
III	$y' = f(x,\ y)$, де $f(x,\ y)$ – однорідна функція нульового виміру	Однорідне рівняння
IV	$y' = -P(x)y + Q(x)$	Лінійне рівняння
V	$y' = -P(x)y + Q(x)y^{\alpha}$	Рівняння Бернуллі

Зручно звести диференціальне рівняння першого порядку до виду $y' = f(x,\ y)$, а потім за даною класифікацією визначити тип рівняння і тільки після цього розв'язувати його відповідним методом.

Диференціальне рівняння може належати одночасно до кількох типів. Наприклад, рівняння $y' = \frac{y}{x}$ відноситься до усіх типів, крім першого. Але найпростіше його розв'язувати як диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними (див. приклад **8**).

Розв'язати диференціальні рівняння.

49. $y' = 5\sqrt{y}$, якщо $y(0) = 25$.

⌐ Це рівняння виду II – рівняння з відокремлюваними змінними. Так як $y' = \frac{dy}{dx}$, то маємо $\frac{dy}{dx} = 5\sqrt{y}$, $\frac{dy}{\sqrt{y}} = 5\,dx$, $\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = 5\int dx$,

$$2\sqrt{y} = 5(x + C), \text{ або } \sqrt{y} = \frac{5}{2}(x + C).$$

Знайдемо частинний інтеграл. За умовою задачі $y = 25$ при $x = 0$. Тому

$$\sqrt{25} = \frac{5}{2}(0 + C), \quad C = 2.$$

Отже, маємо частинний інтеграл $\sqrt{y} = \frac{5}{2}(x + 2)$.. ⌟

50. $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$.

⌐ Маємо рівняння виду IV – лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Розв'язок шукаємо у вигляді $y = uv$, $y' = u'v + uv'$.

$$u'v + uv' + 2uvx = 2xe^{-x^2},$$
$$u'v + u\left(v' + 2vx\right) = 2xe^{-x^2}. \qquad (*)$$

Виберемо функцію v так, щоб $v' + 2vx = 0$. Знаходимо v:

$$\frac{dv}{dx} = -2vx, \quad \frac{dv}{v} = -2x\,dx, \quad \int\frac{dv}{v} = -2\int x\,dx, \quad \ln|v| = -x^2, \quad v = e^{-x^2}.$$

Підставляючи v в рівняння $(*)$, отримуємо рівняння для знаходження u: $u'v = 2xe^{-x^2}$, $\dfrac{du}{dx}e^{-x^2} = 2xe^{-x^2}$, $du = \dfrac{2xe^{-x^2}dx}{e^{-x^2}}$,

$$\int du = 2\int x\,dx, \quad u = 2\frac{x^2}{2} + C, \quad u = x^2 + C.$$

$$y = uv = \left(x^2 + C\right)e^{-x^2}. \quad ⌋$$

51. $y' = \dfrac{4}{x^2 + 9}$.

⌐ Це рівняння виду I – найпростіше рівняння. Так як $y' = \dfrac{dy}{dx}$, то маємо

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{x^2 + 9}, \quad dy = \frac{4}{x^2 + 9}dx, \quad \int dy = 4\int\frac{dx}{x^2 + 3^2},$$

$$y = \frac{4}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3} + C. \quad ⌋$$

52. $\left(x^2 + 2xy\right)dx + xydy = 0$.

⌐ $xy\,dy = -\left(x^2 + 2xy\right)dx$, $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\left(x^2 + 2xy\right)}{xy}$, $y' = \dfrac{-x\left(x + 2y\right)}{xy}$,

$$y' = \frac{-\left(x + 2y\right)}{y}.$$

Це рівняння виду III – однорідне диференціальне рівняння. Дійсно, права частина рівняння – функція $f\left(x,\, y\right) = -\dfrac{\left(x + 2y\right)}{y}$ є однорідною функцією нульового виміру:

$$f(tx, ty) = -\frac{(tx+2ty)}{ty} = \frac{-t(x+2y)}{ty} = \frac{-(x+2y)}{y} = f(x, y).$$

Застосуємо підстановку $y = ux$, $y' = u'x + u$.

$$u'x + u = -\frac{(x+2ux)}{ux}, \quad u'x + u = -\frac{x(1+2u)}{ux}, \quad u'x + u = -\frac{(1+2u)}{u},$$

$$u'x = \frac{-(1+2u)}{u} - u, \quad u'x = -\frac{(1+2u)+u^2}{u}, \quad x\frac{du}{dx} = -\frac{(u^2+2u+1)}{u},$$

$$\frac{u\,du}{-(u+1)^2} = \frac{dx}{x}, \quad -\int\frac{u\,du}{(u+1)^2} = \int\frac{dx}{x}, \quad -\int\frac{u+1-1}{(u+1)^2}du = \int\frac{dx}{x},$$

$$-\int\frac{u+1}{(u+1)^2}du + \int\frac{du}{(u+1)^2} = \int\frac{dx}{x}, \quad -\ln|u+1| - \frac{1}{u+1} = \ln C|x|,$$

$$\ln\left|\frac{y}{x}+1\right| + \frac{1}{\frac{y}{x}+1} = -\ln C|x|, \text{ або } \ln\left|\frac{y+x}{x}\right| + \frac{x}{y+x} = -\ln C|x|. \quad \lrcorner$$

53. $y' = \dfrac{y+5}{\sqrt{16-x^2}}$.

$\ulcorner$ Це рівняння виду як II $\left(y' = \dfrac{1}{\sqrt{16-x^2}}(y+5)\right)$, так і III $\left(y' = \dfrac{1}{\sqrt{16-x^2}}y + \dfrac{5}{\sqrt{16-x^2}}\right)$. Але простіше його розв'язувати як рівняння з відокремлюваними змінними. Так як $y' = \dfrac{dy}{dx}$, то маємо

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y+5}{\sqrt{16-x^2}}, \quad \frac{dy}{y+5} = \frac{dx}{\sqrt{4^2-x^2}}, \quad \int\frac{dy}{y+5} = \int\frac{dx}{\sqrt{4^2-x^2}},$$

$\ln|y+5| = \arcsin\dfrac{x}{4} + C$, $\quad y+5 = \pm e^{\arcsin\frac{x}{4}+C}$, звідки маємо загальний розв'язок $y = Ce^{\arcsin\frac{x}{4}} - 5$. $\lrcorner$

54. $xy' - y(2y\ln x - 1) = 0$.

⌈ Запишемо задане рівняння як $y' + \frac{y}{x} = \frac{2\ln x}{x} \cdot y^2$. Маємо рівняння виду V – рівняння Бернуллі. Зробимо заміну $y = uv$, $y' = u'v + uv'$.

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = \frac{2\ln x}{x}(uv)^2,$$

$$u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = \frac{2\ln x}{x}(uv)^2. \qquad (*)$$

Виберемо функцію v так, щоб $v' + \frac{v}{x} = 0$. Знаходимо v:

$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}$, $\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x}$, $\ln|v| = -\ln|x|$, $v = \frac{1}{x}$.

Підставляючи v в рівняння $(*)$, отримуємо рівняння для знаходження u: $\frac{du}{dx}\frac{1}{x} = \frac{2\ln x}{x}u^2\frac{1}{x^2}$, $\frac{du}{u^2} = \frac{2\ln x}{x^2}dx$,

$$\int \frac{du}{u^2} = 2\int \frac{\ln x}{x^2}dx, \quad -\frac{1}{u} = 2\int \frac{\ln x}{x^2}dx.$$

Обчислимо інтеграл:

$$\int \frac{\ln x}{x^2}dx = \begin{vmatrix} u = \ln x, & du = \frac{dx}{x} \\ dv = \frac{dx}{x^2}, & v = -\frac{1}{x} \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x}\frac{dx}{x} = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C.$$

Отже, $-\frac{1}{u} = -2\left(\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + C\right)$, звідки $u = \frac{1}{\frac{2\ln x}{x} + \frac{2}{x} + C}$.

Запишемо загальний розв’язок

$y = uv = \frac{1}{\frac{2\ln x}{x} + \frac{2}{x} + C}\frac{1}{x}$, або $y = \frac{1}{2\ln x + Cx + 2}$. ⌋

55. $xy' - 4y = x^2 \cdot \sqrt{y}$.

$\ulcorner$ Запишемо задане рівняння як $y' - \dfrac{4y}{x} = x\sqrt{y}$. Маємо рівняння виду V – рівняння Бернуллі з $\alpha = \dfrac{1}{2}$. Зробимо заміну $y = uv$.

$$u'v + uv' - \frac{4uv}{x} = x\sqrt{uv},$$

$$u'v + u\left(v' - \frac{4v}{x}\right) = x\sqrt{uv}. \qquad (*)$$

Виберемо функцію v так, щоб $\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{4v}{x}$. Знаходимо v:

$\dfrac{dv}{v} = \dfrac{4dx}{x}$, $\displaystyle\int \frac{dv}{v} = 4\int \frac{dx}{x}$, $\ln|v| = 4\ln|x|$, звідки $v = x^4$.

Підставляючи v в рівняння $(*)$, отримуємо рівняння для знаходження u: $\dfrac{du}{dx} \cdot x^4 = x\sqrt{u} \cdot \sqrt{x^4}$, $\dfrac{du}{\sqrt{u}} = \dfrac{x^3 dx}{x^4}$, $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \int \frac{dx}{x}$,

$2\sqrt{u} = \ln|x| + \ln C$, $2\sqrt{u} = \ln C|x|$, $\sqrt{u} = \dfrac{1}{2}\ln C|x|$.

Отже, $\sqrt{y} = \sqrt{u}\sqrt{v} = \dfrac{1}{2}x^2 \ln C|x|$. $\lrcorner$

56. $(1 + x^2)dy + y\,dx = 0$, якщо $y(0) = 1$.

$\ulcorner$ $(1 + x^2)\dfrac{dy}{dx} + y = 0$, $(1 + x^2) \cdot y' = -y$, $y' = -\dfrac{y}{1 + x^2}$. Це рівняння виду II – з відокремлюваними змінними. Маємо

$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{1 + x^2}$, $\dfrac{dy}{y} = -\dfrac{dx}{1 + x^2}$, $\displaystyle\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{1 + x^2}$, $\ln|y| = -\operatorname{arctg} x + C$,

звідки $y = \pm e^{-\operatorname{arctg} x + C}$, або $y = Ce^{-\operatorname{arctg} x}$ – загальний розв'язок заданого диференціального рівняння.

Знайдемо частинний розв'язок. За умовою задачі $y = 1$ при $x = 0$: $1 = Ce^{-\operatorname{arctg} 0}$, $C = 1$. Отже, маємо частинний розв'язок $y = e^{-\operatorname{arctg} x}$. $\lrcorner$

57. $y' = \dfrac{xy - y^2}{x^2 - 2xy}$.

⌈ Це диференціальне рівняння виду III. Дійсно, права частина даного рівняння є однорідною функцією нульового виміру:

$$f(tx,\ ty)=\frac{txty-t^2y^2}{t^2x^2-2txty}=\frac{t^2\left(xy-y^2\right)}{t^2\left(x^2-2xy\right)}=\frac{xy-y^2}{x^2-2xy}=f(x,\ y).$$

Застосувавши підстановку $y=ux$, $y'=u'x+u$, дістанемо

$$u'x+u=\frac{xux-u^2x^2}{x^2-2xux},\quad u'x+u=\frac{x^2\left(u-u^2\right)}{x^2(1-2u)},\quad u'x+u=\frac{u-u^2}{1-2u},$$

$$u'x=\frac{u-u^2}{1-2u}-u,\quad u'x=\frac{u-u^2-u+2u^2}{1-2u},\quad \frac{du}{dx}x=\frac{u^2}{1-2u},$$

$$\frac{1-2u}{u^2}du=\frac{dx}{x},\quad \int\frac{1-2u}{u^2}du=\int\frac{dx}{x},\quad \int\frac{du}{u^2}-2\int\frac{du}{u}=\int\frac{dx}{x},$$

$$-\frac{1}{u}-2\ln|u|=\ln|x|-\ln C,\quad \frac{1}{u}+2\ln|u|=\ln\frac{C}{|x|},\quad \frac{1}{u}=\ln\frac{C}{xu^2},$$

$$\frac{x}{y}=\ln\frac{Cx}{y^2}.\quad ⌋$$

58. $dy-e^{-x}dx+y\,dx-x\,dy=xy\,dx$, якщо $y(0)=\ln 5$.

⌈ Перетворимо рівняння, виділивши похідну:

$$dy-x\,dy=xy\,dx+e^{-x}dx-y\,dx,$$

$$(1-x)dy=\left(xy+e^{-x}-y\right)dx.$$

Помноживши обидві частини рівняння на $\dfrac{1}{(1-x)dx}$, одержимо

$$\frac{dy}{dx}=\frac{xy+e^{-x}-y}{1-x},\quad \frac{dy}{dx}=\frac{y(x-1)+e^{-x}}{1-x},\quad \frac{dy}{dx}=-y+\frac{e^{-x}}{1-x},$$

$$y'+y=\frac{e^{-x}}{1-x}.$$

Це лінійне диференціальне рівняння першого порядку (рівняння виду IV).

Використаємо підстановку $y=uv$, $y'=u'v+uv'$.

$$u'v+uv'+uv=\frac{e^{-x}}{1-x},$$

$$u'v+u\left(v'+v\right)=\frac{e^{-x}}{1-x}. \qquad (*)$$

Виберемо функцію v так, щоб $v'+v=0$. Знаходимо v:

$\frac{dv}{v}=-dx$, $\int\frac{dv}{v}=-\int dx$, $\ln|v|=-x$, $v=e^{-x}$.

Підставляючи функцію v в рівняння $(*)$, одержимо рівняння для знаходження u: $\frac{du}{dx}e^{-x}=\frac{e^{-x}}{1-x}$, $du=\frac{dx}{1-x}$, $\int du=\int\frac{dx}{1-x}$,

$u=-\ln|1-x|+\ln C$, $u=\ln\frac{C}{|1-x|}$.

Тоді $y=uv=e^{-x}\ln\frac{C}{|1-x|}$ – загальний розв'язок рівняння.

Знайдемо частинний розв'язок, підставивши в загальний розв'язок початкову умову $y=\ln 5$ при $x=0$. Таким чином, матимемо $\ln 5=\frac{1}{e}\ln\frac{C}{1-0}$, $\ln 5=\ln C$, $C=5$. Частинним розв'язком буде

$y=e^{-x}\ln\frac{5}{|1-x|}$. ⌋

59. $y'=2\sqrt{y}\ln x$, якщо $y\left(e\right)=1$.

⌈ Це диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними (рівняння виду II).

$$\frac{dy}{dx}=2\sqrt{y}\ln x,\quad \frac{dy}{2\sqrt{y}}=\ln x\,dx,\quad \int\frac{dy}{2\sqrt{y}}=\int\ln x\,dx.$$

Обчислимо $\int\ln x\,dx=\left|\begin{matrix}u=\ln x,\ du=\frac{dx}{x}\\ dv=dx,\ v=x\end{matrix}\right|=x\ln x-\int x\frac{dx}{x}=x\ln x-x+C$.

Враховуючи, що $\int\frac{dy}{2\sqrt{y}}=\sqrt{y}+C$, маємо загальний інтеграл $\sqrt{y}=x\ln x-x+C$.

Знайдемо частинний розв'язок. За умовою задачі $y=1$ при $x=e$. Тому $1=e\ln e-e+C$, $1=e-e+C$, звідки $C=1$. Отже , частинний інтеграл – $\sqrt{y}=x\ln x-x+1$. ⌋

60. $y' - 3x^2 y - x^2 e^{x^3} = 0$, якщо $y(0) = 0$.

⌜ $y' - 3x^2 y = x^2 e^{x^3}$. Це лінійне диференціальне рівняння першого порядку (рівняння виду IV). Використовуючи підстановку $y = uv$, $y' = u'v + uv'$, одержимо

$$u'v + uv' - 3x^2 uv = x^2 e^{x^3},$$

$$u'v + u\left(v' - 3x^2 v\right) = x^2 e^{x^3}. \qquad (*)$$

Виберемо функцію v так, щоб $v' - 3x^2 v = 0$. Визначаємо v:
$\frac{dv}{dx} = 3x^2 v$, $\frac{dv}{v} = 3x^2 dx$, $\int \frac{dv}{v} = 3\int x^2 dx$, $\ln|v| = x^3$, $v = e^{x^3}$.

Підставляючи v в рівняння $(*)$, отримуємо рівняння для визначення u: $\frac{du}{dx} e^{x^3} = x^2 e^{x^3}$, $\frac{du}{dx} = x^2$, $du = x^2 dx$,

$$\int du = \int x^2 dx, \quad u = \frac{x^3}{3} + C.$$

Тоді $y = uv = \left(\frac{x^3}{3} + C\right) e^{x^3}$.

Підставимо початкову умову $y = 0$ при $x = 0$ у загальний розв'язок рівняння: $0 = (0 + C)e^0$, звідки $C = 0$. Отже, частинний розв'язок заданого диференціального рівняння – $y = \left(\frac{x^3}{3} + 0\right) e^{x^3}$, або $y = \frac{x^3}{3} e^{x^3}$. ⌟

61. $\left(x^2 + y^2\right)dx + 4xy\,dy = 0$.

⌜ $4xy\,dy = -\left(x^2 + y^2\right)dx$, $\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2 + y^2}{4xy}$, $y' = -\frac{x^2 + y^2}{4xy}$. Маємо однорідне диференціальне рівняння (рівняння виду III). Застосуємо підстановку $y = ux$, $y' = u'x + u$. Тоді

$$u'x + u = -\frac{x^2 + u^2 x^2}{4xux}, \quad u'x + u = -\frac{x^2\left(1 + u^2\right)}{x^2 4u}, \quad u'x + u = -\frac{1 + u^2}{4u},$$

$$u'x=-\frac{1+u^2}{4u}-u\,,\quad u'x=-\frac{1+5u^2}{4u}\,,\quad \frac{du}{dx}x=-\frac{1+5u^2}{4u}\,,$$

$$\frac{4u\,du}{5u^2+1}=-\frac{dx}{x}\,,\quad 4\int\frac{u\,du}{5u^2+1}=-\int\frac{dx}{x}\,,\quad \frac{4}{10}\int\frac{d\left(5u^2+1\right)}{5u^2+1}=-\ln|x|+\ln C\,,$$

$$\frac{2}{5}\ln\left|5u^2+1\right|=\ln\frac{C}{|x|}\,,\quad \ln\left|5u^2+1\right|^{\frac{2}{5}}=\ln\frac{C}{|x|}\,,\quad \left(5u^2+1\right)^{\frac{2}{5}}=\frac{C}{x}\,,\text{ або}$$

$$\left(5\frac{y^2}{x^2}+1\right)^{\frac{2}{5}}=\frac{C}{x}\,.\quad \lrcorner$$

62. $(x+1)y'+y=x^3+x^2$, якщо $y(0)=0$.

$$\ulcorner\qquad y'+\frac{y}{x+1}=\frac{x^3+x^2}{x+1}\,,\qquad y'+\frac{y}{x+1}=\frac{x^2(x+1)}{x+1}\,,\qquad y'+\frac{y}{x+1}=x^2\,.$$

Маємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку (рівняння виду IV). Використаємо підстановку $y=uv$.

$$u'v+uv'+\frac{uv}{x+1}=x^2\,,$$

$$u'v+u\left(v'+\frac{v}{x+1}\right)=x^2\,.\qquad (*)$$

Виберемо функцію v так, щоб $v'+\frac{v}{x+1}=0$. Визначаємо v:

$$\frac{dv}{dx}=-\frac{v}{x+1}\,,\qquad \frac{dv}{v}=-\frac{dx}{x+1}\,,\qquad \int\frac{dv}{v}=-\int\frac{dx}{x+1}\,,\qquad \ln|v|=-\ln|x+1|\,,$$

$$\ln|v|=\ln\frac{1}{|x+1|}\,,\quad v=\frac{1}{x+1}\,.$$

Підставляючи v в рівняння $(*)$, отримуємо рівняння для визначення u: :

$$\frac{du}{dx}\frac{1}{x+1}=x^2\,,\quad du=(x+1)x^2dx\,,\quad \int du=\int\left(x^3+x^2\right)dx\,,$$

$$u=\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+C\,.$$

Тоді $y=uv=\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+C\right)\frac{1}{x+1}$ – загальний розв’язок рівняння.

Підставимо початкову умову $y=0$ при $x=0$ у загальний розв'язок рівняння: $0=\left(\frac{0^4}{4}+\frac{0^3}{3}+C\right)\frac{1}{0+1}$, $C=0$.

Отже, маємо частинний розв'язок

$y=\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}\right)\frac{1}{x+1}$, або $y=\frac{3x^4+4x^3}{12(x+1)}$. ⌋

63. $\sec^2 x \operatorname{tg} y\, dx+\sec^2 y \operatorname{tg} x\, dy=0$.

⌈ $\sec^2 y \operatorname{tg} x dy=-\sec^2 x \operatorname{tg} y\, dx$, $\sec^2 y \operatorname{tg} x \frac{dy}{dx}=-\sec^2 x \operatorname{tg} y$,

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\sec^2 x\cdot \operatorname{tg} y}{\sec^2 y\cdot \operatorname{tg} x},\quad y'=-\frac{\sec^2 x\cdot \operatorname{tg} y}{\sec^2 y\cdot \operatorname{tg} x}.$$

Це рівняння виду II – рівняння з відокремлюваними змінними.

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\sec^2 x\cdot \operatorname{tg} y}{\sec^2 y\cdot \operatorname{tg} x},\quad \frac{\sec^2 y}{\operatorname{tg} y}dy=-\frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg} x}dx.$$

Враховуючи, що $\sec^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$, $\sec^2 y=\frac{1}{\cos^2 y}$, дістанемо

$$\frac{dy}{\operatorname{tg} y\cdot\cos^2 y}=-\frac{dx}{\operatorname{tg} x\cdot \cos^2 x},\quad \int\frac{dy}{\operatorname{tg} y\cdot\cos^2 y}=-\int\frac{dx}{\operatorname{tg} x\cdot \cos^2 x},$$

$\ln|\operatorname{tg} y|=-\ln|\operatorname{tg} x|+\ln C$, $\ln|\operatorname{tg} y \operatorname{tg} x|=\ln C$, або $\operatorname{tg} y \operatorname{tg} x=C$. ⌋

64. $y'=e^{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}+1$.

⌈ Це однорідне диференціальне рівняння (рівняння виду III). Дійсно,

$$f(tx,\ ty)=e^{\frac{ty}{tx}}+\frac{ty}{tx}+1=e^{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}+1=f(x,\ y).$$

Застосуємо підстановку $y=ux$, $y'=u'x+u$:

$$u'x+u=e^{\frac{ux}{x}}+\frac{ux}{x}+1,\quad u'x+u=e^u+u+1,\quad u'x=e^u+1,$$

$$\frac{du}{dx}x=e^u+1,\quad \frac{du}{e^u+1}=\frac{dx}{x},\quad \int\frac{du}{e^u+1}=\int\frac{dx}{x},\quad \int\frac{e^u+1-e^u}{e^u+1}du=\int\frac{dx}{x},$$

$$\int du-\int\frac{e^u du}{e^u+1}=\int\frac{dx}{x},\quad u-\ln\left|e^u+1\right|=\ln|x|+\ln C,$$

$$\frac{y}{x}-\ln\left(e^{y/x}+1\right)=\ln C|x|.\quad \lrcorner$$

<u>Вправи для самостійного розв'язання</u>

Розв'язати диференціальні рівняння:

65. $\left(1+e^{3y}\right)xdx=e^{3y}dy$.

66. $y'=\dfrac{\cos^2 y}{x^2+4}$.

67. $y'-\dfrac{y}{x+2}=x^2+4x+5$, якщо $y(-1)=\dfrac{3}{2}$.

68. $\left(y^2-2xy\right)dx+x^2dy=0$.

69. $xy^2y'=x^2+y^3$.

70. $y'=e^{x^2}x\left(1+y^2\right)$.

71. $y'=\dfrac{y}{x}+\dfrac{y^2}{x^2}e^{\frac{x}{y}}$.

72. $y'=\dfrac{\sqrt{16-y^2}}{2x+3}$.

73. $y'-2xy=1-2x^2$, якщо $y(0)=2$.

74. $y'=\dfrac{y}{x}+\dfrac{x^2}{y}$.

75. $y'\sin x=y\cos x+2\cos x$.

76. $xy'=y-xe^{\frac{y}{x}}$.

77. $x^2y'+xy+1=0$.

78. $y'\sqrt{1-x^2}-\cos^2 y=0$.

79. $xy'=\sqrt{x^2-y^2}+y$.

80. $xy'+y=\ln x+1$.

Відповіді:

65. $\dfrac{x^2}{2}=\dfrac{1}{3}\ln\left(1+e^{3y}\right)+C$.

66. $\operatorname{tg} y=\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}+C$.

67. $y=(x+2)+\dfrac{(x+2)^3}{2}+(x+2)\ln(x+2)$.

68. $\dfrac{y}{x-y}=Cx$.

69. $y^3=Cx^3-3x^2$.

70. $\operatorname{arctg} y = C + \frac{1}{2}e^{x^2}$.

71. $y = -\frac{x}{\ln\ln C|x|}$.

72. $\arcsin\frac{y}{4} = \frac{1}{2}\ln|2x+3| + C$.

73. $y = 2e^{x^2} + x$.

74. $y = x\sqrt{2x+C}$.

75. $y = C\sin x - 2$.

76. $y = -x\ln\ln C|x|$.

77. $y = \frac{1}{x}\left(C - \ln|x|\right)$.

78. $\operatorname{tg} y = \arcsin x + C$.

79. $\arcsin\frac{y}{x} = \ln C|x|$.

80. $y = \ln|x| + \frac{C}{x}$.

7. Диференціальні рівняння другого порядку. Основні поняття

Диференціальним рівнянням другого порядку називається рівняння, яке зв'язує незалежну змінну x, невідому функцію y та першу і другу похідні цієї функції:

$$F\left(x, y, y', y''\right) = 0, \tag{19}$$

або

$$y'' = f\left(x, y, y'\right). \tag{20}$$

Загальним розв'язком диференціального рівняння (19) (або (20)) є функція $y = \varphi\left(x, C_1, C_2\right)$, яка перетворює диференціальне рівняння в тотожність при довільних фіксованих значеннях сталих C_1 та C_2.

Будь-який *частинний розв'язок* диференціального рівняння другого порядку одержується із загального розв'язку накладанням на нього *початкових умов задачі Коші* у точці x_0:

$$y\left(x_0\right) = y_0 \quad \text{і} \quad y'\left(x_0\right) = y_0'. \tag{21}$$

При цьому сталі C_1 і C_2 будуть мати конкретні значення C_1^0 і C_2^0.

Найпростіше диференціальне рівняння другого порядку має вигляд

$$y'' = f\left(x\right), \tag{22}$$

де функція $f\left(x\right)$ – задана.

Розв'яжемо рівняння (22). За означенням другої похідної

$y'' = (y')' = \dfrac{d(y')}{dx}$. Тоді маємо $\dfrac{d(y')}{dx} = f(x)$. Звідси $d(y') = f(x)dx$ і $y' = \int f(x)dx + C_1$, де C_1 – довільна стала. Аналогічно знаходимо

$\dfrac{dy}{dx} = \int f(x)dx + C_1$ або $dy = \left(\int f(x)dx + C_1\right)dx$, звідки

$$y = \int\left(\int f(x)dx\right)dx + C_1x + C_2 . \qquad (23)$$

Це і є загальний розв'язок диференціального рівняння (22).

Розв'язати диференціальні рівняння.

81. $y'' = 12x^2 - 6x + 8$.

$\ulcorner$ Маємо рівняння виду (22). Послідовно дістанемо $\dfrac{d(y')}{dx} = 12x^2 - 6x + 8$, $d(y') = (12x^2 - 6x + 8)dx$,

$$y' = \int(12x^2 - 6x + 8)dx = 12\frac{x^3}{3} - 6\frac{x^2}{2} + 8x + C_1 = 4x^3 - 3x^2 + 8x + C_1 .$$

Отже, $y' = 4x^3 - 3x^2 + 8x + C_1$, $dy = (4x^3 - 3x^2 + 8x + C_1)dx$,

$$y = \int(4x^3 - 3x^2 + 8x + C_1)dx = 4\frac{x^4}{4} - 3\frac{x^3}{3} + 8\frac{x^2}{2} + C_1x + C_2 .$$

Отримали розв'язок виду (23).

Отже, $y = x^4 - x^3 + 4x^2 + C_1x + C_2$. $\lrcorner$

82. $y'' = \sin 5x$, якщо $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$.

$\ulcorner$ Спочатку знайдемо загальний розв'язок заданого рівняння. Це рівняння виду (22). Послідовно дістанемо $\dfrac{d(y')}{dx} = \sin 5x$, $d(y') = \sin 5x\,dx$, $y' = \int \sin 5x\,dx = \dfrac{1}{5}\int \sin 5x\,d(5x) = -\dfrac{1}{5}\cos 5x + C_1$.

Остаточно маємо $y' = -\dfrac{1}{5}\cos 5x + C_1$, $dy = \left(-\dfrac{1}{5}\cos 5x + C_1\right)dx$, $y = \int\left(-\dfrac{1}{5}\cos 5x + C_1\right)dx = -\dfrac{1}{25}\sin 5x + C_1x + C_2$.

Знайдемо розв'язок задачі Коші з умовами $y(0) = 2$ і $y'(0) = -1$:

$$\begin{cases} y(0) = -\frac{1}{25}\sin 0 + C_1 \cdot 0 + C_2 = 2 \\ y'(0) = -\frac{1}{5}\cos 0 + C_1 = -1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_2 = 2 \\ -\frac{1}{5} + C_1 = -1, \end{cases} \quad \begin{cases} C_2 = 2 \\ C_1 = -1 + \frac{1}{5} = -\frac{4}{5}. \end{cases}$$

Отже, $y = -\frac{1}{25}\sin 5x - \frac{4}{5}x + 2$. ⌋

Вправи для самостійного розв'язання

Розв'язати диференціальні рівняння:

83. $y'' = 120x^4 + 4$, якщо $y(1) = -10$, $y'(1) = 3$.

84. $y'' = \dfrac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$.

85. $y'' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Відповіді:

83. $y = 4x^6 + 2x^2 - 25x + 9$. **84.** $y = \arcsin x + C_1 x + C_2$.

85. $y = -\ln|\cos x| + C_1 x + C_2$.

8. Диференціальні рівняння другого порядку, які допускають пониження порядку

Одним із методів розв'язування диференціальних рівнянь другого порядку є метод пониження порядку. Він полягає в тому, що за допомогою відповідної заміни змінної дане диференціальне рівняння зводиться до диференціального рівняння першого порядку.

Розглянемо два типи таких диференціальних рівнянь.

1°. Нехай задано диференціальне рівняння другого порядку виду

$$F(x, y', y'') = 0, \tag{24}$$

або

$$y'' = f(x, y'), \tag{25}$$

яке не містить явно шуканої функції $y = y(x)$.

Зробимо заміну $y' = z(x)$, тоді $y'' = z'$. Дістанемо диференціальне рівняння першого порядку

$$F(x, z, z') = 0, \text{ або } \quad z' = f(x, z), \tag{26}$$

Якщо вдається знайти загальний розв’язок $z = z(x, C_1)$ рівняння (26), то отримаємо диференціальне рівняння першого порядку $y' = z(x, C_1)$. Звідси маємо загальний розв’язок $y = \int z(x, C_1)\,dx + C_2$.

Розв’язати диференціальні рівняння:

86. $y'' = -\dfrac{4}{x}y' + \dfrac{1}{x^6}$, якщо $y(-1) = \dfrac{1}{4}$, $y'(-1) = 4$.

Γ Маємо рівняння виду (25). Зробимо заміну $y' = z$. Тоді $y'' = z'$. Дістанемо рівняння $z' = -\dfrac{4}{x}z + \dfrac{1}{x^6}$. Це лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Розв’язуємо його за методом Бернуллі: $z = u(x) \cdot v(x)$, $z' = u'v + uv'$. Тоді

$$u'v + uv' + \frac{4}{x}uv = \frac{1}{x^6},$$

$$u'v + u\left(v' + \frac{4}{x}v\right) = \frac{1}{x^6}. \tag{*}$$

Виберемо функцію v так, $v' + \dfrac{4}{x}v = 0$. Знаходимо v:

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{4}{x}v, \ \frac{dv}{v} = -\frac{4}{x}dx, \ \int \frac{dv}{v} = -4\int \frac{dx}{x}, \ \ln|v| = -4\ln|x|,$$

$$\ln|v| = \ln\frac{1}{x^4}, \ v = \frac{1}{x^4}.$$

Підставляючи функцію v в рівняння $(*)$, отримуємо рівняння для знаходження u:

$$u' \cdot \frac{1}{x^4} = \frac{1}{x^6}, \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{x^2}, \quad du = \frac{dx}{x^2}, \quad u = \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C_1.$$

Тоді $z = u \cdot v = \dfrac{1}{x^4} \cdot \left(-\dfrac{1}{x} + C_1\right) = \dfrac{C_1}{x^4} - \dfrac{1}{x^5}$.

Але $z = y'$. Тому маємо: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{C_1}{x^4} - \dfrac{1}{x^5}$, $dy = \left(\dfrac{C_1}{x^4} - \dfrac{1}{x^5}\right)dx$,

$$y = \int\left(\frac{C_1}{x^4} - \frac{1}{x^5}\right)dx = C_1\int x^{-4}dx - \int x^{-5}dx = C_1 \cdot \frac{x^{-3}}{-3} - \frac{x^{-4}}{-4} + C_2 = \frac{1}{4x^4} - \frac{C_1}{3x^3} + C_2.$$

Маємо загальний розв'язок рівняння $y = \dfrac{1}{4x^4} - \dfrac{C_1}{3x^3} + C_2$.

Знайдемо частинний розв'язок. З умови задачі Коші $y(-1) = \dfrac{1}{4}$, $y'(-1) = 4$:

$$\begin{cases} y(-1) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{C_1}{3} + C_2 = \dfrac{1}{4} \\ y'(-1) = C_1 + 1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + C_2 = 0 \\ C_1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 3 \\ C_2 = -1 \end{cases}$$

Отже, маємо частинний розв'язок $y = \dfrac{1}{4x^4} - \dfrac{1}{x^3} - 1$. ⌋

87. $y'' x \ln x = y'$.

⌈ Дане рівняння запишемо у вигляді $y'' = \dfrac{y'}{x \ln x}$ і отримаємо рівняння виду (25). Зробимо заміну $y' = z$. Тоді $y'' = z'$. Дістанемо рівняння з відокремлюваними змінними $z' = \dfrac{z}{x \ln x}$. Розв'язуємо його:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z}{x \ln x},\ \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x \ln x},\ \int\frac{dz}{z} = \int\frac{d(\ln x)}{\ln x},\ \ln|z| = \ln|\ln x| + \ln C_1,$$

$$\ln|z| = \ln|C_1 \ln x|,\ z = C_1 \ln x.$$

Але $z = y'$. Тому маємо

$$\frac{dy}{dx} = C_1 \ln x,\ dy = C_1 \ln x\, dx,\ \int dy = C_1 \int \ln x\, dx, \text{ звідки}$$

$$y = C_1 x(\ln x - 1) + C_2. \quad ⌋$$

2º. Нехай задано диференціальне рівняння другого порядку виду

$$F(y,\ y',\ y'') = 0, \tag{27}$$

або

$$y'' = f(y,\ y'), \tag{28}$$

яке не містить явно незалежну змінну x.

Зробимо заміну $y' = p(y)$, де p вважається функцією від y. Тоді $y'' = (y')' = p'_x = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p'_y \cdot y'_x = p'_y \cdot p = pp'_y$. Тому дістанемо диференціальне рівняння першого порядку

$$F(y, p, pp'_y) = 0, \text{ або } pp'_y = f(y, p). \tag{29}$$

Якщо вдається знайти загальний розв'язок рівняння (29) $p = p(y, C_1)$, то отримаємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними

$$y' = p(y, C_1), \ \frac{dy}{dx} = p(y, C_1), \frac{dy}{p(y, C_1)} = dx, \ \int \frac{dy}{p(y, C_1)} = x + C_2 .$$

Обчисливши невизначений інтеграл, отримаємо загальний інтеграл (розв'язок) рівняння (27) або (28).

Розв'язати диференціальні рівняння.

88. $y'' = -\frac{2}{y^5}$, якщо $y(-1) = 1$, $y'(-1) = 1$.

Γ Маємо рівняння виду (28). Зробимо заміну $y' = p(y)$, $y'' = pp'_y$. Дістанемо рівняння виду (31) з відокремлюваними змінними: $pp'_y = -\frac{2}{y^5}$.

Розв'яжемо його:

$$p\frac{dp}{dy} = -\frac{2}{y^5}, \quad p\,dp = -\frac{2}{y^5}dy, \quad \int p\,dp = -2\int y^{-5}dy, \ \frac{p^2}{2} = -2\frac{y^{-4}}{-4} + C_1,$$

$$p^2 = y^{-4} + 2C_1, \ p^2 = \frac{1}{y^4} + 2C_1, \ (y')^2 = \frac{1}{y^4} + 2C_1.$$

Так як потрібно знайти тільки такий частинний розв'язок, який задовольняє задані початкові умови, то можливо одразу знайти C_1 (підставляючи в отриману рівність умови $y(-1) = 1$, $y'(-1) = 1$):

$$1 = 1 + 2C_1 \Leftrightarrow C_1 = 0 .$$

Тому маємо $(y')^2 = \frac{1}{y^4}$, звідки $y' = \frac{1}{y^2}$ (врахували початкову умову $y'(-1) = 1$).

Розв'язуємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{y^2},\ y^2dy=dx,\ \int y^2dy=\int dx,$$

$$\frac{y^3}{3}=x+C_2 \Leftrightarrow y^3=3x+3C_2.$$

Підставляємо початкову умову $y(-1)=1$ і знаходимо: $1^3=3\cdot(-1)+3C_2$, $3C_2=4$, $C_2=\frac{4}{3}$. Тоді $y^3=3x+4$. Остаточно маємо $y=\sqrt[3]{3x+4}$. ⌋

89. $y''(1+y)-5(y')^2=0$.

⌈ Маємо рівняння виду (27). Зробимо заміну $y'=p(y)$, $y''=pp'_y$. Дістанемо рівняння $pp'_y(1+y)-5p^2=0$. Виносимо спільний множник p за дужки:

$p\left(p'_y(1+y)-5p\right)=0$.

Можливі два випадки.

1) $p=0$, тоді $y'=0$, $y=\mathrm{const}$.

2) $p'_y(1+y)-5p=0$. Це рівняння з відокремлюваними змінними. Розв'язуємо його:

$$(1+y)\frac{dp}{dy}=5p,\ \frac{dp}{p}=\frac{5dy}{y+1},\ \int\frac{dp}{p}=5\int\frac{dy}{y+1},\ \ln|p|=5\ln|y+1|+\ln C_1,$$

$$\ln|p|=\ln\left|C_1\cdot(y+1)^5\right|,\ p=C_1(y+1)^5,\ y'=C_1(y+1)^5.$$

Це є диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Розв'язуємо його: $\frac{dy}{dx}=C_1(y+1)^5$, $\frac{dy}{(y+1)^5}=C_1dx$,

$\int(y+1)^{-5}dy=C_1\int dx$, $\frac{(y+1)^{-4}}{-4}=C_1x+C_2$, $\frac{1}{4(y+1)^4}=C_1x+C_2$,

$(y+1)^4=\frac{1}{C_1x+C_2}$.

Зауважимо, що розв'язок $y=\mathrm{const}$ дістаємо із загального розв'язку при $C_1=0$. ⌋

Вправи для самостійного розв'язання

Розв'язати диференціальні рівняння:

90. $2xy'' - y' = 0$, якщо $y(4) = 10$, $y'(4) = 3$.

91. $yy'' - (y')^2 - y^2 y' = 0$.

92. $3yy'' + (y')^2 = 0$.

93. $y'' + \frac{y'}{x} = x^2$.

Відповіді:

90. $y = \sqrt{x^3} + 2$.

91. $\frac{y}{y + C_1} = e^{C_1(x + C_2)}$.

92. $y = (C_1 x + C_2)^{\frac{3}{4}}$.

93. $y = \frac{x^4}{16} + C_1 \ln x + C_2$.

9. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Рівняння виду

$$y'' + py' + qy = 0 , \tag{30}$$

де p і q – дійсні числа, називається *лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами.*

Квадратне рівняння

$$k^2 + pk + q = 0 \tag{31}$$

називається відповідним *характеристичним рівнянням*.

Загальний розв'язок рівняння (30) залежить від значень коренів характеристичного рівняння. Можливі три випадки.

1. Якщо корені характеристичного рівняння (31) дійсні та різні, тобто $k_1 \neq k_2$, то загальний розв'язок диференціального рівняння (31) має вигляд:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} . \tag{32}$$

2. Якщо корені характеристичного рівняння дійсні та рівні, тобто $k_1 = k_2 = k$, то

$$y = e^{kx}(C_1 + C_2 x) . \tag{33}$$

3. Якщо корені характеристичного рівняння комплексно-спряжені $\left(D = p^2 - 4q < 0\right)$, тобто $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$, де $i = \sqrt{-1}$ (*уявна одиниця*), $\alpha = -\frac{p}{2}$, $\beta = \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2}$, то

$$y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x\right). \qquad (34)$$

У формулах $(32)-(34)$ C_1 і C_2 довільні сталі.

Розв'язати диференціальні рівняння.

94. $y'' - 5y' + 4y = 0$.

⌈ Маємо рівняння виду (30). Запишемо його характеристичне рівняння: $k^2 - 5k + 4 = 0$. Розв'яжемо його: $D = (-5)^2 - 4\cdot 4\cdot 1 = 25 - 16 = 9 > 0$, тоді $k_1 = \frac{5-3}{2} = 1$ і $k_2 = \frac{5+3}{2} = 4$.

Маємо перший випадок (корені дійсні та різні). Тому за формулою (32) загальний розв'язок диференціального рівняння – $y = C_1 e^x + C_2 e^{4x}$. ⌋

95. $y'' + 8y' + 16y = 0$.

⌈ Це рівняння виду (30). Його характеристичне рівняння має вигляд $k^2 + 8k + 16 = 0$, або $(k+4)^2 = 0$. Тому $k_1 = k_2 = -4$, тобто маємо другий випадок. Тоді за формулою (33) записуємо загальний розв'язок диференціального рівняння: $y = e^{-4x}\left(C_1 + C_2 x\right)$. ⌋

96. $y'' + 2y' + 10y = 0$.

⌈ Маємо рівняння виду (30). Записуємо відповідне характеристичне рівняння: $k^2 + 2k + 10 = 0$. Розв'язуємо його: $D = 2^2 - 4\cdot 1\cdot 10 = 4 - 40 = -36$, $k_1 = \frac{-2 - \sqrt{-36}}{2} = \frac{-2 - 6i}{2} = -1 - 3i$, $k_2 = \frac{-2 + \sqrt{-36}}{2} = \frac{-2 + 6i}{2} = -1 + 3i$. Корені характеристичного рівняння комплексно-спряжені. Це третій випадок. При цьому $\alpha = -1$, $\beta = 3$. Тому за формулою (34) записуємо загальний розв'язок рівняння: $y = e^{-x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$. ⌋

97. $y'' + 25y = 0$.

$\ulcorner$ Характеристичне рівняння має вигляд $k^2 + 25 = 0$. Розв'язуємо його: $k^2 = -25$, $k = \pm\sqrt{-25} = \pm 5i$. Тоді $k_1 = -5i$, а $k_2 = 5i$. Маємо третій випадок. При цьому $\alpha = 0$, $\beta = 5$. Тому за формулою (34) загальний розв'язок заданого диференціального рівняння такий: $y = C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x$. $\lrcorner$

98. $y'' - 2y' + 1 = 0$, якщо $y(0) = 2$, $y'(0) = 7$.

$\ulcorner$ Характеристичне рівняння для заданого диференціального рівняння має вигляд $k^2 - 2k + 1 = 0 \Leftrightarrow (k-1)^2 = 0$. Його корені $k_1 = k_2 = 1$ дійсні та рівні. Тоді за формулою (33) записуємо загальний розв'язок заданого диференціального рівняння: $y = e^x (C_1 + C_2 x)$.

Знайдемо частинний розв'язок. З умови задачі Коші $y(0) = 2$, $y'(0) = 7$. Знайдемо похідну:

$$y' = \left(e^x (C_1 + C_2 x)\right)' = \left(e^x\right)' (C_1 + C_2 x) + e^x \cdot (C_1 + C_2 x)' =$$
$$= e^x (C_1 + C_2 x) + e^x \cdot C_2 = e^x (C_1 + C_2 x + C_2),$$
$$\begin{cases} y(0) = C_1 = 2 \\ y'(0) = C_1 + C_2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = 5. \end{cases}$$

Отже, маємо частинний розв'язок $y = e^x (2 + 5x)$. $\lrcorner$

99. $y'' - y' - 6y = 0$, якщо $y(0) = 3$, $y'(0) = 4$.

$\ulcorner$ Характеристичне рівняння $k^2 - k - 6 = 0$ має дійсні корені $k_1 = -2$, $k_2 = 3$. Тоді за формулою (32) записуємо загальний розв'язок заданого диференціального рівняння: $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}$.

Знайдемо частинний розв'язок. З умови задачі Коші $y(0) = 3$, $y'(0) = 4$. Знайдемо похідну загального розв'язку: $y' = -2C_1 e^{-2x} + 3C_2 e^{3x}$. Підставляємо умови Коші і отримаємо систему

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 = 3 \\ y'(0) = -2C_1 + 3C_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 3 - C_2 \\ -2(3 - C_2) + 3C_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 3 - C_2 \\ 5C_2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 2 \end{cases}.$$

Отже, маємо частинний розв'язок $y = e^{-2x} + 2e^{3x}$. $\lrcorner$

100. $y''-16y=0$.

Γ Характеристичне рівняння $k^2-16=0 \Leftrightarrow (k-4)(k+4)=0$ має дійсні корені $k_1=-4$ і $k_2=4$. Тоді за формулою (32) записуємо загальний розв'язок диференціального рівняння: $y=C_1e^{-4x}+C_2e^{4x}$. $\lrcorner$

101. $y''-4y'+5y=0$.

Γ Характеристичне рівняння: $k^2-4k+5=0$. Розв'язуємо його: $D=(-4)^2-4\cdot1\cdot5=16-20=-4$. Тоді: $k_1=\dfrac{4-\sqrt{-4}}{2}=\dfrac{4-2i}{2}=2-i$, $k_2=\dfrac{4+\sqrt{-4}}{2}=\dfrac{4+2i}{2}=2+i$. Корені характеристичного рівняння комплексно-спряжені. При цьому $\alpha=2$ і $\beta=1$. Тоді за формулою (35) записуємо загальний розв'язок рівняння: $y=e^{2x}\left(C_1\cos x+C_2\sin x\right)$. $\lrcorner$

<u>Вправи для самостійного розв'язання</u>

Розв'язати диференціальні рівняння:

102. $y''-9y'=0$.

103. $y''+3y'+2y=0$.

104. $y''-4y'+29y=0$.

105. $y''+6y'+34y=0$, якщо $y(0)=3$, $y'(0)=1$.

106. $y''-12y'+36y=0$, якщо $y(0)=2$, $y'(0)=7$.

107. $y''+5y'-6y=0$, якщо $y(0)=3$, $y'(0)=-4$.

Відповіді:

102. $y=C_1+C_2e^{9x}$. **103.** $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$.

104. $y=e^{2x}\left(C_1\cos 5x+C_2\sin 5x\right)$. **105.** $y=e^{-3x}\left(3\cos 5x+2\sin 5x\right)$.

106. $y=e^{6x}\left(2-5x\right)$. **107.** $y=e^{-6x}+2e^{x}$.

10. Однорідні системи диференціальних рівнянь

Система диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_{11}x + a_{12}y \\ \frac{dy}{dt} &= a_{21}x + a_{22}y, \end{aligned} \tag{35}$$

де коефіцієнти a_{ij} – сталі, t – незалежна змінна, $x(t)$, $y(t)$ – невідомі функції, називається *однорідною системою двох лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.*

Задача Коші для системи (35) полягає у знаходженні функцій $x(t)$ і $y(t)$, що задовольняють дану систему і задані початкові умови

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0. \tag{36}$$

Розв'язання системи (35) виконують таким чином. Вважаючи, що в першому рівнянні системи $a_{12} \neq 0$, виразимо в ньому y через x:

$$y = \frac{1}{a_{12}} \frac{dx}{dt} - \frac{a_{11}}{a_{12}} x. \tag{37}$$

Продиференціюємо цю рівність по t:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{a_{12}} \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{a_{11}}{a_{12}} \frac{dx}{dt}. \tag{38}$$

Підставляючи вирази (37) і (38) в друге рівняння системи (35), отримаємо

$$\frac{1}{a_{12}} \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{a_{11}}{a_{12}} \frac{dx}{dt} = a_{21}x + a_{22}\left(\frac{1}{a_{12}} \frac{dx}{dt} - \frac{a_{11}}{a_{12}} x\right),$$

$$\frac{1}{a_{12}} \frac{d^2x}{dt^2} - \left(\frac{a_{11}}{a_{12}} + \frac{a_{22}}{a_{12}}\right)\frac{dx}{dt} + \left(\frac{a_{11}}{a_{12}} a_{22} - a_{21}\right)x = 0,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (a_{11} + a_{22})\frac{dx}{dt} + (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x = 0. \tag{39}$$

Рівняння (39) є лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами виду (30) з незалежною змінною t і невідомою функцією $x(t)$. Розв'язуємо його відносно $x(t)$. Після цього за формулою (37) знаходимо функцію $y(t)$ і записуємо остаточну відповідь.

Зауваження. Якщо в першому рівнянні системи (35) коефіцієнт $a_{12} = 0$, то це рівняння матиме вигляд

$$\frac{dx}{dt} = a_{11}x .$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними. Розв'язавши його, підставимо знайдену функцію $x(t)$ в друге рівняння системи (35) і отримаємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку відносно $y(t)$. Розв'язуємо його і записуємо остаточну відповідь.

Розв'язати системи диференціальних рівнянь:

108. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 5y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y. \end{cases}$

Γ Маємо систему виду (35). З першого рівняння виражаємо y:

$$\frac{dx}{dt} = -x + 5y , \quad 5y = \frac{dx}{dt} + x , \quad y = \frac{1}{5}\frac{dx}{dt} + \frac{1}{5}x .$$

Диференціюємо останню рівність по t і отримуємо

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{5}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{5}\frac{dx}{dt} .$$

Підставимо знайдені y та $\frac{dy}{dt}$ в друге рівняння системи:

$$\frac{1}{5}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{5}\frac{dx}{dt} = x + 3\left(\frac{1}{5}\frac{dx}{dt} + \frac{1}{5}x\right), \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = 5x + 3\frac{dx}{dt} + 3x ,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} - 8x = 0 .$$

Це лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами виду (30). Коренями його характеристичного рівняння $k^2 - 2k - 8 = 0$ є $k_1 = -2$ і $k_2 = 4$. Тоді загальний розв'язок цього рівняння буде мати вигляд: $x(t) = C_1e^{-2t} + C_2e^{4t}$, де C_1 і C_2 –

довільні сталі. Так як $\frac{dx}{dt} = -2C_1e^{-2t} + 4C_2e^{4t}$, то підставляючи знайдені $x(t)$ та $\frac{dx}{dt}$ у вираз для y ($y = \frac{1}{5}\frac{dx}{dt} + \frac{1}{5}x$), отримаємо

$$y(t) = \frac{1}{5}\left(-2C_1e^{-2t} + 4C_2e^{4t}\right) + \frac{1}{5}\left(C_1e^{-2t} + C_2e^{4t}\right),\ y(t) = -\frac{1}{5}C_1e^{-2t} + C_2e^{4t}.$$

Запишемо тепер загальний розв'язок системи:

$$\begin{cases} x(t) = C_1e^{-2t} + C_2e^{4t} \\ y(t) = -\dfrac{1}{5}C_1e^{-2t} + C_2e^{4t}. \end{cases} \quad \lrcorner$$

109. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 8y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 4y. \end{cases}$

$\ulcorner$ Маємо систему виду (35). З першого рівняння виражаємо y: $\frac{dx}{dt} = 2x + 8y$, $8y = \frac{dx}{dt} - 2x$, $y = \frac{1}{8}\frac{dx}{dt} - \frac{1}{4}x$. Диференціюємо останню рівність по t і отримуємо: $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{8}\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{1}{4}\frac{dx}{dt}$.

Підставляємо останні дві рівності в друге рівняння системи:

$$\frac{1}{8}\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{1}{4}\frac{dx}{dt} = x + 4\left(\frac{1}{8}\frac{dx}{dt} - \frac{1}{4}x\right),\ \frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} = 8x + 4\frac{dx}{dt} - 8x,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 6\frac{dx}{dt} = 0.$$

Це лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами виду (31). Коренями його характеристичного рівняння $k^2 - 6k = 0$ є $k_1 = 0$ і $k_2 = 6$. Тоді загальний розв'язок цього рівняння буде мати вигляд:

$x(t) = C_1 + C_2e^{6t}$, де C_1 і C_2 довільні сталі. Так як $\frac{dx}{dt} = 6C_2e^{6t}$, то підставивши ці вирази у вираз для y ($y = \frac{1}{8}\frac{dx}{dt} - \frac{1}{4}x$), отримаємо

$$y(t)=\frac{1}{8}\cdot 6C_2e^{6t}-\frac{1}{4}\left(C_1+C_2e^{6t}\right)=-\frac{1}{4}C_1+\frac{1}{2}C_2e^{6t}.$$

Запишемо загальний розв'язок системи:

$$\begin{cases} x(t)=C_1+C_2e^{6t} \\ y(t)=-\frac{1}{4}C_1+\frac{1}{2}C_2e^{6t}. \end{cases} \quad \lrcorner$$

110. $\begin{cases} \frac{dx}{dt}=3x+y \\ \frac{dy}{dt}=8x+y, \end{cases}$

якщо $x(0)=4$, $y(0)=2$.

$\ulcorner$ Маємо систему виду (35). З першого рівняння виражаємо y: $\frac{dx}{dt}=3x+y$, $y=\frac{dx}{dt}-3x$. Диференціюємо останню рівність по t і отримуємо $\frac{dy}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}-3\frac{dx}{dt}$.

Підставляємо останні дві рівності в друге рівняння системи:

$$\frac{d^2x}{dt^2}-3\frac{dx}{dt}=8x+\frac{dx}{dt}-3x,\quad \frac{d^2x}{dt^2}-4\frac{dx}{dt}-5x=0.$$

Це рівняння виду (30). Коренями його характеристичного рівняння $k^2-4k-5=0$ є $k_1=-1$ і $k_2=5$. Тоді загальний розв'язок цього рівняння буде мати вигляд: $x(t)=C_1e^{-t}+C_2e^{5t}$. Так як $\frac{dx}{dt}=-C_1e^{-t}+5C_2e^{5t}$, то підставляючи ці вирази у вираз для y $\left(y=\frac{dx}{dt}-3x\right)$, отримаємо

$$y(t)=-C_1e^{-t}+5C_2e^{5t}-3\left(C_1e^{-t}+C_2e^{5t}\right)=-4C_1e^{-t}+2C_2e^{5t}.$$

Запишемо загальний розв'язок системи:

$$\begin{cases} x(t)=C_1e^{-t}+C_2e^{5t} \\ y(t)=-4C_1e^{-t}+2C_2e^{5t}. \end{cases}$$

Знайдемо розв'язок задачі Коші з початковими умовами виду (36) $x(0)=4$, $y(0)=2$:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 4 \\ -4C_1 + 2C_2 = 2, \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 3. \end{cases}$$

Записуємо частинний розв'язок системи, підставляючи в загальний розв'язок знайдені значення $C_1 = 1$ і $C_2 = 3$:

$$\begin{cases} x(t) = e^{-t} + 3e^{5t} \\ y(t) = -4e^{-t} + 6e^{5t}. \end{cases} \lrcorner$$

<u>Вправи для самостійного розв'язання</u>

Розв'язати системи диференціальних рівнянь:

111. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 3y. \end{cases}$

112. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 3y, \end{cases}$ якщо $x(0) = 8$, $y(0) = 1$.

113. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -5x - 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - 3y, \end{cases}$ якщо $x(0) = 7$, $y(0) = 5$.

Відповіді:

111. $\begin{cases} x(t) = C_1e^{t} + C_2e^{7t} \\ y(t) = -C_1e^{t} + \dfrac{1}{2}C_2e^{7t}. \end{cases}$

112. $\begin{cases} x(t) = 5e^{t} + 3e^{4t} \\ y(t) = -5e^{t} + 6e^{4t}. \end{cases}$

113. $\begin{cases} x(t) = 8e^{-7t} - e^{-t} \\ y(t) = 4e^{-7t} + e^{-t}. \end{cases}$

Розділ 10. РЯДИ

1. Числові ряди. Основні поняття

Нехай задано числову послідовність $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$. Вираз

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (1)$$

називається *числовим рядом*. Числа $a_1, a_2, \ldots$ називають *членами* ряду, a_n – *загальним членом* ряду.

Суми $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, …, $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, … називають *частковими сумами* ряду (1).

Якщо існує скінченна границя послідовності $\{S_n\}$ часткових сум

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S, \qquad (2)$$

то ряд (1) називають *збіжним*, а число S – *сумою* ряду.

Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не існує або дорівнює ∞, то ряд (1) називають *розбіжним*.

Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, тобто загальний член ряду не прямує до нуля, то ряд (1) розбіжний.

1. Дослідити на збіжність ряд $1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$.

⌜ Члени цього ряду утворюють геометричну прогресію. За відомою з елементарної математики формулою маємо

$$S_n = 1 + q + \ldots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}, \text{ якщо } q \neq 1.$$

Розглянемо чотири випадки.

1) $|q| > 1$. Тоді $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ і тому ряд розбіжний.

2) $|q| < 1$. Тоді $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q} \cdot \left(1 - \lim\limits_{n\to\infty} q^n\right) = \frac{1}{1-q} \cdot (1-0) = \frac{1}{1-q}$.

Отже, в цьому випадку ряд збіжний і його сума $S = \frac{1}{1-q}$.

3) $q=-1$. Тоді $S_n = \begin{cases} 0, & \text{якщо } n - \text{парне} \\ 1, & \text{якщо } n - \text{непарне}. \end{cases}$ В цьому випадку $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не існує і, отже, ряд розбіжний.

4) $q=1$. Тоді маємо ряд $1+1+\ldots$, який, очевидно, розбіжний ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1 \neq 0$).

<u>Висновок</u>: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ збіжний при $|q|<1$. ⌋

2. Знайти суму ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots$.

⌈ Представимо загальний член ряду $\frac{1}{n(n+1)}$ у вигляді

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Запишемо n-ну часткову суму ряду

$$S_n = \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1},$$

так як усі доданки з другого до передостаннього взаємно знищуються.

Згідно з (2) знаходимо границю: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1$. Отже, сума ряду $S=1$. ⌋

3. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \cdots$.

⌈ Цей ряд розбіжний, так як $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0$. ⌋

<u>Вправи для самостійного розв’язання</u>

4. Знайти суму ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$.

5. Знайти суму ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$.

6. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3n^2+2}$.

Відповіді:

4. $S=\frac{1}{2}$. **5.** $S=\frac{3}{4}$. **6.** Розбіжний.

2. Ознаки збіжності рядів з невід’ємними членами

2.1 Інтегральна ознака

Нехай члени ряду $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$ додатні та не зростають: $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \ldots$. Припустимо, що на проміжку $[1,+\infty)$ визначена додатна незростаюча функція $f(x)$ така, що $f(1)=a_1$, $f(2)=a_2,\ldots$, $f(n)=a_n,\ldots$. Тоді невласний інтеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ та ряд (1) збігаються або розбігаються одночасно.

Дослідити на збіжність ряди.

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$ – *гармонічний ряд*.

⌈ Розглянемо функцію $f(x)=\frac{1}{x}$. Вона задовольняє всі умови інтегральної ознаки при $x\ge 1$. Очевидно, що $f(1)=1$, $f(2)=\frac{1}{2},\ldots,f(n)=\frac{1}{n},\ldots$.

Обчислимо невласний інтеграл (див. розділ 7):

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{a\to\infty}\ln x\Big|_1^a=\lim_{a\to\infty}(\ln a-\ln 1)=\infty .$$

Оскільки невласний інтеграл розбіжний, то за інтегральною ознакою заданий ряд теж розбіжний. ⌋

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ $(\alpha>0)$ – *узагальнений гармонічний ряд*.

Γ Застосуємо інтегральну ознаку. Відповідна функція $f(x)=\dfrac{1}{x^{\alpha}}$ задовольняє всі умови інтегральної ознаки. Розглянемо невласний інтеграл при $\alpha \neq 1$ (випадок $\alpha = 1$ був розглянутий у прикладі 7):

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\int_{1}^{+\infty}x^{-\alpha}dx=\lim_{a\to+\infty}\left.\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_{1}^{a}=\lim_{a\to+\infty}\left[\frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{1}{1-\alpha}\right].$$

1) Якщо $\alpha>1$, то $1-\alpha<0$ і $a^{1-\alpha}\to 0$ при $a\to+\infty$. Тоді маємо $\displaystyle\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\frac{1}{\alpha-1}$ – інтеграл збіжний, тому і ряд збіжний.

2) Якщо $\alpha<1$, то $1-\alpha>0$ і $a^{1-\alpha}\to\infty$ при $a\to+\infty$. В цьому випадку невласний інтеграл $\displaystyle\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$ розбіжний, тому і ряд розбіжний.

Таким чином, ряд розбіжний при $\alpha\le 1$ і збіжний при $\alpha>1$. $\lrcorner$

<u>Висновок</u>. Узагальнений гармонічний ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ $(\alpha>0)$ збіжний при $\alpha>1$ і розбіжний при $\alpha\le 1$. Наприклад, ряди $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2}}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3}}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^{4}}}$ збіжні, а ряди $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^{2}}}$ розбіжні.

9. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$.

Γ Відповідна функція $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$ при $x\ge 2$ задовольняє усі умови інтегральної ознаки. Розглянемо невласний інтеграл:

$$\int_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{a\to+\infty}\int_{2}^{a}\frac{dx}{x\ln x}=\left|\begin{array}{l} t=\ln x \\ dt=\dfrac{dx}{x} \\ t_1=\ln 2 \\ t_2=\ln a\end{array}\right|=\lim_{a\to+\infty}\int_{\ln 2}^{\ln a}\frac{dt}{t}=\lim_{a\to+\infty}\ln|t|\Big|_{\ln 2}^{\ln a}=$$

$$=\lim_{a\to+\infty}\left(\ln|\ln a|-\ln|\ln 2|\right)=\infty .$$

Так як інтеграл розбіжний, то даний ряд теж розбіжний. $\lrcorner$

Вправи для самостійного розв'язання

Дослідити на збіжність ряди:

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}$.

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$.

12. $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-4n}$.

Відповіді:

10. Розбіжний.

11. Збіжний.

12. Збіжний.

2.2. Перша ознака порівняння

Розглянемо два ряди з невід'ємними членами

$$a_1 + a_2 + \ldots a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n , \tag{3}$$

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} b_n . \tag{4}$$

Якщо для усіх n, починаючи з деякого номера n_0, виконується нерівність

$$a_n \le b_n ,$$

то зі збіжності ряду (4) випливає збіжність ряду (3), а з розбіжності ряду (3) випливає розбіжність ряду (4).

Дослідити на збіжність ряди.

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^3}$.

⌐ Для порівняння візьмемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$, який є збіжним (частинний випадок ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ при $\alpha = 3$, див. приклад 8). Очевидно, що $n+1 > n$, звідки $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ і $\frac{1}{(n+1)^3} < \frac{1}{n^3}$. Тому за ознакою порівняння даний ряд збіжний. ⌡

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3}{3n-1}$.

⌐ Порівняємо цей ряд з розбіжним рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ (див. приклад 7). Так як для загальних членів рядів маємо нерівність $\dfrac{3}{3n-1} > \dfrac{3}{3n} = \dfrac{1}{n}$, $n \geq 1$, то за ознакою порівняння даний ряд розбіжний. ⌋

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln n}{n^2}$.

⌐ Скористаємося, наприклад, нерівністю $\ln n < \sqrt{n}$, $n \geq 1$. Цю нерівність просто отримати з того, що значення функції $p(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ менші за одиницю на проміжку $[1, +\infty)$ (функцію $p(x)$ дослідити на екстремуми). Тоді

$$\frac{\ln n}{n^2} < \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}, \quad n \geq 1.$$

Так як ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{3/2}}$ збіжний (приклад 8, $\alpha = \dfrac{3}{2}$), то за ознакою порівняння заданий ряд збіжний. ⌋

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+3)(2n+1)}$.

⌐ Порівняємо даний ряд зі збіжним рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ (див. приклад 8, $\alpha = 2$). Очевидно для кожного $n \geq 1$ виконуються нерівності $n+3 > n$ та $2n+1 > n$, почленне множення яких приводить до нерівності $(n+3)(2n+1) > n^2$. Звідси

$$\frac{1}{(n+3)(2n+1)} < \frac{1}{n^2}.$$

Отже, за ознакою порівняння заданий ряд збіжний. ⌋

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2+\sin n}{n}$.

⌐ Так як $\sin n \geq -1$, то $2 + \sin n \geq 1$. Тому

$$\frac{2+\sin n}{n} \ge \frac{1}{n}, \quad n \ge 1.$$

Оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ розбіжний, то за ознакою порівняння заданий ряд розбіжний. $\lrcorner$

<u>Вправи для самостійного розв'язання.</u>

Дослідити на збіжність ряди:

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^4+2}}$.

19. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$.

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos n}{2n^2}$.

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{4n-3}}$.

Відповіді:

18. Збіжний. **19.** Розбіжний. **20.** Збіжний.
21. Розбіжний.

2.3. Друга ознака порівняння

Розглянемо ряди (3), (4) і припустимо, що $b_n > 0$, $n \ge n_0$. Якщо виконується умова $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k$, де $0 < k < \infty$, то ряди (3) і (4) одночасно збіжні або розбіжні.

Дослідити на збіжність ряди.

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{(n+2)^3} = \frac{2^2}{3^3} + \frac{3^2}{4^3} + \frac{4^2}{5^3} + \ldots$.

$\ulcorner$ Порівняємо цей ряд з розбіжним гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (див. приклад 7):

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{(n+1)^2}{(n+2)^3} : \frac{1}{n} \right] = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)^2}{(n+2)^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^3} = 1 > 0.$$

Отже, даний ряд розбіжний за другою ознакою порівняння. $\lrcorner$

23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n\cdot 3^n}$.

⌜ Цей ряд можна порівняти зі збіжним рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ ($q=\frac{1}{3}<1$, див. приклад 1):

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2n+1}{n\cdot 3^n}:\frac{1}{3^n}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)}{n}=2>0.$$

Отже, даний ряд збіжний. ⌟

24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{\pi}{4n}$.

⌜ Порівняємо цей ряд з розбіжним гармонічним рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ (див. приклад 7). Використовуючи співвідношення $\arcsin x\sim x$ при $x\to 0$ (див. розділ 4), дістанемо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\arcsin\frac{\pi}{4n}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{4n}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{4n}\cdot\frac{n}{1}=\frac{\pi}{4}>0.$$

Отже, даний ряд розбіжний за другою ознакою порівняння. ⌟

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg} n}{n^3}$.

⌜ Для порівняння візьмемо збіжний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{arctg} n}{n^3}:\frac{1}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\operatorname{arctg} n=\frac{\pi}{2}>0.$$

Отже, заданий ряд збіжний за другою ознакою порівняння. ⌟

<u>Вправи для самостійного розв'язання</u>

Дослідити на збіжність ряди:

26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(n+2)(n+3)}$.

27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{\pi}{3n}$.

29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n^2}{2+n^3}\right)^3$.

Відповіді:

26. Розбіжний. **27.** Збіжний.

28. Розбіжний. **29.** Збіжний.

2.4. Ознака Даламбера

Якщо для ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$, існує границя $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, то при $q < 1$ даний ряд збіжний, а при $q > 1$ – розбіжний. Якщо $q = 1$, то потрібно застосувати іншу ознаку.

Дослідити ряди на збіжність за ознакою Даламбера.

30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{2^n}$.

⌈ $a_n = \frac{3n+1}{2^n}$; $a_{n+1} = \frac{3(n+1)+1}{2^{n+1}} = \frac{3n+4}{2^{n+1}}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3n+4}{2^{n+1}}}{\frac{3n+1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(3n+4)\cdot 2^n}{2^n\cdot 2\cdot(3n+1)} =$$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+4}{2(3n+1)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} < 1$. Отже, за ознакою Даламбера даний ряд збіжний. ⌋

31. $\frac{1}{5} + \frac{1\cdot 3}{5^2\cdot 2!} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{5^3\cdot 3!} + \ldots + \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{5^n\cdot n!} + \ldots$.

⌈ $a_n = \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{5^n\cdot n!}$; $a_{n+1} = \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)(2n+1)}{5^{n+1}\cdot(n+1)!}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)(2n+1)}{5^{n+1}\cdot(n+1)!} : \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{5^n\cdot n!}\right] =$$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)\cdot 5^n\cdot 5!}{5^n\cdot 5\cdot n!(n+1)\cdot 1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{5(n+1)} = \frac{2}{5} < 1$. Тому за ознакою Даламбера ряд збіжний. ⌋

32. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-1)!}{(2n-1)!}$.

⌐ $a_n = \dfrac{(3n-1)!}{(2n-1)!}$; $a_{n+1} = \dfrac{\left[3(n+1)-1\right]!}{\left[2(n+1)-1\right]!} = \dfrac{(3n+2)!}{(2n+1)!}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(3n+2)!}{(2n+1)!}\cdot\frac{(2n-1)!}{(3n-1)!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(3n-1)!\,3n\cdot(3n+1)\cdot(3n+2)\cdot(2n-1)!}{(2n-1)!\,2n\cdot(2n+1)\cdot(3n-1)!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{3(3n+1)(3n+2)}{2(2n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{3\left(3+\frac{1}{n}\right)\left(3+\frac{2}{n}\right)}{2\left(\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} = \infty > 1.$$ Тому за ознакою Даламбера даний ряд розбіжний. ⌋

33. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{6^n}{n!}$.

⌐ $a_n = \dfrac{6^n}{n!}$; $a_{n+1} = \dfrac{6^{n+1}}{(n+1)!}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{6^n\cdot 6}{n!\,(n+1)}\cdot\frac{n!}{6^n}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{6}{n+1} = 0 < 1.$$ За ознакою Даламбера ряд збіжний. ⌋

<u>Вправи для самостійного розв'язання</u>

Дослідити на збіжність ряди:

34. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(3n+1)!}$.

35. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\pi}{3^n}$.

36. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{3^n}$.

37. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2\cdot 5\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{2\cdot 6\cdot\ldots\cdot(4n-1)}$.

38. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n^3}$.

39. $\sum n^2\cdot\sin\dfrac{\pi}{4^n}$.

Відповіді:

34. Збіжний. **35.** Збіжний. **36.** Збіжний.
37. Збіжний. **38.** Розбіжний. **39.** Збіжний.

2.5. Ознака Коші

Якщо для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ з невід'ємними членами існує границя $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = q$, то при $q<1$ ряд збіжний, а при $q>1$ – розбіжний. Якщо $q=1$, то потрібно застосувати іншу ознаку.

Дослідити на збіжність ряди.

40. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{3n+1}\right)^n$.

⌐ Застосуємо ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3+\frac{1}{n}} = \frac{1}{3} < 1.$$

Тому ряд збіжний. ⌟

41. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\dfrac{\pi}{n}\right)^n$.

⌐ Знаходимо границю: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\arcsin\dfrac{\pi}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\arcsin\dfrac{\pi}{n} =$

$= \arcsin 0 = 0 < 1$. За ознакою Коші ряд збіжний. ⌟

42. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(\frac{n+2}{n}\right)^{n^2}}{2^n}$.

⌐ Обчислимо границю $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{\left(\frac{n+2}{n}\right)^{n^2}}{2^n}} = \lim_{n\to\infty}\dfrac{\left(\frac{n+2}{n}\right)^{n}}{2} =$

$= \lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\cdot\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n = \dfrac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}\cdot 2} = \dfrac{1}{2}\cdot e^2 \approx 3,69 > 1$. За ознакою Коші цей ряд розбіжний. Ми скористались другою визначною границею (див. розділ 4). ⌟

Вправи для самостійного розв'язання

Дослідити ряди на збіжність за допомогою ознаки Коші:

43. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^n}$. **44.** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{\pi}{n} \right)^n$.

45. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left[\ln(n+2) \right]^n}$. **46.** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{3+n^2} \right)^n$.

47. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n+3}{n} \right)^{n^2}}{3^n}$.

Відповіді:

43. Збіжний. **44.** Збіжний. **45.** Збіжний.
46. Збіжний. **47.** Розбіжний.

3. Знакозмінні ряди

3.1. Знакопереміжні ряди

Ряд $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$, де $a_n \ge 0$, називається *знакопереміжним*. Для дослідження таких рядів на збіжність застосовують *ознаку Лейбніца*: знакопереміжний ряд збіжний, якщо

1) $a_n \ge a_{n+1}$, $n \ge 1$;
2) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.

При цьому його сума S задовольняє нерівність $0 \le S \le a_1$.

Дослідити ряди на збіжність за ознакою Лейбніца.

48. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$.

⌈ 1) Так як $n+1 > n$, то $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$, тобто $a_n \ge a_{n+1}$.

2) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Отже, за ознакою Лейбніца ряд збіжний. ⌋

49. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3n+1}=\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\frac{1}{10}-\frac{1}{13}+\ldots$.

⌈ 1) З нерівності $3(n+1)>3n$ одержимо $3(n+1)+1>3n+1$, тому

$$\frac{1}{3n+1}>\frac{1}{3(n+1)+1}\Leftrightarrow a_n\geq a_{n+1}.$$

2) $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3n+1}=0$.

Отже, ряд збіжний і його сума $S\leq\frac{1}{4}$. ⌋

50. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$.

⌈ 1) Так як функція $\ln x$ зростає, то $\ln(n+2)>\ln(n+1)$, звідки

$\frac{1}{\ln(n+1)}>\frac{1}{\ln(n+2)}\Leftrightarrow a_n\geq a_{n+1}$.

2) $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}=0$.

Отже, ряд збіжний. ⌋

3.2. Ряди з довільним розподілом знаків

Нехай ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ містить нескінченну кількість як додатних, так і від'ємних членів.

Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$, складений з модулів членів даного ряду, збіжний, то даний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ також збіжний. Це достатня ознака збіжності знакозмінного ряду.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ називається *абсолютно збіжним*, якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ збіжний.

У випадку, коли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ розбіжний, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається *умовно збіжним*.

Дослідити ряди на абсолютну та умовну збіжність.

51. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

$\ulcorner$ Для дослідження ряду на абсолютну збіжність побудуємо ряд з модулів членів: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Утворений ряд розбіжний (див. приклад 7).

За теоремою Лейбніца заданий ряд збіжний (див. приклад 48).

Отже, ряд умовно збіжний. $\lrcorner$

52. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

$\ulcorner$ Цей ряд абсолютно збіжний, оскільки ряд з модулів $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ є частинним випадком узагальненого гармонічного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ при $\alpha = 2 > 1$ (див. приклад 8). $\lrcorner$

53. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/2)}{n^3}$.

$\ulcorner$ Даний ряд містить нескінченну кількість як додатних, так і від'ємних членів. Дослідимо ряд з модулів його членів

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin(n\pi/2)|}{n^3}. \qquad (*)$$

Застосуємо першу ознаку порівняння. Так як $|\sin(n\pi/2)| \le 1$, то $\frac{|\sin(n\pi/2)|}{n^3} \le \frac{1}{n^3}$. Звідси маємо, що ряд (*) збіжний, оскільки збіжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.

Отже, заданий ряд є абсолютно збіжним. $\lrcorner$

Вправи для самостійного розв'язання

Дослідити ряди на абсолютну та умовну збіжність:

54. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)2^n}$.

55. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$.

56. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$.

57. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{\sqrt{n^3}}$.

58. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n^2)}{n^2}$.

59. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^{4/3}}$.

60. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}(n+2)}{3n+2}$.

Відповіді:

54. Абсолютно збіжний.

55. Умовно збіжний.

56. Умовно збіжний.

57. Абсолютно збіжний.

58. Абсолютно збіжний.

59. Абсолютно збіжний.

60. Розбіжний.

4. Функціональні ряди

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots, \qquad (5)$$

члени якого є функціями від x, називається *функціональним рядом*.

Зауважимо, що при фіксованому значенні x ряд (5) – числовий. Тому при одних значеннях x він збіжний, а при інших – розбіжний.

Сукупність тих значень x, при яких функціональний ряд збіжний, називають *областю збіжності* ряду.

Якщо існує збіжний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ (*мажорантний* ряд) такий, що $|u_n(x)|\le a_n$, $x\in D$, то ряд (5) є абсолютно збіжним в D.

Знайти області збіжності функціональних рядів.

61. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{10^n}$.

Γ Застосуємо ознаку Коші до ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{x^n}{10^n}\right|$, складеного з модулів членів даного ряду:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{x^n}{10^n}\right|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|x|^n}{10^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{10}=\frac{|x|}{10}.$$

Ряд збіжний, якщо $\frac{|x|}{10}<1$, тобто $|x|<10$ або $x\in(-10,\,10)$.

Перевіримо заданий ряд на збіжність при $x=\pm 10$:

1) при $x=10$ маємо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{10^n}=\sum_{n=1}^{\infty}1$, який розбіжний ($\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0$);

2) при $x=-10$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$, який теж розбіжний.

Отже, областю збіжності ряду є інтервал $(-10,\,10)$. ⌋

62. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt{n^3}}$.

⌈ Розглянемо збіжний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ (приклад 8, $\alpha=\frac{3}{2}>1$). З нерівності $\frac{|\sin nx|}{\sqrt{n^3}}\leq\frac{1}{n^{3/2}}$, $x\in(-\infty,\,+\infty)$ випливає, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ є мажорантним для заданого.

Отже, областю збіжності ряду є інтервал $(-\infty,\,+\infty)$. ⌋

63. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln^n x=\ln x+\ln^2 x+\ln^3 x+\ldots+\ln^n x+\ldots$.

⌈ Застосуємо ознаку Коші до ряду, складеного з модулів членів даного ряду – $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\ln^n x\right|$:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\ln^n x\right|}=\lim_{n\to\infty}|\ln x|=|\ln x|.$$

Ряд буде збіжним, якщо виконується умова

$$|\ln x|<1,\quad -1<\ln x<1,\quad \ln e^{-1}<\ln x<\ln e,$$

$$e^{-1}<x<e,\ \text{або}\ \ \frac{1}{e}<x<e.$$

Дослідимо ряд на збіжність в точках $x = e$ та $x = \frac{1}{e}$.

1) при $x = e$ маємо числовий ряд $\ln e + \ln^2 e + \ln^3 e + \ldots = 1+1+1+\ldots$, який є розбіжним, оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$;

2) при $x = \frac{1}{e} = e^{-1}$ маємо числовий ряд $\ln e^{-1} + \left(\ln e^{-1}\right)^2 + \left(\ln e^{-1}\right)^3 + \ldots = -1+1-1+1-\ldots$, який теж розбіжний тому, що $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$.

Таким чином, областю збіжності ряду є інтервал $\left(\frac{1}{e},\, e\right)$. ⌋

64. $\frac{x}{1+x^2} + \frac{x^2}{1+x^4} + \ldots + \frac{x^n}{1+x^{2n}} + \ldots$.

⌈ Застосуємо ознаку Даламбера до ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{x^n}{1+x^{2n}}\right|$:

$$v_n = \left|\frac{x^n}{1+x^{2n}}\right|, \quad v_{n+1} = \left|\frac{x^{n+1}}{1+x^{2(n+1)}}\right|;$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^{n+1}\left(1+x^{2n}\right)}{\left(1+x^{2n+2}\right)x^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x\left(1+x^{2n}\right)}{1+x^{2n+2}}\right| = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{1+x^{2n}}{1+x^{2n+2}} = k.$$

Можливі випадки:

1) Якщо $|x| < 1$, то $x^{2n} \to 0$ і $x^{2n+2} \to 0$ при $n \to \infty$, звідки $k = \left|\frac{x(1+0)}{1+0}\right| = |x| < 1$ згідно з припущенням і, отже, ряд збіжний при $x \in (-1,\, 1)$;

2) якщо $|x| > 1$, то

$$k = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+x^{2n}\right)}{1+x^{2n+2}} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{x^{2n}} + 1\right)}{\frac{1}{x^{2n}} + x^2} = |x| \frac{0+1}{0+x^2} = \frac{1}{|x|} < 1 \qquad \left(\frac{1}{x^{2n}} \to 0\right.$$

при $n \to \infty$) згідно з припущенням і, отже, ряд збіжний при $x \in (-\infty,\, -1) \cup (1,\, +\infty)$;

3) при $x=1$ маємо числовий ряд $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots$, який є розбіжним ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$);

4) при $x=-1$ маємо ряд $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\ldots$, який є розбіжним ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$).

Таким чином, область збіжності даного ряду має вигляд

$$(-\infty, -1)\cup(-1, 1)\cup(1, +\infty). \quad \lrcorner$$

65. $\frac{x}{e^x}+\frac{2x}{e^{2x}}+\ldots+\frac{nx}{e^{nx}}+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{e^{nx}}$.

$\ulcorner$ Застосуємо ознаку Даламбера до ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{nx}{e^{nx}}\right|$:

$v_n=\left|\frac{nx}{e^{nx}}\right|$; $v_{n+1}=\left|\frac{(n+1)x}{e^{(n+1)x}}\right|$;

$$\lim_{n\to\infty}\frac{v_{n+1}}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)x\cdot e^{nx}}{e^{(n+1)x}\,nx}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)e^{nx}}{e^{nx}\cdot e^x\cdot n}\right|=\frac{1}{e^x}.$$

Ряд збіжний, якщо $\frac{1}{e^x}<1$, $e^{-x}<e^0$, $-x<0$, звідки $x>0$.

При $x=0$ маємо збіжний ряд $0+0+\cdots$.

Отже, областю збіжності ряду є проміжок $[0, +\infty)$. $\lrcorner$

Вправи для самостійного розв’язання.

Знайти область збіжності рядів:

66. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n^2}$.

67. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+x^n}$.

68. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$.

69. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n(x+1)^n}$.

Відповіді:

66. $x\in(-1, 1)$.

67. $x\in(-\infty, -1)\cup(1, +\infty)$.

68. $x\in[-1, 1]$.

69. $x\in(-\infty, -3]\cup(1, +\infty)$.

5. Степеневі ряди

5.1. Загальні поняття

Степеневий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

є частинним випадком функціонального ряду (5). Він, очевидно, збіжний при $x = 0$.

Число $R > 0$ називається *радіусом збіжності* степеневого ряду, якщо при $|x| < R$ ряд збіжний, а при $|x| > R$ ряд розбіжний. *Інтервал збіжності* $(-R,\ R)$ може вироджуватись у точку нуль.

Для знаходження радіуса збіжності можна використати, наприклад, ознаку Даламбера, звідки

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Степеневий ряд можна почленно диференціювати в довільній точці інтервалу збіжності та почленно інтегрувати на будь-якому відрізку, який лежить в інтервалі збіжності. При цьому інтервал збіжності ряду не зміниться.

Знайти області збіжності степеневих рядів.

70. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(5x)^n}{n} = \dfrac{5x}{1} + \dfrac{5^2 x^2}{2} + \dfrac{5^3 x^3}{3} + \dots$.

Γ У даному прикладі $a_n = \dfrac{5^n}{n}$, $a_{n+1} = \dfrac{5^{n+1}}{n+1}$.

Радіус збіжності ряду: $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{5^n}{n} : \dfrac{5^{n+1}}{n+1}\right| = \dfrac{1}{5}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n} = \dfrac{1}{5}$. Отже, інтервал збіжності – $x \in \left(-\dfrac{1}{5};\ \dfrac{1}{5}\right)$. Дослідимо ряд на збіжність на кінцях інтервалу:

1) при $x = \dfrac{1}{5}$ маємо числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(5\cdot\dfrac{1}{5}\right)^n}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ – гармонічний ряд, який розбіжний;

2) при $x=-\frac{1}{5}$ маємо числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-5\cdot\frac{1}{5}\right)^n}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, який збіжний за ознакою Лейбніца (див. приклад 48).

Таким чином, областю збіжності даного ряду є проміжок $\left[-\frac{1}{5},\frac{1}{5}\right)$. ⌟

71. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!x^n$.

⌜ $a_n=n!$, $a_{n+1}=(n+1)!$.

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n!(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0,$$

тобто ряд є збіжним лише у точці $x=0$ і сума такого ряду $S=0$. ⌟

<u>Вправи для самостійного розв'язання</u>

Знайти області збіжності рядів:

72. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^n x^n$.

73. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}$.

74. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)(n+2)}$.

75. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+\sqrt{n}}$.

Відповіді:

72. $x\in\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

73. $x\in(-3, 3)$.

74. $x\in[-1, 1]$.

75. $x\in[-1, 1)$.

5.2. Розвинення функцій у степеневі ряди

Якщо функція $f(x)$ в деякому околі точки x_0 має похідні довільного порядку , то функцію можна розвинути в околі точки x_0 у степеневий ряд

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots, \tag{6}$$

який називають *рядом Тейлора*.

При $x_0=0$ з (6) одержуємо *ряд Маклорена*

$$f(x)=f(0)+f'(0)\cdot x+\frac{f''(0)x^2}{2!}+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}+\ldots. \tag{7}$$

Наведемо розклади деяких елементарних функцій у ряд Маклорена:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots,\quad x\in(-\infty,+\infty); \tag{8}$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\cdot\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots,\quad x\in(-\infty,+\infty); \tag{9}$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots,\quad x\in(-\infty,+\infty);$$

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots+$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots,\quad x\in(-1,1); \tag{10}$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\ldots,\quad x\in(-1,1]. \tag{11}$$

Розкласти функції в ряд Маклорена:

76. $f(x)=e^{3x}$.

⌐ Підставимо $3x$ у формулу (8) замість x і отримаємо ряд $e^{3x}=1+3x+\frac{9x^2}{2!}+\ldots+\frac{3^n x^n}{n!}+\ldots$, інтервал збіжності якого $(-\infty,+\infty)$. ⌟

77. $f(x)=\cos^2 x$.

Γ Запишемо $\cos^2 x$ як $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x$. Тоді за формулою (9) отримаємо

$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-\frac{(2x)^6}{6!}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{4\cdot x^2}{2!}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2^4\cdot x^4}{4!}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2^6\cdot x^6}{6!}+\ldots=$$

$$=1-\frac{2x^2}{2!}+\frac{2^3x^4}{4!}-\frac{2^5x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{2^{2n-1}\cdot x^{2n}}{(2n)!}+\ldots,\quad x\in(-\infty,+\infty).\ \lrcorner$$

78. $f(x)=\sqrt{1-x^2}=\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Γ Використаємо *біноміальний* ряд (10) при $m=\frac{1}{2}$:

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2+\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}x^3+\ldots,$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2^2\cdot 2!}x^2+\frac{1\cdot 3}{2^3\cdot 3!}x^3-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^4\cdot 4!}x^4+\ldots+$$

$$+(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-3)}{2^n\cdot n!}x^n+\ldots.$$

Далі в цей ряд підставимо $\left(-x^2\right)$ замість x:

$$\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}\cdot\left(-x^2\right)-\frac{1\cdot\left(-x^2\right)^2}{2^2\cdot 2!}+\frac{1\cdot 3\cdot\left(-x^2\right)^3}{2^3\cdot 3!}-$$

$$-\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\left(-x^2\right)^4}{2^4\cdot 4!}+\ldots+(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots(2n-3)\left(-x^2\right)^n}{2^n\cdot n!}+\ldots,\text{ звідки}$$

$$\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{2^2\cdot 2!}-\frac{1\cdot 3x^6}{2^3\cdot 3!}-\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot x^8}{2^4\cdot 4!}-\ldots-$$

$$-\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-3)}{2^n\cdot n!}x^{2n}\ldots,\quad x\in(-1,1).\ \lrcorner$$

79. $f(x)=\operatorname{arctg} x$.

$\ulcorner$ Розглянемо ряд (10) при $m=-1$:

$$(1+x)^{-1}=1-x+\frac{-1\cdot(-2)}{2!}x^2+\frac{-1\cdot(-2)\cdot(-3)}{3!}x^3+\ldots, \text{ або}$$

$$(1+x)^{-1}=1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^n x^n+\ldots.$$

Підставляючи x^2 замість x, одержимо

$$(1+x^2)^{-1}=1-x^2+x^4-x^6+\ldots+(-1)^n x^{2n}+\ldots.$$

Виконаємо почленне інтегрування даного ряду на відрізку $[0,x]$, $x\in(-1,1)$:

$$\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=\int_0^x\left(1-t^2+t^4-t^6+\ldots+(-1)^n t^{2n}+\ldots\right)dt,$$

$$\operatorname{arctg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots+(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots,\ x\in(-1,1). \quad (11)$$

З допомогою додаткових міркувань можна показати, що формула (11) залишається вірною і для відрізка $[-1,1]$. $\lrcorner$

80. $f(x)=\arcsin x$.

$\ulcorner$ Візьмемо біноміальний ряд (10) при $m=-\frac{1}{2}$.

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)}{1\cdot 2}x^2+\frac{-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\ldots$$

$$+\frac{-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}x^n+\ldots=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^2-$$

$$-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}x^3+\ldots+(-1)^n\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^n+\ldots.$$

Підставимо в цей ряд $(-x^2)$ замість x:

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}x^6+\ldots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^{2n}+\ldots.$$

Знаючи, що степеневий ряд можна почленно інтегрувати в інтервалі збіжності, візьмемо інтеграл від обох частин отриманої рівності ($x \in (-1, 1)$):

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^x \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!}x^6 + \ldots \right) dx ,$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2 \cdot 3}x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2! \cdot 5}x^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3! \cdot 7}x^7 + \ldots + \\ + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2^n \cdot n!(2n+1)}x^{2n+1} + \ldots . \qquad (12)$$

Якщо добуток $2^n \cdot n!$ переписати у вигляді

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 2n ,$$

то ряд (12) матиме наступний вигляд:

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5}x^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}x^7 + \ldots + \\ + \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n \cdot (2n+1)}x^{2n+1} + \ldots, \ x \in (-1, 1). \qquad (12')$$

За допомогою додаткових міркувань можна показати, що формула (12') залишається вірною і для відрізка $[-1, 1]$. ⌋

6. Ряди Фур'є

1º. *Ряд Фур'є* періодичної функції $f(x)$ з періодом 2π, заданої на відрізку $[-\pi; \pi]$, має вигляд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) , \qquad (13)$$

де

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx , \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx , \\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx . \qquad (14)$$

Якщо функція $f(x)$ задана на відрізку $[-l, l]$, де l – довільне додатне число, то ряд Фур'є для такої функції має вигляд

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}, \qquad (15)$$

де

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx;\quad a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,$$
$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}dx. \qquad (16)$$

Зрозуміло, що ряд (13) є частинним випадком ряду (15), а формули (14) є частинними випадками формул (16) при $l=\pi$.

Збіжність ряду (15) визначається теоремою Діріхле. Ряд (15) збіжний, якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[-l,\, l]$ або має на ньому скінченну кількість точок розриву 1-го роду. При цьому сума $S(x)$ в точках неперервності дорівнює значенню функції в цих точках. Якщо x_0 – точка розриву 1-го роду, то суму ряду (15) можна знайти за формулою

$$S(x_0)=\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to x_0-0}f(x)+\lim_{x\to x_0+0}f(x)\right].$$

На кінцях відрізка $[-l,\, l]$ сума ряду (15):

$$S(-l)=S(l)=\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to -l+0}f(x)+\lim_{x\to l-0}f(x)\right].$$

2º. Якщо функція $f(x)$ парна, то в формулах (13) – (16) коефіцієнти $b_n=0$ і ряд Фур'є має вигляд

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx,\ \text{ при } x\in[-\pi,\, \pi], \qquad (17)$$

де $a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx$, $a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx$;

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\ \text{ при } x\in[-l,\, l], \qquad (18)$$

де $a_0=\frac{2}{l}\int_0^{l}f(x)dx$, $a_n=\frac{2}{l}\int_0^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$.

Ряди (17) та (18) називають рядами *косинусів* функції $f(x)$.

3º. Якщо задана функція $f(x)$ <u>непарна</u>, то в формулах (13) – (16) коефіцієнти $a_n = 0$, $a_0 = 0$. Залишаються лише $b_n = \dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$ при $x \in [-\pi, \pi]$ або $b_n = \dfrac{2}{l}\int\limits_0^{l} f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{l}dx$ при $x \in [-l, l]$.

4º. Якщо функція $f(x)$ задана на відрізку $[a, b]$, то маємо безліч способів розвинути її в ряд Фур'є. Достатньо довизначити функцію на інтервалі $[-b, a)$.

81. Розвинути в ряд Фур'є періодичну функцію $f(x) = \pi + x$, задану на проміжку $(-\pi, \pi]$ з періодом 2π.

Γ Знаходимо коефіцієнти ряду Фур'є за формулами (14):

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(\pi + x)dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\pi\cdot dx + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}x\,dx = \frac{\pi}{\pi}\cdot x\Big|_{-\pi}^{\pi} + 0 = 2\pi,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(\pi + x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\pi\underbrace{\cos nx}_{\text{парна}}dx + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\underbrace{x\cos nx}_{\text{непарна}}dx =$$

$$= \frac{\pi}{\pi}\cdot 2\int\limits_0^{\pi}\cos nx\,dx = \frac{2}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}(\sin n\pi - \sin 0) = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(\pi + x)\sin nx\,dx = \frac{\pi}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\pi\underbrace{\sin nx}_{\text{непарна}}dx + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\underbrace{x\sin nx}_{\text{парна}}dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}x\sin nx\,dx = \begin{vmatrix} u = x, & dv = \sin nx\,dx \\ du = dx, & v = -\dfrac{1}{n}\cos nx \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n}x\cos nx\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int\limits_0^{\pi}\cos nx\,dx\right] = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\pi}{n}\cos n\pi + \frac{1}{n}\cdot 0\cdot\cos 0 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi}\right] = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\pi}{n}\cos n\pi + \frac{1}{n^2}(\sin n\pi - \sin 0)\right] = -\frac{2}{n}\cos n\pi =$$

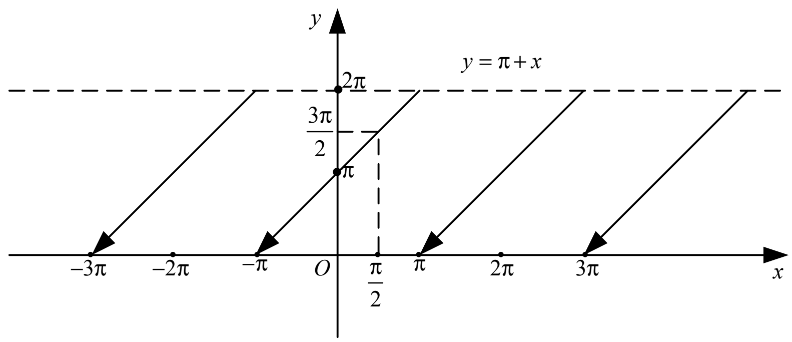
$$= -\frac{2}{n}\cdot(-1)^n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}.$$

Таким чином, за формулою (13) ряд Фур'є для заданої функції має вигляд

$$f(x)=\frac{2\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\sin nx=\pi+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx \text{, або}$$

$$f(x)=\pi+2\left(\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\dots\right).$$

Побудуємо графік даної періодичної функції $y=\pi+x$.



Сума ряду Фур'є в точках неперервності функції дорівнює її значенню. Наприклад, в точці $x_0=0$ сума ряду $S(x_0)=\pi+0=\pi$. В точці $x_0=\frac{\pi}{2}$ сума ряду $S\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{2}$.

В точках розриву, наприклад, в точці $x_0=\pi$ сума ряду $S(\pi)=\frac{1}{2}\left[\lim\limits_{x\to\pi-0}f(x)+\lim\limits_{x\to\pi+0}f(x)\right]=\frac{1}{2}(2\pi+0)=\pi$. ⌟

82. Розвинути в ряд Фур'є періодичну функцію $y=x^2$, задану на відрізку $[-2,\ 2]$ з періодом $T=4$.

⌜ Дана функція парна. Тому треба застосувати формулу (18) при $l=2$.

$$a_0=\frac{2}{2}\int_0^2 x^2dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2=\frac{8}{3},$$

$$a_n=\frac{2}{2}\int_0^2 x^2\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\begin{vmatrix} u=x^2, & dv=\cos\frac{n\pi x}{2}dx \\ du=2xdx, & v=\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{2}{n\pi}x^2\sin\frac{n\pi x}{2}\bigg|_0^2-\frac{4}{n\pi}\int_0^2 x\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\begin{vmatrix} u=x, & dv=\sin\frac{n\pi x}{2}dx \\ du=dx, & v=-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{8}{n\pi}\underbrace{\sin n\pi}_{0}-0-\frac{4}{n\pi}\left[-\frac{2x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\bigg|_0^2+\frac{2}{n\pi}\cdot\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\bigg|_0^2\right]=$$

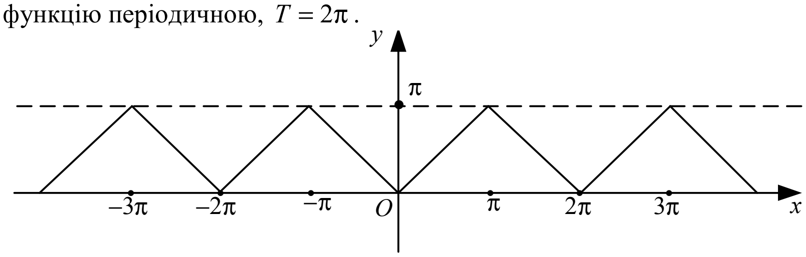
$$=\frac{8}{n^2\pi^2}\left(2\cos n\pi-0\right)=\frac{16\cos n\pi}{n^2\pi^2}=\frac{16\cdot(-1)^n}{n^2\pi^2}.$$

Ряд Фур'є заданої функції має вигляд

$$f(x)=\frac{4}{3}+\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{2}. \quad ⌋$$

83. Функція $f(x)=x$ задана на проміжку $(0,\pi]$. Розвинути її в ряд косинусів.

⌈ Дану функцію потрібно довизначити на відрізку $[-\pi, 0]$ так, щоб вона була парною. Покладемо $y=-x$ при $x\in[-\pi, 0]$. Вважаємо функцію періодичною, $T=2\pi$.



Функція неперервна на всій осі.

Коефіцієнти ряду знаходимо за формулами (17):

$$b_n=0, \quad a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\,dx=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_0^\pi=\frac{\pi^2}{\pi}=\pi,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx\,dx=\begin{vmatrix} u=x, & dv=\cos nx\,dx \\ du=dx, & v=\frac{1}{n}\sin nx\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\underbrace{\frac{x}{n}\sin nx\bigg|_0^\pi}_{0}-\frac{1}{n}\int_0^\pi \sin nx\,dx\right]=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_0^\pi=$$

$$=\frac{2}{\pi n^2}\left[\cos n\pi-\cos 0\right]=\frac{2}{\pi n^2}\left[\cos n\pi-1\right].$$

Запишемо ряд Фур'є:

$$f(x)=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(\cos n\pi-1)}{\pi n^2}\cos nx,$$

$$f(x)=\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\left(-\frac{2\cos x}{1}-\frac{2\cos 3x}{9}-\frac{2\cos 5x}{5^2}-\cdots\right),\text{ або}$$

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}.\ \lrcorner$$

84. Розвинути в ряд Фур'є періодичну функцію $y=\begin{cases}1 & \text{при } x\in[0,\ \pi),\\ -1 & \text{при } x\in[-\pi,\ 0),\end{cases}$ задану на проміжку $[-\pi,\ \pi)$.

$\ulcorner$ $a_0=0$, $a_n=0$,

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}1\cdot\sin nx\,dx=-\frac{2}{n\pi}\cos nx\Big|_0^{\pi}=-\frac{2}{n\pi}(\cos n\pi-\cos 0)=$$

$$=-\frac{2}{n\pi}\left[(-1)^n-1\right]=\left[\begin{array}{ll}0, & n-\text{парне},\\ \dfrac{4}{n\pi}, & n-\text{непарне}.\end{array}\right.$$

Запишемо ряд Фур'є:

$$f(x)=-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n-1\right]\frac{\sin nx}{n},\text{ або}$$

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\left(\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\cdots\right)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.\ \lrcorner$$

85. Функцію $y=\cos 2x$ $\left(T=\frac{\pi}{2};\ x\in\left(0,\ \frac{\pi}{4}\right)\right)$ розвинути в ряд синусів.

$\ulcorner$ Довизначимо функцію на інтервал $\left(-\frac{\pi}{4},\ 0\right)$ так, щоб вона була непарною, тобто $y=-\cos 2x$ при $x\in\left(-\frac{\pi}{4},\ 0\right)$; $l=\frac{\pi}{4}$; $a_0=0$; $a_n=0$.

$$b_n=\frac{2\cdot 4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\cdot\sin\frac{n\pi x\cdot 4}{\pi}\,dx=\frac{8}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\sin 4nx\,dx=$$

$$=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\sin(4n+2)x+\sin(4n-2)x\right]dx=\frac{4}{\pi}\left[-\frac{\cos(4n+2)x}{4n+2}-\right.$$

$$\left.-\frac{\cos(4n-2)x}{4n-2}\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=-\frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos\left[(4n+2)\frac{\pi}{4}\right]}{4n+2}+\frac{\cos\left[(4n-2)\frac{\pi}{4}\right]}{4n-2}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4n+2}-\frac{1}{4n-2}\right]=-\frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)}{4n+2}+\frac{\cos\left(n\pi-\frac{\pi}{2}\right)}{4n-2}-\frac{8n}{(4n+2)(4n-2)}\right]=$$

$$=-\frac{4}{\pi}\left[-\frac{\sin n\pi}{4n+2}+\frac{\sin n\pi}{4n-2}-\frac{8n}{(4n+2)(4n-2)}\right]=\frac{32n}{\pi(4n+2)(4n-2)}=$$

$$=\frac{8n}{\pi(2n+1)(2n-1)}.$$

Запишемо ряд Фур'є:

$$f(x)=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n+1)(2n-1)}\sin 4nx=\frac{8}{\pi}\left(\frac{\sin 4x}{3\cdot 1}+\frac{\sin 8x}{5\cdot 3}+\frac{\sin 12x}{7\cdot 5}+\cdots\right).\quad ⌋$$

86. $f(x)=x+2$, $x\in[1,2]$.

⌈ Можна покласти $f(x)=0$ при $x\in(-1,1)$ і $f(x)=-(x+2)$ при $x\in[-2,-1]$. Тоді функція $f(x)$ непарна і коефіцієнти ряду Фур'є обчислюються за формулами $a_0=0$, $a_n=0$, $b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$ при $l=2$.

$$b_n=\frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\int_0^1 0\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}dx+\int_1^2(x+2)\sin\frac{n\pi x}{2}dx=$$

$$=\begin{vmatrix} u=x+2, & dv=\sin\frac{n\pi x}{2}dx \\ du=dx, & v=-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\end{vmatrix}=-\frac{2(x+2)}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_1^2+$$

$$+\frac{2}{n\pi}\cdot\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_1^2=-\frac{8}{n\pi}\cos n\pi+\frac{6}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{4}{n^2\pi^2}\left(\sin n\pi-\sin\frac{n\pi}{2}\right)=$$

$$=\frac{8(-1)^{n+1}}{n\pi}+\frac{6}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}-\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}.$$

Ряд Фур'є для заданої функції має вигляд

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4(-1)^{n+1}}{n}+\frac{3}{n}\cos\frac{n\pi}{2}-\frac{2}{\pi n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\right]\sin\frac{n\pi x}{2}. \quad \lrcorner$$

Вправи для самостійного розв'язання

87. Розвинути в ряд Фур'є функцію $y=\begin{cases}-x, & \text{якщо } x\in(-\pi,0],\\ 0, & \text{якщо } x\in(0,\pi).\end{cases}$

88. Розвинути в ряд синусів функцію $y=x^2$, $x\in(0,\pi)$.

89. Розвинути в ряд косинусів функцію $y=\begin{cases}1, & \text{якщо } x\in(0,1],\\ 2, & \text{якщо } x\in(1,2).\end{cases}$

90. Розвинути в ряд косинусів функцію $y=\sin 2x$, $x\in(0,\pi)$.

91. Розвинути в ряд Фур'є функцію $y=|x|$, $x\in[-\pi,\pi]$.

Відповіді:

87. $f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n}$.

88. $f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\left\{\frac{\pi^2}{n}+\frac{2}{n^3}\left[(-1)^n-1\right]\right\}\sin nx$.

89. $f(x)=\frac{3}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi x}{2}$.

90. $f(x)=\frac{8}{\pi}\left[\frac{\cos x}{3}+\frac{\cos 3x}{-5}+\dots+\frac{\cos(2n-1)x}{4-(2n-1)^2}+\dots\right]$.

91. $f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\left[(2n+1)x\right]}{(2n+1)^2}$.

ЗМІСТ

Навчальне видання

Беспальчук Валентина Іванівна
Бондарчук Василь Миколайович
Величко Дмитро Олександрович
Головня Руслан Миколайович
Давидчук Сергій Петрович
Івахненкова Валентина Володимирівна
Кареліна Галина Опанасівна
Коваль Валерій Олександрович
Лущиков Олександр Володимирович
Охріменко Сергій Антонович
Очич Віра Михайлівна
Письменчук Наталія Віталіївна
Прилипко Олександр Іванович
Скуратівський Сергій Іванович
Ядренко Ольга Михайлівна

Практикум
з вищої математики

Навчальний посібник

Редактор — *Р.М. Головня*
Комп'ютерний набір та верстка — *М. А. Мазуренко*, *І.О. Собко*
Обкладинка — *М.А. Мазуренко*
Макетування — *Р.В. Лисогор*

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єкта видавничої справи
Серія ЖТ №08 від 26.03.2004 р.
Підп. до друку 12.06.2008 р. Формат $60 \times 84^{1}/_{16}$.
Папір друк. № 2. Гарнітура Times New Roman. Ум. друк. арк. 26,04
Тираж 600 пр. Зам. № 23

Редакційно-видавничий відділ
Житомирського державного технологічного університету
вул. Черняховського, 103, Житомир, 10005