МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ

ЖИТОМИРСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Вища математика

Завдання до контрольних робіт
для студентів заочної форми навчання

Частина 1

Лінійна алгебра
Векторна алгебра
Аналітична геометрія
Вступ до аналізу
Диференціальне числення

Житомир – 2010

Вища математика. Завдання до контрольних робіт для студентів заочної форми навчання. Ч. 1. – Житомир: ЖДТУ, 2010. – 40с.

Укладачі: Бондарчук Василь Миколайович,
Коваль Валерій Олександрович.

Затверджено на засіданні
кафедри вищої математики
Протокол №8 від 26.03.10

Тираж 500

Житомир, РВВ ЖДТУ, 2010

Рекомендації студенту-заочнику по роботі над курсом вищої математики

Основною формою навчання студента-заочника є самостійна робота над навчальним матеріалом, яка складається з таких елементів: вивчення теоретичного матеріалу за підручниками; розв’язування задач і вправ; виконання контрольних робіт.

Теоретичний матеріал, що викладається студентам-заочникам на лекціях під час екзаменаційно-настановчих сесій, носить переважно оглядовий характер. Їх мета – звернути увагу студента на загальну схему побудови відповідного розділу курсу, підкреслити найважливіші місця, вказати головні практичні застосування. Ґрунтовне вивчення теоретичного матеріалу можливе лише під час самостійної роботи над підручниками та посібниками. У бібліотеці ЖДТУ є значна кількість навчальної літератури з вищої математики. У першу чергу можна рекомендувати:

– для студентів інженерних напрямів підготовки:

1. Вища математика: У 2-х кн. / За ред. Г.Л. Кулініча. – К.: Либідь, 2003.
2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – К.: АСК, 2001.
3. Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Вища математика: У 2-х ч. – К.: Техніка, 2003.

– для студентів економічних напрямів підготовки:

1. Грисенко М.В. Математика для економістів. – К.: Либідь, 2007.
2. Барковський В.В., Барковська Н.В., Лопатін О.К. Математика для економістів. – К.: НАУ, 1997.

Важливим елементом роботи над курсом вищої математики є розв’язання значної кількості задач і вправ. Це необхідно як для успішного і глибокого засвоєння теоретичного матеріалу, так і для вироблення певних технічних навичок, оволодіння відповідними прийомами і методами. Тут будуть корисними перш за все навчальні посібники:

1. Практикум з вищої математики / За ред. В.О. Коваля. – Житомир: ЖДТУ, 2008.
2. Каплан Н.А. Практические занятия по высшей математике. – Харьков: ХГУ, 1971.

Виконання студентом-заочником контрольних робіт є заключним елементом самостійної роботи. Нижче подані контрольні завдання за розділами курсу вищої математики.

Заключним етапом вивчення курсу є складання заліків та іспитів.

Лінійна алгебра

<u>Завдання 1.</u> Дано матриці *A* та *B*. Знайти AB^T.

1.1. $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

1.2. $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

1.3. $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

1.4. $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

1.5. $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

1.6. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

1.7. $A=\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

1.8. $A=\begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

1.9. $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

1.10. $A=\begin{pmatrix} -6 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

1.11. $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

1.12. $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad B=\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.13. $A=\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\quad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$.

1.14. $A=\begin{pmatrix} -4 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, $\quad B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

1.15. $A=\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $\quad B=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 7 & 4 \end{pmatrix}$.

Завдання 2. Розв’язати систему рівнянь:

а) методом Гаусса; б) за формулами Крамера; в) матричним методом.

2.1. $\begin{cases} 2x_1+3x_2=-5, \\ 5x_1+2x_2=4. \end{cases}$ **2.2.** $\begin{cases} 3x_1+x_2=6, \\ 2x_1-x_2=-1. \end{cases}$

2.3. $\begin{cases} x_1-2x_2=1, \\ x_1+2x_2=5. \end{cases}$ **2.4.** $\begin{cases} 2x_1+x_2=2, \\ 3x_1+2x_2=2. \end{cases}$

2.5. $\begin{cases} 4x_1+3x_2=2, \\ x_1-2x_2=-5. \end{cases}$ **2.6.** $\begin{cases} 2x_1+5x_2=1, \\ x_1+x_2=2. \end{cases}$

2.7. $\begin{cases} 5x_1+3x_2=-1, \\ 4x_1+x_2=-5. \end{cases}$ **2.8.** $\begin{cases} 2x_1-3x_2=-1, \\ x_1+2x_2=10. \end{cases}$

2.9. $\begin{cases} 3x_1+2x_2=4, \\ 2x_1+x_2=1. \end{cases}$ **2.10.** $\begin{cases} 5x_1-3x_2=1, \\ 4x_1+x_2=11. \end{cases}$

2.11. $\begin{cases} 2x_1+x_2=5, \\ x_1-2x_2=5. \end{cases}$ **2.12.** $\begin{cases} x_1+3x_2=1, \\ 2x_1+x_2=-3. \end{cases}$

2.13. $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = 1, \\ 2x_1 + x_2 = 5. \end{cases}$ **2.14.** $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 = -2. \end{cases}$

2.15. $\begin{cases} 5x_1 - x_2 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 = 9. \end{cases}$

<u>Завдання 3.</u> Розв’язати систему рівнянь:

а) методом Гаусса; б) за формулами Крамера; в) матричним методом.

3.1. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$ **3.2.** $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3. \end{cases}$

3.3. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 12, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -9. \end{cases}$ **3.4.** $\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -4, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -5. \end{cases}$

3.5. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 12, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$ **3.6.** $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 11, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -7. \end{cases}$

3.7. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 9, \\ x_1 + x_2 - x_3 = -2, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 12. \end{cases}$ **3.8.** $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 9, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 11, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 19. \end{cases}$

3.9. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$ **3.10.** $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 19, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$

3.11. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -11. \end{cases}$

3.12. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 16, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8. \end{cases}$

3.13. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 14, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -16, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -8. \end{cases}$

3.14. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 6x_3 = -15, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 13, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$

3.15. $\begin{cases} 7x_1 + 4x_2 - x_3 = 13, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -10. \end{cases}$

Векторна алгебра

Завдання 4. Дано вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$. Знайти: 1) $\vec{a}+\vec{b}$; 2) $\vec{a}-\vec{b}$; 3) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$; 4) скалярний добуток $\vec{a}\cdot\vec{b}$; 5) векторний добуток $\vec{a}\times\vec{b}$.

4.1. $\vec{a}=(3;-2;1)$, $\vec{b}=(-5;4;2)$.

4.2. $\vec{a}=(-4;-1;3)$, $\vec{b}=(2;-4;1)$.

4.3. $\vec{a}=(-3;2;4)$, $\vec{b}=(1;-3;5)$.

4.4. $\vec{a}=(2;-1;4)$, $\vec{b}=(3;-1;5)$.

4.5. $\vec{a}=(-6;2;3)$, $\vec{b}=(2;1;-4)$.

4.6. $\vec{a}=(2;3;-2)$, $\vec{b}=(1;2;-4)$.

4.7. $\vec{a}=(3;-5;2)$, $\vec{b}=(-2;3;1)$.

4.8. $\vec{a}=(-4;2;-3)$, $\vec{b}=(1;-4;1)$.

4.9. $\vec{a}=(4;-3;5)$, $\vec{b}=(2;-5;1)$.

4.10. $\vec{a}=(1;-4;5)$, $\vec{b}=(2;1;6)$.

4.11. $\vec{a}=(-1;2;-3),\ \vec{b}=(-2;4;-3).$

4.12. $\vec{a}=(2;-4;5),\ \vec{b}=(1;-2;2).$

4.13. $\vec{a}=(3;-2;3),\ \vec{b}=(-1;5;-2).$

4.14. $\vec{a}=(4;-1;3),\ \vec{b}=(2;-3;3).$

4.15. $\vec{a}=(1;-2;3),\ \vec{b}=(1;1;3).$

<u>Завдання 5.</u> Дано координати вершин трикутника $A_1A_2A_3$. Знайти кут $A_1A_2A_3$.

5.1. $A_1(3;1;2), A_2(5;0;-1), A_3(0;3;6).$

5.2. $A_1(3;1;4), A_2(-1;6;1), A_3(-1;1;6).$

5.3. $A_1(3;3;9), A_2(6;9;1), A_3(1;7;3).$

5.4. $A_1(2;4;3), A_2(7;6;3), A_3(4;9;3).$

5.5. $A_1(9;5;5), A_2(-3;7;1), A_3(5;7;8).$

5.6. $A_1(0;7;1), A_2(4;1;5), A_3(4;6;3).$

5.7. $A_1(5;5;4), A_2(3;8;4), A_3(3;5;10).$

5.8. $A_1(6;1;1), A_2(4;6;6), A_3(4;2;0).$

5.9. $A_1(7;5;3), A_2(9;4;4), A_3(4;5;7).$

5.10. $A_1(6;6;2), A_2(5;4;7), A_3(2;4;7).$

5.11. $A_1(-4;6;4), A_2(2;1;5), A_3(-1;-2;2).$

5.12. $A_1(2;-1;9), A_2(1;1;5), A_3(7;3;1).$

5.13. $A_1(1;-2;2), A_2(-1;-3;4), A_3(5;5;-1).$

5.14. $A_1(1;1;3), A_2(7;1;1), A_3(4;1;-1).$

5.15. $A_1(-3;1;-2), A_2(2;0;-1), A_3(3;4;-5).$

Завдання 6. Дано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$. Знайти площу грані $A_1A_2A_3$ та об'єм піраміди.

6.1. $A_1(7;0;3), A_2(3;0;-1), A_3(3;0;5), A_4(4;3;-2).$

6.2. $A_1(1;-1;6), A_2(2;5;-2), A_3(-3;3;3), A_4(4;1;5).$

6.3. $A_1(3;6;1), A_2(6;1;4), A_3(3;-6;10), A_4(7;5;4).$

6.4. $A_1(1;1;3), A_2(4;1;6), A_3(6;4;1), A_4(0;5;6).$

6.5. $A_1(4;4;5), A_2(10;2;3), A_3(-3;5;4), A_4(6;-2;2).$

6.6. $A_1(-1;2;5), A_2(-4;6;4), A_3(2;1;5), A_4(-1;-2;2).$

6.7. $A_1(2;-1;9), A_2(1;1;5), A_3(7;3;1), A_4(2;6;-2).$

6.8. $A_1(1;-2;2), A_2(-1;-3;4), A_3(5;5;-1), A_4(2;4;-5).$

6.9. $A_1(1;1;3), A_2(7;1;1), A_3(2;2;2), A_4(4;1;-1).$

6.10. $A_1(-3;1;-2), A_2(2;0;-1), A_3(0;-2;6), A_4(3;4;-5).$

6.11. $A_1(1;8;2), A_2(5;2;6), A_3(5;7;4), A_4(4;10;9).$

6.12. $A_1(6;6;5), A_2(4;9;5), A_3(4;6;11), A_4(6;9;3).$

6.13. $A_1(7;2;2), A_2(-5;7;-7), A_3(5;-3;1), A_4(2;3;7).$

6.14. $A_1(8;-6;4), A_2(10;5;-5), A_3(5;6;-8), A_4(8;10;7).$

6.15. $A_1(1;-2;7), A_2(4;2;10), A_3(2;3;5), A_4(5;3;7)$.

Аналітична геометрія

<u>Завдання 7.</u> Дано координати вершин трикутника ABC. Знайти: 1) рівняння сторони AB; 2) рівняння висоти CH; 3) рівняння медіани BM; 4) точку перетину медіани BM і висоти CH.

7.1. $A(7;3), B(3;-1), C(3;5)$.

7.2. $A(1;-1), B(2;5), C(-3;3)$.

7.3. $A(3;6), B(6;1), C(3;-6)$.

7.4. $A(1;3), B(1;6), C(6;2)$.

7.5. $A(4;5), B(2;3), C(-3;4)$.

7.6. $A(-1;2), B(-4;6), C(2;1)$.

7.7. $A(2;-1), B(1;5), C(3;1)$.

7.8. $A(1;-2), B(-1;-3), C(5;-1)$.

7.9. $A(1;3), B(7;1), C(2;-2)$.

7.10. $A(3;2), B(5;-1), C(0;6)$.

7.11. $A(2;3), B(-2;5), C(-2;-1)$.

7.12. $A(2;3), B(-1;4), C(-3;2)$.

7.13. $A(3;-2), B(2;-3), C(-5;-2)$.

7.14. $A(-3;1), B(-5;2), C(1;-1)$.

7.15. $A(-3;-2), B(2;-2), C(1;4).$

<u>Завдання 8.</u> Дано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$. Знайти: 1) довжину сторони A_1A_2; 2) рівняння прямої A_1A_2; 3) рівняння площини $A_1A_2A_3$; 4) рівняння висоти A_4O.

8.1. $A_1(4;2;5), A_2(0;7;2), A_3(0;2;7), A_4(1;5;0).$

8.2. $A_1(4;4;10), A_2(4;10;2), A_3(2;8;4), A_4(9;6;9).$

8.3. $A_1(4;6;5), A_2(6;9;4), A_3(2;10;10), A_4(7;5;9).$

8.4. $A_1(3;5;4), A_2(8;7;4), A_3(5;10;4), A_4(4;7;8).$

8.5. $A_1(10;6;6), A_2(-2;8;2), A_3(6;8;9), A_4(7;10;3).$

8.6. $A_1(1;8;2), A_2(5;2;6), A_3(5;7;4), A_4(4;10;9).$

8.7. $A_1(6;6;5), A_2(4;9;5), A_3(4;6;11), A_4(6;9;3).$

8.8. $A_1(7;2;2), A_2(5;7;7), A_3(5;3;1), A_4(2;3;7).$

8.9. $A_1(8;6;4), A_2(10;5;5), A_3(5;6;8), A_4(8;10;7).$

8.10. $A_1(7;7;3), A_2(6;5;8), A_3(3;5;8), A_4(8;4;1).$

8.11. $A_1(4;2;5), A_2(0;7;1), A_3(0;2;7), A_4(1;5;0).$

8.12. $A_1(4;4;10), A_2(7;10;2), A_3(2;8;4), A_4(9;6;9).$

8.13. $A_1(4;6;5), A_2(6;9;4), A_3(2;10;10), A_4(7;5;9).$

8.14. $A_1(3;5;4), A_2(8;7;4), A_3(5;10;4), A_4(4;7;8).$

8.15. $A_1(1;8;2), A_2(5;2;6), A_3(5;7;4), A_4(4;10;9).$

<u>Завдання 9.</u> Записати канонічне рівняння кривої другого порядку та знайти її параметри.

9.1. $9y^2 - 16x^2 + 32x - 18y + 137 = 0.$

9.2. $25x^2 + 16y^2 + 150x - 64y - 111 = 0.$

9.3. $16x^2 - 32x + 36y - 164 = 0.$

9.4. $9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y - 43 = 0.$

9.5. $x^2 + 16y^2 - 4x + 32y + 4 = 0.$

9.6. $9y^2 - 4x^2 + 24x + 18y - 63 = 0$

9.7. $x^2 + 9y^2 + 4x - 54y + 76 = 0.$

9.8. $36x^2 + 49y^2 + 72x - 294y - 1287 = 0.$

9.9. $4y^2 - x^2 - 6x - 16y - 29 = 0.$

9.10. $4x^2 + y^2 + 24x + 2y - 63 = 0.$

9.11. $9y^2 - 15x - 36y - 9 = 0.$

9.12. $25x^2 - 9y^2 + 50x + 72y - 344 = 0.$

9.13. $x^2 - 9y^2 + 8x + 54y - 74 = 0.$

9.14. $9x^2 + 4y^2 + 36x - 24y + 36 = 0.$

9.15. $16x^2 - 64x + 15y - 161 = 0.$

<u>Завдання 10.</u> Побудувати криву в полярній системі координат.

10.1. $\rho = \sin\varphi + \frac{1}{2}.$ ***10.2.*** $\rho = 3\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right).$

10.3. $\rho = 2\cos\varphi - \frac{1}{2}.$ ***10.4.*** $\rho = 2\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right).$

10.5. $\rho = 3\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right).$ ***10.6.*** $\rho = -\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right).$

10.7. $\rho = -\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right).$ ***10.8.*** $\rho = \frac{3}{2}\sin\varphi - 1.$

10.9. $\rho = 5\cos\left(\frac{\pi}{3} - \varphi\right).$ ***10.10.*** $\rho = 4\sin\varphi - 2.$

10.11. $\rho = 2\sin\left(\frac{\pi}{6} - \varphi\right).$ ***10.12.*** $\rho = 3\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right).$

10.13. $\rho = 2 - 3\sin\varphi.$ ***10.14.*** $\rho = 4\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right).$

10.15. $\rho = 5\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right).$

Вступ до аналізу

<u>Завдання 11.</u> Знайти область визначення функції.

11.1. $y = \frac{x-6}{x^2 - 3x + 2}.$ ***11.2.*** $y = \frac{\sqrt{3-x}}{9+4x^2}.$

11.3. $y=\dfrac{2\cos x}{\sqrt[3]{x+2}}$.

11.4. $y=x\ln\left(4-x^2\right)$.

11.5. $y=x-\dfrac{5}{\sqrt{1-x}}$.

11.6. $y=\dfrac{x^2}{\cos x-1{,}5}$.

11.7. $y=\dfrac{\sin x}{2^x-4}$.

11.8. $y=\dfrac{2^x}{27+x^3}$.

11.9. $y=\dfrac{\sqrt{x}}{x^2-4}$.

11.10. $y=\dfrac{x+4}{\ln x}$.

11.11. $y=\dfrac{x^2-4}{\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg} x}$.

11.12. $y=\dfrac{\sqrt{x+2}}{3^x-1}$.

11.13. $y=\dfrac{2x-5}{8-x^3}$.

11.14. $y=\dfrac{\sqrt{x+3}}{x^2-9}$.

11.15. $y=\dfrac{x+4}{\log_2 x+1}$.

Завдання 12. Обчислити значення функції $f\left(x\right)$ у точках x_1 та x_2.

12.1. $f\left(x\right)=3x^2-2x-3,\quad x_1=-2,\ x_2=4.$

12.2. $f\left(x\right)=5x^2-3x+1,\quad x_1=-1,\ x_2=3.$

12.3. $f\left(x\right)=5+3x-2x^2,\quad x_1=-3,\ x_2=2.$

12.4. $f\left(x\right)=2x^2+x-3,\quad x_1=-3,\ x_2=2.$

12.5. $f\left(x\right)=x^2+6x-1,\quad x_1=-2,\ x_2=4.$

12.6. $f\left(x\right)=3x^2+x-4,\quad x_1=-2,\ x_2=1.$

12.7. $f(x)=3+2x-x^2,\qquad x_1=-2,\ x_2=5.$

12.8. $f(x)=x^2+4x-3,\qquad x_1=-4,\ x_2=3.$

12.9. $f(x)=4x^2-5x+2,\qquad x_1=-3,\ x_2=1.$

12.10. $f(x)=3x^2+x-5,\qquad x_1=-3,\ x_2=2.$

12.11. $f(x)=2x^2+3x-8,\qquad x_1=-1,\ x_2=3.$

12.12. $f(x)=4+x-2x^2,\qquad x_1=-3,\ x_2=2.$

12.13. $f(x)=2+4x-3x^2,\qquad x_1=-2,\ x_2=4.$

12.14. $f(x)=3x^2-5x+4,\qquad x_1=-2,\ x_2=4.$

12.15. $f(x)=4x^2+2x-3,\qquad x_1=-1,\ x_2=3.$

Завдання 13. Знайти границю, не використовуючи правило Лопіталя.

13.1. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x^2+x-2}{x^2-2x-3}.$ **13.2.** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2-5x+2}{2x^2-x-1}.$

13.3. $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{2x^2-17x+35}{x^2-x-20}.$ **13.4.** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{4x^2+x-5}{x^2+x-2}.$

13.5. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{5x^2+4x-1}{x^2-6x-7}.$ **13.6.** $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{4x^2-7x-2}{x^2-7x+10}.$

13.7. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-2x-3}.$ **13.8.** $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+x-6}{2x^2+3x-9}.$

13.9. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x^2-2x-5}{x^2+5x+4}.$ **13.10.** $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{3x^2-14x-5}{2x^2-9x-5}.$

13.11. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-5x+3}{x^2-7x+6}$.

13.12. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-5x-3}{x^2-x-6}$.

13.13. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+x-2}{3x^2+4x-4}$.

13.14. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-3x-2}{x^2+3x-10}$.

13.15. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^2-14x-5}{2x^2-9x-5}$.

Завдання 14. Знайти границю, не використовуючи правило Лопіталя.

14.1. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^3-x+1}{x^3+2x-4}$.

14.2. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{-3x^2+4x-3}{4x^2-x-6}$.

14.3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3+3x-3}{-5x^2+x+2}$.

14.4. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5x^3-7x-1}{x^4-6x+1}$.

14.5. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{6x^3-4x+1}{2x^3+2x-4}$.

14.6. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^5+4x-3}{4x^5-x+6}$.

14.7. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^3-x+1}{-3x^3+4x+14}$.

14.8. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{-4x^4-7x-1}{9x^3-6x+12}$.

14.9. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^3-3x+1}{-3x^3+2x-5}$.

14.10. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^5+4x+7}{4x^4-3x-6}$.

14.11. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5x^3+3x+1}{4x^3+2x^2-5}$.

14.12. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2+5x-3}{-3x^2+x-2}$.

14.13. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^3-3x+5}{3x^3+x-2}$.

14.14. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^3-6x+1}{x^4-3x+1}$.

14.15. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{7x^3-5x+1}{4x^3+3x-2}$.

<u>Завдання 15.</u> Знайти границю, не використовуючи правило Лопіталя.

15.1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{4-3x}-1}$.

15.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}$.

15.3. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{4-3x^2}-1}{x^2+x}$.

15.4. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{x-3}$.

15.5. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{x-4}$.

15.6. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{4+x}-3}{x^2-25}$.

15.7. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{2-x}-2}{x+2}$.

15.8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{x-2x^2}$.

15.9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{5x}$.

15.10. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{\sqrt{x-1}-2}$.

15.11. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{6-x}-2}$..

15.12. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{4+3x}-\sqrt{2+x}}{x+x^2}$.

15.13. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{6+x}-3}{x^2-9}$.

15.14. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{2x+3}-1}$.

15.15. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x+4}{\sqrt{2x+9}-1}$.

<u>Завдання 16.</u> Знайти границю, скориставшись першою визначною границею.

16.1. $\lim\limits_{x\to 0}\sin 4x\cdot\operatorname{ctg}5x$.

16.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{\sin^2 2x}$.

16.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\sin 2x}{\operatorname{tg}^2 3x}$.

16.4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}5x}{\sin 2x}$.

16.5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\,\mathrm{arctg}\,4x}{\sin^2 2x}$.

16.6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 4x}{x\cdot \mathrm{tg}\,2x}$.

16.7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}^2\,5x}{1-\cos 3x}$.

16.8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\,7x}{\arcsin 4x}$.

16.9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{2x^2}$.

16.10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin^2 3x}{4x\cdot \mathrm{tg}\,2x}$.

16.11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{\mathrm{tg}\,3x}$.

16.12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{\sin^2 5x}$.

16.13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\sin 3x}{\arcsin^2 5x}$.

16.14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 4x}{x\cdot \mathrm{tg}\,2x}$.

16.15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\arcsin 5x}{\sin^2 4x}$.

Завдання 17. Знайти границю, скориставшись другою визначною границею.

17.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x-4}\right)^{2x}$.

17.2. $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)^{\frac{1}{2-x}}$.

17.3. $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{\frac{3}{x-1}}$.

17.4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^{3x-1}$.

17.5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-2}{3x+5}\right)^{3x+2}$.

17.6. $\lim\limits_{x\to 3}(3x-8)^{\frac{2}{x-3}}$.

17.7. $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)^{\frac{x}{x-1}}$.

17.8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^{2x+3}$.

17.9. $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)^{\frac{5x}{x-2}}$.

17.10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-2}{3x+1}\right)^{2x}$.

17.11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x+3}\right)^{3x-2}$.

17.12. $\lim\limits_{x\to 3}(3x-8)^{\frac{1}{x-3}}$.

17.13. $\lim\limits_{x\to 2}(5-2x)^{\frac{3}{x-2}}$.

17.14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)^{2x-1}$.

17.15. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-2}{4x+7}\right)^{2x}$.

<u>Завдання 18.</u> Задано два комплексних числа z_1 та z_2. Виконати дії: 1) z_1+z_2; 2) $z_1-\overline{z}_2$; 3) $z_1\cdot z_2$; 4) $\dfrac{z_1}{z_2}$; 5) $z_1^{\,3}$.

18.1. $z_1=1-2i,\ \ z_2=3+i.$

18.2. $z_1=3+i,\ \ z_2=1-2i.$

18.3. $z_1=4-3i,\ \ z_2=2+i.$

18.4. $z_1=-1+3i,\ \ z_2=4-i.$

18.5. $z_1=3+2i,\ \ z_2=1-3i.$

18.6. $z_1=4-3i,\ \ z_2=2+2i.$

18.7. $z_1=-2-3i,\ \ z_2=1+3i.$

18.8. $z_1=4+i,\ \ z_2=3+2i.$

18.9. $z_1=-2-3i,\ \ z_2=1+2i.$

18.10. $z_1=-1+i,\ \ z_2=-3-i.$

18.11. $z_1=4+5i,\ \ z_2=3-i.$

18.12. $z_1=2+3i,\ \ z_2=-1-i.$

18.13. $z_1=5+4i,\ \ z_2=2+3i.$

18.14. $z_1=-3+5\,i,\ \ z_2=4+i.$

18.15. $z_1=-4+i,\ \ z_2=-3-i.$

Завдання 19. Записати комплексне число z: 1) в алгебраїчній формі; 2) в тригонометричній формі; 3) в показниковій формі. Знайти z^5 та $\sqrt{z}$.

19.1. $z = \dfrac{2}{1-\sqrt{3}i}$.

19.2. $z = \dfrac{2}{1+i}$.

19.3. $z = \dfrac{-2}{\sqrt{3}-i}$.

19.4. $z = \dfrac{8}{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}$.

19.5. $z = \dfrac{2\sqrt{2}}{-1+i}$.

19.6. $z = \dfrac{4}{\sqrt{3}+i}$.

19.7. $z = \dfrac{-3}{1+\sqrt{3}i}$.

19.8. $z = \dfrac{4}{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}$.

19.9. $z = \dfrac{1}{-1-i}$.

19.10. $z = -\dfrac{2}{-1+\sqrt{3}i}$.

19.11. $z = \dfrac{-8}{1+i}$.

19.12. $z = \dfrac{4}{-1+\sqrt{3}\ i}$.

19.13. $z = \dfrac{6}{-\sqrt{3}+i}$.

19.14. $z = \dfrac{2}{-\sqrt{2}+\sqrt{2}i}$.

19.15. $z = \dfrac{2}{-1-\sqrt{3}i}$.

Диференціальне числення

Завдання 20. Продиференціювати задану функцію.

20.1. $y = 2x^3 + 4\sqrt{x^7} - \operatorname{tg} x.$

20.2. $y=\frac{4}{x}-3\sqrt[3]{x^2}+3\sin x.$

20.3. $y=3x^2+8\sqrt[4]{x}-5\,\mathrm{arctg}\,x.$

20.4. $y=\frac{1}{4}x^4-2\sqrt{x}+\arcsin x.$

20.5. $y=\frac{5}{x^3}+6\sqrt[3]{x}-7\log_2 x.$

20.6. $y=\frac{2}{x^6}+10\sqrt[5]{x}-3e^x.$

20.7. $y=2x^7+8\sqrt[4]{x^3}-\cos x.$

20.8. $y=\frac{8}{x}+4\sqrt{x^3}+2\ln x.$

20.9. $y=\frac{1}{2x^4}-5\sqrt[5]{x^2}+6\sin x.$

20.10. $y=\frac{x^4}{2}+6\sqrt[3]{x^2}-3\cos x.$

20.11. $y=\frac{2}{x^3}+5\sqrt[5]{x^2}-2\arccos x.$

20.12. $y=\frac{1}{3x}-9\sqrt[3]{x^4}-5\cdot 4^x.$

20.13. $y=\frac{2}{5}x^5+8\sqrt[4]{x}-3\,\mathrm{arcctg}\,x.$

20.14. $y=\frac{1}{2}x^4+6\sqrt[6]{x^2}-4\log_3 x.$

20.15. $y=7x^3+3\sqrt{x^5}-3^x.$

Завдання 21. Продиференціювати задану функцію.

21.1. $y=\sqrt[4]{3x^2+5x-4}$.

21.2. $y=\cos\left(4x^2+3x-2\right)$.

21.3. $y=\mathrm{c}tg\left(2x^2+x-4\right)$.

21.4. $y=\ln\left(2x^2-3x+5\right)$.

21.5. $y=\sqrt{x^3-4x+5}$.

21.6. $y=\mathrm{tg}\left(3x^2+x-2\right)$.

21.7. $y=\mathrm{arctg}\left(2x^2-1\right)$.

21.8. $y=3^{2x^3-4x+3}$.

21.9. $y=\sqrt[5]{\left(2x^2-4x+5\right)^2}$.

21.10. $y=\arccos\left(3x^2+5\right)$.

21.11. $y=\log_3\left(2x^2-4x+3\right)$.

21.12. $y=2e^{4x^2+3x-2}$.

21.13. $y=\sqrt[3]{\left(2x^2+5x-3\right)^2}$.

21.14. $y=\sin\left(2x^2-3x+5\right)$.

21.15. $y=\log_4\left(x^2+2x+7\right)$.

Завдання 22. Продиференціювати задану функцію.

22.1. $y=3^x\ln(4x-3)$.

22.2. $y=\dfrac{e^{5x}}{2x^2-3}$.

22.3. $y=x^4\cos(2x^2-5)$.

22.4. $y=\dfrac{\mathrm{ctg}\,x}{\ln(2x+3)}$.

22.5. $y=e^{-2x^2}\,\mathrm{arcctg}\,x$.

22.6. $y=\dfrac{\sin\left(3x+2\right)}{\ln x}$.

22.7. $y=\cos x\cdot\ln(2x-3)$.

22.8. $y=\dfrac{\mathrm{tg}\,x}{\ln(2x-1)}$.

22.9. $y=\dfrac{e^{\cos x}}{3x^2-4}$.

22.10. $y=\dfrac{\ln x}{\sin(4x+3)}$.

22.11. $y = 3^{\sin x}(4x-3)$.

22.12. $y = \dfrac{7^{5x}}{2x^2-3}$.

22.13. $y = \dfrac{4^{-x}}{2x^2-5}$.

22.14. $y = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{\ln(2x+3)}$.

22.15. $y = \dfrac{\operatorname{arcctg} 6x}{7x^3-3x+2}$.

<u>Завдання 23.</u> Продиференціювати задану функцію.

23.1. $y = x^{\sin x}$.

23.2. $y = (\sin x)^{2x}$.

23.3. $y = x^{\operatorname{arctg} x}$.

23.4. $y = (\cos x)^{\sqrt{x}}$.

23.5. $y = (\ln x)^{\operatorname{tg} x}$.

23.6. $y = (\arcsin x)^{x}$.

23.7. $y = x^{\arccos x}$.

23.8. $y = (\operatorname{ctg} x)^{\sqrt{x}}$.

23.9. $y = \left(\sqrt{x-1}\right)^{\sin x}$.

23.10. $y = (\ln x)^{x^2-3}$.

23.11. $y = (\operatorname{tg} x)^{x}$.

23.12. $y = (\log_2 x)^{2x}$.

23.13. $y = x^{\sqrt{x}}$.

23.14. $y = x^{e^x}$.

23.15. $y = (\arccos x)^{x}$.

<u>Завдання 24.</u> Знайти похідну функції $y(x)$, що задана неявно рівнянням.

24.1. $x^3 + y^2 - 3xy = 0$.

24.2. $x - y = \cos(xy)$.

24.3. $y \sin x - \cos(x-y) = 0$.

24.4. $y \ln y = x$.

24.5. $x^4+y^4=3x^2y^2$. **24.6.** $x^3+xy^2-y=4x$.

24.7. $y=1+xe^y$. **24.8.** $\ln y-\dfrac{y}{x}=7$.

24.9. $\sin y=xy^2+5$. **24.10.** $y-\cos(x-y)=0$.

24.11. $x^4+y^3+\sin x=0$. **24.12.** $x-y=\sqrt{xy}$.

24.13. $y^2\sin x-\cos x=e^y$. **24.14.** $x\log_3 y=x^4-3xy$.

24.15. $x^3+y^4=3xy^3$.

<u>Завдання 25.</u> Знайти похідну вказаного порядку.

25.1. $y=x\cos x^2,\quad y'''-?$

25.2. $y=(5x-1)\ln^2 x,\quad y'''-?$

25.3. $y=\left(4x^3+5\right)e^{2x+1},\quad y^{IV}-?$

25.4. $y=\left(x^2+3\right)\ln(x-3),\quad y^{IV}-?$

25.5. $y=\dfrac{\sin 2x}{x},\quad y'''-?$

25.6. $y=(4x+3)2^{-x},\quad y'''-?$

25.7. $y=x\ln(1-3x),\quad y^{IV}-?$

25.8. $y=\dfrac{\log_3 x}{x^2},\quad y'''-?$

25.9. $y=\dfrac{\ln(x-2)}{x-2},\quad y^{V}-?$

25.10. $y=\dfrac{\ln x}{x^5},\quad y'''-?$

25.11. $y = x^2 \cos x, \quad y''' - ?$

25.12. $y = \left(5x^3 - 1\right)\ln x, \quad y'' - ?$

25.13. $y = \left(2x^2 - 3\right)e^{2x}, \quad y''' - ?$

25.14. $y = \left(x^2 + 3\right)\sin x, \quad y''' - ?$

25.15. $y = \dfrac{\cos 3x}{x}, \quad y'' - ?$

<u>Завдання 26.</u> Знайти похідну функції $y(x)$, що задана параметрично.

26.1. $\begin{cases} x = \cos 2t, \\ y = \dfrac{2}{\cos^2 t}. \end{cases}$

26.2. $\begin{cases} x = \sqrt{1 - t^2}, \\ y = \dfrac{1}{t}. \end{cases}$

26.3. $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t. \end{cases}$

26.4. $\begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{1 - t}}. \end{cases}$

26.5. $\begin{cases} x = \operatorname{tg} t, \\ y = \dfrac{1}{\sin 2t}. \end{cases}$

26.6. $\begin{cases} x = \sqrt{t^3 - 1}, \\ y = \ln t. \end{cases}$

26.7. $\begin{cases} x = t + \sin t, \\ y = 2 + \cos t. \end{cases}$

26.8. $\begin{cases} x = \cos^2 t, \\ y = \operatorname{tg} t. \end{cases}$

26.9. $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \ln \cos t. \end{cases}$

26.10. $\begin{cases} x = e^t, \\ y = \arcsin t. \end{cases}$

26.11. $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \dfrac{2}{t}. \end{cases}$ **26.12.** $\begin{cases} x = \sqrt{1-4t^2}, \\ y = \operatorname{tg} 2t. \end{cases}$

26.13. $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = e^t + 3t. \end{cases}$ **26.14.** $\begin{cases} x = 6\sqrt[3]{t^2}, \\ y = \operatorname{arctg} t. \end{cases}$

26.15. $\begin{cases} x = 3t^3 - 9t, \\ y = \arcsin t. \end{cases}$

Завдання 27. Обчислити наближено значення функції $y = f(x)$ у точці x_0, використовуючи диференціал функції.

27.1. $y = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 7{,}76$.

27.2. $y = \arcsin x$, $x_0 = 0{,}08$.

27.3. $y = \sqrt{4x-1}$, $x_0 = 2{,}56$.

27.4. $y = x^6$, $x_0 = 2{,}01$.

27.5. $y = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$, $x_0 = 1{,}58$.

27.6. $y = \sqrt[3]{x^2}$, $x_0 = 1{,}03$.

27.7. $y = x^{11}$, $x_0 = 1{,}02$.

27.8. $y = \sqrt{4x-3}$, $x_0 = 1{,}78$.

27.9. $y = \sqrt{x^2 + x + 3}$, $x_0 = 1{,}97$.

27.10. $y = x^5$, $x_0 = 2{,}97$.

27.11. $y = \sqrt{x}$, $x_0 = 8{,}87$.

27.12. $y=\operatorname{arctg} x,\ x_0=0,05$.

27.13. $y=\sqrt{2x+1},\ x_0=3,92$.

27.14. $y=x^4,\ x_0=4,01$.

27.15. $y=\sqrt[3]{3x-1},\ x_0=3,06$.

<u>Завдання 28.</u> Знайти рівняння дотичної та нормалі до графіка функції $y=f(x)$ у точці з абсцисою x_0.

28.1. $y=\dfrac{1+3x^2}{3+x^2},\quad x_0=1.$

28.2. . $y=\dfrac{x}{x^2+1},\quad x_0=-2.$

28.3. $y=2x+\dfrac{1}{x},\quad x_0=1.$

28.4. $y=\dfrac{x^2+3}{x-4},\quad x_0=2.$

28.5. $y=\dfrac{x^2-3x+6}{x^2},\quad x_0=3.$

28.6. $y=\dfrac{x^3+2}{x^3-2},\quad x_0=2$.

28.7. $y=x^2+8\sqrt{x}-32,\quad x_0=4$.

28.8. $y=\sqrt[3]{x^2}-20,\quad x_0=-8$.

28.9. $y=8\sqrt[4]{x}-70,\quad x_0=16$.

28.10. $y=\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}},\quad x_0=4$.

28.11. $y=\dfrac{x^2}{x^2+1}, \quad x_0=-3.$

28.12. . $y=\dfrac{5x-x^2}{3-2x}, \quad x_0=-1$

28.13. $y=\dfrac{x^3}{2+x^2}, \quad x_0=1.$

28.14. $y=5x+\dfrac{1}{x^2}, \quad x_0=2.$

28.15. $y=\dfrac{5x+6}{x^2}, \quad x_0=-1.$

<u>Завдання 29.</u> Знайти найбільше та найменше значення функції $y=f\left(x\right)$ на відрізку $\left[a,b\right]$.

29.1. $y=\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^3, \quad x\in\left[1,3\right].$

29.2. $y=(x+2)\cdot e^{1-x}, \quad x\in\left[-2,2\right].$

29.3. $y=\ln(x^2-2x+2), \quad x\in\left[0,3\right].$

29.4. $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}, \quad x\in\left[1,2\right].$

29.5. $y=(x-1)\cdot e^x, \quad x\in\left[0,3\right].$

29.6. $y=x\cdot\ln x, \quad x\in\left[\dfrac{1}{e^2},1\right].$

29.7. $y=e^{4x-x^2}, \quad x\in\left[1,3\right].$

29.8. $y=(x+1)\cdot\sqrt[3]{x^2}, \quad x\in[-1,3].$

29.9. $y=x^3+6x-4, \quad x\in[-2,2].$

29.10. $y=x^3\cdot e^{1+x}, \quad x\in[-4,0].$

29.11. $y=\dfrac{x}{9-x^2}, \quad x\in[-2,2].$

29.12. $y=2\sqrt{x}-x, \quad x\in[0,4].$

29.13. $y=x-4\sqrt{x}+5, \quad x\in[1,9].$

29.14. $y=x^3-3x+1, \quad x\in\left[\dfrac{1}{2},2\right].$

29.15. $y=\dfrac{x-1}{x+2}, \quad x\in[0,4].$

Завдання 30. Знайти границю функції за допомогою правила Лопіталя.

30.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{1-\cos x}.$

30.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos 6x}.$

30.3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x-\dfrac{1}{x}\right).$

30.4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{\ln\cos x}.$

30.5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{\ln x}.$

30.6. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{1-e^{-x}}\right).$

30.7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}.$

30.8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(e^x+e^{-x}-1)}{x}.$

30.9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x}{\ln(1+x)}$.

30.10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\left(e^x+1\right)-2\left(e^x-1\right)}{x^3}$.

30.11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\mathrm{tg}x-x}$.

30.12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{1-\cos 3x}$.

30.13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\mathrm{tg}x}{\mathrm{xsinx}}$.

30.14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+\cos x-2}{\ln\cos x}$.

30.15. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln\cos\left(x-1\right)}{x-1}$.

<u>Завдання 31.</u> Виконати загальне дослідження функції.

31.1. $y=\dfrac{x^3}{2}-\dfrac{3}{2}x^2-12x+3$.

31.2. $y=2x^3+15x^2+36x-5$.

31.3. $y=\dfrac{4}{3}x^3+2x^2-8x+3$.

31.4. $y=x^3+\dfrac{9}{2}x^2-12x+5$.

31.5. $y=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{3}{4}x^2-\dfrac{5}{2}x+3$.

31.6. $y=x^3+x^2-5x+4$.

31.7. $y=4x^3-9x^2+6x+3$.

31.8. $y=\dfrac{2}{3}x^3-5x^2+8x+3$.

31.9. $y=x^3-12x^2+21x+5$.

31.10. $y=\frac{5}{6}x^3+\frac{5}{2}x^2-20x+4$.

31.11. $y=\frac{2x^3}{3}-3x^2-20x+3$.

31.12. $y=3x^3+\frac{9}{2}x^2-18x+27$.

31.13. $y=4x^3-3x^2-6x+3$.

31.14. $y=\frac{2}{3}x^3+7x^2+12x+5$.

31.15. $y=5x^3-3x^2-9x+2$.

<u>Завдання 32.</u> Виконати загальне дослідження функції.

32.1. $y=\frac{x^3}{2(x+1)^2}$.

32.2. $y=\frac{5x}{4-x^2}$.

32.3. $y=\frac{x^2-5}{x-3}$.

32.4. $y=\frac{(x+1)^2}{x^2+1}$.

32.5. $y=\frac{2x-1}{(x-1)^2}$.

32.6. $y=\frac{3x+6}{x^2-4}$.

32.7. $y=\frac{x^3}{x^2+1}$.

32.8. $y=\frac{4x}{4+x^2}$.

32.9. $y=\frac{5x}{4-x^2}$.

32.10. $y=\frac{x^2-3x+2}{x+1}$

32.11. $y=\frac{2-4x^2}{1-4x^2}$.

32.12. $y=\frac{3x^2}{8-x^3}$.

32.13. $y=\dfrac{x^3}{3(x-1)^2}$.

32.14. $y=\dfrac{x^4}{x^3-1}$.

32.15. $y=\dfrac{x^3}{x^2-x+1}$.

Завдання 33. Виконати загальне дослідження функції.

33.1. $y=(2x+3)e^{-2x-2}$.

33.2. $y=2\ln\dfrac{x}{x+1}-1$.

33.3. $y=(4-x)e^{x-3}$.

33.4. $y=x\ln x$.

33.5. $y=e^{\frac{1}{2-x}}$.

33.6. $y=\dfrac{\ln x}{x}$.

33.7. $y=\ln\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

33.8. $y=(x+1)^2e^{2x}$.

33.9. $y=x^2-2\ln x$.

33.10. $y=xe^{\frac{1}{x}}$.

33.11. $y=x^2e^{-\frac{x^2}{2}}$.

33.12. $y=x-\ln(1+x^2)$.

33.13. $y=x^2-2\ln x$.

33.14. $y=\ln\left(\dfrac{x}{x+2}\right)+2$.

33.15. $y=\sqrt[3]{x}\,e^{\frac{2}{3x}}$.

Загальне дослідження функцій

Загальне дослідження функцій доцільно виконувати за наступною ***схемою.***

1. Знаходимо область визначення функції і з’ясовуємо, чи має графік точки перетину з координатними осями. Досліджуємо функцію на парність та непарність.

2. Досліджуємо графік функції на наявність асимптот.

3. Знаходимо похідну 1-го порядку і критичні точки 1-го роду (якщо вони існують). Визначаємо знак y' на інтервалах, які дістаємо в результаті розбиття області визначення функції критичними точками 1-го роду.

4. Знаходимо похідну 2-го порядку і критичні точки 2-го роду (якщо вони існують). Визначаємо знак y'' на інтервалах, які дістаємо в результаті розбиття області визначення функції критичними точками 2-го роду.

5. Критичні точки 1-го та 2-го роду вказуємо на координатній прямій. В результаті область визначення буде розбита на інтервали. Будуємо таблицю, в якій у першому рядку записуємо ці інтервали та критичні точки.

Інтервали та критичні точки (x)	
y'	
y''	
y	

а) Використовуючи y' з'ясовуємо, на яких інтервалах функція зростає або спадає, та досліджуємо критичні точки 1-го роду на екстремуми.

б) Використовуючи y'', досліджуємо на інтервалах графік функції на опуклість та угнутість.

Результати досліджень в пунктах а) і б) заносимо до останнього рядка таблиці. Обчислюємо значення функції в точках екстремуму і знаходимо точки перегину.

6. Будуємо графік функції.

<u>Приклад 1.</u> Виконати загальне дослідження функції $y = 2x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^3$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ а) Область визначення функції – $D = (-\infty; +\infty)$.

б) Для знаходження точки перетину графіка функції з віссю Oy обчислимо значення функції у точці $x = 0$:

$$y(0) = 2 \cdot 0 - \frac{3}{4} \cdot 0^2 - \frac{1}{6} \cdot 0^3 = 0.$$

Отже, графік функції перетинає вісь Oy у точці $y = 0$, тобто проходить через початок координат – точку $O(0;0)$.

в) Для знаходження точок перетину графіка функції з віссю Ox слід розв'язати рівняння $y(x) = 0$:

$$2x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^3 = 0, \quad x\left(2 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{6}x^2\right) = 0, \text{ звідки}$$

$$x=0 \text{ або } 2-\frac{3}{4}x-\frac{1}{6}x^2=0.$$

Корені квадратного рівняння:

$$x_1=\frac{-9-\sqrt{273}}{4}\approx -6{,}4; \quad x_2=\frac{-9+\sqrt{273}}{4}\approx 1{,}9.$$

Отже, графік функції перетинає вісь Ox у точках $x_1 \approx -6{,}4$, $x_2 \approx 1{,}9$ та у точці $x=0$ (початок координат).

г) Функція ні парна, ні непарна, оскільки $y(-x)\neq y(x)$ та $y(-x)\neq -y(x)$.

2 Дослідимо графік функції на наявність асимптот.

а) Рівняння *похилих асимптот*

$$y=kx+b, \tag{1}$$

де

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y(x)}{x}, \qquad b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(y(x)-kx\right), \tag{2}$$

якщо границі існують і скінченні.

Оскільки для заданої функції

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{6}x^3}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(2-\frac{3}{4}x-\frac{1}{6}x^2\right)=\infty,$$

то похилих асимптот графік функції не має.

б) Пряма $x=x_0$ є *вертикальною асимптотою* графіка функції $y(x)$, якщо

$$\lim_{x\to x_0} y(x)=\infty. \tag{3}$$

Оскільки функція елементарна і областю визначення функції є вся числова пряма, то вертикальних асимптот немає.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Знайдемо похідну 1-го порядку:

$$y' = \left(2x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^3 \right)' = 2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^2 .$$

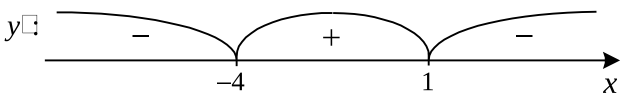
Критичні точки 1-го роду слід шукати серед точок, в яких: а) $y' = 0$; б) y' не існує.

а) $y' = 0$: $2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^2 = 0$, або $x^2 + 3x - 4 = 0$, звідки $x = -4$ та $x = 1$.

б) y' не існує: таких точок немає, оскільки похідна визначена при будь-якому $x \in D$.

Отже, маємо дві критичні точки 1-го роду $x = -4$, $x = 1$.

Вказуємо критичні точки на координатній прямій і визначаємо знак y' на отриманих інтервалах:



(наприклад, $y'(-6) = -25 < 0$, $y'(0) = 2 > 0$, $y'(2) = -3 < 0$).

$\boxed{\mathbf{4}}$ Знайдемо похідну 2-го порядку:

$$y'' = \left(2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^2 \right)' = -\frac{3}{2} - x .$$

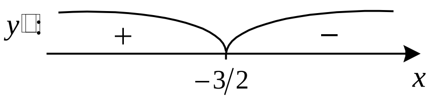
Критичні точки 2-го роду слід шукати серед точок, в яких: а) $y'' = 0$; б) y'' не існує.

а) $y''=0$: $-\frac{3}{2}-x=0$, $x=-\frac{3}{2}$.

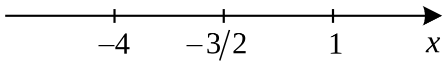
б) y'' не існує: таких точок немає.

Отже, маємо одну критичну точку 2-го роду $x=-\frac{3}{2}$.

Вказуємо критичну точку на координатній прямій і визначаємо знак y'' на отриманих інтервалах:



$\boxed{5}$ Вкажемо критичні точки 1-го та 2-го роду на координатній прямій:



Отже, маємо чотири інтервали: $(-\infty;-4)$, $(-4;-1{,}5)$, $(-1{,}5;\ 1)$, $(1;+\infty)$.

Заповнимо таблицю. Заповнюючи рядки, що відповідають y' та y'', використовуємо результати досліджень у пунктах $\boxed{3}$ та $\boxed{4}$.

x	$(-\infty;-4)$	-4	$(-4;-1{,}5)$	$-1{,}5$	$(-1{,}5;1)$	1	$(1;+\infty)$
y'	–	0	+		+	0	–
y''	+		+	0	–		–
y	□ $\cup$	min $y(-4)=$ $=-9\frac{1}{3}$	□ $\cup$	т. п. $y(-1{,}5)=$ $=-4\frac{1}{8}$	□ $\cap$	max $y(1)=1\frac{1}{12}$	□ $\cap$

Позначення:

□ – функція спадає;

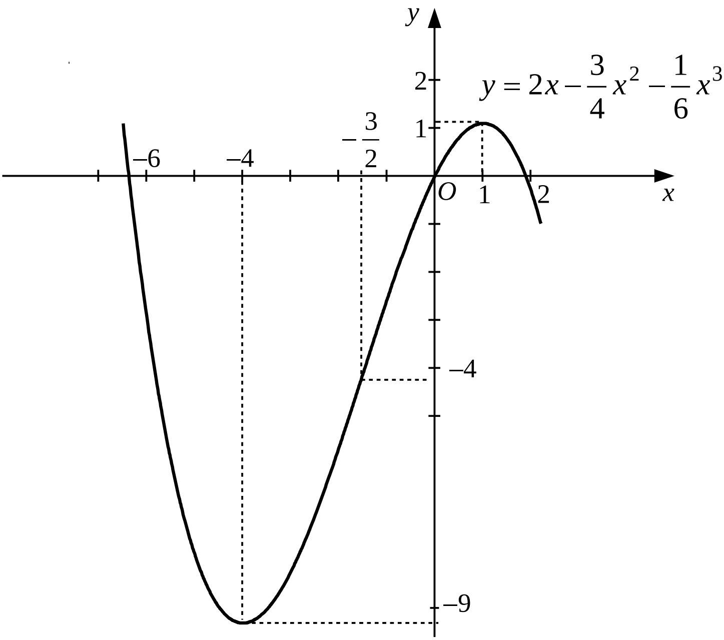
□ – функція зростає;

$\bigcup$ – графік угнутий;

$\bigcap$ – графік опуклий;

т.п. – точка перегину графіка.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Будуємо графік функції, використовуючи результати пунктів $\boxed{\mathbf{1}}$, $\boxed{\mathbf{2}}$, $\boxed{\mathbf{5}}$.



Приклад 2. Виконати загальне дослідження функції $y=\dfrac{x^4}{x^3+1}-\dfrac{1}{2}$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ а) Область визначення функції – $D=(-\infty;-1)\bigcup(-1;+\infty)$.

б) Графік перетинає вісь Oy у точці $y=-0,5$.

в) Знайдемо точки перетину графіка з віссю Ox:

$$\frac{x^4}{x^3+1}-\frac{1}{2}=0, \quad \frac{2x^4-x^3-1}{2(x^3+1)}=0.$$

Звідси маємо рівняння $2x^4-x^3-1=0$. Розклавши ліву частину на множники

$$2x^4-x^3-1=\left(x^4-x^3\right)+\left(x^4-1\right)=x^3\left(x-1\right)+\left(x-1\right)\left(x+1\right)\left(x^2+1\right)=$$

$$=\left(x-1\right)\left(2x^3+x^2+x+1\right),$$

знаходимо корінь $x=1$. Можна показати, скориставшись графічним методом, що кубічне рівняння $2x^3+x^2+x+1=0$ має один дійсний корінь, який лежить на інтервалі $(-1;0)$. Але оскільки знаходження коренів кубічного рівняння пов’язане з використанням громіздких формул, то обмежимось вказівкою однієї точки перетину графіка функції з віссю Oy – $x=1$.

г) Функція ні парна, ні непарна.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Дослідимо графік функції на наявність асимптот.

а) Похилі асимптоти знаходимо за формулами (1), (2):

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\dfrac{x^4}{x^3+1}-\dfrac{1}{2}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{x^3+1}-\frac{1}{2x}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{1+\dfrac{1}{x^3}}-\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{2x}=$$

$$=\frac{1}{1+0}-0=1;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^4}{x^3+1}-\frac{1}{2}-1\cdot x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4-x\left(x^3+1\right)}{x^3+1}-\frac{1}{2}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x}{x^3+1}-\frac{1}{2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x^3}}-\frac{1}{2}=\frac{0}{0+1}-\frac{1}{2}=-0,5;$$

підставляємо k та b у формулу (1): $y=1\cdot x+\left(-0,5\right)=x-0,5$.

Отже, графік функції має похилу асимптоту $y=x-0,5$ при $x\to\pm\infty$.

б) Оскільки точка $x_0=-1$ не належить області визначення D заданої функції, то її графік може мати вертикальну асимптоту. Для цього розглянемо співвідношення (3): оскільки $\lim\limits_{x\to-1}\left(x^3+1\right)=0$, а $\lim\limits_{x\to-1}x^4=1\neq 0$, то

$$\lim_{x\to-1}\left(\frac{x^4}{x^3+1}-\frac{1}{2}\right)=\infty.$$

Звідси випливає, що пряма $x=-1$ є вертикальною асимптотою.

$\boxed{3}$ Знайдемо похідну 1-го порядку:

$$y' = \left(\frac{x^4}{x^3+1} - \frac{1}{2} \right)' = \left(\frac{x^4}{x^3+1} \right)' - \left(\frac{1}{2} \right)' = \frac{\left(x^4\right)'\left(x^3+1\right) - x^4\left(x^3+1\right)'}{\left(x^3+1\right)^2} - 0 =$$

$$= \frac{4x^3\left(x^3+1\right) - x^4 \cdot 3x^2}{\left(x^3+1\right)^2} = \frac{x^6+4x^3}{\left(x^3+1\right)^2}.$$

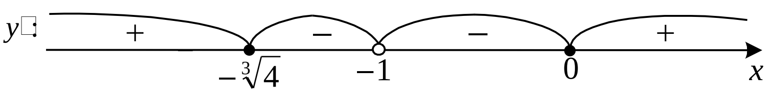
Критичні точки 1-го роду:

а) $y' = 0$: $\dfrac{x^6+4x^3}{\left(x^3+1\right)^2} = 0$, $x^3\left(x^3+4\right) = 0$, звідки $x = 0$, $x = -\sqrt[3]{4}$;

б) y' не існує: $\varnothing$.

Отже, маємо дві критичні точки 1-го роду $x = -\sqrt[3]{4} \approx -1{,}59$ та $x = 0$.

Вказуємо критичні точки на координатній прямій і визначаємо знак y' на отриманих інтервалах (точка $x = -1$ виколота, оскільки не належить області визначення функції):



(наприклад, $y'(-2) = \dfrac{32}{49} > 0$, $y'\left(-\sqrt[3]{2}\right) = -4 < 0$, $y'\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{31}{49} < 0$, $y'\left(1\right) = 1 > 0$).

$\boxed{4}$ Знайдемо похідну 2-го порядку:

$$y'' = \left(\frac{x^6 + 4x^3}{(x^3+1)^2} \right)' = \frac{\left(x^6 + 4x^3\right)' \left(x^3+1\right)^2 - \left(x^6 + 4x^3\right)\left(\left(x^3+1\right)^2\right)'}{\left(\left(x^3+1\right)^2\right)^2} =$$

$$= \frac{\left(6x^5 + 12x^2\right)\left(x^3+1\right)^2 - \left(x^6 + 4x^3\right)\left(x^3+1\right)3x^2}{\left(x^3+1\right)^4} =$$

$$= \frac{6x^2\left(x^3+1\right)\left[\left(x^3+2\right)\left(x^3+1\right) - \left(x^6+4x^3\right)\right]}{\left(x^3+1\right)^4} =$$

$$= \frac{6x^2\left(x^6 + 3x^3 + 2 - x^6 - 4x^3\right)}{\left(x^3+1\right)^3} = \frac{6x^2\left(2 - x^3\right)}{\left(x^3+1\right)^3}.$$

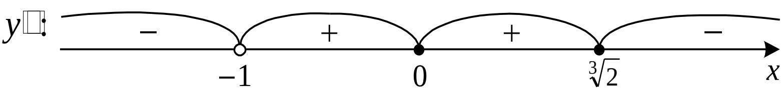
Критичні точки 2-го роду:

а) $y'' = 0$: $\quad \dfrac{6x^2\left(2-x^3\right)}{\left(x^3+1\right)^3} = 0$, $\quad x^2\left(2-x^3\right) = 0$, звідки $x = 0$, $x = \sqrt[3]{2}$;

б) y'' не існує: $\varnothing$.

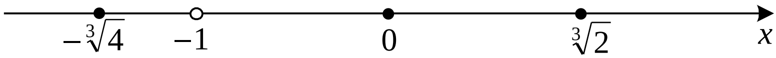
Отже, маємо дві критичні точки 2-го роду $x = 0$ та $x = \sqrt[3]{2} \approx 1{,}26$.

Вказуємо критичні точки на координатній прямій і визначаємо знак y'' на отриманих інтервалах:



(взяли, наприклад, на відповідних інтервалах точки -2, $-\dfrac{1}{2}$, 1, 2).

$\boxed{5}$ Вкажемо критичні точки 1-го та 2-го роду на координатній прямій:

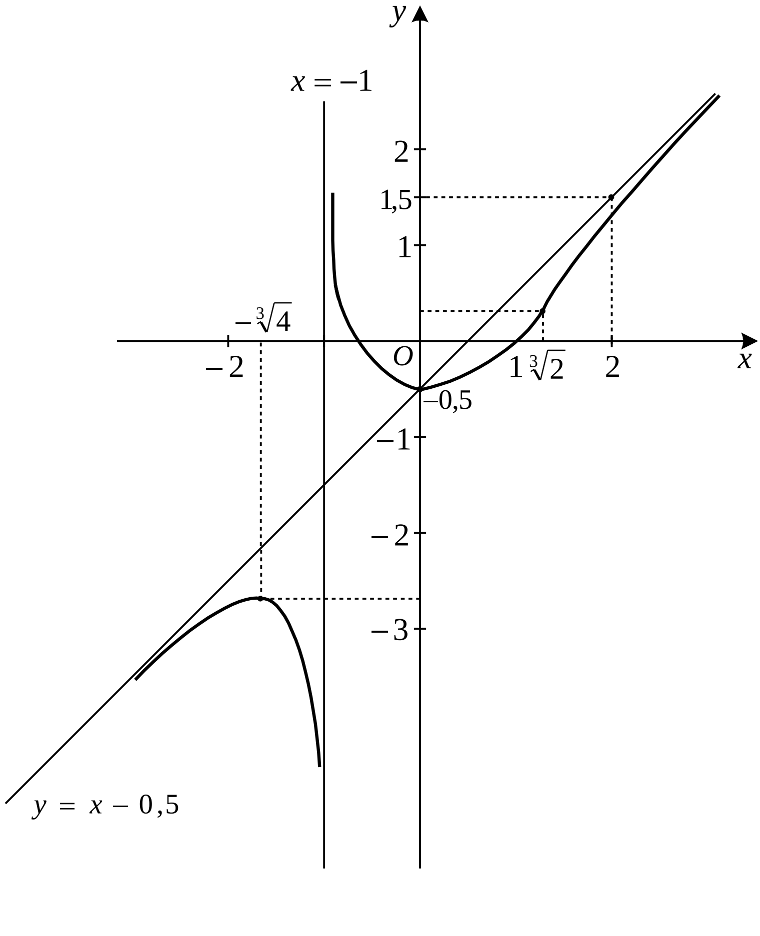


Отже, маємо п'ять інтервалів: $\left(-\infty,-\sqrt[3]{4}\right)$, $\left(-\sqrt[3]{4},-1\right)$, $\left(-1,0\right)$, $\left(0,\sqrt[3]{2}\right)$, $\left(\sqrt[3]{2},+\infty\right)$.

Заповнимо таблицю.

x	$\left(-\infty;-\sqrt[3]{4}\right)$	$-\sqrt[3]{4}$	$\left(-\sqrt[3]{4};-1\right)$	$\left(-1;0\right)$	0	$\left(0;\sqrt[3]{2}\right)$	$\sqrt[3]{2}$	$\left(\sqrt[3]{2};+\infty\right)$
y'	+	0	–	–	0	+		+
y''	–		–	+	0	+	0	–
y	$\cap$	max $y(-\sqrt[3]{4}) \approx$ $\approx -2,62$	$\cap$	$\cup$	min $y(0) = -0,5$	$\cup$	т.п. $y(\sqrt[3]{2}) \approx$ $\approx 0,34$	$\cap$

$\boxed{\mathbf{6}}$ Будуємо графік функції, використовуючи результати пунктів $\boxed{\mathbf{1}}$, $\boxed{\mathbf{2}}$, $\boxed{\mathbf{5}}$.



Приклад 3. Виконати загальне дослідження функції $y = \sqrt[3]{x^2}\, e^{\frac{2x}{3}}$.

$\boxed{1}$ а) Область визначення функції – $D = (-\infty; +\infty)$.

б) Для знаходження точки перетину графіка функції з віссю Oy обчислимо значення функції у точці $x = 0$:

$$y(0) = \sqrt[3]{0^2} \cdot e^{\frac{2 \cdot 0}{3}} = 0.$$

Отже, графік функції перетинає вісь Oy у точці $y = 0$, тобто проходить через початок координат – точку $O(0;0)$.

в) Для знаходження точок перетину графіка функції з віссю Ox Слід розв’язати рівняння $y(x) = 0$:

$$\sqrt[3]{x^2}\, e^{\frac{2x}{3}} = 0 \text{ або } \sqrt[3]{x^2} = 0. \text{ Звідси } x = 0.$$

Отже, графік функції перетинає вісь Ox у точці $x = 0$ (початок координат).

г) Функція ні парна, ні непарна, оскільки $y(-x) \neq y(x)$ та $y(-x) \neq -y(x)$.

$\boxed{2}$ Дослідимо графік функції на наявність асимптот.

а) для знаходження похилих асимптот розглянемо окремо два випадки: $x \to -\infty$ та $x \to +\infty$:

Якщо $x \to +\infty$, маємо за формулами (2):

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2}\, e^{\frac{2x}{3}}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{2x}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(e^{\frac{2x}{3}}\right)'}{\left(x^{\frac{1}{3}}\right)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{3} e^{\frac{2x}{3}}}{\frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}} = \lim_{x\to\infty} 2x^{\frac{2}{3}} e^{\frac{2x}{3}} = \infty.$$

Отже, похилих асимптот при $x \to +\infty$ графік функції не має.

Якщо $x \to -\infty$, маємо

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2}\, e^{\frac{2x}{3}}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{\frac{2x}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{3}} e^{-\frac{2x}{3}}} = 0.$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} \left(y(x) - kx\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt[3]{x^2} e^{\frac{2x}{3}}\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{e^{-\frac{2x}{3}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\sqrt[3]{x^2}\right)'}{\left(e^{-\frac{2x}{3}}\right)'} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}}{\frac{-2}{3} e^{-\frac{2x}{3}}} = -\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{3}} e^{-\frac{2x}{3}}} = 0.$$

Отже, за формулою (1) при $x \to -\infty$ похилою асимптотою є пряма $y = 0$.

б) Оскільки функція елементарна і областю визначення функції є вся числова пряма, то вертикальних асимптот немає.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Знайдемо похідну 1-го порядку:

$$y' = \left(\sqrt[3]{x^2} e^{\frac{2x}{3}} \right)' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \cdot e^{\frac{2x}{3}} + \frac{2}{3}\sqrt[3]{x^2} e^{\frac{2x}{3}} = \frac{2e^{\frac{2x}{3}}(1+x)}{3\sqrt[3]{x}}.$$

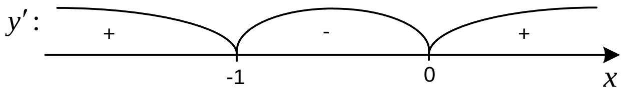
Критичні точки 1-го роду:

а) $y' = 0$: $2e^{\frac{2x}{3}}(1+x) = 0$, або $1 + x = 0$, звідки $x = -1$.

б) y' не існує: $\sqrt[3]{x} = 0$, звідки $x = 0$.

Отже, маємо дві критичні точки 1-го роду $x = -1$, $x = 0$.

Вказуємо критичні точки на координатній прямій і визначаємо знак y' на отриманих інтервалах:



(наприклад, $y'(-6) \approx 0{,}03 > 0$, $y'(-0{,}5) \approx -0{,}3 < 0$, $y'(2) \approx 6{,}02 > 0$).

$\boxed{\mathbf{4}}$ Знайдемо похідну 2-го порядку:

$$y'' = \left(\frac{2e^{\frac{2x}{3}}(1+x)}{3\sqrt[3]{x}} \right)' = \frac{e^{\frac{2x}{3}}\left(4x^2 + 8x - 2\right)}{9\sqrt[3]{x^4}}.$$

Критичні точки 2-го роду:

а) $y'' = 0$: $4x^2 + 8x - 2 = 0$.

Корені квадратного рівняння:

$$x_1 = \frac{-8 - \sqrt{96}}{8} = -1 - \frac{1}{2}\sqrt{6}; \qquad x_2 = \frac{-8 + \sqrt{96}}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{6} - 1.$$

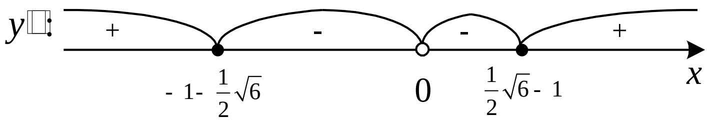
б) y'' не існує: $\sqrt[3]{x^4}=0$, звідки $x=0$.

Отже, маємо три критичних точки 2-го роду

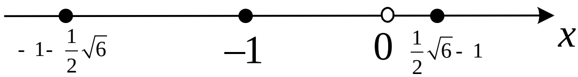
$$x_1=-1-\frac{1}{2}\sqrt{6}\approx-2,2;,\quad x_2=0,$$

$$x_3=\frac{1}{2}\sqrt{6}-1\approx0,2.$$

Вказуємо критичні точки на координатній прямій і визначаємо знак y'' на отриманих інтервалах:



$\boxed{5}$ Вкажемо критичні точки 1-го та 2-го роду на координатній прямій:



Отже, маємо п’ять інтервалів: $\left(-\infty;-1-\frac{1}{2}\sqrt{6}\right)$, $\left(-1-\frac{1}{2}\sqrt{6};-1\right)$, $(-1;\ 0)$, $\left(0;\frac{1}{2}\sqrt{6}-1\right)$, $\left(\frac{1}{2}\sqrt{6}-1;+\infty\right)$.

Заповнимо таблицю. Заповнюючи рядки, що відповідають y' та y'', використовуємо результати досліджень у пунктах $\boxed{\mathbf{3}}$ та $\boxed{\mathbf{4}}$.

x	$\left(-\infty; -1-\frac{1}{2}\sqrt{6}\right)$	$-1-\frac{1}{2}\sqrt{6}$	$\left(-1-\frac{1}{2}\sqrt{6}; -1\right)$	-1
y'	+		+	0
y''	+	0	-	
y	□ $\cup$	т.п. $y\left(-1-\frac{1}{2}\sqrt{6}\right)\approx 0,4$	□ $\cap$	max $y(-1)\approx 0,5$

Продовження таблиці

$(-1;0)$	0	$\left(0; \frac{1}{2}\sqrt{6}-1\right)$	$\frac{1}{2}\sqrt{6}-1$	$\left(\frac{1}{2}\sqrt{6}-1; +\infty\right)$
-	не існує	+		+
-	не існує	$-$	0	+
□ $\cap$	min $y(0)=0$	□ $\cap$	т.п. $y\left(\frac{1}{2}\sqrt{6}-1\right)\approx 0,4$	□ $\cup$

$\boxed{6}$ Будуємо графік функції, використовуючи результати пунктів $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{5}$.