Комплексні числа

§1. Побудова множини комплексних чисел

1.1. Появу комплексних чисел пов'язують із задачею добування квадратного кореня з від'ємного числа $\sqrt{-a}$, $a > 0$. Оскільки квадрат дійсного числа завжди додатний, то така задача на множині дійсних чисел розв'язку не має. Тому підійдемо до цієї задачі з нової точки зору: будемо вважати, що корінь $\sqrt{-1}$ є якимось "новим числом", яке позначимо символом i. Отже, ми вводимо нове число i, якому приписуємо властивість $i^2 = -1$.

Тепер окрім дійсних чисел, які зазвичай позначаються a, b, c тощо, маємо нове число i.

Операція множення дійсного числа b на i приводить до чисел вигляду bi $(b \in R)$, а операція додавання – до чисел вигляду $a + bi \quad (a, b \in R)$.

Саме у такий спосіб на початковому етапі і вводились комплексні числа. Проте цей спосіб породжує багато запитань:

1) Що ж зображає собою нове число i?

2) Чи можна на нього поширювати звичайні закони арифметики?

3) На скільки обґрунтованим є запис вигляду $a + bi$? Тощо.

Тому виникає задача побудови строгої і повної теорії комплексних чисел. Необхідність у строгому обґрунтуванні теорії комплексних чисел зумовлюється ще й тим, що ці числа є важливими у цілому ряді питань як самої математики, так і її застосувань у фізиці, механіці, радіотехніці, гідродинаміці тощо.

1.2. Нагадаємо, що між множиною всіх точок прямої і множиною дійсних чисел можна встановити взаємнооднозначну відповідність, якщо вказати початок координат і одиницю масштабу. При цьому кожній точці прямої ставиться у відповідність її абсциса.

Згаданий вище запис комплексного числа у вигляді $a + bi$ наводить на думку, що за матеріал побудови нової системи чисел можна взяти точки площини.

Отже, ми хочемо визначити нову систему чисел, яка зображається усіма точками площини. Тому операції над точками будемо вводити так, щоб нова система чисел мала всі ті властивості, заради яких ми її будуємо.

Означення 1. Комплексним числом назвемо будь-яку упорядковану пару $(a;b)$ дійсних чисел. Множину всіх комплексних чисел позначимо C.

Означення 2. Два комплексних числа $(a;b)$ і $(a_1;b_1)$ назвемо рівними і будемо писати $(a;b) = (a_1;b_1)$, якщо $a = a_1$, $b = b_1$.

Комплексні числа будемо позначати грецькими буквами і писати $\alpha_1 = (a_1;b_1)$, $\alpha_2 = (a_2;b_2)$ тощо.

<u>Означення 3</u>. Нехай $\alpha_1 = (a_1; b_1)$ і $\alpha_2 = (a_2; b_2)$ – два комплексних числа. Суму $\alpha_1 + \alpha_2$ визначимо рівністю

$$\alpha_1 + \alpha_2 = (a_1 + a_2;\, b_1 + b_2), \tag{1}$$

а добуток $\alpha_1\alpha_2$ – рівністю.

$$\alpha_1\alpha_2 = (a_1a_2 - b_1b_2;\, a_1b_2 + a_2b_1). \tag{2}$$

Операції додавання і множення комплексних чисел мають такі властивості:

1. $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_2 + \alpha_1$ (комутативність додавання).

2. $\alpha_1\alpha_2 = \alpha_2\alpha_1$ (комутативність множення).

3. $(\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_3 = \alpha_1 + (\alpha_2 + \alpha_3)$ (асоціативність додавання).

4. $(\alpha_1\alpha_2)\alpha_3 = \alpha_1(\alpha_2\alpha_3)$ (асоціативність множення).

5. $\alpha_1(\alpha_2 + \alpha_3) = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3$ (дистрибутивність множення відносно додавання).

Властивості 1 і 2 є наслідками відповідних властивостей дійсних чисел. Доведення властивостей 3, 4, 5 проводиться за однією і тією ж схемою. Доведемо, наприклад, властивість 5. Нехай $\alpha_3 = (a_3; b_3)$.

Тоді

$$\begin{aligned} \alpha_1(\alpha_2 + \alpha_3) &= (a_1; b_1)\cdot(a_2 + a_3;\, b_2 + b_3) = \\ &= (a_1(a_2 + a_3) - b_1(b_2 + b_3); a_1(b_2 + b_3) + b_1(a_2 + a_3)) = \\ &= (a_1a_2 + a_1a_3 - b_1b_2 - b_1b_3; a_1b_2 + a_1b_3 + b_1a_2 + b_1a_3); \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 &= (a_1a_2 - b_1b_2; a_1b_2 + a_2b_1) + (a_1a_3 - b_1b_3; a_1b_3 + a_3b_1) = \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2 + a_1a_3 - b_1b_3,\, a_1b_2 + a_2b_1 + a_1b_3 + a_3b_1). \end{aligned} \tag{4}$$

Порівнюючи рівності (3) і (4), отримуємо властивість 5.

1.3. Введені операції додавання і множення дозволяють розглядати комплексні числа як узагальнення дійсних чисел, а на дійсні числа дивитись як на частинний випадок комплексних чисел. Розглянемо не всі комплексні числа, а тільки числа вигляду $(a; 0)$, тобто розглянемо точки площини, які лежать на осі абсцис. Кожному дійсному числу a поставимо у відповідність комплексне число $(a; 0)$, тобто $a \to (a; 0)$. Ця відповідність є взаємнооднозначною.

Для будь-яких двох дійсних чисел a і b маємо

$$a + b \to (a + b; 0). \tag{5}$$

Оскільки $(a+b;0)=(a;0)+(b;0)$, то умову (5) можна записати у наступному вигляді

$$a+b \to (a;0)+(b;0). \tag{6}$$

Це означає, що сумі дійсних чисел a і b відповідає сума відповідних їм комплексних чисел.

Те ж саме можна сказати і про добуток. Дійсно, $ab \to (ab,0)$ і $(ab;0)=(a;0)(b;0)$ (див. формулу (2)).

Отже, добутку дійсних чисел a і b відповідає добуток відповідних їм комплексних чисел.

Викладене вище дозволяє ототожнити комплексне число $(a;0)$ з дійсним числом a і записати $(a;0)=a$. Наприклад, $(0;0)=0$, $(4;0)=4$, $(-5;0)=-5$.

Множина дійсних чисел стає при цьому підмножиною множини комплексних чисел.

Отже, множина R дійсних чисел з її звичайною арифметикою є ніби "вкладеною" у множину комплексних чисел C. Ще кажуть, що множина комплексних чисел є розширенням множини дійсних чисел.

1.4. Особливу роль серед комплексних чисел відіграє число $(0;1)$, тобто число, якому відповідає точка осі ординат, що лежить на одиницю вище початку координат O. Позначимо це комплексне число буквою i, тобто $(0;1)=i$.

Кожне комплексне число $z=(a;b)$ можна подати у вигляді

$$z=(a;b)=(a;0)+(0;b)=(a;0)+(b;0)(0;1)\cdot$$

Враховуючи те, що $(a;0)=a$, $(b;0)=b$, $(0;1)=i$, отримуємо

$$z=(a;b)=a+bi \tag{7}$$

Означення 4. Запис комплексного числа z у вигляді (7) називають алгебраїчною формою запису комплексного числа. Дійсне число a називають дійсною частиною комплексного числа (7) і позначають $a=\operatorname{Re} z$. Дійсне число b називають уявною частиною комплексного числа (7) і позначають $b=\operatorname{Im} z$.

Скористаємось алгебраїчним записом комплексного числа b в операціях додавання і множення комплексних чисел. Формули (1), (2) приймають вигляд

$$\begin{gathered}\alpha_1+\alpha_2=(a_1+b_1 i)+(a_2+b_2 i)=a_1+a_2+(b_1+b_2)i\,,\\ \alpha_1\alpha_2=(a_1+b_1 i)(a_2+b_2 i)=a_1a_2-b_1b_2+(a_1b_2+a_2b_1)i\,.\end{gathered} \tag{8}$$

Покладаючи в останній формулі $a_1 = a_2 = 0$, $b_1 = b_2 = 1$, отримуємо важливе співвідношення $ii = -1$, яке з використанням скороченого позначення добутку $ii = i^2$ запишемо

$$i^2 = -1. \tag{9}$$

Рівність (9) означає, що на множині комплексних чисел рівняння $x^2 + 1 = 0$ має розв'язки. Одним із розв'язків цього рівняння є комплексне число $x = i$.

Відмітимо, що формулу (2) не обов'язково запам'ятовувати, оскільки її можна отримати автоматично, якщо формально помножити двочлени $a_1 + b_1 i$ і $a_2 + b_2 i$ за звичайними правилами множення двочленів, а потім згідно з рівністю (9) замінити i^2 на -1.

Наприклад,

$$\alpha_1\alpha_2 = (2+3i)(5+4i) = 10 + 15i + 8i + 12i^2 = 10 + 23i - 12 = -2 + 23i.$$

Відмітимо частинний випадок другої формули (8), коли дійсне число a множиться на комплексне число $a_1 + b_1 i$

$$a(a_1 + b_1 i) = (a + 0i)(a_1 + b_1 i) = aa_1 + ab_1 i. \tag{10}$$

1.5. Нехай $\alpha_1 = a_1 + b_1 i$ і $\alpha_2 = a_2 + b_2 i$ – два комплексних числа.

<u>Означення 5</u>. Різницею $\alpha_2 - \alpha_1$ називається комплексне число $z = x + yi$, яке задовольняє рівнянню

$$\alpha_1 + z = \alpha_2. \tag{11}$$

Якщо $\alpha_1 = a_1 + b_1 i$ і $\alpha_2 = a_2 + b_2 i$, то рівність (11) можна записати у вигляді $a_1 + x + i(b_1 + y) = a_2 + b_2 i$. Звідси

$$\begin{cases} a_1 + x = a_2 \\ b_1 + y = b_2 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x = a_2 - a_1 \\ y = b_2 - b_1 \end{cases}.$$

Отже, різниця комплексних чисел визначається формулою

$$\alpha_2 - \alpha_1 = (a_2 - a_1) + (b_2 - b_1)i. \tag{12}$$

Нехай $\alpha_1 = a_1 + b_1 i$ і $\alpha_2 = a_2 + b_2 i$, причому $\alpha_1 \neq 0$.

<u>Означення 6</u>. Часткою $\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}$ називається комплексне число $z = x + yi$, яке задовольняє рівнянню

$$\alpha_1 z = \alpha_2. \tag{13}$$

Перепишемо це рівняння у вигляді $(a_1+b_1i)(x+yi)=a_2+b_2i$. Звідси отримуємо систему рівнянь.

$$\begin{cases} a_1x-b_1y=a_2 \\ b_1x+a_1y=b_2. \end{cases} \tag{14}$$

Розв'язавши цю систему відносно x, y, будемо мати

$$x=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_1^2+b_1^2},\ y=\frac{a_1b_2-a_2b_1}{a_1^2+b_1^2}. \tag{15}$$

Отже, частка двох комплексних чисел єдина і визначається формулами (15).

1.6. <u>Означення 7</u>. Нехай $\alpha=a+bi$. Число $a-bi$, яке відрізняється від α лише знаком уявної частини, називається спряженим до числа α і позначається $\bar{\alpha}$.

За означенням маємо

$$\bar{\alpha}=a-bi. \tag{16}$$

Якщо α – дійсне число, тобто $\alpha=a+0i$, то $\bar{\alpha}=a-0i=a$. Отже, будь-яке дійсне число дорівнює своєму спряженому.

Теорема 1. Сума і добуток спряжених чисел є дійсним числом.

<u>Доведення</u>. Для будь-якого комплексного числа $\alpha=a+bi$ маємо

$$\alpha+\bar{\alpha}=a+bi+a-bi=2a,\quad \alpha\bar{\alpha}=(a+bi)(a-bi)=a^2-(bi)^2=a^2+b^2.$$

Теорема 2. Нехай $\alpha_1=a_1+b_1i$ і $\alpha_2=a_2+b_2i$ – два комплексних числа. Тоді

$$\overline{\alpha_1+\alpha_2}=\bar{\alpha}_1+\bar{\alpha}_2,$$
$$\overline{\alpha_1\alpha_2}=\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2,$$
$$\overline{\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)}=\frac{\bar{\alpha}_2}{\bar{\alpha}_1}.$$

<u>Доведення</u>. Доведення всіх рівностей проводиться за однією схемою. Доведемо, наприклад, що $\overline{\alpha_1\alpha_2}=\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2$. Дійсно, $\alpha_1\alpha_2=a_1a_2-b_1b_2+(a_1b_2+a_2b_1)i$. Тоді $\overline{\alpha_1\alpha_2}=a_1a_2-b_1b_2-(a_1b_2+a_2b_1)i$. З іншого боку, $\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2=(a_1-b_1i)(a_2-b_2i)=$ $=a_1a_2-b_1b_2-(a_2b_1+a_1b_2)i$. Отже, $\overline{\alpha_1\alpha_2}=\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2$.

Нехай потрібно виконати ділення двох комплексних чисел $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ $(\alpha_1\neq 0)$. Використовувати для цього формули (15) досить незручно, оскільки ці формули є громіздкими і важко запам'ятовуються. Тому простіше помножити чисельник і знаменник дробу на комплексне число, спряжене зі знаменником: $\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\alpha_2 \bar{\alpha}_1}{\alpha_1 \bar{\alpha}_1}$. Наприклад,

$$\frac{1+i}{2+3i} = \frac{(1+i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{2+3+(2-3)i}{4+9} = \frac{5-i}{13} = \frac{5}{13} - \frac{1}{13}i .$$

1.7. Зі шкільного курсу геометрії відомо, що між множиною всіх впорядкованих пар дійсних чисел і множиною всіх точок площини можна встановити взаємнооднозначну відповідність. Для цього на площині слід вибрати систему координат і кожній впорядкованій парі $(a;b)$ поставити у відповідність точку $M(a;b)$, тобто точку з абсцисою $x=a$ і ординатою $y=b$ (див. рис. 1).

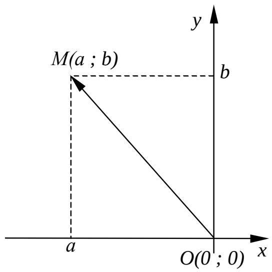


Рис. 1

Комплексні числа визначені нами як впорядковані пари дійсних чисел, для яких введено операції додавання і множення. Тому кожному комплексному числу $(a;b)=a+bi$ можна поставити у відповідність точку $M(a;b)$ і навпаки, кожній точці $M(a;b)$ площини – комплексне число $(a;b)=a+bi$.

Встановлена у такий спосіб відповідність є взаємнооднозначною. Ця відповідність дозволяє розглядати комплексні числа як точки координатної площини, яку ще називають комплексною площиною. Вісь абсцис називають дійсною віссю. На ній розташовані точки, яким відповідають числа вигляду $(a;0)=a$. Вісь ординат називають уявною віссю. На ній розташовані точки, яким відповідають уявні числа $(0;b)=bi$. Отже, комплексна площина – це площина C комплексних чисел, що розглядаються одночасно як числа і як точки координатної площини.

Поряд із зображенням комплексних чисел точками площини часто використовують інший спосіб – зображення комплексних чисел за допомогою векторів на площині. Комплексному числу $(a;b)=a+bi$ ставиться у відповідність радіус-вектор $\overrightarrow{OM}$ (див. рис. 1), тобто вектор, початок якого знаходиться у точці $O(0;0)$, а кінець – у точці $M(a;b)$. Отже, кожному вектору площини з початком в точці $O(0;0)$ і кінцем у точці

$M(a;b)$ відповідає комплексне число $(a;b)=a+bi$ і навпаки. Точці $O(0;0)$ відповідає нульовий вектор.

Зображення комплексних чисел векторами дозволяє дати просте геометричне тлумачення операцій над комплексними числами.

Нехай числам $\alpha_1=a_1+b_1i$ і $\alpha_2=a_2+b_2i$ відповідають вектори $\overrightarrow{OA_1}(a_1;b_1)$ і $\overrightarrow{OA_2}(a_2;b_2)$ (рис. 2).

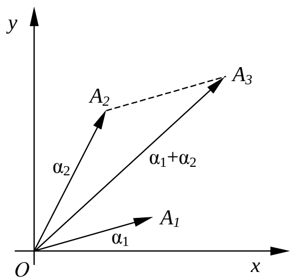


Рис. 2

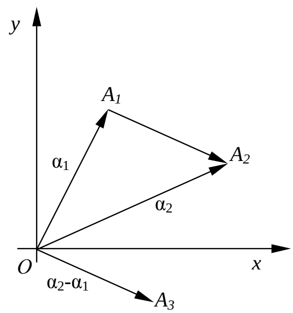


Рис. 3

Числу $\alpha_1+\alpha_2=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$ відповідає вектор з координатами $a_1+a_2,\ b_1+b_2$, тобто вектор $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}$. Додавання векторів $\overrightarrow{OA_1}$ і $\overrightarrow{OA_2}$ виконується за правилом паралелограма.

Отже, додавання комплексних чисел зводиться до додавання відповідних радіус-векторів.

Оскільки віднімання комплексних чисел є оберненою операцією по відношенню до додавання, застосуємо вказане правило до віднімання комплексних чисел. Нехай вектор $\overrightarrow{OA_1}$ є зображенням комплексного числа $\alpha_1=a_1+b_1i$, а вектор $\overrightarrow{OA_2}$ – комплексного числа $\alpha_2=a_2+b_2i$. Вектор $\overrightarrow{OA_2}-\overrightarrow{OA_1}=\overrightarrow{A_1A_2}$ є зображенням числа $\alpha_2-\alpha_1$. Щоб отримати точку A_3, якій відповідає число $\alpha_2-\alpha_1$, початок цього вектора потрібно перенести у початок координат (див. рис. 3).

§2. Тригонометрична форма комплексного числа та її застосування

2.1. Нехай на площині задано прямокутну систему координат. У цій системі довільному комплексному числу $\alpha=a+bi$ відповідає точка A з координатами a, b або радіус-вектор $\overrightarrow{OA}$ з тими ж координатами.

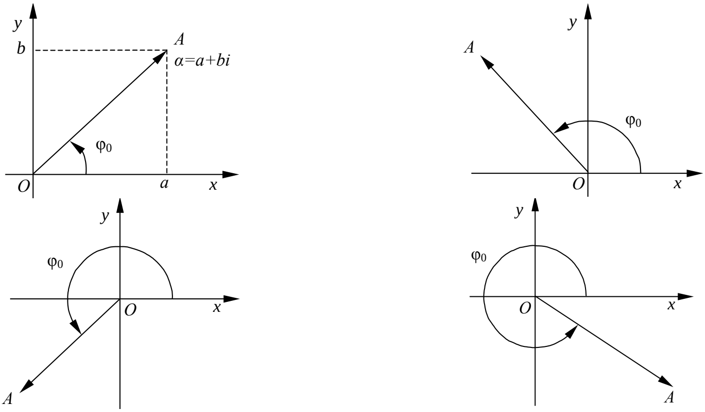


Рис. 1

<u>Означення 1</u>. Довжину вектора $\overrightarrow{OA}$ називають ***модулем комплексного числа*** α і позначають $|\alpha|$. ***Аргументом комплексного числа*** $\alpha \neq 0$ називають величину кута між додатним напрямком дійсної осі і вектором $\overrightarrow{OA}$, причому величину кута вважають додатною, якщо відлік цього кута проводиться проти руху стрілки годинника і від'ємною, якщо – за рухом стрілки годинника. Для числа $\alpha = 0$ аргумент не визначається.

На рис. 1 показано додатні кути φ_0 для різних випадків розташування точки A.

Аргумент комплексного числа визначається неоднозначно. Вияснимо характер неоднозначності аргументу у додатному напрямку, як показано на рис. 1. Якщо при відліку кута зробити декілька повних обертів у додатному напрямку, то отримаємо значення аргументу $\varphi_0 + 2\pi k$, де k – кількість повних обертів, тобто ціле невід'ємне число.

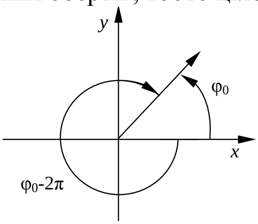


Рис. 2

Найменшим значенням аргументу у від'ємному напрямку є $-\left(2\pi - \varphi_0\right) = \varphi_0 - 2\pi$ (рис. 2). Якщо зробити додатково ще m повних обертів у від'ємному напрямку, то прийдемо до значення аргументу $\left(\varphi_0 - 2\pi\right) - 2\pi m = \varphi_0 - \left(m+1\right)2\pi,\ m \geq 0$.

Із наведених міркувань випливає, що всі значення аргументу визначаються формулою

$$\varphi = \varphi_0 + 2\pi k\,, \tag{1}$$

де k – довільне ціле число. Отже, аргумент кожного комплексного числа, що не дорівнює нулю, має нескінченну множину значень, пов'язаних між собою умовою: будь-які два значення аргументу відрізняються на число кратне 2π.

Зрозуміло, що неоднозначності аргументу можна уникнути за допомогою тих чи інших додаткових умов, які відокремлюють одне значення зі всіх можливих, наприклад $0 \le \varphi_0 < 2\pi$.

Означення 2. Значення аргументу φ_0 комплексного числа α, взяте з проміжку $0 \le \varphi_0 < 2\pi$, назвемо ***головним значенням аргументу*** комплексного числа α і позначимо $\varphi_0 = \arg\alpha$ або $\varphi_0 = \arg(a+bi)$.

Для множини всіх значень аргументу комплексного числа α введемо позначення $\operatorname{Arg}\alpha$ або $\operatorname{Arg}(a+bi)$. Тоді формулу (1) можна записати у вигляді

$$\operatorname{Arg}\alpha = \arg\alpha + 2\pi k \quad (k = 0; \pm1; \pm2; \pm3; \ldots). \tag{2}$$

Нижче, говорячи про аргумент комплексного числа, будемо мати на увазі одне з його можливих значень.

2.2. Число $\arg\alpha$ можна розглядати як узагальнення поняття знака дійсного числа. На дійсній осі Ox з початку координат O виходять два промені. Ці промені ми відрізняємо знаками "+" і "–". На комплексній площині з початку координат можна провести безліч променів. Щоб відрізнити ці промені, ми приписуємо кожному з них певне значення кута $\varphi_0 = \arg\alpha$.

Для модуля $|\alpha|$ комплексного числа $\alpha = a + bi$ будемо вживати позначення $|\alpha| = r$. Тоді за теоремою Піфагора (див. рис. 1) маємо

$$r = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}. \tag{3}$$

Оскільки $a = \operatorname{Re}\alpha$, $b = \operatorname{Im}\alpha$, формулу (3) можна записати у вигляді

$$r = |\operatorname{Re}\alpha + i\operatorname{Im}\alpha| = \sqrt{(\operatorname{Re}\alpha)^2 + (\operatorname{Im}\alpha)^2}. \tag{3′}$$

Використовуючи рис. 1, отримуємо формули, що виражають дійсну і уявну частини комплексного числа через його модуль і аргумент:

$$a = r\cos\varphi_0, \quad b = r\sin\varphi_0. \tag{4}$$

Очевидно, що аргумент φ_0 у цих формулах можна замінити на будь-яке інше значення аргументу $\varphi = \varphi_0 + 2k\pi$ ($k = 0; \pm1; \pm2; \ldots$) і записати

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \tag{5}$$

зокрема, подати саме комплексне число $\alpha = a + bi$ у вигляді

$$\alpha = a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{6}$$

Означення 3. Права частина рівності (6) називається тригонометричною формою запису комплексного числа.

Заданням модуля і аргументу комплексне число визначається однозначно. Нагадаємо, що для числа $\alpha = 0$ аргумент не визначається. У цьому і тільки у цьому випадку число задається лише своїм модулем (рівним нулю).

Для знаходження всіх значень аргументу комплексного числа $\alpha = a + bi \neq 0$ потрібно знайти всі числа φ, які задовольняють обом рівнянням (5), тобто розв'язати систему двох рівнянь (5).

Приклад 1. Знайти всі значення аргументу числа $\alpha = -5$.

Розв'язання. Оскільки $a = \mathrm{Re}\,\alpha = -5$, $b = \mathrm{Im}\,\alpha = 0$, то розв'язками першого рівняння $\cos\varphi = -1$ системи (5) є числа $\varphi = \pi + 2\pi k$, $k = 0; \pm1; \pm2; \ldots$, а розв'язками другого рівняння $\sin\varphi = 0$ – числа $\varphi = \pi n$, $n = 0; \pm1; \pm2; \ldots$.

Спільними коренями обох рівнянь є числа $\varphi = \pi + 2k\pi$, $k = 0; \pm1; \pm2; \ldots$.

Відповідь: $\mathrm{Arg}(-5) = \pi + 2k\pi$, $k = 0; \pm1; \pm2; \ldots$.

Аргумент комплексного числа $\alpha = a + bi \neq 0$ можна знаходити простіше: спочатку, використовуючи геометричну інтерпретацію комплексного числа, визначити, в якій чверті знаходиться точка $\alpha = a + bi$, а потім скористатись одним (будь-яким) з рівнянь (5).

Приклад 2. Знайти всі значення аргумента комплексного числа $\alpha = -1 + i$.

Розв'язання. Оскільки $\mathrm{Re}\,\alpha = -1$, $\mathrm{Im}\,\alpha = 1$, то число $\alpha = -1 + i$ лежить у другій чверті. Друге з рівнянь (5) має вигляд $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Одним із розв'язків цього рівняння, який лежить у другій чверті, є число $\varphi = \frac{3\pi}{4}$.

Відповідь: $\mathrm{Arg}(-1 + i) = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k = 0; \pm1; \pm2; \ldots$.

Приклад 3. Записати числа 1) $\alpha_1 = -1 - i$; 2) $\alpha_2 = i$ у тригонометричній формі.

Розв'язання. 1) Оскільки $|\alpha_1| = \sqrt{2}$, $\varphi_1 = \frac{5\pi}{4}$, то $\alpha_1 = -1 - i =$ $= \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$.

2) Оскільки $|\alpha_2| = 1$, а один із аргументів числа α_2 дорівнює $\frac{\pi}{2}$, то $\alpha_2 = i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$.

Приклад 4. Записати числа 1) $\alpha_1 = 2\cos\frac{7\pi}{4} - 2i\sin\frac{\pi}{4}$; 2) $\alpha_2 = -\cos\frac{\pi}{17} + i\sin\frac{\pi}{17}$ у тригонометричній формі.

Розв'язання. Для запису чисел α_1 і α_2 у тригонометричній формі немає потреби попередньо знаходити їх модулі і аргументи. 1) Скористаємось тим, що $-\sin\frac{\pi}{4} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)$. Тому $\alpha_1 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$.

2) Аналогічно, $-\cos\frac{\pi}{17} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{17}\right) = \cos\frac{16\pi}{17}$, $\sin\frac{\pi}{17} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{17}\right) = \sin\frac{16\pi}{17}$. Тому $\alpha_2 = \cos\frac{16\pi}{17} + i\sin\frac{16\pi}{17}$.

2.3. Аргументи комплексного числа можна знаходити по-іншому. З формул (5) випливає, що кожен з аргументів задовольняє рівнянню

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}. \tag{7}$$

Це рівняння не є рівносильним системі (5). Воно має більше розв'язків. Проте, якщо спочатку визначити, в якій чверті знаходиться точка $\alpha = a + bi$, а потім знайти такий розв'язок рівняння (7), який є кутом у цій чверті, то ми отримаємо аргумент числа $\alpha = a + bi$.

Приклад 5. Знайти один із аргументів числа $1 - i\sqrt{3}$.

Розв'язання. Точка $1 - i\sqrt{3}$ лежить у четвертій чверті. Знайдемо розв'язок рівняння (7), тобто рівняння $\operatorname{tg}\varphi = -\sqrt{3}$, який є кутом у цій чверті. Таким розв'язком є $\varphi = -\frac{\pi}{3}$.

Відповідь: $\varphi = -\frac{\pi}{3}$.

Якщо користуватись рівнянням (7), то зручніше ввести інше означення головного значення аргументу комплексного числа $\alpha = a + bi \neq 0$.

Означення 4. Головним значенням аргументу комплексного числа $\alpha = a + bi \neq 0$ назвемо одне і тільки одне значення φ аргументу, яке задовольняє умові

$$-\pi < \varphi \leq \pi. \tag{8}$$

Головне значення аргументу, як і раніше, позначимо $\varphi = \arg\alpha$. Тоді $\operatorname{Arg}\alpha = \arg\alpha + 2\pi k \quad (k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots)$ і ми знову приходимо до формули (2).

Для головного значення аргументу справедливі співвідношення

$$\arg\alpha = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{b}{a}, & a > 0 \\ \operatorname{arctg}\frac{b}{a} + \pi, & a < 0,\ b > 0 \\ \operatorname{arctg}\frac{b}{a} - \pi, & a < 0,\ b < 0. \end{cases} \tag{9}$$

Ці співвідношення дозволяють знайти головне значення аргументу, але часто зручніше це робити так, як у прикладі 5.

2.4. Тригонометричною формою комплексного числа зручно користуватися при виконанні операцій множення і ділення комплексних чисел. Перед тим, як перейти до розгляду цих операцій, відмітимо, що два комплексних числа

$$\alpha_1 = r_1\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right) \ \text{ і } \ \alpha_2 = r_2\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right) \tag{10}$$

дорівнюють одне одному тоді і тільки тоді, коли модулі цих чисел рівні, а аргументи відрізняються на $2\pi k$, $k = 0;\pm1;\pm2;\ldots$, тобто коли

$$r_1 = r_2, \quad \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k, \quad k = 0;\pm1;\pm2;\ldots. \tag{11}$$

Для добутку комплексних чисел α_1 і α_2 згідно з означенням отримуємо

$$\begin{aligned}\alpha_1\alpha_2 &= r_1r_2\left(\left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2\right) + i\left(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2\right)\right) = \\ &= r_1r_2\left(\cos\left(\varphi_1+\varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1+\varphi_2\right)\right)\cdot\end{aligned} \tag{12}$$

Формула (12) виражає добуток $\alpha_1\alpha_2$ у тригонометричній формі. Отже,

$$\left|\alpha_1\alpha_2\right| = r_1r_2, \quad \arg\left(\alpha_1\alpha_2\right) = \varphi_1 + \varphi_2 + 2\pi k. \tag{13}$$

Нами доведено таку теорему.

Теорема 1. Модуль добутку двох комплексних чисел дорівнює добутку модулів цих чисел, а аргумент добутку – сумі аргументів співмножників.

Використовуючи метод математичної індукції, формулу (12) можна поширити на будь-яке число n співмножників:

$$\begin{aligned}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n = r_1r_2\ldots r_n(\cos(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n)+ \\ +i\sin(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n)),\end{aligned} \tag{14}$$

де r_i, φ_i $\left(i = 1,2,\ldots,n\right)$ – модуль і аргумент числа α_i.

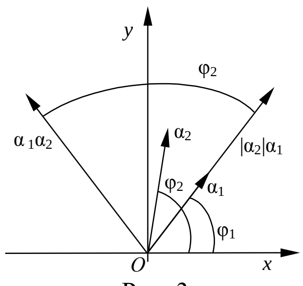


Рис. 3

Геометрично, добуток $\alpha_1\alpha_2$ можна отримати, розтягуючи вектор α_1 в $\left|\alpha_2\right|$ разів і повертаючи на кут φ_2 навколо початку координат (рис. 3).

Приклад 6. Знайти добуток чисел

$$\alpha_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{4} + i\sin\frac{11\pi}{4}\right) \ \text{ і } \ \alpha_2 = \sqrt{8}\left(\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}\right).$$

Розв'язання. Оскільки $\left|\alpha_1\right| = \sqrt{2}$, $\left|\alpha_2\right| = \sqrt{8}$, то $\left|\alpha_1\alpha_2\right| = \sqrt{2}\sqrt{8} = 4$. Аргументом добутку $\alpha_1\alpha_2$ є сума $\varphi_1 + \varphi_2 = \dfrac{11\pi}{4} + \dfrac{3\pi}{8} = \dfrac{25\pi}{8}$. Отже,

$$\alpha_1\alpha_2 = 4\left(\cos\frac{25\pi}{8} + i\sin\frac{25\pi}{8}\right) = 4\left(\cos\frac{9\pi}{8} + i\sin\frac{9\pi}{8}\right).$$

2.5. Перейдемо до ділення комплексних чисел

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{r_1\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right)}{r_2\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right)}, \qquad \alpha_2 \neq 0. \tag{15}$$

Помножимо чисельник і знаменник дробу (15) на $\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2$. В результаті будемо мати

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{r_1\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right)\left(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2\right)}{r_2\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right)\left(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2\right)} =$$

$$= \frac{r_1\left(\left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2\right) + i\left(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2\right)\right)}{r_2\left(\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2\right)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\left(\cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\right).$$

Звідси випливає, що

$$\left|\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right| = \frac{r_1}{r_2}, \quad \arg\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \varphi_1 - \varphi_2 + 2\pi k, \quad k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots. \tag{16}$$

Отже, нами доведено таку теорему.

Теорема 2. Модуль частки двох комплексних чисел дорівнює частці модулів цих чисел, а аргумент частки – різниці аргументів діленого і дільника.

Приклад 7. Записати число $\alpha = \dfrac{i-1}{\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}}$ у тригонометричній формі.

Розв'язання. Введемо позначення $\alpha_1 = i - 1$, $\alpha_2 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$. Для числа α_1 маємо: $|\alpha_1| = \sqrt{2}$, $\varphi_1 = \dfrac{3\pi}{4}$. За формулою (16) отримуємо

$$\alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\sqrt{2}}{1}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right)\right] = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right).$$

Відповідь: $\alpha = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{12} + i\sin\dfrac{5\pi}{12}\right)$.

З'ясуємо геометричний зміст частки двох комплексних чисел $\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}$, $\alpha_2 \neq 0$. Ця задача зводиться до геометричного змісту добутку комплексного числа α_1 на комплексне число

$$\frac{1}{\alpha_2}=\frac{1}{r_2\left(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2\right)}=\frac{\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2}{r_2\left(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2\right)\left(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2\right)}=$$
$$=\frac{\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2}{r_2\left(\cos^2\varphi_2+\sin^2\varphi_2\right)}=\frac{1}{r_2}\left(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2\right)=\frac{1}{r_2}\left(\cos\left(-\varphi_2\right)+i\sin\left(-\varphi_2\right)\right). \tag{17}$$

Із (17) випливає, що $\left|\frac{1}{\alpha_2}\right|=\frac{1}{r_2}$, $\arg\frac{1}{\alpha_2}=-\varphi_2$.

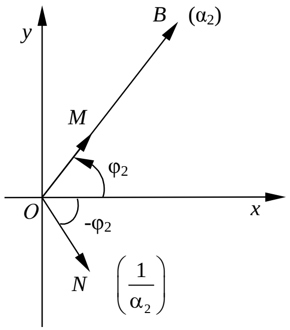


Рис. 4

Нехай вектору $\overrightarrow{OB}$ відповідає комплексне число α_2 і $\left|\overrightarrow{OM}\right|=\frac{1}{r_2}$. Тоді комплексному числу $\frac{1}{\alpha_2}$ буде відповідати вектор $\overrightarrow{ON}$, симетричний вектору $\overrightarrow{OM}$ відносно осі Ox (рис. 4). Розтягнувши вектор $\overrightarrow{ON}$ в $\left|\alpha_1\right|$ разів і повернувши його навколо початку координат на кут $\arg\alpha_1$, ми отримаємо геометричне зображення частки двох комплексних чисел.

§3. Піднесення до степеня і добування кореня

3.1. Теорема 1 (формула Муавра). При піднесенні комплексного числа до степеня з натуральним показником його модуль підноситься до степеня з тим же показником, а аргумент множиться на показник степеня, тобто

$$\alpha^n=\left(r\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)\right)^n=r^n\left(\cos n\varphi+i\sin n\varphi\right). \tag{1}$$

Доведення. Покладемо у формулі (14) §2 $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=\alpha$. В результаті отримуємо формулу (1), яка носить назву формули Муавра.

Формула Муавра залишається справедливою і для випадку цілого від'ємного числа $-n$ $\left(n>0\right)$:

$$\alpha^{-n}=\frac{1}{r^n}\left(\cos\left(-n\varphi\right)+i\sin\left(-n\varphi\right)\right). \tag{2}$$

Приклад 1. Записати число $\left(i-\sqrt{3}\right)^{13}$ в алгебраїчній формі.

Розв'язання. Спочатку запишемо дане число у тригонометричній формі, а потім перейдемо від тригонометричної форми до алгебраїчної. Знайдемо модуль і один із аргументів числа $\alpha=i-\sqrt{3}$: $r=\left|i-\sqrt{3}\right|=\sqrt{1+3}=2$, $\varphi=\frac{5\pi}{6}$.

Запишемо число $\alpha = i - \sqrt{3}$ у тригонометричній формі: $\alpha = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$.

Використовуючи формулу (1), отримуємо

$$\left(i-\sqrt{3}\right)^{13} = 2^{13}\left(\cos\frac{65\pi}{6} + i\sin\frac{65\pi}{6}\right) = 2^{13}\left(\cos\frac{60+5}{6}\pi + i\sin\frac{60+5}{6}\pi\right) =$$

$$= 2^{13}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 2^{13}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -2^{12}\sqrt{3} + 2^{12}i\ .$$

Відповідь: $\left(i-\sqrt{13}\right)^{13} = -2^{12}\sqrt{3} + 2^{12}i$.

Приклад 2. Виразити через степені $\sin\varphi$ і $\cos\varphi$ такі функції кратних кутів: 1) $\cos 4\varphi$; 2) $\sin 4\varphi$.

Розв'язання. Відомо, що $i^1 = i$; $i^2 = -1$; $i^3 = -i$; $i^4 = 1$ і $\left(a+b\right)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$. Використовуючи ці формули, знаходимо

$$\begin{aligned}&\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)^4 = \cos^4\varphi + 4i\cos^3\varphi\sin\varphi + 6i^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi + 4i^3\cos\varphi\sin^3\varphi + \\ &+ i^4\sin^4\varphi = \cos^4\varphi + 4i\cos^3\varphi\sin\varphi - 6\cos^2\varphi\sin^2\varphi - 4i\cos\varphi\sin^3\varphi + \sin^4\varphi = \\ &= \cos^4\varphi - 6\cos^2\varphi\sin^2\varphi + \sin^4\varphi + \left(4\cos^3\varphi\sin\varphi - 4\cos\varphi\sin^3\varphi\right)i\ .\end{aligned} \tag{3}$$

З іншого боку, за формулою Муавра, маємо

$$\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)^4 = \cos 4\varphi + i\sin 4\varphi\ . \tag{4}$$

Порівнюючи дійсні та уявні частини комплексних виразів (3), (4), отримуємо:

$$1)\ \cos 4\varphi = \cos^4\varphi - 6\cos^2\varphi\sin^2\varphi + \sin^4\varphi\ ; \tag{5}$$

$$2)\ \sin 4\varphi = 4\sin\varphi\cos^3\varphi - 4\cos\varphi\sin^3\varphi\ . \tag{6}$$

Приклад 3. Виразити 1) $\sin^4\varphi$; 2) $\cos^4\varphi$ через синуси та косинуси кратних кутів.
Розв'язання. Покладемо

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = z\ . \tag{7}$$

Тоді

$$\cos\varphi - i\sin\varphi = \bar{z}\ . \tag{8}$$

За формулою Муавра можна записати

$$\cos n\varphi + i\sin n\varphi = z^n\ , \tag{9}$$

$$\cos n\varphi - i\sin n\varphi = \bar{z}^n\ . \tag{10}$$

Із формул (7), (8), (9) і (10) отримуємо

$$z + \bar{z} = 2\cos\varphi\ ;\ 2i\sin n\varphi = z - \bar{z}\ , \tag{11}$$

$$z^n + \overline{z}^n = 2\cos n\varphi\,;\ \ 2i\sin n\varphi = z^n - \overline{z}^n\,. \qquad (12)$$

Крім того,

$$z^n\overline{z}^n = \left(z\,\overline{z}\right)^n = 1\,. \qquad (13)$$

На основі другої формули (11)

$$\sin^4\varphi = \left(\frac{z-\overline{z}}{2i}\right)^4 = \frac{1}{2^4}\left(z-\overline{z}\right)^4 = \frac{1}{2^4}\left(z^4 - 4z^3\overline{z} + 6z^2\overline{z}^2 - 4z\,\overline{z}^3 + \overline{z}^4\right) =$$
$$= \frac{1}{2^4}\left(z^4 + \overline{z}^4 - 4z\,\overline{z}\left(z^2+\overline{z}^2\right) + 6z^2\overline{z}^2\right).$$

За формулою (12)

$$z^4 + \overline{z}^4 = 2\cos 4\varphi\,;\ \ z^2 + \overline{z}^2 = 2\cos 2\varphi\,.$$

Згідно з формулою (13) $z\cdot\overline{z} = 1$; $z^2\overline{z}^2 = 1$.
Отже,

$$1)\ \sin^4\varphi = \frac{1}{2^4}\left(2\cos 4\varphi - 8\cos 2\varphi + 6\right) = \frac{1}{8}\cos 4\varphi - \frac{1}{2}\cos 2\varphi + \frac{3}{8}\,. \qquad (14)$$

Аналогічно,

$$2)\ \cos^4\varphi = \left(\frac{z+\overline{z}}{2}\right)^4 = \frac{1}{2^4}\left(z+\overline{z}\right)^4 = \frac{1}{2^4}\left(z^4 + 4z^3\overline{z} + 6z^2\overline{z}^2 + 4z\overline{z}^3 + \overline{z}^4\right) =$$
$$= \frac{1}{2^4}\left(2\cos 4\varphi + 8\cos 2\varphi + 6\right) = \frac{1}{8}\cos 4\varphi + \frac{1}{2}\cos 2\varphi + \frac{3}{8}\,. \qquad (15)$$

3.2. Перейдемо до операції добування кореня. Нехай задано два числа: комплексне w і натуральне n.

<u>Означення 1</u>. Комплексне число z називається коренем степеня n із числа w (позначається $\sqrt[n]{w}$), якщо

$$z^n = w\,. \qquad (16)$$

Наприклад, числа $z_1 = i$ і $z_2 = -i$ є квадратними коренями з числа $w = -1$, оскільки $i^2 = -1$ і $\left(-i\right)^2 = -1$. З означення 1 випливає, що кожний розв'язок рівняння (16) є коренем степеня n з числа w.

Якщо $w = 0$, то для довільного n рівняння (16) має один і тільки один розв'язок $z = 0$. Якщо $w \neq 0$, то і $z \neq 0$. Тому z і w можна записати у тригонометричній формі: $z = \rho\left(\cos\psi + i\sin\psi\right)$, $w = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$, де ψ і φ – фіксовані значення аргументів чисел z і w відповідно.

За формулою Муавра рівняння (17) приймає вигляд

$$\rho^n\left(\cos n\psi + i\sin n\psi\right) = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right). \qquad (17)$$

Два комплексні числа дорівнюють одне одному тоді і тільки тоді, коли модулі їх рівні, а аргументи відрізняються на $2\pi k$, де k – ціле число. Тому з рівності (17) випливає

$$\begin{cases} \rho^n = r \\ n\psi = \varphi + 2\pi k \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \psi = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}. \end{cases} \tag{18}$$

Зауважимо, що $\sqrt[n]{r}$ є арифметичним значенням кореня. Отже, всі розв'язки рівняння (16) можна записати у вигляді

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \quad k = 0; \pm 1; \pm 2; \ \ldots. \tag{19}$$

З'ясуємо питання про кількість різних значень кореня $\sqrt[n]{w}$. Підставляючи $k = 0; 1; 2; \ldots; n-1$ у формулу (19), отримаємо n різних значень $\sqrt[n]{w}$, оскільки різниця аргументів будь-яких двох з цих значень не кратна 2π. Дійсно, при $k = 0; 1; 2; \ldots; n-1$ отримуємо відповідно значення аргументів $\frac{\varphi}{n}, \ \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi\cdot 1}{n}, \ \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi\cdot 2}{n}, \ldots, \ \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi(n-1)}{n}$ і різницю двох значень аргументів (найбільшого і найменшого)

$$\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi(n-1)}{n} - \frac{\varphi}{n} = \frac{2\pi(n-1)}{n} < \frac{2\pi n}{n} = 2\pi .$$

Для різниці будь-яких інших аргументів ця нерівність є очевидною.

Якщо брати значення $k \neq 0; 1; 2; \ldots; n-1$, то інших комплексних чисел, відмінних від $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ ми не отримаємо.

Наприклад, при $k = n$ будемо мати

$$z_n = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi n}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi n}{n}\right)\right) = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right) = z_0 .$$

При $k = n+1$ отримуємо

$$z_{n+1} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi(n+1)}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi(n+1)}{n}\right)\right) =$$

$$= \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}\right) + 2\pi\right) + i\sin\left(\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}\right) + 2\pi\right)\right) =$$

$$= \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}\right) + 2\pi\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}\right)\right) = z_1 .$$

Тим самим ми довели таку теорему.

Теорема 2. Корінь степеня n з комплексного числа

$$w = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{20}$$

має рівно n різних значень, які визначаються формулою

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi}{n}\right), \quad k=0;\ 1;\ 2;\ldots;\ n-1. \tag{21}$$

З'ясуємо тепер геометричний зміст формули (21), тобто дослідимо розташування на координатній площині всіх коренів комплексного числа.

Всі точки $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ мають один і той же модуль $\sqrt[n]{r}$, а тому розташовані на колі з центром у початку координат і радіусом $\sqrt[n]{r}$. Якщо значення k змінюється на 1, то кут $\frac{\varphi+2\pi k}{n}$ змінюється на величину $\frac{2\pi}{n}$, тобто на $\frac{1}{n}$ частину повного кута 2π. Це означає, що точки $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ ділять зазначене коло на n рівних частин, тобто при $n>2$ є вершинами правильного n – кутника, вписаного в коло радіуса $\sqrt[n]{r}$.

Отриманий результат можна сформулювати у вигляді наступної теореми.

Теорема 3. Всі корені степеня n з комплексного числа (20) відповідають точкам комплексної площини, що розташовані у вершинах правильного n кутника, вписаного в коло з центром у початку координат і радіусом $\sqrt[n]{r}$.

Відмітимо випадок $n=2$. Обидва значення $\sqrt{w}$ мають рівні модулі. Одне з цих значень кореня отримується з іншого поворотом на кут π, тобто корені симетричні відносно початку координат.

Приклад 4. Знайти всі значення $\sqrt{4+4i}$.

Розв'язання. Запишемо комплексне число $4+4i$ у тригонометричній формі: $4+4i = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$. За формулою (21) маємо:

$$z_k = 2\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{2}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{2}\right), \quad k=0;1. \quad \text{Звідси} \quad z_0 = 2\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right),$$

$$z_1 = 2\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{2\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{2\pi}{2}\right)\right) = 2\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{8}+i\sin\frac{9\pi}{8}\right).$$

На рис. 5 зображені точки, які відповідають значенням квадратного кореня $\sqrt{4+4i}$.

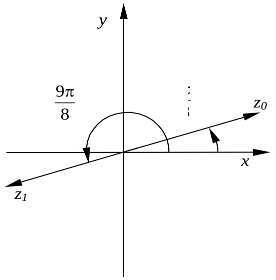


Рис. 5

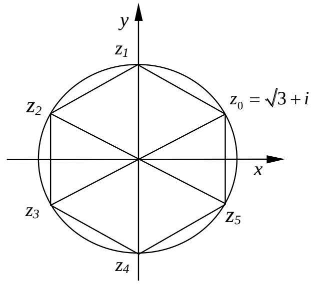


Рис. 6

Приклад 5. Знайти всі значення кореня $\sqrt[6]{-64}$.

Розв'язання. Запишемо число –64 у тригонометричній формі $-64 = 64(\cos\pi + i\sin\pi)$. За формулою (21) отримуємо:

$$z_k = 2\left(\cos\frac{\pi + 2\pi k}{6} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{6}\right), \quad k = 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5.\text{ Отже,}$$

$$z_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i, \quad z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2i,$$

$$z_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} + i, \quad z_3 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} - i,$$

$$z_4 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -2i, \quad z_5 = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right) = \sqrt{3} - i.$$

Точки, які відповідають числам z_k, розташовані у вершинах правильного шестикутника, вписаного в коло з центром у точці $z = 0$ і радіусом 2 (рис. 6).

Зауважимо, що комплексні числа z_0 і z_5, z_1 і z_4, z_2 і z_3 попарно спряжені.

§4. Показникова форма комплексного числа

У фізиці, електротехніці та інших дисциплінах досить часто замість тригонометричної форми запису комплексного числа використовують показникову форму запису цього числа.

Якщо $|z| = 1$, $\varphi = \arg z$, то за формулою (6) §2 одержуємо $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$.

<u>Означення 1</u>. Комплексне число $\cos\varphi + i\sin\varphi$ позначимо символом $e^{i\varphi}$.

<u>Означення 2</u>. Визначимо показникову функцію $e^{i\varphi}$ для довільного дійсного числа φ за допомогою формули

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi. \tag{1}$$

Цю формулу називають формулою Ейлера.

З формули (1) випливає, що для довільного дійсного числа φ виконуються рівності

$$\varphi = \arg e^{i\varphi}, \quad \left|e^{i\varphi}\right| = 1. \tag{2}$$

Зокрема, можна записати:

$$e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1,$$
$$e^{\frac{\pi}{2}i} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i,$$

$$e^{\pi i} = \cos\pi + i\sin\pi = -1,$$
$$e^{-\frac{\pi}{2}i} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -i$$

(див. рис. 1).

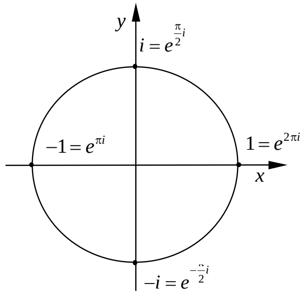


Рис. 1

Замінивши у формулі (1) φ на $-\varphi$, отримуємо $e^{-i\varphi} = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)$ або

$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi. \tag{3}$$

Рівність (3) можна записати у вигляді

$$\overline{e^{i\varphi}} = e^{-i\varphi}. \tag{4}$$

Почленним додаванням і відніманням рівностей (1) і (3) отримуються формули

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right),$$
$$\sin\varphi = \frac{1}{2i}\left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}\right), \tag{5}$$

які також носять назву формул Ейлера.

За допомогою формул (5) тригонометричні функції виражаються через показникові.

Функція $e^{i\varphi}$ має звичайні властивості показникової функції, так нібито число i є дійсним.

Наведемо основні з них:

$$e^{i\varphi_1}e^{i\varphi_2}=e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \tag{6}$$

$$\frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}}=e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}, \tag{7}$$

$$\left(e^{i\varphi}\right)^n=e^{in\varphi}. \tag{8}$$

Доведення. Скористаємось властивостями операцій над комплексними числами, записаними у тригонометричній формі. Маємо

$$e^{i\varphi_1}e^{i\varphi_2}=(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)=e^{i(\varphi_1+\varphi_2)},$$

що доводить справедливість властивості (6). Аналогічно доводиться властивість (7). Для доведення властивості (8) скористаємось формулою Муавра:

$$\left(e^{i\varphi}\right)^n=(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi=e^{in\varphi}.$$

Властивість (8) доведено.

Нехай комплексне число $z\neq 0$ задано у тригонометричній формі:

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi),\quad r=|z|. \tag{9}$$

Використовуючи формулу Ейлера (1), рівність (9) запишемо у вигляді

$$z=|z|e^{i\varphi}=re^{i\varphi},\quad z\neq 0. \tag{10}$$

Означення 3. Запис комплексного числа у вигляді (10) називається показниковою формою комплексного числа.

Приклад 1. Записати у показниковій формі наступні комплексні числа: 1) $z_1=-1-i\sqrt{3}$; 2) $z_2=5+3i$; 3) $z_3=\sin\alpha-i\cos\alpha$.

Розв'язання. 1) $|z_1|=2$, $\arg z_1=-\dfrac{2\pi}{3}$, $z_1=2e^{-\frac{2\pi}{3}i}$; 2) $|z_2|=\sqrt{34}$, $\arg z_2=\operatorname{arctg}\dfrac{3}{5}$, $z_2=\sqrt{34}e^{i\operatorname{arctg}\frac{3}{5}}$; 3) $z_3=\sin\alpha-i\cos\alpha=\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)$, тоді $|z_3|=1$, $\arg z_3=\alpha-\dfrac{\pi}{2}$, $z_3=1\cdot e^{\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)i}$.

Застосуємо показникову форму запису комплексного числа до операцій множення, ділення, піднесення до степеня та добування кореня.

Нехай комплексні числа z_1 і z_2 задано у показниковій формі

$$z_1=|z_1|e^{i\varphi_1},\ \ \varphi_1=\arg z_1;\quad z_2=|z_2|e^{i\varphi_2},\ \ \varphi_2=\arg z_2.$$

Тоді,

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2| e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}; \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}, \ z_2 \neq 0; \quad z_1^n = |z_1|^n e^{in\varphi_1};$$

$$\sqrt[n]{z_1} = \sqrt[n]{|z_1|}\ e^{i\left(\frac{\varphi_1+2\pi k}{n}\right)}, \quad k = 0;\ 1;\ 2;\ldots;n-1.$$

Приклад 2. Записати у показниковій формі всі значення $\sqrt[6]{-64}$.

Розв'язання. Використовуючи результати прикладу 5 §3, отримуємо

$$z_0 = 2e^{\frac{\pi}{6}i};\ z_1 = 2e^{\frac{\pi}{2}i};\ z_2 = 2e^{\frac{5\pi}{6}i};\ z_3 = 2e^{\frac{7\pi}{6}i};\ z_4 = 2e^{\frac{3\pi}{2}i};\ z_5 = 2e^{\frac{11\pi}{6}i}.$$

Приклад 3. Знайти суму

$$s(\varphi) = \sin\varphi + \sin 2\varphi + \ldots + \sin n\varphi,\ \varphi \neq 2\pi m, \quad m = 0;\pm1;\pm2;\ldots.$$

Розв'язання. Скористаємось показниковою формою запису комплексних чисел, яка значно спрощує викладки. Оскільки $\sin\varphi = \mathrm{Im}\,e^{i\varphi}$, то $s(\varphi) = \mathrm{Im}\,e^{i\varphi} + \mathrm{Im}\,e^{i2\varphi} + \ldots + \mathrm{Im}\,e^{in\varphi} = \mathrm{Im}\left(e^{i\varphi} + e^{i2\varphi} + \ldots + e^{in\varphi}\right).$

Використовуючи формулу суми геометричної прогресії $b + bq + \ldots + bq^{n-1} = \dfrac{b\left(1-q^n\right)}{1-q}$, отримуємо

$$s(\varphi) = \mathrm{Im}\frac{e^{i\varphi}\left(1-e^{in\varphi}\right)}{1-e^{i\varphi}} = \mathrm{Im}\frac{e^{i\varphi}\left(e^{\frac{in\varphi}{2}}e^{-\frac{in\varphi}{2}} - e^{\frac{in\varphi}{2}}e^{\frac{in\varphi}{2}}\right)}{e^{\frac{i\varphi}{2}}e^{-\frac{i\varphi}{2}} - e^{\frac{i\varphi}{2}}e^{\frac{i\varphi}{2}}} = \mathrm{Im}\frac{e^{i\varphi}e^{\frac{in\varphi}{2}}}{e^{\frac{i\varphi}{2}}} \cdot \frac{-\left(\dfrac{e^{\frac{in\varphi}{2}} - e^{-\frac{in\varphi}{2}}}{2i}\right)}{-\left(\dfrac{e^{\frac{i\varphi}{2}} - e^{-\frac{i\varphi}{2}}}{2i}\right)}.$$

Застосувавши другу з формул (5), можна записати

$$s(\varphi) = \mathrm{Im}\,e^{i\varphi\left(1-\frac{1}{2}+\frac{n}{2}\right)}\frac{\sin\frac{n\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

Оскільки $\dfrac{\sin\frac{n\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}$ – дійсне число, то його можна винести з під знака уявної частини Im. Тоді $s(\varphi) = \dfrac{\sin\frac{n\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}\mathrm{Im}\,e^{\frac{i(n+1)\varphi}{2}} = \dfrac{\sin\frac{n\varphi}{2}\sin\frac{(n+1)\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}$, оскільки $e^{\frac{i(n+1)\varphi}{2}} = \cos\dfrac{(n+1)\varphi}{2} + i\sin\dfrac{(n+1)\varphi}{2}$ і $\mathrm{Im}\,e^{\frac{i(n+1)\varphi}{2}} = \sin\dfrac{(n+1)\varphi}{2}$. Отже,

$$s(\varphi)=\frac{\sin\frac{n\varphi}{2}\sin\frac{(n+1)\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

Матриці і визначники

§1. Матриці. Основні позначення

<u>Означення 1</u>. Прямокутну таблицю дійсних чисел вигляду

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

називають матрицею A розміру $m \times n$ або порядку $m \times n$ (читається “m” на “n”).

Матриця A має m рядків і n стовпців. Елемент, який стоїть на перетині i-го рядка і j-го стовпця, позначають через a_{ij}. Часто використовується скорочений запис матриці $A=\{a_{ij}\}$ при $i=1,\ 2,\dots,m$ і $j=1,\ 2,\dots,n$.

Для позначення пропущених елементів матриці користуються трьома крапками. Так, наприклад, три крапки у першому рядку матриці A означають, що за елементами $a_{11},\ a_{12},\ a_{13}$ стоять a_{14}, a_{15} і так далі аж до a_{1j}, а потім від a_{1j} до a_{1n}. Аналогічно, у першому стовпці за елементами a_{11}, a_{21} послідовно стоять a_{31}, a_{41} і так далі до a_{i1}, а потім і до a_{m1}. Така форма запису дає чітке уявлення про елементи матриці, а також про її розміри, тобто про кількість рядків і стовпців.

Якщо $m=n$, тобто кількість рядків дорівнює кількості стовпців, матрицю A називають ***квадратною порядку*** m. У цьому випадку елементи $a_{11},\ a_{22},\ a_{33},\dots,a_{mm}$ називають діагональними, а їх суму $a_{11}+a_{22}+a_{33}+\dots+a_{mm}=\sum_{i=1}^{m} a_{ii}$ – слідом матриці.

Якщо всі недіагональні елементи квадратної матриці дорівнюють нулю, то таку матрицю називають ***діагональною***. Якщо всі діагональні елементи діагональної матриці дорівнюють 1, то таку діагональну матрицю називають ***одиничною*** матрицею порядку m:

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$ – одинична матриця.

Матрицю, яка містить тільки один стовпчик, називають ***матрицею-стовпцем***. Наприклад, вираз $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ є матрицею-стовпцем m-го порядку або матрицею X розміру $m \times 1$. Матрицю, що містить тільки один рядок, називають матрицею-рядком. Наприклад, вираз $Y = \left(y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n \right)$ є матрицею-рядком n-го порядку або матрицею Y розміру $1 \times n$.

Матрицю, всі елементи якої дорівнюють нулю, називають ***нульовою***:

$$O = \left\{ a_{ij} = 0 \right\}, \quad i = 1,\ 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, n.$$

Дві матриці $A = \left\{ a_{ij} \right\}$ і $B = \left\{ b_{ij} \right\}$ рівні, якщо вони одного розміру і відповідні елементи цих матриць співпадають: $a_{ij} = b_{ij}$, $i = 1, 2, \dots, m;$ $i = 1, 2, \dots, n$.

§2. Додавання і множення прямокутних матриць

2.1. <u>Означення 1</u>. Сумою двох прямокутних матриць $A = \left\{ a_{ij} \right\}$ і $B = \left\{ b_{ij} \right\}$ однакових розмірів ($i = 1,\ 2, \dots, m$; $j = 1,\ 2, \dots, n$) називається матриця $C = \left\{ c_{ij} \right\}$ того ж розміру, кожен елемент якої дорівнює сумі відповідних елементів матриць A і B, тобто $C = A + B$, якщо

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \cdots, n.$$

Операція знаходження суми матриць називається додаванням матриць. Згідно з означенням 1 додавати можна тільки прямокутні матриці однакових розмірів. З означення додавання матриць безпосередньо випливає, що ця операція комутативна та асоціативна:

1. $A + B = B + A$;

2. $\left(A + B \right) + C = A + \left(B + C \right)$.

Операція додавання матриць природно поширюється на випадок будь-якої скінченної кількості доданків.

2.2. <u>Означення 2</u>. Добутком матриці $A = \left\{ a_{ij} \right\}$, $i = 1,\ 2, \dots, m;$ $j = 1,\ 2, \dots, n$ на дійсне число α називається матриця $C = \left\{ c_{ij} \right\}$, $i = 1,\ 2, \dots,\ m;$ $j = 1,\ 2, \dots, n$, кожен елемент якої дорівнює добутку відповідного елемента матриці A на число α, тобто $C = \alpha A$, якщо $c_{ij} = \alpha a_{ij}$, $i = 1,\ 2, \dots, m;$ $j = 1,\ 2, \dots, n$.

Операція знаходження добутку матриці на число називається множенням матриці на число.

З означення добутку матриці на число випливає, що

1. $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$;

2. $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$;

3. $(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A)$,

де A і B – прямокутні матриці однакових розмірів, а α і β – дійсні числа.

Різниця $A-B$ двох прямокутних матриць $A=\{a_{ij}\}$ і $B=\{b_{ij}\}$, $i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,n$ вводиться за правилом

$$A-B=A+(-1)B, \quad A-B=\{a_{ij}-b_{ij}\}.$$

Добуток матриці A на матрицю B визначається тільки в тому випадку, коли кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B. Нехай дано матриці

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \boxed{a_{i1} \quad \ldots \quad a_{in}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1j} & \ldots & b_{1r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \ldots & b_{nj} & \ldots & b_{nr} \end{pmatrix},$$

в яких виділено i рядок матриці A і j стовпчик матриці B.

<u>**Означення 3**</u>. Добутком двох прямокутних матриць A і B називається матриця $C=\{c_{ij}\}$, $i=1,\ 2,\ldots,m;\ \ j=1,\ 2,\ldots,r$, елемент c_{ij} якої дорівнює сумі добутків елементів i-го рядка матриці A на відповідні елементи j-го стовпця матриці B

$$c_{ij}=\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\ .$$

Операція знаходження добутку матриць називається множенням матриць.

З означення випливає, що матриця C має стільки рядків, скільки їх у матриці A і стільки стовпців, скільки стовпців у матриці B.

Приклад 1. Дано матриці $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ і $B=\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю $C=AB$.

<u>*Розв'язання*</u>. Добуток AB існує, оскільки число стовпців матриці A дорівнює

числу рядків матриці B.

Тому $C = AB = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 4 + 0\cdot 6 & 3\cdot 7 + 0\cdot 8 \\ 1\cdot 4 + 1\cdot 6 & 1\cdot 7 + 1\cdot 8 \\ 5\cdot 4 + 2\cdot 6 & 5\cdot 7 + 2\cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 21 \\ 10 & 15 \\ 32 & 51 \end{pmatrix}$.

Зауважимо, що для квадратних матриць A і B однакового порядку множення можливе. Проте, навіть у цьому частинному випадку множення матриць не є комутативним.

Так, наприклад,

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}; \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Бачимо, що $AB \neq BA$.

Якщо $AB = BA$, то матриці A і B будемо називати перестановними або комутативними між собою.

Приклад 2. Дано матриці

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Знайти матрицю $C = AB$.

<u>*Розв'язання.*</u> За означенням маємо $C = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + & \dots & +a_{1n}x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & \dots & +a_{mn}x_n \end{pmatrix}$.

Зауважимо, що матриця C є матрицею-стовпцем, тобто матрицею розміру $m \times 1$.

Приклад 3. Дано матриці

$A = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_m \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$. Знайти матрицю $C = AB$.

<u>*Розв'язання*</u>.

$$C = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} y_1b_{11} + y_2b_{21} + \ldots + y_mb_{m1} & y_1b_{12} + y_2b_{22} + \ldots + y_mb_{m2} & \dots & y_1b_{1n} + y_2b_{2n} + \ldots + y_mb_{mn} \end{pmatrix}.$$

Отже, матриця C є матрицею-рядком, тобто матрицею розміру $1 \times n$.

Приклад 4. Дано матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ і } D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}.$$

Знайти матриці AD і DA.

Розв'язання.

$$AD=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d_1a_{11} & d_2a_{12} & \dots & d_na_{1n} \\ d_1a_{21} & d_2a_{22} & \dots & d_na_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_1a_{n1} & d_2a_{n2} & \dots & d_na_{mn} \end{pmatrix}.$$

Аналогічно, $DA=\begin{pmatrix} d_1a_{11} & d_1a_{12} & \dots & d_1a_{1n} \\ d_2a_{21} & d_2a_{22} & \dots & d_2a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_na_{n1} & d_na_{n2} & \dots & d_na_{mn} \end{pmatrix}$.

Якщо $D=E$, тобто $d_1=d_2=\ldots=d_n=1$, отримуємо $AE=EA=A$.

Операція множення матриць асоціативна та дистрибутивна:

1. $(AB)C=A(BC)$;

2. $(A+B)C=AC+BC$;

3. $A(B+C)=AB+AC$.

§3. Визначники другого порядку

Перервемося тимчасово у дослідженні матриць з тим, щоб розвинути деякі аспекти теорії визначників, які знадобляться нам у подальшому вивченні властивостей матриць. Поняття визначника виникло у зв'язку з проблемою запису розв'язку системи лінійних рівнянь у вигляді формул.

3.1 Виклад теорії визначників доцільно розпочати з розгляду визначників другого порядку, які виникли при розв'язуванні та дослідженні системи двох лінійних алгебраїчних рівнянь з двома невідомими.

Нехай дано систему

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2. \end{cases} \tag{1}$$

Пара чисел $x=x_0$, $y=y_0$ називається розв'язком системи (1), якщо вона перетворює в тотожність обидва рівняння цієї системи після заміни невідомих x, y відповідно числами x_0, y_0.

Для знаходження розв'язку системи (1) перетворимо її в таку систему, де кожне рівняння містить тільки одне невідоме. Для цього спочатку помножимо перше рівняння на b_2, друге – на $(-b_1)$ і додамо ці помножені рівняння почленно; потім перше рівняння помножимо на $(-a_2)$, друге – на a_1 і знову додамо. Після простих перетворень отримаємо

$$\begin{cases} (a_1b_2 - a_2b_1)x = c_1b_2 - c_2b_1 \\ (a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1c_2 - a_2c_1. \end{cases} \tag{2}$$

Покажемо, що за умови $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ система (2) рівносильна системі (1). Для цього помножимо перше рівняння системи (2) на a_1, друге – на b_1 і додамо; потім помножимо перше рівняння на a_2, друге – на b_2 і знову додамо. В результаті отримаємо

$$\begin{cases} (a_1b_2 - a_2b_1)(a_1x + b_1y) = (a_1b_2 - a_2b_1)c_1 \\ (a_1b_2 - a_2b_1)(a_2x + b_2y) = (a_1b_2 - a_2b_1)c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases} \tag{3}$$

Отже, ми від системи (1) перейшли до системи (2), а від неї – знову до системи (1). Звідси випливає, що системи (1) і (2) рівносильні, тобто кожний розв’язок системи (1) одночасно є розв’язком системи (2) і навпаки.

Із системи (2) отримуємо єдиний розв’язок системи (1)

$$x_0 = \frac{c_1b_2 - c_2b_2}{a_1b_2 - a_2b_1}; \quad y_0 = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}. \tag{4}$$

Перейдемо до встановлення правила, згідно з яким можна скласти дроби (4). Для цього з коефіцієнтів при невідомих системи (1) утворимо квадратну матрицю другого порядку

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Перший рядок цієї матриці містить коефіцієнти першого рівняння, другий – коефіцієнти другого рівняння. Складемо два добутки “хрест – нахрест”: a_1b_2 і a_2b_1. Якщо від першого добутку відняти другий, то ми отримаємо знаменник дробів (4)

$$D = a_1b_2 - a_2b_1. \tag{6}$$

<u>Означення 1</u>. Число D, яке визначається за формулою (6), називається визначником або детермінантом другого порядку матриці (5).

Визначник D прийнято позначати так:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \quad \text{або} \quad D = \det A. \tag{7}$$

Слід особливо наголосити на відмінності поняття матриці від поняття визначника матриці. Матриця A – це система 4-х чисел, а її визначник – це конкретне число, яке знаходиться за формулою (7).

<u>Означення 2</u>. Визначник D називається визначником системи (1).

У позначеннях визначників другого порядку чисельники формул (4) запишуться у такому вигляді

$$c_1b_2 - c_2b_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad a_1c_2 - a_2c_1 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}. \tag{8}$$

Тоді для формул (4) будемо мати

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}; \; y_0 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}. \tag{9}$$

Формули (9) називаються формулами Крамера для системи двох лінійних рівнянь з двома невідомими.

Отже, нами доведено наступну теорему.

Теорема 1. Якщо визначник системи (1) не дорівнює нулю, то ця система має єдиний розв’язок. Кожне невідоме є часткою двох визначників. Дільник цієї частки дорівнює визначнику системи, ділене – визначнику, який отримується з визначника системи заміною стовпця коефіцієнтів, що відповідає шуканому невідомому, стовпцем вільних членів рівнянь системи.

3.2. Користуючись формулою (7) легко довести наступні властивості визначника другого порядку.

Властивість 1. Визначник не змінить свого значення, якщо його рядки замінити стовпцями з тими ж номерами, тобто

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Доведення. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_2 & b_2 \end{vmatrix}$, що й потрібно було довести.

Перетворення, яке полягає в заміні рядків визначника стовпцями з тими ж номерами, називається ***транспонуванням визначника***. Доведену властивість 1 можна сформулювати ще так.

Властивість 1′. Визначник не змінюється при транспонуванні.

Із властивості 1 випливає, що будь-яке твердження, яке стосується рядків визначника, буде справедливим для його стовпців і навпаки, тобто у визначнику рядки і стовпці є рівноправними. Виходячи з цього, нижче будемо формулювати і доводити властивості тільки для рядків визначника.

Властивість 2. При переставленні рядків (стовпців) визначник змінює лише знак, тобто

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}.$$

Доведення.

$$-\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = -\left(a_2b_1 - a_1b_2\right) = a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Властивість 3. Визначник дорівнює нулю, якщо всі елементи деякого з його рядків (стовпців) дорівнюють нулю, наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

<u>*Доведення*</u>. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = a_1 0 - b_1 0 = 0$.

Властивість 4. Визначник дорівнює нулю, якщо в ньому пропорційні (або рівні) відповідні елементи його рядків (стовпців), тобто

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ \alpha a_1 & \alpha b_1 \end{vmatrix} = 0.$$

<u>*Доведення*</u>. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ \alpha a_1 & \alpha b_1 \end{vmatrix} = \alpha a_1 b_1 - \alpha a_1 b_1 = 0$, що й потрібно було довести.

Відмітимо, що рівність рядків маємо при $\alpha = 1$.

Властивість 5. Для того щоб помножити визначник на довільне число, достатньо помножити на це число елементи якогось одного рядка (стовпця), наприклад,

$$k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

<u>*Доведення*</u>. $k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = (ka_1)b_2 - a_2(kb_1) = \begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, що й потрібно було довести.

Проводячи доведення у зворотному напрямку, приходимо до такої властивості.

Властивість 6. Спільний множник елементів рядка (стовпця) можна винести за знак визначника.

Властивість 7. Визначник не змінить свого значення, якщо до елементів деякого рядка (стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне і те саме число, наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + ka_2 & b_1 + kb_2 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

<u>*Доведення*</u>.

$$\begin{vmatrix} a_1 + ka_2 & b_1 + kb_2 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 + ka_2 b_2 - a_2 b_1 - ka_2 b_2 = a_1 b_2 - a_2 b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Властивість 8. Якщо кожен елемент деякого рядка (стовпця) є сумою двох доданків, то такий визначник можна подати у вигляді суми двох визначників. У одного з цих визначників відповідний рядок (стовпець) складається з перших доданків, а у другого – з других доданків, наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_1' + a_1'' & a_2' + a_2'' \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1' & a_2' \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1'' & a_2'' \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Доведення.

$$\begin{vmatrix} a_1' + a_1'' & a_2' + a_2'' \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \left(a_1'b_2 - b_1a_2'\right) + \left(a_1''b_2 - b_1a_2''\right) = \begin{vmatrix} a_1' & a_2' \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1'' & a_2'' \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix},$$

що і потрібно було довести.

Ця властивість поширюється на довільну кількість доданків.

Властивість 9. Якщо визначник другого порядку дорівнює нулю, але серед його елементів є відмінні від нуля, то елементи одного з його рядків дорівнюють відповідним елементам другого рядка, помноженим на один і той же множник, тобто рядки пропорційні:

$$a_2 = \alpha a_1,\ b_2 = \alpha b_1. \tag{10}$$

Доведення. Нехай $a_1 \neq 0$ і $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow a_1b_2 - a_2b_1 = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow b_2 - \frac{a_2}{a_1}b_1 = 0 \Leftrightarrow b_2 = \frac{a_2}{a_1}b_1$. Позначимо $\frac{a_2}{a_1} = \alpha$, тоді $b_2 = \alpha b_1$. Отже, $a_2 = \alpha a_1,\ b_2 = \alpha b_1$, що й потрібно було довести.

3.3. Нехай визначник системи (1) $D = 0$. Тоді згідно з властивістю 9 справедливі рівності (10). Тому для лівих частин рівнянь системи (1), можна записати

$$a_2x + b_2y = \alpha\left(a_1x + b_1y\right). \tag{11}$$

Можливі такі випадки.

1. Вільні члени системи (1) c_1 і c_2 зв’язані тим же співвідношенням, тобто $c_2 = \alpha c_1$. У цьому випадку друге рівняння системи (1) є наслідком першого, тобто система (1) зводиться до одного незалежного рівняння – першого. Одне рівняння з двома невідомими має безліч розв’язків. Дійсно, одному з невідомих, наприклад y, можна надати довільного значення і визначити з першого рівняння системи (1) відповідне значення x; ці значення будуть задовольняти також і другому рівнянню системи (1), отже, будуть розв’язком системи (1).

2. Вільні члени c_1 і c_2 зв’язані іншим співвідношенням, тобто $c_2 \neq \alpha c_1$. Покажемо, що в цьому випадку система (1) не має розв’язків.

Нехай числа x_0, y_0 задовольняють першому рівнянню системи (1)

$$a_1x_0 + b_1y_0 = c_1. \tag{12}$$

Помножимо тотожність (12) на α:

$$\alpha\left(a_1x_0 + b_1y_0\right) = \alpha c_1. \tag{13}$$

Враховуючи рівність (11), рівність (13) можна подати у вигляді

$$a_2x_0 + b_2y_0 = \alpha c_1 \neq c_2. \tag{14}$$

Отже, жоден з розв'язків першого рівняння системи (1) не задовольняє другому рівнянню системи (1) і навпаки. Система (1) у цьому випадку не має розв'язку.

Приклад 1. Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 2x - 3y = -7 \\ 5x - 4y = 12. \end{cases}$$

Розв'язання. Складемо матрицю з коефіцієнтів при невідомих: $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$. Знайдемо визначник цієї матриці: $D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - (-3) \cdot 5 = 23$. Оскільки $D \neq 0$, то можна скористатись формулами (9). Визначимо чисельники формул (9):

$D_1 = \begin{vmatrix} -7 & -3 \\ 12 & 4 \end{vmatrix} = -28 + 36 = 8$, $D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 5 & 12 \end{vmatrix} = 24 + 35 = 59$. Отже, $x = \dfrac{D_1}{D} = \dfrac{8}{23}$, $y = \dfrac{D_2}{D} = \dfrac{59}{23}$.

§4. Визначники третього порядку

У попередньому параграфі ми розглянули операцію, яка кожній квадратній матриці другого порядку ставить у відповідність дійсне число – визначник цієї матриці.

4.1. Розглянемо тепер квадратну матрицю A третього порядку

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

<u>Означення 1</u>. Визначником третього порядку матриці A називається число, яке визначається за формулою

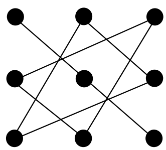
$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Рівність (2) називається розкладом визначника D за елементами першого рядка.

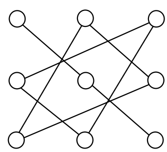
Розкриємо кожен з визначників другого порядку в рівності (2). В результаті отримаємо такий вираз для визначника третього порядку:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \quad (3)$$

Спробуємо розібратися зі структурою визначника третього порядку. Права частина рівності (3) містить три добутки чисел зі знаком плюс і три добутки чисел зі знаком мінус. Існує закономірність, яка називається ***правилом діагоналей*** і полягає в наступному: добуток чисел, розташованих на головній діагоналі визначника (добуток чисел a_{11}, a_{22}, a_{33}), береться зі знаком плюс. Зі знаком плюс беруться також два добутки чисел, розташованих у вершинах двох рівнобедрених трикутників з основами, паралельними головній діагоналі, і з вершинами у протилежних кутах. Три добутки, які знаходяться за тим же правилом, але по відношенню другої діагоналі визначника, беруться зі знаком мінус. Схематично описане правило можна зобразити так:



“+”



“–”

Наприклад,

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot1\cdot5 + 2\cdot2\cdot3 + 2\cdot4\cdot(-1) - (-1)\cdot1\cdot3 - 1\cdot2\cdot4 - 2\cdot2\cdot5 = -16.$$

<u>Означення 2</u>. Мінором деякого елемента визначника третього порядку називається визначник другого порядку, який отримується з визначника третього порядку шляхом викреслення рядка і стовпця, на перетині яких знаходиться даний елемент.

Так, наприклад, мінором елемента a_{32} є визначник $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$. Мінор елемента a_{ij} будемо позначати M_{ij}.

<u>Означення 3</u>. Алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} називається його мінор, взятий зі знаком $(-1)^{i+j}$. Алгебраїчне доповнення будемо позначати A_{ij}.

Згідно з означенням 3 маємо

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} . \tag{4}$$

Наприклад, алгебраїчним доповненням елемента a_{11} є число $A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, а алгебраїчним доповненням елемента a_{23} – число $A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$.

Запишемо розклад визначника D за елементами першого рядка (див. (2)) у термінах алгебраїчних доповнень цих елементів

$$\begin{aligned} D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \\ &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} . \end{aligned} \tag{5}$$

Доведемо справедливість формули (5) для будь-якого рядка (стовпця) визначника третього порядку.

Теорема 1. Визначник третього порядку можна розкласти за елементами довільного його рядка або стовпця, іншими словами, визначник третього порядку дорівнює сумі добутків елементів довільного його рядка або стовпця на їх алгебраїчні доповнення, тобто

$$\begin{aligned} &D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} ; \qquad D = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} ; \\ &D = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} ; \qquad D = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} ; \\ &D = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} ; \qquad D = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} . \end{aligned} \tag{6}$$

<u>Доведення</u>. Доведення всіх формул (6) (справедливість 1-ї випливає з означення) проводиться за однією і тією ж схемою. Доведемо, наприклад, рівність

$$D = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} . \tag{7}$$

Маємо

$$\begin{aligned} a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} &= -a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \\ = -a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{13}a_{32} &+ a_{22}a_{11}a_{33} - a_{22}a_{13}a_{31} - a_{23}a_{11}a_{32} + a_{23}a_{12}a_{31} . \end{aligned} \tag{8}$$

Порівнюючи рівності (8) і (3), переконуємося у справедливості рівності (7). Теорему доведено.

Теорема 2. Сума добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) визначника на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого рядка (стовпця) дорівнює нулю, тобто

$$\begin{aligned}
&a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}=0, \quad && a_{11}A_{12}+a_{21}A_{22}+a_{31}A_{32}=0,\\
&a_{11}A_{31}+a_{12}A_{32}+a_{13}A_{33}=0, && a_{11}A_{13}+a_{21}A_{23}+a_{31}A_{33}=0,\\
&a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12}+a_{23}A_{13}=0, && a_{12}A_{11}+a_{22}A_{21}+a_{32}A_{31}=0,\\
&a_{21}A_{31}+a_{22}A_{32}+a_{23}A_{33}=0, && a_{12}A_{13}+a_{22}A_{23}+a_{32}A_{33}=0,\\
&a_{31}A_{11}+a_{32}A_{12}+a_{33}A_{13}=0, && a_{13}A_{11}+a_{23}A_{21}+a_{33}A_{31}=0,\\
&a_{31}A_{21}+a_{32}A_{22}+a_{33}A_{23}=0, && a_{13}A_{12}+a_{23}A_{22}+a_{33}A_{32}=0.
\end{aligned} \tag{9}$$

Доведення. Доведення проводиться за тією ж схемою, що і доведення теореми 1. Доведемо, наприклад, рівність

$$a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}=0.$$

Справді,

$$a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}=-a_{11}\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{12}\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{13}\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}=$$
$$=-a_{11}a_{12}a_{33}+a_{11}a_{13}a_{32}+a_{12}a_{11}a_{33}-a_{12}a_{13}a_{31}-a_{13}a_{11}a_{32}+a_{13}a_{12}a_{31}=0.$$

4.2. Легко перевірити, що властивості 1–6, 8 визначників другого порядку, викладені в §3, залишаються справедливими і для визначників третього порядку. Метод доведення цих властивостей такий же, як і при доведенні теорем 1 і 2. Покажемо це на прикладі властивості 1′ §3.

Властивість 1′. При транспонуванні визначник не змінюється , тобто

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{21} & a_{31}\\ a_{12} & a_{22} & a_{32}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{vmatrix}. \tag{10}$$

Доведення. За означенням

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{21} & a_{31}\\ a_{12} & a_{22} & a_{32}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{23}a_{32}a_{11}=D,$$

що й потрібно було довести.

Щодо властивості 7 §3, то вона отримує розширене тлумачення. Перед тим, як сформулювати цю властивість, введемо важливе поняття лінійної комбінації рядків.

<u>Означення 4</u>. Будь-який рядок визначника матриці (1), наприклад третій, є лінійною комбінацією двох інших рядків, якщо його елементи пов'язані з відповідними елементами двох інших рядків співвідношеннями

$$a_{31} = \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21}, \quad a_{32} = \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22}, \quad a_{33} = \lambda_1 a_{13} + \lambda_2 a_{23}, \tag{11}$$

де λ_1, λ_2 – дійсні числа.

Властивість 7′. Визначник третього порядку не зміниться, якщо до елементів деякого рядка (стовпця) додати довільну лінійну комбінацію інших рядків (стовпців), наприклад

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} & a_{32} + \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22} & a_{33} + \lambda_1 a_{13} + \lambda_2 a_{23} \end{vmatrix}. \tag{12}$$

Доведення рівності (12) аналогічне доведенню рівностей (6).

Властивість 9. Якщо визначник третього порядку дорівнює нулю, але серед його мінорів є відмінні від нуля, то в цьому визначнику один з його рядків (стовпців) є лінійною комбінацією інших рядків (стовпців). Якщо ж всі мінори рівні нулю, але є елементи, відмінні від нуля, то всі рядки (всі стовпці) пропорційні між собою.

<u>Доведення</u>. Нехай

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{і} \quad A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Помножимо визначник D на довільне число w і запишемо результат згідно з 5-ою властивістю у вигляді

$$wD = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & wa_{13} \\ a_{21} & a_{22} & wa_{23} \\ a_{31} & a_{32} & wa_{33} \end{vmatrix} = 0 .$$

До елементів третього стовпця останнього визначника додамо відповідні елементи перших двох стовпців, помножені на u і v відповідно:

$$wD = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ua_{11} + va_{12} + wa_{13} \\ a_{21} & a_{22} & ua_{21} + va_{22} + wa_{23} \\ a_{31} & a_{32} & ua_{31} + va_{32} + wa_{33} \end{vmatrix} = 0 .$$

Розкладемо цей визначник за елементами останнього стовпця:

$$A_{13}\left(ua_{11}+va_{12}+wa_{13}\right)+A_{23}\left(ua_{21}+va_{22}+wa_{23}\right)+ \\ +A_{33}\left(ua_{31}+va_{32}+wa_{33}\right)=0\,. \tag{13}$$

За умовою $A_{33}\neq 0$. Поділивши рівність (13) на A_{33} і ввівши позначення $\lambda_1=-\dfrac{A_{13}}{A_{33}};\quad \lambda_2=-\dfrac{A_{23}}{A_{33}}$, знаходимо

$$ua_{31}+va_{32}+wa_{33}=\lambda_1\left(ua_{11}+va_{12}+wa_{13}\right)+\lambda_2\left(ua_{21}+va_{22}+wa_{23}\right). \tag{14}$$

Рівність (14) справедлива для будь-яких u,v,w. Якщо $u=1$, $v=0$, $w=0$, то $a_{31}=\lambda_1 a_{11}+\lambda_2 a_{21}$. Поклавши в рівності (14) по черзі: 1) $u=0, v=1, w=0$ і 2) $u=0, v=0, w=1$, отримуємо $a_{32}=\lambda_1 a_{12}+\lambda_2 a_{22}$, $a_{33}=\lambda_1 a_{13}+\lambda_2 a_{23}$, що й доводить першу частину властивості 9.

Другу частину доведемо, скориставшись властивістю 9 визначника другого порядку.

У нашому випадку всі мінори дорівнюють нулю, тому одночасно маємо $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}=0$. Тоді згідно з першою рівністю $a_{21}=\lambda a_{11}$, $a_{22}=\lambda a_{12}$, а згідно з другою – $a_{21}=\mu a_{11}$, $a_{23}=\mu a_{13}$.

Із порівняння рівностей $a_{21}=\lambda a_{11}$ і $a_{21}=\mu a_{11}$ випливає, що $\lambda=\mu$, а тому $a_{23}=\lambda a_{13}$. Отже, елементи другого рядка пропорційні елементам першого рядка. Аналогічно доводиться пропорційність відповідних елементів першого і третього рядка: $a_{31}=\sigma a_{11}$, $a_{32}=\sigma a_{12}$, $a_{33}=\sigma a_{13}$, що й доводить другу частину властивості 9.

§5. Розв'язування та дослідження системи трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими

5.1. Нехай задано систему трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3. \end{cases} \tag{1}$$

Якщо підстановка $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$, $x_3 = \gamma$ перетворює рівняння системи (1) у тотожності, то трійку чисел α, β, γ будемо називати розв'язком цієї системи.

Нехай

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \tag{2}$$

визначник системи (1). Перейдемо від цієї системи до такої системи, в якій кожне рівняння містить лише одне невідоме. Для цього спочатку помножимо перше, друге та третє рівняння (1) відповідно на A_{11}, A_{21} та A_{31} і додамо, потім – на A_{12}, A_{22}, та A_{32} і знову додамо, нарешті, – на A_{13}, A_{23}, A_{33} і знову додамо (A_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} визначника (2)).

Використовуючи формули (6) і (9) § 4, приходимо до нової системи рівнянь

$$\begin{cases} Dx_1 = A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + A_{31}b_3 \\ Dx_2 = A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + A_{32}b_3 \\ Dx_3 = A_{13}b_1 + A_{23}b_2 + A_{33}b_3. \end{cases} \tag{3}$$

Якщо $D \neq 0$, то система (3) рівносильна початковій системі (1). Щоб у цьому переконатись, достатньо додати рівняння (3), помноживши їх спочатку відповідно на a_{11}, a_{12}, a_{13}, потім – на a_{21}, a_{22}, a_{23} і, нарешті, – на a_{31}, a_{32}, a_{33}. В результаті будемо мати

$$D\left(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3\right) = b_1\left(A_{11}a_{11} + A_{12}a_{12} + A_{13}a_{13}\right) +$$
$$+ b_2\left(A_{21}a_{11} + A_{22}a_{12} + A_{23}a_{13}\right) + b_3\left(A_{31}a_{11} + A_{32}a_{12} + A_{33}a_{13}\right),$$

або

$$D\left(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3\right) = Db_1.$$

Аналогічно,

$$D\left(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3\right) = Db_2, \quad D\left(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3\right) = Db_3.$$

Якщо $D \neq 0$, то скоротивши останні рівності на D, отримуємо початкову систему, що і доводить рівносильність систем (1) і (3). Праві частини системи (3) запишемо у вигляді

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13}\\ b_2 & a_{22} & a_{23}\\ b_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=b_1A_{11}+b_2A_{21}+b_3A_{31},$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13}\\ a_{21} & b_2 & a_{23}\\ a_{31} & b_3 & a_{33}\end{vmatrix}=b_1A_{12}+b_2A_{22}+b_3A_{32}, \tag{4}$$

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & b_2\\ a_{31} & a_{32} & b_3\end{vmatrix}=b_1A_{13}+b_2A_{23}+b_3A_{33}.$$

Прийнявши до уваги позначення (4), систему (3) подамо у вигляді

$$\begin{matrix}\begin{cases} Dx_1=D_1\\ Dx_2=D_2\\ Dx_3=D_3\end{cases}\\ D\neq 0\end{matrix} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x_1=\dfrac{D_1}{D}\\ x_2=\dfrac{D_2}{D}\\ x_3=\dfrac{D_3}{D}\end{cases}. \tag{5}$$

Формули (5) виражають правило Крамера для системи трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими. Наведене у §3 формулювання цього правила переноситься і на даний випадок.

5.2. Нехай визначник системи D дорівнює нулю, але серед його мінорів є хоча б один відмінний від нуля. Тоді, використовуючи властивість 9, можна стверджувати, що один з рядків визначника D, наприклад третій, є лінійною комбінацією двох інших рядків. Тому і ліва частина відповідного рівняння системи (1) є лінійною комбінацією лівих частин двох інших рівнянь

$$a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=\lambda_1\left(a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3\right)+\lambda_2\left(a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3\right). \tag{6}$$

Якщо і вільні члени рівнянь системи (1) пов'язані тим же співвідношенням, тобто

$$b_3=\lambda_1b_1+\lambda_2b_2, \tag{7}$$

то в системі (1) лише два незалежних рівняння – перше та друге. Третє рівняння є їх наслідком. Отже, система зводиться до двох рівнянь з трьома невідомими. Така система невизначена і має безліч розв'язків. Одному з невідомих можна надавати довільного значення. Тоді двоє інших невідомих визначаються з перших двох рівнянь системи.

У розглянутому випадку всі три визначники (4) D_1, D_2, D_3 дорівнюють нулю.

Якщо вільні члени рівнянь системи (1) пов'язані іншим співвідношенням, тобто якщо

$$b_3 \neq \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 ,$$

то, як і у випадку системи двох рівнянь з двома невідомими, система (1) суперечлива і немає розв'язків. У цьому випадку серед визначників D_1, D_2, D_3 є хоча б один відмінний від нуля.

Аналогічну ситуацію маємо і тоді, коли одночасно з визначником системи D нулю дорівнюють всі його мінори, але серед елементів визначника є відмінні від нуля. У цьому випадку, відповідно до властивості 9, будуть пропорційними елементи всіх трьох рядків визначника D. Тому ліві частини рівнянь системи (1) отримуються одна з другої шляхом множення на постійні множники

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = \lambda\left(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3\right),$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = \sigma\left(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3\right).$$

Якщо такими ж співвідношеннями пов'язані і вільні члени системи (1), тобто, якщо

$$b_2 = \lambda b_1, \quad b_3 = \sigma b_1, \tag{8}$$

то система (1) містить лише одне незалежне рівняння з трьома невідомими і тому має безліч розв'язків. Двом невідомим можна надавати довільних значень. Тоді третє невідоме знаходиться з будь-якого рівняння системи. У цьому випадку дорівнюють нулю не тільки три визначники D_1, D_2, D_3, але і всі їх мінори.

Якщо хоча б одне із співвідношень (8) не виконується, то система є суперечливою і розв'язків не має. Хоча три визначники D_1, D_2, D_3 і дорівнюють у цьому випадку нулю, але серед їх мінорів є хоча б один відмінний від нуля.

5.3. Розглянемо однорідну систему трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Припустимо, що визначник системи (9) відмінний від нуля. Тоді згідно з правилом Крамера (див. формули (5)) система (9) буде мати єдиний розв'язок $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Дійсно, всі три визначники D_1, D_2, D_3 у цьому випадку дорівнюють нулю, оскільки в кожному з них міститься стовпчик з нульових елементів. Будемо називати розв'язок $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ ***нульовим***.

Якщо визначник системи D дорівнює нулю, то згідно з властивістю 9 один з його рядків є лінійною комбінацією інших або всі рядки пропорційні. Але оскільки вільні члени системи (9) дорівнюють нулю, то вказані залежності завжди будуть виконуватись і для рівнянь. Це означає, що в системі (9) буде або два незалежних рівняння (якщо не всі мінори визначника D дорівнюють нулю), або одне (якщо рівні нулю всі мінори, але не всі елементи визначника D дорівнюють нулю). В обох випадках система (9) невизначена і має безліч розв’язків.

Результат дослідження можна сформулювати у вигляді такої теореми.

Теорема 1. Однорідна система трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими має відмінні від нульового розв’язки лише у тому випадку, коли її визначник дорівнює нулю.

§6. Поняття про визначники довільного порядку

Нехай задано квадратну матрицю A порядку n

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Означення 1. Визначником матриці A (визначником порядку n) називається число, яке визначається рівністю

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}-$$

$$-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\ldots+(-1)^{n+1}a_{1n}\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2\,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,n-1} \end{vmatrix}. \tag{1}$$

Рівність (1) називається розкладом визначника D за елементами першого рядка.

Аналогічно визначникам третього порядку вводяться поняття мінорів та алгебраїчних доповнень елементів визначника порядку n і показується, що цей визначник дорівнює сумі добутків елементів довільного рядка (стовпця) на алгебраїчні доповнення цих елементів.

Всі розглянуті нами властивості визначників другого і третього порядку поширюються і на випадок визначника n-го порядку. Використовуючи, наприклад, властивість 7, обчислення цього визначника можна звести до обчислення одного визначника $(n-1)$-го порядку, а не обчислювати n визначників, як це вимагається в означенні 1. Конкретний спосіб зведення визначника до потрібного вигляду пояснимо на такому прикладі.

Приклад 1. Обчислити визначник 5-го порядку

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & \boxed{1} & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

У другому рядку визначника вже є два нулі, тому розглянемо саме цей рядок. Будемо намагатися, не змінюючи величини визначника, перетворити його так, щоб у другому рядку всі елементи, крім a_{24} зробити нулями. Для цього достатньо до другого стовпця додати четвертий, помножений на 2, а до третього стовпця додати четвертий, помножений на (–2). Після цих перетворень отримуємо визначник

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 7 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Розкладемо цей визначник за елементами другого рядка

$$D=1\cdot(-1)^{2+4}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 7 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 7 & 1 \end{vmatrix}.$$

В отриманому визначнику зручно зупинитись на другому стовпці, оскільки в ньому вже є один нуль і, крім того, його елементи невеликі. Перетворимо визначник так, щоб всі елементи другого стовпця, крім елемента $a_{12}=-1$, стали рівними нулю. Для цього від третього рядка віднімемо перший, а від четвертого – подвоєний перший. В результаті отримуємо визначник, що дорівнює початковому

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}.$$

Розклавши його за елементами другого стовпця, знаходимо

$$D=(-1)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}.$$

Отриманий визначник третього порядку можна обчислити безпосередньо. Однак простіше розкласти його за елементами першого стовпця:

$$D = (-1)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1.$$

§7. Обернена матриця

7.1. Розглянемо множину квадратних матриць порядку n. Дві квадратні матриці одного і того ж порядку n можна перемножити, при цьому в добутку отримаємо квадратну матрицю того ж порядку n. У §2 (див. приклад 4) ми показали, що одинична матриця порядку n при множені матриць веде себе так само, як і звичайна одиниця при множені дійсних чисел.

Визначимо степені квадратних матриць. Нехай A – довільна квадратна матриця n-го порядку. За означенням покладемо

$$A^0 = E,\ A^1 = A,\ A^2 = AA,\ \ A^3 = AAA,\ \dots .$$

Внаслідок асоціативності множення матриць добуток $\underbrace{AA...A}_{m \text{ раз}}$ не залежить від способу розставлення в ньому дужок, тому степінь A^m визначений однозначно.

З означення випливає, що для довільних цілих невід'ємних k і l справедливі формули

$$A^k A^l = A^{k+l}\ ,\quad \left(A^k\right)^l = A^{kl}\ .$$

З першої формули, як наслідок, отримуємо

$$A^k A^l = A^l A^k\ ,$$

тобто два степені однієї і тієї ж квадратної матриці завжди можна переставити.

Розглянемо многочлен з дійсними коефіцієнтами $f(x) = \alpha_0 x^m + {}$ $+\alpha_1 x^{m-1} + \dots + \alpha_m$. Під $f(A)$ будемо розуміти матрицю

$$f(A) = \alpha_0 A^m + \alpha_1 A^{m-1} + \dots + \alpha_m E\ .$$

7.2. Для кожного числа a, що не дорівнює нулю, існує обернене число $a^{-1} = 1/a$, тобто число, яке в добутку з a дає одиницю: $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$.

Виявляється, що аналогічна властивість справедлива і для матриць, причому роль умови $a \neq 0$ відіграє умова $\det A \neq 0$, тобто відмінність від нуля визначника матриці A.

<u>Означення 1</u>. Матриця, визначник якої відмінний від нуля, називається неособливою (невиродженою), а матриця, визначник якої дорівнює нулю – особливою (виродженою).

Оскільки добуток двох матриць не є комутативним, тобто $AB \neq BA$, то вводяться поняття правої та лівої оберненої матриці до матриці A.

<u>Означення 2</u>. Матриця B називається правою оберненою матрицею до матриці A, якщо $AB = E$.

<u>Означення 3</u>. Матриця C називається лівою оберненою матрицею до матриці A, якщо $CA = E$.

Теорема 1. Якщо обидві обернені матриці B і C до матриці A існують, то вони співпадають між собою.

<u>Доведення</u>. Із співвідношень $AB = E$, $CA = E$ і асоціативної властивості добутку матриць випливає, що

$$C = CE = C(AB) = (CA)B = EB = B.$$

Згідно з доведеною теоремою терміни "ліва" та "права" можна опустити і говорити просто про матрицю B, обернену до матриці A. Нижче обернену матрицю B до матриці A будемо позначати A^{-1}. Отже, якщо A^{-1} існує, то $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Очевидно, що властивість бути оберненою матрицею є взаємною, а саме, якщо A^{-1} є оберненою матрицею до матриці A, то A є оберненою матрицею до матриці A^{-1}.

Виникає природне питання про те, за яких умов обернена матриця A^{-1} до матриці A існує. Відповідь на це питання дає наступна теорема.

Теорема 2. Для того щоб обернена матриця A^{-1} до матриці A існувала, необхідно і достатньо, щоб матриця A була неособливою.

<u>Доведення</u>. Необхідність. Нехай обернена матриця A^{-1} існує; доведемо, що матриця A є неособливою. Для цього скористаємось тим, що визначник добутку двох квадратних матриць дорівнює добутку визначників цих матриць (доведення цього факту ми не наводимо. Зацікавлений читач може знайти його, наприклад, в книзі [1] зі списку літератури у Передмові). З умови $AA^{-1} = E$ одержуємо, що $\det A \cdot \det A^{-1} = \det E = 1$. Звідси випливає, що $\det A \neq 0$, тобто матриця A є неособливою.

Достатність. Нехай матриця A є неособливою, тобто $D = \det A \neq 0$. Побудуємо матрицю

$$B = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{D} & \frac{A_{21}}{D} & \cdots & \frac{A_{n1}}{D} \\ \frac{A_{12}}{D} & \frac{A_{22}}{D} & \cdots & \frac{A_{n2}}{D} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{A_{1n}}{D} & \frac{A_{2n}}{D} & \cdots & \frac{A_{nn}}{D} \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Тут A_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} визначника матриці A. Звернемо увагу на своєрідне розташування чисел A_{ij} в матриці B: число A_{ij} стоїть не в i-му рядку і j-му стовпці, а навпаки, в j-му рядку і i-му стовпці. Доведемо, що $B = A^{-1}$. Запишемо

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{D} & \frac{A_{21}}{D} & \cdots & \frac{A_{n1}}{D} \\ \frac{A_{12}}{D} & \frac{A_{22}}{D} & \cdots & \frac{A_{n2}}{D} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{A_{1n}}{D} & \frac{A_{2n}}{D} & \cdots & \frac{A_{nn}}{D} \end{pmatrix} = \left\{c_{ij}\right\}, \quad i = 1,2,...,n; \; j = 1,2,...,n.$$

За правилом множення матриць елемент матриці AB, розташований в i-му рядку і j-му стовпці, дорівнює $c_{ij} = \frac{1}{D}\left(a_{i1}A_{j1} + \ldots + a_{in}A_{jn}\right)$. При $i = j$ цей вираз дорівнює одиниці, оскільки в дужках стоїть розклад визначника за елементами i-го рядка. Якщо $i \neq j$, то вираз в дужках дорівнює нулю, тому що в цьому випадку маємо суму добутків елементів i-го рядка визначника D на алгебраїчні доповнення відповідних елементів j-го рядка (див. теорему 2 §4). Отже, c_{ij} дорівнює одиниці, якщо $i = j$, і дорівнює нулю, якщо $i \neq j$. Це означає, що $AB = E$ і $A^{-1} = B$. Теорему доведено.

Легко переконатися, що матричні рівняння $AX = E$ і $XA = E$ ($\det A \neq 0$) інших розв'язків, крім $X = A^{-1}$, не мають. Дійсно, помноживши обидві частини першого рівняння зліва, а другого – справа на A^{-1} і скориставшись асоціативною властивістю добутку матриць в обох випадках, отримуємо

$$A^{-1}AX = A^{-1}E \quad \text{і} \quad XAA^{-1} = EA^{-1} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(A^{-1}A\right)X = A^{-1} \quad \text{і} \quad X\left(AA^{-1}\right) = A^{-1} \Leftrightarrow$$
$$EX = A^{-1} \quad \text{і} \quad XE = A^{-1} \Leftrightarrow X = A^{-1}.$$

§8. Система лінійних рівнянь у матричній формі

8.1. Операція множення матриць дозволяє по іншому підійти до однієї з головних задач лінійної алгебри – розв'язування системи лінійних рівнянь.

Розглянемо систему n лінійних рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{1}$$

Якщо ввести матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}; \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

то систему (1) можна подати у вигляді матричного рівняння

$$AX = B. \tag{2}$$

Дійсно,

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = B.$$

Припустимо, що квадратна матриця A є неособливою, тобто $D = \det A \neq 0$. У цьому випадку для неї існує обернена матриця A^{-1}. Скористаємось цією матрицею для розв'язання матричного рівняння (2), а саме, помножимо обидві частини рівняння (2) зліва на матрицю A^{-1}:

$$A^{-1}\left(AX\right) = A^{-1}B \Leftrightarrow \left(A^{-1}A\right)X = A^{-1}B \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow EX = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B. \tag{3}$$

Поки що не можна стверджувати, що рівняння (3) є рівносильним рівнянню (2). Можна лише стверджувати, що будь-який розв'язок X рівняння (2) задовольняє рівнянню (3). Покажемо тепер, що матриця X, яку задано формулою (3), задовольняє рівнянню (2):

$$A\left(A^{-1}B\right) = \left(AA^{-1}\right)B = EB = B.$$

Отже, формула (3) є матричною формою запису розв'язку системи лінійних рівнянь (1). Скориставшись зображенням оберненої матриці (1) з § 7, запишемо цей розв'язок у вигляді

$$x_j = \frac{1}{D}\left(A_{1j}b_1 + A_{2j}b_2 + \ldots + A_{nj}b_n \right), \quad j = 1,\ldots,n.$$

Вираз у дужках дорівнює визначнику D_j, який отримується з визначника D заміною j-го стовпця стовпцем вільних членів, тому формула (3) рівносильна формулам (формулам Крамера)

$$x_j = \frac{D_j}{D}, \ j = 1, \ 2,\ldots,n, \tag{4}$$

що й стверджувалось раніше для випадків $n = 2$ і $n = 3$.

Не слід думати, що формула (3) спрощує розв’язування системи лінійних рівнянь (1). Для того щоб скористатись цією формулою, потрібно спочатку знайти обернену матрицю A^{-1}, що саме по собі є достатньо складною задачею. Тому формула (3) має швидше теоретичне значення. Найзручнішим способом розв’язування системи (1) є метод Гаусса.

8.2. Розглянемо матричні рівняння

$$AX = D, \tag{5}$$

$$YA = D, \tag{6}$$

$$AZB = C, \tag{7}$$

де A, B, C і D – задані матриці, а X, Y і Z – шукані матриці, причому A і B є неособливими квадратними матрицями порядку n.

Знайдемо розв’язки цих рівнянь. Аналогічно доведенню формули (3), отримуємо

$$X = A^{-1}D, \tag{8}$$

$$Y = DA^{-1}. \tag{9}$$

Для знаходження розв’язку рівняння (7) обидві частини цього рівняння помножимо зліва на матрицю A^{-1} і справа – на B^{-1}:

$$A^{-1}\left(AZB\right)B^{-1} = A^{-1}CB^{-1} \Leftrightarrow \left(A^{-1}A\right)Z\left(BB^{-1}\right) = A^{-1}CB^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow EZE = A^{-1}CB^{-1} \Leftrightarrow Z = A^{-1}CB^{-1}. \tag{10}$$

Метод Гаусса

§1. Системи лінійних рівнянь. Основні поняття

У главі II вивчались системи n алгебраїчних рівнянь першого степеня з n невідомими. Алгебраїчні рівняння першого степеня називаються лінійними. На відміну від попереднього, тепер не будемо припускати, що число рівнянь співпадає з числом невідомих. У загальному випадку системою m лінійних рівнянь з n невідомими називається система вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1}$$

Тут через $x_1, x_2, \ldots, x_n$ позначено невідомі, які потрібно знайти розв'язавши систему. Задані числа a_{ij} $\left(i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n\right)$ називаються коефіцієнтами системи, а задані числа b_i $\left(i=1,\ldots,m\right)$ – вільними членами; n може дорівнювати, бути меншим або більшим за m.

<u>Означення 1</u>. Система (1) називається ***однорідною***, якщо всі її вільні члени $b_1, b_2, \ldots, b_m$ дорівнюють нулю. Якщо хоча б один з вільних членів $b_1, b_2, \ldots, b_m$ не дорівнює нулю, то система (1) називається ***неоднорідною***.

<u>Означення 2</u>. Сукупність n чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ називається розв'язком системи (1), якщо при підстановці $x_1 = \alpha_1$ $x_2 = \alpha_2, \ldots, x_n = \alpha_n$ кожне з рівнянь системи (1) перетворюється в тотожність.

<u>Означення 3</u>. Система рівнянь (1) називається ***сумісною***, якщо вона має хоча б один розв'язок, і несумісною, якщо жодного розв'язку цієї системи не існує.

Відмітимо, що однорідна система лінійних рівнянь завжди сумісна, оскільки має нульовий розв'язок $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Приклад 1. Розглянемо систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2. \end{cases} \tag{2}$$

Ця система трьох рівнянь з чотирма невідомими не має жодного розв'язку, тобто є несумісною. Якби розв'язок цієї системи існував, то при його підстановці в дану систему ліві частини обох рівнянь дорівнювали б одна одній. З іншого боку, $1 \neq 2$.

Приклад 2. Система $\begin{cases} x_1 - \ \ x_2 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 = 5 \end{cases}$ є сумісною. Неважко переконатися, що вона має єдиний розв'язок $x_1 = 1, \ \ x_2 = 1$.

Приклад 3.

$$\begin{cases} x_1 + \ x_2 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases}. \tag{3}$$

Пара чисел 1; 0 є одним з розв'язків даної системи трьох рівнянь з двома невідомими. Ця система має нескінченну кількість розв'язків. Значення $x_1 = \alpha, \ \ x_2 = 1 - \alpha$ для будь-якого α задовольняють даній системі.

Означення 4. Сумісна система (1) називається ***визначеною***, якщо вона має єдиний розв'язок і ***невизначеною***, якщо існує хоча б два різних розв'язки цієї системи.

У прикладі 2 ми мали визначену систему лінійних рівнянь, а в прикладі 3 – невизначену систему лінійних рівнянь.

Дослідити систему лінійних рівнянь (1) означає встановити, чи є вона сумісною. Якщо система (1) сумісна, визначити скільки вона має розв'язків – один чи декілька і знайти всі ці розв'язки.

Серед численних методів розв'язування систем лінійних рівнянь одним з найбільш зручних, як для теоретичних висновків, так і для практичних цілей, є метод послідовного виключення невідомих або метод Гаусса.

§2. Елементарні перетворення системи лінійних рівнянь

Нехай задано систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1}$$

З коефіцієнтів цієї системи утворимо матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

і матрицю

$$B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Матриця A називається матрицею системи (1), а матриця B, яка отримується доповненням матриці A стовпцем вільних членів – розширеною матрицею системи (1).

<u>Означення 1</u>. Під елементарними перетвореннями системи лінійних рівнянь будемо розуміти такі операції:

1. Множення довільного рівняння системи на число, відмінне від нуля.

2. Додавання до одного рівняння системи іншого рівняння, помноженого на довільне число.

3. Перестановку двох рівнянь системи.

4. Викреслення з системи рівнянь рівняння вигляду $0\cdot x_1+0\cdot x_2+\ldots+0\cdot x_n=0$.

Виконуючи елементарні перетворення системи лінійних рівнянь, ми отримуємо нову систему лінійних рівнянь. Кожному елементарному перетворенню системи відповідає аналогічне перетворення рядків розширеної матриці цієї системи і навпаки, кожному елементарному перетворенню рядків розширеної матриці системи відповідає певне елементарне перетворення системи. Отже, елементарні перетворення системи зводяться до відповідних перетворень над рядками її розширеної матриці.

Метод Гаусса полягає в тому, що за допомогою елементарних перетворень система (1) зводиться до спеціального вигляду, з якого всі розв'язки знаходяться безпосередньо.

<u>Означення 2</u>. Дві системи лінійних рівнянь з одними й тими ж невідомими називаються ***рівносильними***, якщо кожний розв'язок однієї з них є розв'язком другої і навпаки (або, якщо обидві системи несумісні).

Зауважимо, що число рівнянь в рівносильних системах може бути різним.

Якщо ми маємо дві рівносильні системи, то знайшовши розв'язок однієї з них, ми тим самим будемо знати розв'язок іншої. Розв'язувати слід ту систему, яка простіша.

Теорема 1. При елементарних перетвореннях система переходить у рівносильну систему.

<u>Доведення.</u> ***1°***. Помножимо i-тий рядок розширеної матриці B на число $c\neq 0$. Це рівносильно множенню i-го рівняння системи (1) $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n=b_i$ на число $c\neq 0$. В результаті отримуємо систему лінійних рівнянь, яка відрізняється від системи (1) лише i-тим рівнянням.

Нехай $x_1=\alpha_1,\ x_2=\alpha_2,\ldots,x_n=\alpha_n$ – розв'язок системи (1). Ці значення невідомих будуть задовольняти всі рівняння системи (1), зокрема i-те рівняння $a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \ldots + a_{in}\alpha_n = b_i$. Помножимо обидві частини цього рівняння на c: $ca_{i1}\alpha_1 + ca_{i2}\alpha_2 + \ldots + ca_{in}\alpha_n = cb_i$.

Значення $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ невідомих $x_1, x_2, \ldots, x_n$ задовольняють i-те рівняння перетвореної системи. Оскільки в перетвореній системі всі інші рівняння ті ж, що й у вихідній системі (1), то ці значення невідомих задовольняють і решту рівнянь перетвореної системи.

Отже, довільний розв'язок системи (1) є розв'язком перетвореної системи.

Піддамо перетворену систему лінійних рівнянь елементарному перетворенню того ж типу, помноживши обидві частини i-го рівняння на число $\dfrac{1}{c}$. В результаті прийдемо до системи (1). Аналогічно попередньому отримуємо, що всякий розв'язок перетвореної системи є розв'язком системи (1). Отже, для елементарного перетворення **1** теорему доведено.

2º. Додамо до i-го рядка розширеної матриці B її j-тий рядок, помножений на деяке число α. Це означає, що до i-го рівняння $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$ системи (1) додається j-те рівняння цієї системи, помножене на число α:

$$\alpha a_{j1}x_1 + \alpha a_{j2}x_2 + \ldots + \alpha a_{jn}x_n = \alpha b_j .$$

У перетвореній системі всі рівняння, крім i-го, будуть такими ж, що й в системі (1), а i-те рівняння приймає вигляд

$$\left(a_{i1} + \alpha a_{j1}\right)x_1 + \left(a_{i2} + \alpha a_{j2}\right)x_2 + \ldots + \left(a_{in} + \alpha a_{jn}\right)x_n = b_i + \alpha b_j .$$

Нехай $x_1 = \beta_1,\ x_2 = \beta_2, \ldots, x_n = \beta_n$ – розв'язок системи (1). Тоді

$$a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \ldots + a_{in}\beta_n = b_i ,$$
$$\alpha a_{j1}\beta_1 + \alpha a_{j2}\beta_2 + \ldots + \alpha a_{jn}\beta_n = \alpha b_j .$$

Почленно додамо ці рівності

$$\left(a_{i1} + \alpha a_{j1}\right)\beta_1 + \left(a_{i2} + \alpha a_{j2}\right)\beta_2 + \ldots + \left(a_{in} + \alpha a_{jn}\right)\beta_n = b_i + \alpha b_j .$$

Звідси випливає, що $x_1 = \beta_1,\ x_2 = \beta_2, \ldots, x_n = \beta_n$ задовольняють i-тому рівнянню перетвореної системи і всім іншим рівнянням цієї системи, оскільки вони такі ж, як і в системі (1). Отже, доведено, що всякий розв'язок системи (1) є розв'язком перетвореної системи. Навпаки, всякий розв'язок перетвореної системи є розв'язком системи (1). Дійсно, якщо ми додамо до i-го рівняння перетвореної системи її j-те рівняння, помножене на $-\alpha$, то будемо мати систему (1). Аналогічно попередньому отримуємо, що всякий розв'язок перетвореної системи є розв'язком системи (1). Отже, ці системи рівносильні.

3º. Поміняємо місцями в розширеній матриці B два довільних рядки. Тоді в системі (1) поміняються місцями два відповідних рівняння. Зрозуміло, що таке перетворення приводить до рівносильної системи.

4º. Нехай у розширеній матриці B є нульовий рядок. Відкинемо його. Тоді в системі (1) відкидається рівняння $0\cdot x_1+0\cdot x_2+\ldots+0\cdot x_n=0$, яке задовольняється при довільних значеннях невідомих. Тобто, якщо ми припишемо таке рівняння до деякої системи чи, навпаки, викреслимо його з системи, то отримаємо систему, яка буде рівносильною вихідній.

Зрозуміло також, що у випадку, коли одна з систем (система (1) чи перетворена система) є несумісною, то несумісною буде й інша система, що завершує доведення теореми.

Іноді будемо піддавати розширену матрицю ще одному перетворенню: перестановці стовпців. Це перетворення призводить до перенумерації невідомих. Так, наприклад, якщо в розширеній матриці переставлені перший та другий стовпці, то це перетворення полягає в тому, що замість x_1 пишеться x_2, а замість x_2 – x_1, у той час як решта невідомих зберігають свої номери. В результаті такої нумерації i -те рівняння набуде вигляду:

$$a_{i2}x_1+a_{i1}x_2+a_{i3}x_3\ldots+a_{in}x_n=b_i,\ i=1,\ 2,\ldots,n.$$

В отриманому розв'язку слід враховувати проведену перенумерацію невідомих.

§3. Метод Гаусса

Нехай задано систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{m_1}x_1+a_{m_2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases} \tag{1}$$

Можливі два випадки

<u>*Випадок 1*</u>. Серед рівнянь системи (1) є рівняння вигляду

$$0\cdot x_1+0\cdot x_2+\ldots+0\cdot x_n=b, \tag{2}$$

де число $b\neq 0$. Жоден набір значень невідомих такому рівнянню задовольнити не може. Тому система, що містить це рівняння, є несумісною.

<u>*Випадок 2*</u>. В системі (1) немає рівнянь вигляду (2) при $b\neq 0$ і в кожному рівнянні системи хоча б один з коефіцієнтів при невідомих відмінний від нуля. Розглянемо цей випадок.

Оскільки хоча б один з коефіцієнтів a_{i1} ($i=1,\ 2,\ldots,m$) відмінний від нуля (у противному разі в систему не входило б невідоме x_1) і рівняння в системі можна міняти місцями, то без будь-яких обмежень загальності можна вважати, що $a_{11} \neq 0$.

Виключимо з усіх рівнянь системи (1), починаючи з другого, невідоме x_1. Для цього до другого рівняння додамо перше, помножене на $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$, до третього рівняння – перше, помножене на $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$ і т.д., до m-го рівняння – перше, помножене на $-\frac{a_{m1}}{a_{11}}$. В результаті система (1) перетвориться до вигляду

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\qquad \boxed{\begin{array}{l} a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \qquad\quad \vdots \\ a_{m2}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{mn}^{(1)}x_n = b_m^{(1)} \end{array}} \end{array}\right. , \tag{3}$$

де

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1j}, \quad b_i^{(1)} = b_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}}b_1, \\ i = 2,\ 3, \ldots, m;\ j = 2,\ 3, \ldots, n. \tag{3'}$$

Перший крок методу Гаусса завершено. За допомогою рамки виділено ту частину системи, яка піддаватиметься подальшим перетворенням. Назвемо її залишковою частиною.

Повторимо попередні міркування стосовно залишкової частини системи. Якщо в залишковій частині системи є рівняння вигляду (2), то система (1) несумісна. Припустимо, що $a_{22}^{(1)} \neq 0$. Якщо це не так, то можна переставити рівняння залишкової частини. Якщо ж всі $a_{i2}^{(1)}$, $i = 2, 3, \ldots, m$ дорівнюють нулю, доведеться зробити додаткову перенумерацію невідомих. Виконаємо наступний крок: виключимо з усіх рівнянь залишкової частини, починаючи з другого, невідоме x_2.

Отримаємо систему рівнянь:

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \qquad\qquad\qquad \boxed{\begin{array}{l} a_{33}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)} \\ \qquad\quad \vdots \\ a_{m3}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{mn}^{(2)}x_n = b_m^{(2)} \end{array}} \end{array}\right. , \tag{4}$$

де

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - \frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(1)}} a_{2j}^{(1)}, \;\; b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - \frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(1)}} b_2^{(1)}, \tag{4′}$$
$$i = 3, 4, \ldots, m; \;\; j = 3, 4, \ldots, n.$$

Другий крок завершено. Нова залишкова частина системи містить на одне рівняння менше, ніж залишкова частина системи після першого кроку.

Продовжимо цей процес. Якщо залишкова частина системи (4) містить рівняння вигляду (2), то система (1) несумісна.

Якщо ж $a_{33}^{(2)} \neq 0$ (можливо, для цього доведеться здійснити додаткову перенумерацію невідомих), наступний крок полягає у виключенні змінної x_3 в залишковій частині системи (4).

Оскільки число кроків не може перевищувати n, то ми прийдемо до системи без залишкової частини, тобто до системи вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2r}^{(1)}x_r + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad a_{rr}^{(r-1)}x_r + \ldots + a_{rn}^{(r-1)}x_n = b_r^{(r-1)}, \end{cases} \tag{5}$$

де коефіцієнти $a_{11}, a_{22}^{(1)}, \ldots, a_{rr}^{(r-1)}$ відмінні від нуля.

Можлива зміна числа рівнянь $(r \leq m)$ пов'язана з тим, що в процесі перетворень відкидаються рівняння вигляду 0 = 0.

Перейдемо до розв'язування системи (5). Можливі два випадки: $r = n$ та $r < n$.

1) $r = n$. З останнього рівняння системи (5) знайдемо єдине значення x_n. Підставляючи це єдине значення у попереднє рівняння і враховуючи, що $a_{n-1\,n-1}^{(n-2)} \neq 0$, знайдемо єдине значення x_{n-1}. Підставляючи знайдені єдині значення x_n, x_{n-1} у попереднє рівняння, знайдемо єдине значення x_{n-2} і так далі. Отже, у випадку $r = n$ система (5) має єдиний розв'язок.

2) $r < n$. З останнього рівняння системи (5), враховуючи, що $a_{rr}^{(r-1)} \neq 0$, знаходимо

$$x_r = \frac{1}{a_{rr}^{(r-1)}}\left(b_r^{(r-1)} - a_{r\,r+1}^{(r-1)}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}^{(r-1)}x_n\right) = c_r + c_{r\,r+1}x_{r+1} + \ldots + c_{rn}x_n,$$

де $c_r = \dfrac{b_r^{r-1}}{a_{rr}^{(r-1)}}, \quad c_{rj} = -\dfrac{a_{rj}^{(r-1)}}{a_{rr}^{(r-1)}}, \quad j = r+1, \ldots, n.$

Підставляючи отриманий вираз для x_r в передостаннє рівняння і враховуючи, що $a_{r-1\,r-1}^{(r-2)} \neq 0$, знайдемо таким же чином x_{r-1}:

$$x_{r-1} = c_{r-1} + c_{r-1r+1}x_{r+1} + \ldots + c_{r-1n}x_n$$

і т.д. Підставляючи знайдені вирази для $x_r, x_{r-1}, \dots, x_2$ в перше рівняння системи (5), знайдемо вираз для x_1

$$x_1 = c_1 + c_{1r+1}x_{r+1} + \dots + c_{1n}x_n .$$

Отже, система (5), а з нею і вихідна система (1) зводиться до вигляду

$$\begin{cases} x_1 = c_1 + c_{1r+1}x_{r+1} + \dots + c_{1n}x_n \\ x_2 = c_2 + c_{2r+1}x_{r+1} + \dots + c_{2n}x_n \\ \quad \vdots \\ x_r = c_r + c_{rr+1}x_{r+1} + \dots + c_{rn}x_n \end{cases} \qquad (r < n). \tag{6}$$

Невідомі $x_{r+1}, \dots, x_n$, які стоять у правих частинах рівнянь системи (6), називаються ***вільними*** і можуть приймати довільні значення. Надаючи їм конкретних значень, знайдемо з системи (6) значення для $x_1, x_2, \dots, x_r$.

Отже, у випадку $r < n$ вихідна система (1) має нескінченну множину розв’язків, а формули (6) є ***загальним розв’язком*** цієї системи.

Зауваження 1. Якщо вихідна система лінійних рівнянь (1) однорідна ($b_i = 0,\ \ i = 1, 2, \dots, m$), то праві частини всіх рівнянь системи (5) дорівнюють нулю. Випадку $r = n$ відповідає єдиний (нульовий, $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$) розв’язок вихідної системи. У випадку $r < n$ існують розв’язки, відмінні від нульового. Зокрема, якщо у вихідній однорідній системі лінійних рівнянь (1) $m < n$, завжди матимемо випадок $r < n$. Отже, якщо система лінійних рівнянь однорідна і кількість рівнянь такої системи менша кількості невідомих, то ця система має ненульові розв’язки.

Приклад 1. Розв’язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -5 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_4 = 5 \\ 4x_2 - x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 7 \\ x_1 - x_2 - 3x_4 = -6. \end{cases}$$

Розв’язання. Даній системі рівнянь відповідає розширена матриця

$$A = \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -2 & -3 & -1 & -5 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 7 \\ 1 & -1 & 0 & -3 & -6 \end{array}\right).$$

Для зручності стовпчик вільних членів відділяємо вертикальною рискою. Будемо позначати перехід від однієї розширеної матриці до іншої шляхом елементарних перетворень (тобто, фактично перехід від однієї системи рівнянь до рівносильної їй системи) символом “ ~ ”.

У матриці A поміняємо місцями перший і другий рядки:

$$A \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -3 & -1 & -5 \\ -1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 7 \\ 1 & -1 & 0 & -3 & -6 \end{array}\right) = A_1 \cdot$$

Шляхом елементарних перетворень типу 2 (додавання до одного рядка іншого, помноженого на число) перейдемо від розширеної матриці A_1 до матриці, в якій елементи першого стовпця a_{21}, a_{31}, a_{41}, a_{51}, a_{61} дорівнюють нулю. Це можна зробити так: до другого рядка додамо перший, помножений на –2, до третього – перший, помножений на 1, в четвертому рядку на потрібному місці і так стоїть 0, до п’ятого рядка додамо перший, помножений на –3, до шостого – перший, помножений на –1. Виконавши ці операції, переходимо до матриці

$$A_1 \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & -6 \end{array}\right) = A_2 \,.$$

Тепер зробимо нулі скрізь у другому стовпці, крім елементів першого і другого рядка. Для цього спочатку переставимо другий і третій рядки. Отримуємо

$$A_2 \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & -6 \end{array}\right) = A_3 \cdot$$

Додамо до четвертого і п’ятого рядків другий, помножений в обох випадках на – 4. В результаті переходимо до матриці

$$A_3 \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 7 & -12 & -17 \\ 0 & 0 & 13 & -13 & -13 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & -6 \end{array}\right) = A_4 \cdot$$

П’ятий рядок ділимо на 13, а шостий – на 2:

$$A_4 \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 7 & -12 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right) = A_5 .$$

Робимо нулі у третьому стовпці за допомогою третього рядка:

$$A_5 \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) = A_6 .$$

Четвертий рядок ділимо на 9, а п’ятий – на 2:

$$A_6 \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) = A_7 .$$

За допомогою четвертого рядка у четвертому стовпці робимо нулі:

$$A_7 \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Використовуючи елементарне перетворення типу 4 (викреслення нульового рядка), отримуємо рівносильну систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 5 \\ x_3 - 3x_4 = -5 \\ x_4 = 2. \end{cases}$$

Підставляючи $x_4 = 2$ у третє рівняння, знаходимо $x_3 = 1$. Підставимо $x_4 = 2,\ x_3 = 1$ в друге рівняння. Отримуємо $x_2 = 1$. З першого рівняння знаходимо $x_1 = 1$. Отже, наша система має єдиний розв'язок

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 2. \end{cases}$$

Приклад 2. Розв'язати систему рівнянь.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = -1 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 + 7x_5 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 + 2x_5 = 1. \end{cases}$$

Розв'язання. Даній системі рівнянь відповідає розширена матриця

$$A = \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 & -1 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

За допомогою першого рядка робимо нулі в першому стовпці. Для цього перший рядок помножимо на –2 і додамо до другого, потім перший рядок помножимо на –1 і додамо до третього. Виконавши ці операції, перейдемо до матриці

$$A \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 3 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 & 2 \end{array}\right) \overset{2\leftrightarrow 5}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & 3 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & 10 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & 3 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right),$$

де знак $\overset{2\leftrightarrow 5}{\sim}$ означає, що виконується перестановка 2 і 5 стовпців. Це відповідає перенумерації невідомих: x_2 замінюється на x_5, а x_5 – на x_2. Останньому рядку відповідає рівняння $0x_1 + 0x_5 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_2 = -6$ або $0 = -6$, якому не задовольняє жоден набір невідомих. Отже, задана система рівнянь несумісна.

Приклад 3. Розв'язати систему рівнянь.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_3 - 3x_4 = -2 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ -2x_1 + x_2 + 8x_3 - 6x_4 = -3. \end{cases}$$

Розв'язання. Побудуємо розширену матрицю, що відповідає заданій системі, і застосуємо до неї метод Гаусса. Отримуємо:

$$A=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 8 & -6 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 10 & -4 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Останній матриці відповідає система лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -1 \\ x_3 + 2x_4 = 2, \end{cases}$$

рівносильна вихідній системі.

Виберемо за вільне невідоме x_4. З останнього рівняння знаходимо $x_3 = -2x_4 + 2$. Підставляючи x_3 в друге рівняння, знаходимо $x_2 = 8x_4 - 7$. І, нарешті, підставляючи знайдені значення x_3, x_2 у перше рівняння знаходимо $x_1 = -7x_4 + 6$.

Отже, загальний розв'язок вихідної системи лінійних рівнянь має вигляд

$$\begin{cases} x_1 = -7x_4 + 6 \\ x_2 = 8x_4 - 7 \\ x_3 = -2x_4 + 2, \end{cases}$$

де x_4 – довільне дійсне число.

Для того, щоб отримати який-небудь частинний розв'язок, потрібно невідомому x_4 надати конкретного значення.

Якщо покласти, наприклад, $x_4 = 1$, то отримаємо частинний розв'язок

$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 1. \end{cases}$$

Підставивши отримані значення невідомих в систему, переконуємося в тому, що систему розв'язано правильно.

§4. Ранг матриці. Обчислення рангу

Розглянемо матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Зафіксуємо деяке число k стовпців матриці A і таке ж число її рядків. Елементи, що стоять на перетині вказаних рядків і стовпців, утворюють квадратну матрицю порядку k.

Означення 1. Визначник квадратної матриці порядку k, утвореної з елементів матриці (1) вказаним способом, ***називається мінором k-го порядку*** матриці A.

Теорема 1. Якщо в матриці A всі мінори k-го порядку рівні нулю, то рівні нулю і всі мінори, що мають порядок вищий за k (якщо такі існують).

Доведення. Візьмемо в матриці A довільний мінор $(k+1)$-го порядку. Він дорівнює сумі добутків елементів якого-небудь рядка на їх алгебраїчні доповнення. Але алгебраїчне доповнення довільного елемента нашого мінора з точністю до знака дорівнює деякому мінору k-го порядку матриці A. За умовою всі мінори k-го порядку матриці A рівні нулю, а тому рівні нулю і розглянуті алгебраїчні доповнення. Це означає, що дорівнює нулю і вибраний мінор $(k+1)$-го порядку.

Отже, всі мінори порядку $k+1$ матриці A рівні нулю. Аналогічно доводиться, що всі мінори порядку $k+2$ матриці A також рівні нулю і т.д.

Теорему доведено.

Якщо числа a_{ij} не дорівнюють одночасно нулю, то завжди можна вказати натуральне число r, яке має такі властивості:

1. У матриці A є мінор порядку r, відмінний від нуля.

2. Кожен мінор матриці A, який має порядок $r+1$ або вищий (якщо, взагалі, такі існують), дорівнює нулю.

Означення 2. Число r, яке має вказані властивості **1**, **2**, називається рангом матриці A і позначається символом $r(A)$.

Означення 3. Нехай r – ранг матриці A. Тоді мінор r-го порядку, який не дорівнює нулю, називається базисним мінором. Стовпці (рядки), на яких побудовано базисний мінор, називаються базисними стовпцями (рядками). Базисний мінор може бути не один.

Коментарі до означення 3. Розглянемо мінори порядку 1, тобто елементи матриці. Якщо всі вони рівні нулю, то ранг матриці вважається рівним нулю, тобто $r(A)=0$. Перейдемо до мінорів порядку 2. Якщо всі вони рівні нулю, то довільний ненульовий елемент матриці A є її базисним мінором і

$r(A)=1$. У випадку, коли існує відмінний від нуля мінор 2 порядку, слід розглянути мінори порядку 3. Якщо всі вони рівні нулю, то довільний ненульовий мінор порядку 2 – базисний і $r(A)=2$. Продовжуючи цей процес, ми обов'язково знайдемо базисний мінор. Може статися, що існують декілька відмінних від нуля мінорів максимально можливого порядку. У цьому випадку будь-який з них вважається базисним.

З означення 2 випливає, що ранг матриці можна визначити як найвищий з порядків відмінних від нуля мінорів цієї матриці.

Задача визначення рангу матриці, якщо виходити лише з означення 2, вимагає обчислення великої кількості визначників. Дійсно, з m рядків ми можемо C_m^k різними способами вибрати k рядків. Нагадаємо, що $C_m^k=\dfrac{m!}{k!(m-k)!}$, де позначено $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$. Аналогічно, з n стовпців можна вибрати C_n^k різними способами k стовпців. Отже, в матриці A розміру $m\times n$ є $C_m^k\cdot C_n^k$ мінорів k-го порядку, утворених різними способами. Зрозуміло, що при великих значеннях m та n розв'язати задачу практично дуже важко.

Тому досить важливо знати прості способи обчислення рангу. Одним з таких способів є вже знайомий нам метод Гаусса, тільки тепер його слід застосовувати не до системи рівнянь, а до даної матриці A.

Метод Гаусса базується на застосуванні елементарних перетворень (див. §2) до системи лінійних рівнянь. Для заданої матриці A будемо застосовувати такі елементарні перетворення над її рядками (стовпцями):

1. Перестановка двох довільних рядків (стовпців) матриці.

2. Множення елементів довільного рядка (стовпця) матриці на число c, відмінне від нуля.

3. Додавання до елементів довільного рядка (стовпця) матриці відповідних елементів іншого рядка (стовпця) тієї ж матриці, помножених на деяке число.

4. Відкидання нульового рядка (стовпця) матриці, тобто рядка (стовпця), всі елементи якого рівні нулю.

Теорема 2. При елементарних перетвореннях над рядками (стовпцями) ранг матриці не змінюється.

Доведення. Доведемо спочатку справедливість теореми для перетворень типу 2 і 3.

2. Нехай Δ – довільний мінор матриці (1). Після елементарного перетворення 2 мінор Δ або не зміниться, або прийме значення $c\Delta$. Тому, якщо мінор Δ був відмінним від нуля, то і після елементарного перетворення 2 він залишиться відмінним від нуля; якщо ж мінор Δ дорівнював нулю, то і після елементарного перетворення 2 він залишиться рівним нулю. Отже, найвищий з порядків відмінних від нуля мінорів при перетворенні 2 не зміниться. Тому ранг матриці A при цьому перетворенні також не зміниться.

3. Нехай r – ранг матриці (1) і Δ – довільний її мінор порядку $k > r$. Тоді Δ=0. Додамо до рядка матриці A з номером i рядок цієї матриці з номером j, помножений на деяке число c. Матриця A при цьому перетворюється в іншу матрицю B. Подивимось, що станеться з мінором Δ.

Можливі три випадки:

1) мінор Δ не містить i-го рядка матриці A;

2) мінор Δ містить елементи i-го рядка матриці A, але не містить елементів j-го рядка;

3) мінор Δ містить відповідні елементи i-го і j-го рядків матриці A.

У випадках 1) і 2) значення мінора Δ при вказаному перетворенні не зміниться, тобто Δ залишиться рівним нулю. У випадку 3) мінор Δ перетвориться у деякий мінор Δ' матриці B, а кожен елемент i-го рядка матриці B стане рівним сумі двох доданків; звідси випливає, що мінор $\Delta' = \Delta_1 + \Delta_2$, де $\Delta_1 + \Delta_2$ – мінори порядку k матриці A; $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$, оскільки $k > r$. Тому $\Delta' = 0$.

Отже, нами доведено, що в матриці B всі мінори порядку вищого за r рівні нулю, а це означає, що ранг матриці B не перевищує рангу матриці A, тобто $r(B) \le r(A)$.

З іншого боку, доведемо, що $r(A) \le r(B)$. Для цього піддамо матрицю B перетворенню 3: до i-го рядка додамо j-й рядок, помножений на $-c$. В результаті цього перетворення матриця B перетвориться у матрицю A. Але від перетворення 3 ранг не може підвищуватись, тому $r(A) \le r(B)$.

Отже, з одного боку, отримали, що $r(B) \le r(A)$, а з іншого – $r(A) \le r(B)$. Звідси випливає, що $r(A) = r(B)$.

1. Елементарне перетворення 1 зводиться до деякої послідовності елементарних перетворень 2 і 3. Нехай, наприклад, міняються місцями перший і m-ий рядки матриці (1). В результаті отримується нова матриця B. Додамо до першого рядка матриці A її m-ий рядок:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_{11}+a_{m1} & a_{12}+a_{m2} & \dots & a_{1n}+a_{mn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = A_1 .$$

Віднімемо від m-го рядка матриці A_1 перший рядок:

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11}+a_{m1} & \dots & a_{1n}+a_{mn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_{11}+a_{m1} & \dots & a_{1n}+a_{mn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{11} & \dots & -a_{1n} \end{pmatrix} = A_2 .$$

Помножимо елементи m-го рядка матриці A_2 на –1, а потім віднімемо в одержаній матриці від першого рядка m-й рядок:

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{11}+a_{m1} & \dots & a_{1n}+a_{mn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{11} & \dots & -a_{1n} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_{11}+a_{m1} & \dots & a_{1n}+a_{mn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{11} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_{m1} & \dots & a_{mn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{11} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix} = B.$$

Отже, перестановку першого і m-го рядків матриці A здійснено за допомогою перетворень типу 2, 3. Тому ранг матриці не змінюється.

4. Якщо A – матриця з нульовим рядком, а B – матриця, що отримується після відкидання цього нульового рядка, то матриці A і B мають одні і ті ж мінори за винятком мінорів матриці A, які містять елементи нульового рядка, тобто мінорів, рівних нулю. Тому відкидання нульового рядка не призведе до зміни рангу матриці A.

Теорему 2 повністю доведено.

Для стовпців матриці A доведення проводиться аналогічно.

<u>**Означення 4**</u>. Прямокутну матрицю назвемо ***східчастою***, якщо:

1) будь-який її рядок містить хоча б один ненульовий елемент;
2) перший ненульовий елемент кожного рядка, починаючи з другого, розміщений правіше першого ненульового елемента попереднього рядка.

Зокрема, квадратна східчаста матриця називається ***трикутною***.

Наведемо приклади східчастих матриць:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 9 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теорема 3. Будь-яку ненульову матрицю (1) за допомогою елементарних перетворень можна звести до східчастого вигляду.

<u>*Доведення*</u>. За допомогою методу Гаусса система лінійних рівнянь (1) §3 зведена нами до рівносильної системи лінійних рівнянь (5) §3. Проводячи ці ж елементарні перетворення над матрицею A, зведемо її до східчастої матриці B:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{rr}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr}^{(r-1)} & \dots & a_{rn}^{(r-1)} \end{pmatrix} = B,$$

де коефіцієнти a_{11}, $a_{22}^{(1)},\dots,a_{rr}^{(r-1)}$ відмінні від нуля і обчислюються за формулами (3′), (4′) §3.

За теоремою 2 $r(A)=r(B)$. Найвищий з порядків відмінних від нуля мінорів матриці B дорівнює r. Дійсно, мінор порядку r, складений з перших r стовпців матриці B, дорівнює $a_{11}a_{22}^{(1)}\dots a_{rr}^{(r-1)}$ і відмінний від нуля. Отже, $r(B)=r(A)=r$.

На теоремі 3 ґрунтується метод обчислення рангу довільної ненульової матриці.

Приклад 1. Обчислити ранг матриці

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Поміняємо місцями перший та другий рядки матриці A:

$$A\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}=A_1.$$

Помножимо перший рядок матриці A_1 послідовно на –2 і 1 та додамо відповідно до третього і четвертого рядка:

$$A_1\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}=A_2.$$

Помножимо другий рядок матриці A_2 на –1 і додамо до четвертого:

$$A_2\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=A_3.$$

Відкинемо нульовий рядок матриці A_3. В результаті отримуємо матрицю A_4 східчастого вигляду

$$A_3\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}=A_4.$$

Мінор, складений з перших трьох стовпців матриці A_4, дорівнює -1.

Тому $r(A_4)=3$. За теоремою 2 $r(A)=3$.

Відповідь: $r(A)=3$.

Векторна алгебра

§1. Напрямлений відрізок. Вектор

Величини можуть бути двох видів. Є величини, які визначаються своїм числовим значенням в тих чи інших одиницях вимірювання, наприклад, довжина, об'єм, маса, температура тощо. Такі величини називаються ***скалярними величинами*** або ***скалярами***.

Разом з тим, є величини, які характеризуються не лише своїми числовими значеннями, а й напрямком, наприклад, швидкість, сила тощо.

Недостатньо, наприклад, знати, що швидкість автомобіля 60 км/год, потрібно ще знати, в якому напрямку рухається цей автомобіль.

Означення 1. Величини, які характеризуються не тільки числовим значенням, а й напрямком, називають ***векторними величинами*** або ***векторами***.

Найпростішим прикладом векторної величини є переміщення. Переміщення характеризується відстанню і напрямком.

Відрізок прямої визначається двома рівноправними точками – його кінцями: точками A і B. Якщо впорядкувати точки A і B, тобто одну з них вважати першою, а іншу – другою, то тим самим вкажемо напрямок від першої точки до другої. У зв'язку з цим дамо таке означення.

Означення 2. Напрямленим відрізком будемо називати впорядковану пару точок A і B.

Якщо початок напрямленого відрізка знаходиться в точці A, а кінець – в точці B, то позначимо його $\overrightarrow{AB}$ (буква, яка відповідає початку напрямленого відрізка, завжди пишеться першою). На кресленнях (рис. 1, 2) напрямлений відрізок зображається стрілками.

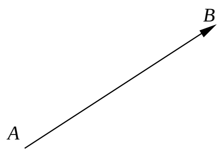


Рис. 1

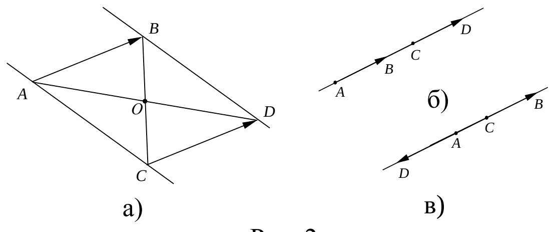


Рис. 2

Напрямлений відрізок $\overrightarrow{BA}$ назвемо ***протилежним*** до напрямленого відрізка $\overrightarrow{AB}$ і будемо позначати $-\overrightarrow{AB}$. Якщо точки A і B різні, то напрямлений відрізок $\overrightarrow{AB}$ назвемо ненульовим; якщо ж точки A і B співпадають, то напрямлений відрізок $\overrightarrow{AA}$ назвемо нульовим і будемо позначати $\vec{0}_A$. ***Довжиною*** або ***модулем*** напрямленого відрізка $\overrightarrow{AB}$ називають довжину відрізка AB (позначають $\left|\overrightarrow{AB}\right|$).

Напрямлений відрізок $\overrightarrow{AB}$ називається ***паралельним*** до прямої l (до площини α), якщо він або нульовий, або пряма AB паралельна до прямої l (до площини α). Ненульовий напрямлений відрізок $\overrightarrow{AB}$ називається ***перпендикулярним*** до прямої l (до площини α), якщо пряма AB перпендикулярна до прямої l (до площини α).

Напрямлені відрізки $\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_2B_2}, \ldots, \overrightarrow{A_kB_k}$ називаються ***колінеарними,*** якщо вони або лежать на одній прямій, або існує пряма l, до якої кожен з цих відрізків паралельний.

Для позначення колінеарності використовують символ Р, а для позначення перпендикулярності – символ $\perp$.

Напрямлені відрізки $\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_2B_2}, \ldots, \overrightarrow{A_kB_k}$ називаються ***компланарними,*** якщо вони або лежать в одній площині, або існує площина α, до якої кожен з цих відрізків паралельний.

Якщо напрямлені відрізки колінеарні, то вони компланарні. Якщо напрямлені відрізки перпендикулярні до однієї і тієї ж площини α, то вони колінеарні.

Довільна точка A, що лежить на прямій l, розбиває цю пряму на два промені l_+ і l_- з початком у точці A. Ці промені називаються такими, що доповнюють один одного. Один з променів визначає додатний напрямок прямої l, а другий промінь – від'ємний напрямок цієї прямої.

Означення 3. Два напрямлених відрізки $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$, які лежать на одній прямій l, назвемо співнапрямленими, якщо перетин променів AB і CD є променем (див. рис. 2б)), і протилежнонапрямленими, якщо цей перетин не є променем (див. рис. 2в)).

Означення 4. Два колінеарних напрямлених відрізки $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$, які не лежать на одній прямій, назвемо співнапрямленими (позначення $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$), якщо вони лежать в одній півплощині по відношенню до прямої AC (див. рис. 2а)), і протилежнонапрямленими (позначення $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$), якщо – в різних півплощинах по відношенню до цієї прямої.

Отже, говорити про те, що два напрямлених відрізки мають однаковий напрямок чи різні напрямки можна лише в тому випадку, коли вони колінеарні.

Означення 5. Два напрямлених відрізки $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ називаються рівними (позначення $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$), якщо вони співнапрямлені і мають однакову довжину, тобто $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{CD}\right|$.

Для встановлення рівності напрямлених відрізків $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ (див. рис. 2а)) можна скористатись наступною побудовою: проводимо прямі AC і BD, що сполучають початки і кінці напрямлених відрізків. Якщо

$AB\mathrm{P}CD$ і $AC\mathrm{P}BD$, то $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$. Недоліком цього способу порівняння напрямлених відрізків $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ є те, що він непридатний у тому випадку, коли $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ лежать на одній прямій.

Однак можна запропонувати ще один спосіб порівняння напрямлених відрізків $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$, який придатний і для згаданого випадку.

Два напрямлених відрізки $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ рівні тоді і тільки тоді, коли середина відрізка AD (див. рис. 2а)), який з'єднує початок першого напрямленого відрізка з кінцем другого, співпадає з серединою відрізка CB, який з'єднує початок другого напрямленого відрізка з кінцем першого.

При всій простоті викладеного слід звернути особливу увагу на те, що з рівності відрізків AB і CD ще не випливає рівність напрямлених відрізків $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$, хоча обернене твердження є справедливим: якщо $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$, то довжина відрізка AB дорівнює довжині відрізка CD.

Рівність напрямлених відрізків має властивості, аналогічні властивостям рівності чисел.

Справедлива така теорема.

Теорема 1. Рівність напрямлених відрізків задовольняє наступним умовам:

1. Кожен напрямлений відрізок рівний самому собі (умова рефлексивності).
2. Якщо $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$, то $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}$ (умова симетричності).
3. Якщо $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$, а $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{MK}$, то $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MK}$ (умова транзитивності).

Будемо вважати, що: а) нульовий напрямлений відрізок колінеарний будь-якому напрямленому відрізку; б) нульовий напрямлений відрізок і будь-які два інших напрямлених відрізки компланарні; в) нульовий напрямлений відрізок одночасно вважається однаково і протилежно напрямленим будь-якому іншому напрямленому відрізку; г) нульовий напрямлений відрізок рівний кожному іншому нульовому напрямленому відрізку і тільки нульовому.

Нехай задано довільний напрямлений відрізок $\overrightarrow{AB}$ і довільну точку M. Побудуємо $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AB}$. Для цього через точку M проведемо пряму l паралельно до прямої AB і відкладемо на l точку N так, щоб відрізки AB і MN були рівними, а напрямлені відрізки $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{MN}$ – співнапрямленими.

Отже, для довільно заданих напрямленого відрізка $\overrightarrow{AB}$ і точки M існує єдиний напрямлений відрізок $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AB}$.

У цьому випадку кажуть, що напрямлений відрізок $\overrightarrow{MN}$ отримано шляхом переносу напрямленого відрізка $\overrightarrow{AB}$ у точку M або шляхом відкладання напрямленого відрізка $\overrightarrow{AB}$ від точки M. Отже, заданому напрямленому відрізку $\overrightarrow{AB}$ відповідає множина рівних напрямлених відрізків, які відрізняються один від одного лише точками прикладання.

У звичайній алгебрі чисел ми звикли до того, що рівними вважаються такі об'єкти (числа), які просто співпадають (співпадають ті точки числової прямої, що відповідають рівним числам). Однак, наведене вище означення рівності напрямлених відрізків (об'єктів) не задовольняє цій умові "фізичного" співпадання. Наприклад, напрямлені відрізки $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$, зображені на рис. 2а), рівні, але не співпадають. Не дивлячись на це, з алгебраїчної точки зору всі рівні напрямлені відрізки доцільно розглядати як єдиний алгебраїчний об'єкт. Наведемо приклад з механіки.

Розглянемо поступальне переміщення твердого тіла з деякого положення I в інше положення II у заданому напрямку на задану величину. У цьому випадку зміщення довільних точок тіла $A_1, B_1, C_1, \ldots$ виражається напрямленими відрізками $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{B_1B_2}, \overrightarrow{C_1C_2}, \ldots$ однакової довжини і однакового напрямку. Якщо початкове положення I тіла відоме, то його нове положення II однозначно визначається будь-яким з напрямлених відрізків $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{B_1B_2}, \overrightarrow{C_1C_2}, \ldots$.

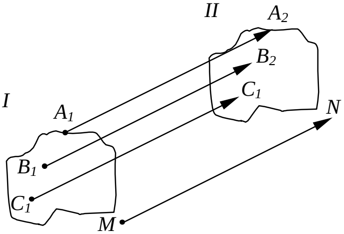


Рис. 3

Розглянуте переміщення можна задати напрямленим відрізком $\overrightarrow{MN}$ з початком у довільній точці M простору і рівним кожному з напрямлених відрізків $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{B_1B_2}, \overrightarrow{C_1C_2}, \ldots$ (рис. 3).

Наведений приклад показує, що положення початку напрямленого відрізка зовсім неважливе, суттєвими є лише його довжина та напрямок. Тому, відволікаючись від точки прикладання напрямленого відрізка, будемо розглядати всю множину рівних між собою напрямлених відрізків, прикладених до всіх можливих точок M простору, як новий математичний об'єкт. У зв'язку з цим дамо таке означення.

Означення 6. ***Вільним вектором*** у просторі (на площині) назвемо ***множину*** всіх рівних між собою напрямлених відрізків, прикладених до всіх можливих точок простору (площини).

Оскільки нижче розглядаються лише вільні вектори, то замість слів "вільний вектор" будемо говорити просто "вектор".

Вектори, зазвичай, позначаються малими літерами $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots$. Якщо точки A, B і вектор $\vec{a}$ такі, що напрямлений відрізок $\overrightarrow{AB} \in \vec{a}$, то вектор $\vec{a}$ позначають так само, як напрямлений відрізок $\overrightarrow{AB}$ і пишуть $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ або $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$. У цьому випадку про напрямлений відрізок $\overrightarrow{AB}$ кажуть, що він зображає вектор $\vec{a}$, і над стрілкою напрямленого відрізка $\overrightarrow{AB}$ пишуть $\vec{a}$ (рис. 4).

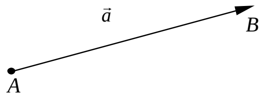


Рис. 4

Рівні напрямлені відрізки і тільки вони зображають один і той же вектор.

Якщо вектор $\vec{a}$ зображається напрямленим відрізком $\overrightarrow{AB}$, то вектор, зображений напрямленим відрізком $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$, називають протилежним вектором до вектора $\vec{a}$ і позначають $-\vec{a}$.

Нульовим вектором $\vec{0}$ називається вектор, зображений нульовим напрямленим відрізком, при цьому $\vec{0} = -\vec{0}$. Довжиною $|\vec{a}|$ вектора $\vec{a}$ називається довжина напрямленого відрізка, яким цей вектор зображається. Зокрема, $|\vec{0}| = 0$.

Вектори $\vec{a}_1 = \overrightarrow{A_1B_1},\ \vec{a}_2 = \overrightarrow{A_2B_2}, \ldots, \vec{a}_k = \overrightarrow{A_kB_k}$ називаються колінеарними (компланарними), якщо колінеарні (компланарні) напрямлені відрізки $\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_2B_2}, \ldots, \overrightarrow{A_kB_k}$, що їх зображають.

Колінеарність і неколінеарність векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ позначаються відповідно $\vec{a} \parallel \vec{b}$ і $\vec{a} \nparallel \vec{b}$.

Вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ називається паралельним до прямої l (площини α), якщо напрямлений відрізок $\overrightarrow{AB}$, що його зображає, паралельний до прямої l (площини α). Згідно з властивістю транзитивності паралельних прямих це означення не залежить від вибору напрямленого відрізка, що зображає вектор $\vec{a}$.

Ненульовий вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ називається перпендикулярним до прямої l (площини α), якщо напрямлений відрізок $\overrightarrow{AB}$, що його зображає, перпендикулярний до прямої l (площини α). Це означення також не залежить від вибору напрямленого відрізка, що зображає вектор $\vec{a}$. Дійсно, нехай напрямлений відрізок $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$ зображає вектор $\vec{a}$. Оскільки прямі CD і AB паралельні, то пряма $CD \perp l$ (відповідно $CD \perp \alpha$), тобто напрямлений відрізок $\overrightarrow{CD} \perp l$ ($\overrightarrow{CD} \perp \alpha$).

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перпендикулярні площині α, то вони колінеарні.

Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються співнапрямленими (позначення $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$), якщо співнапрямлені відрізки $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ і $\overrightarrow{CD} = \vec{b}$, що їх зображають, і протилежно напрямленими (позначення $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$), якщо $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$.

§2 Додавання векторів

2.1. Нехай дано вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Виберемо у просторі деяку точку O. Відкладемо від неї вектор $\vec{a}$, тобто побудуємо зображення вектора $\vec{a}$ у точці O – напрямлений відрізок $\overrightarrow{OA}$. У точці A будуємо зображення вектора $\vec{b}$ – напрямлений відрізок $\overrightarrow{AB}$ (рис. 1).

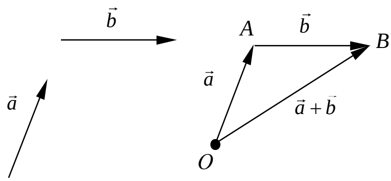


Рис. 1

<u>Означення 1</u>. Напрямлений відрізок $\overrightarrow{OB}$ визначає зображення вектора, який називається сумою векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ і позначається $\vec{a}+\vec{b}$. Операція знаходження суми векторів називається додаванням векторів.

Правило побудови вектора $\vec{a}+\vec{b}$ називається правилом трикутника. Єдиним елементом довільності у цій побудові є вибір точки O – точки прикладання вектора $\vec{a}$.

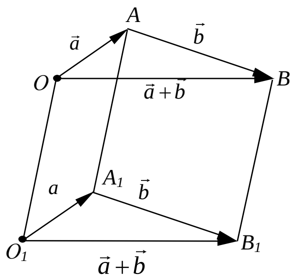


Рис. 2

Доведемо, що сума двох векторів $\vec{a}+\vec{b}$ не залежить від вибору точки O. Для цього виконаємо вказану побудову для якої-небудь іншої точки O_1 (рис. 2). З рівності $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{O_1A_1}$ випливає, що $\overrightarrow{O_1O}=\overrightarrow{A_1A}$. З рівності $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A_1B_1}$ випливає, що $\overrightarrow{A_1A}=\overrightarrow{B_1B}$. Згідно з властивістю транзитивності напрямлених відрізків отримуємо, що $\overrightarrow{O_1O}=\overrightarrow{B_1B}$. З останньої рівності випливає, що $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{O_1B_1}$.

Отже, напрямлені відрізки $\overrightarrow{OB}$ і $\overrightarrow{O_1B_1}$ рівні і визначають (зображають) один і той же вектор $\vec{a}+\vec{b}$.

З правила трикутника побудови вектора $\vec{a}+\vec{b}$ випливає просте і дуже корисне правило для розв'язування задач: для довільних трьох точок A, B, C виконується співвідношення $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$. При цьому не виключається випадок, коли дві з даних точок або всі три співпадають.

На рис. 3 зображено побудову суми $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}$ двох колінеарних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$: а) співнапрямлених, б) протилежнонапрямлених, в) векторів, з яких один нульовий, г) рівних по модулю, але протилежнонапрямлених; сума векторів у цьому випадку дорівнює нуль-вектору.

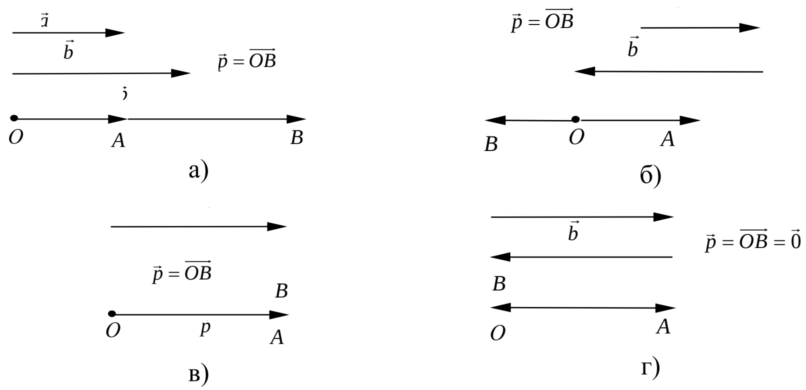


Рис. 3

2.2. Теорема 1. Для довільних векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ справедливі співвідношення

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (закон комутативності),
2. $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$ (закон асоціативності).

Доведення. 1. Для доведення властивості 1 скористаємось правилом паралелограма для додавання двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Нехай задано вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. У точці O будуємо зображення векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ так, що $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ (рис. 4).

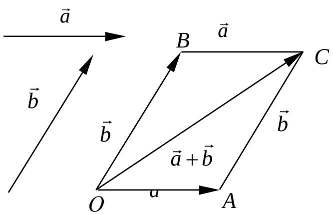


Рис. 4

На цих векторах будуємо паралелограм $OBCA$. Тоді напрямлений відрізок діагоналі паралелограма $\overrightarrow{OC}$ буде визначати вектор $\vec{a} + \vec{b}$. Дійсно, з ΔOAC маємо $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$. З іншого боку, з трикутника ΔOBC отримуємо $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \vec{b} + \vec{a}$, що і доводить співвідношення 1.

2. Нехай дано вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Якщо $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{BC}$ (рис. 5),

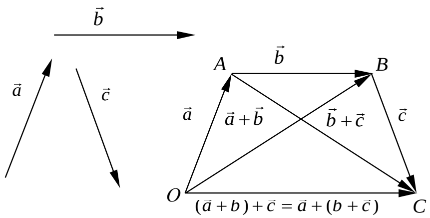


Рис. 5

то $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$ і $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}$.

Оскільки

$$\vec{b} + \vec{c} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC},$$

то

$$\vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}.$$

Отже, вектори $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}$ і $\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$ є одним і тим же вектором $\overrightarrow{OC}$, який замикає послідовність трьох векторів $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{c}$.

2.3. Для того щоб додати n векторів, потрібно записати їх у довільному порядку $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$, потім прикласти перший вектор до якої-небудь точки O, а кожен наступний вектор – до кінця попереднього, так що $\vec{a}_1=\overrightarrow{OA_1},\ \vec{a}_2=\overrightarrow{A_1A_2}, \ldots,\ \vec{a}_n=\overrightarrow{A_{n-1}A_n}$.

Тоді сумою $\vec{a}_1+\vec{a}+\ldots+\vec{a}_n$ буде вектор $\overrightarrow{OA_n}$, який замикає послідовність векторів-доданків.

Вказане правило додавання декількох векторів називається “правилом многокутника” (див. рис. 6). Відмітимо, що для некомпланарних векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ “многокутник” $OA_1A_2 \ldots A_{n-1}A_n$ має просторовий характер.

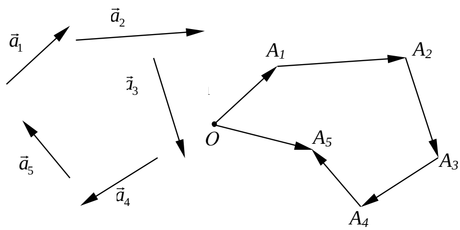


Рис. 6

Для побудови суми трьох некомпланарних векторів поряд з правилом многокутника можна застосувати правило паралелепіпеда, яке полягає в наступному: потрібно відкласти ці вектори від однієї точки O і побудувати на відкладених векторах, як на ребрах, паралелепіпед. Вектор, що виходить з точки O і співпадає з діагоналлю цього паралелепіпеда, зображає суму $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ (рис. 7).

Справді, $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OM}$; $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{OD}$.

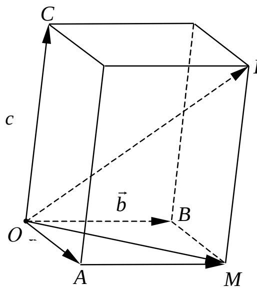


Рис. 7

§3. Віднімання векторів

Операція віднімання векторів вводиться як операція, обернена до операції додавання.

<u>Означення 1</u>. Різницею векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ (позначення $\vec{a}-\vec{b}$) називається такий вектор $\vec{x}$, для якого виконується рівність $\vec{x}+\vec{b}=\vec{a}$.

Отже, вираз $\vec{x}=\vec{a}-\vec{b}$ означає, що $\vec{x}+\vec{b}=\vec{a}$.

Теорема 1. Для довільних векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ різниця $\vec{a}-\vec{b}$ завжди існує і визначається однозначно.

<u>Доведення</u>. Відкладемо вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ від однієї точки O (рис. 1). Тоді згідно з означенням суми двох векторів $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}$, тобто $\vec{b}+\overrightarrow{BA}=\vec{a}$.

Напрямлений відрізок $\overrightarrow{BA}$ згідно з означенням різниці векторів визначає вектор $\vec{x}=\vec{a}-\vec{b}$. Оскільки побудову можна виконати для будь-яких векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$, то різниця $\vec{a}-\vec{b}$ завжди існує. Тепер доведемо, що ця різниця визначається однозначно.

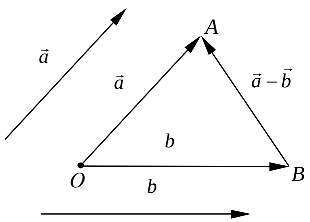


Рис. 1

Припустимо, що поряд з вектором $\vec{x}$ існує вектор $\overrightarrow{x_1}$, для якого $\vec{b}+\overrightarrow{x_1}=\vec{a}$. Тоді $\vec{b}+\vec{x}=\vec{b}+\overrightarrow{x_1} \Leftrightarrow -\vec{b}+(\vec{b}+\vec{x})=-\vec{b}+(\vec{b}+\overrightarrow{x_1})$ (до обох частин рівності додано $-\vec{b}$) $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \left[\left(-\vec{b}\right)+\vec{b}\right]+\vec{x}=\left[\left(-\vec{b}\right)+\vec{b}\right]+\overrightarrow{x_1} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \vec{0}+\vec{x}=\vec{0}+\overrightarrow{x_1} \Leftrightarrow \vec{x}=\overrightarrow{x_1}$.

Теорему доведено.

Наслідок. а) Для побудови різниці $\vec{a}-\vec{b}$ двох векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ необхідно ці вектори помістити у деяку точку простору. Тоді вектор, що йде від кінця вектора $\vec{b}$ до кінця вектора $\vec{a}$, і є шуканим вектором різниці (рис. 1).

б) Для двох довільних векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ маємо:

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right).$$

Дійсно, $\left[\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)\right]+\vec{b}=\vec{a}+\left[\left(-\vec{b}\right)+\vec{b}\right]=\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.

Рис. 2 дає геометричне тлумачення наслідку б).

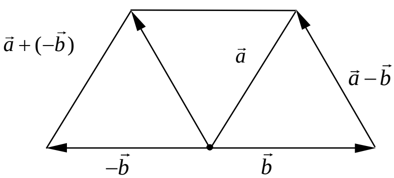


Рис. 2

§4 Множення вектора на число

<u>Означення 1</u>. Добутком вектора $\vec{a}$ на число α називається такий вектор $\vec{b}$, для якого виконуються умови:

1) $|\vec{b}|=|\alpha||\vec{a}|$;

2) вектор $\vec{b}$ колінеарний вектору $\vec{a}$;

3) $\vec{b}\uparrow\uparrow\vec{a}$, якщо $\alpha>0$ та $\vec{b}\uparrow\downarrow\vec{a}$, якщо $\alpha<0$.

Безпосередньо з означення випливає, що $0\cdot\vec{a}=\vec{0}$; $\alpha\cdot\vec{0}=\vec{0}$; $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$; $(-1)\cdot\vec{a}=-\vec{a}$.

Нижче добуток вектора $\vec{a}$ на число α будемо позначати $\alpha\vec{a}$ або $\vec{a}\alpha$.

Теорема 1. Добуток вектора на число має такі властивості:

$$\alpha(\beta\vec{a})=(\alpha\beta)\vec{a}\,; \tag{1}$$

$$(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}\,; \tag{2}$$

$$\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}\,. \tag{3}$$

<u>Доведення</u>. Розглянемо, наприклад, доведення властивості (1).

З означення операції множення вектора на число одразу випливає, що вектори, які стоять в обох частинах співвідношення (1), паралельні вектору $\vec{a}$ і мають одну і ту ж довжину $|\alpha||\beta||\vec{a}|$. Тому залишається лише перевірити, що ці вектори співнапрямлені.

Якщо α та β одного знака, то вектори $\alpha(\beta\vec{a})\uparrow\uparrow(\alpha\beta\vec{a})$. Якщо ж α та β різних знаків, то $\alpha(\beta\vec{a})\uparrow\downarrow\vec{a}$ і $(\alpha\beta)\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{a}$, а це означає, що $\alpha(\beta\vec{a})\uparrow\uparrow(\alpha\beta)\vec{a}$.

Доведення властивостей (2) і (3) рекомендується провести самостійно.

Теорема 2. Для того щоб два вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ були колінеарними, необхідно і достатньо, щоб існувало таке число λ, для якого виконується рівність

$$\vec{b}=\lambda\vec{a} \tag{4}$$

<u>Доведення</u>. *Необхідність*. Нехай вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ колінеарні. Тоді можливі два випадки:

1) $\vec{a}$ та $\vec{b}$ співнапрямлені. У цьому випадку

$$\vec{b}=\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\vec{a}\,. \tag{5}$$

Справедливість рівності (5) випливає з наступних міркувань.

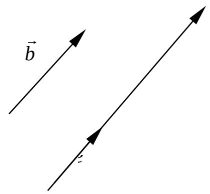


Рис. 1

Вектор $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\vec{e}$ є одиничним вектором (див. рис. 1) і для того щоб отримати вектор $\vec{b}$, слід вектор $\vec{e}$ помножити на довжину вектора $\vec{b}$.

2) $\vec{a}$ та $\vec{b}$ протилежнонапрямлені. У цьому випадку має місце рівність

$$\vec{b}=-\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\vec{a}\,. \tag{6}$$

Доведення рівності (6) аналогічне доведенню рівності (5). Ввівши позначення $\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}=\lambda$ для випадку 1) та $-\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}=\lambda$ для випадку 2), приходимо до рівності (4).

Достатність. Нехай існує таке число λ, для якого справедлива рівність (4). Тоді згідно з означенням добутку вектора на число (див. пункт 2) означення 1) вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ колінеарні, що повністю доводить теорему.

§5 Застосування векторної алгебри до розв'язування задач

Перейдемо до розв'язування геометричних задач за допомогою векторів. Використання векторів робить ці задачі обчислювальними, тобто зводить геометричні міркування (з трикутниками, середніми лініями тощо) до арифметичних операцій над векторами.

Задача 1. На сторонах довільного трикутника ABC побудовано довільні паралелограми (рис. 1). Довести, що з відрізків A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 можна побудувати трикутник.

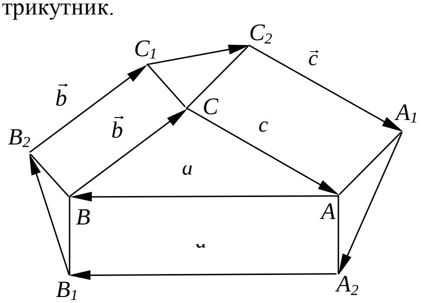


Рис. 1

Розв'язання. Для того щоб з трьох відрізків можна було побудувати трикутник, необхідно і достатньо, щоб довжина кожного відрізка була меншою за суму довжин двох інших відрізків. Безпосередньо перевірити виконання цих умов досить складно. Проте, задача має простий векторний розв'язок, який ґрунтується на наступному факті: якщо сума трьох векторів є нуль-вектором, то з довжин цих векторів можна скласти трикутник.

Нехай $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{CA}=\vec{c}$. Розглянемо спочатку трикутник ABC та замкнений шестикутник $A_1A_2B_1B_2C_1C_2A_1$, для яких маємо

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}\,; \tag{1}$$

$$\overrightarrow{A_2B_1}+\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{B_2C_1}+\overrightarrow{C_1C_2}+\overrightarrow{C_2A_1}+\overrightarrow{A_1A_2}=\vec{0}. \qquad (2)$$

Оскільки $\overrightarrow{A_2B_1}=\vec{a}$, $\overrightarrow{B_2C_1}=\vec{b}$, $\overrightarrow{C_2A_1}=\vec{c}$, то рівність (2) перепишеться у вигляді

$$\overrightarrow{A_2B_1}+\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{B_2C_1}+\overrightarrow{C_1C_2}+\overrightarrow{C_2A_1}+\overrightarrow{A_1A_2}=\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)+\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{C_1C_2}=\vec{0}.$$

Використовуючи рівність (1), отримуємо

$$\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{C_1C_2}=\vec{0}. \qquad (3)$$

Рівність (3) означає, що з трьох відрізків $\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|$, $\left|\overrightarrow{B_1B_2}\right|$, $\left|\overrightarrow{C_1C_2}\right|$ можна скласти трикутник.

Задача 2. Виразити середній вектор довільного чотирикутника через вектори, що характеризують основи цього чотирикутника

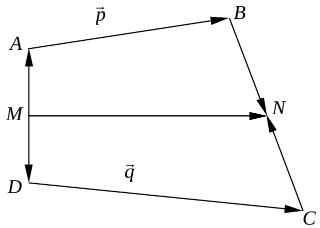


Рис. 2

Середнім вектором чотирикутника $ABCD$ (рис. 2) називається вектор, що з'єднує середини бічних сторін.

Розв'язання. Позначимо $\overrightarrow{AB}=\vec{p}$, $\overrightarrow{DC}=\vec{q}$. Тоді з чотирикутника $MABN$ маємо векторну рівність

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}, \qquad (4)$$

а з чотирикутника $MDCN$ – векторну рівність

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CN}. \qquad (5)$$

Почленно додавши рівності (4) та (5) і врахувавши, що $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}=\vec{0}$, $\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CN}=\vec{0}$, отримуємо $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=\vec{p}+\vec{q} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN}=\dfrac{\vec{p}+\vec{q}}{2}$.

Задача 3. Довести, що середини сторін довільного чотирикутника є вершинами паралелограма.

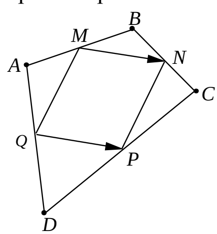


Рис. 3

Розв'язання. Нехай M, N, P, Q – середини сторін чотирикутника $ABCD$. Тоді $\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}=$
$$=\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BN}\right)+\left(\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{DQ}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{AA}=\vec{0}.$$

Отже, $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{QP}$, тобто протилежні сторони чотирикутника $MNPQ$ рівні і паралельні. Тому $MNPQ$ – паралелограм.

Задача 4. Дано довільний трикутник ABC. Довести, що можна побудувати трикутник, сторони якого рівні і паралельні медіанам трикутника ABC.

Розв'язання. Позначимо медіани трикутника ABC через AD, BE, CF (рис. 4).

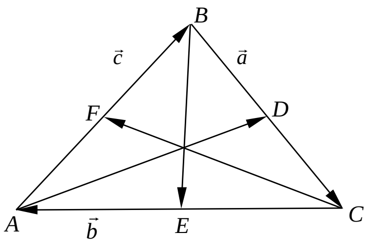


Рис. 4

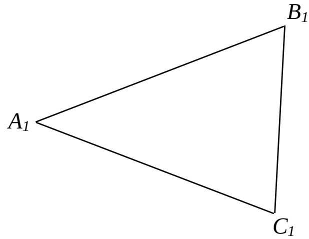


Рис. 5

Позначимо також $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$ (рис. 4).
Тоді

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a} . \tag{6}$$

Аналогічно,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BE} &= \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} , \\ \overrightarrow{CF} &= \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} . \end{aligned} \tag{7}$$

Використовуючи рівності (6), (7), отримуємо

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \left(\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a}\right) + \left(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) + \left(\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right) = \frac{3}{2}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right) = \frac{3}{2} \cdot \vec{0} = \vec{0} .$$

Відкладемо від деякої точки A_1 вектор $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{AD}$, потім від точки B_1 вектор $\overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{BE}$ і від точки C_1 вектор $\overrightarrow{C_1D_1} = \overrightarrow{CF}$. Отримаємо $\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{C_1D_1} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$, а це означає, що ламана $A_1B_1C_1D_1$ – замкнена, тобто точка D_1 співпадає з A_1 .

Отже, ми отримали трикутник $A_1B_1C_1$ (рис. 5), сторони якого рівні і паралельні медіанам AD , BE , CF вихідного трикутника ABC .

***Задача* 5**. Дано довільний трикутник ABC . Побудувати трикутник $A_1B_1C_1$, сторони якого рівні медіанам трикутника ABC , а потім трикутник $A_2B_2C_2$, сторони якого рівні медіанам трикутника $A_1B_1C_1$ (рис. 6). Довести, що трикутники ABC та $A_2B_2C_2$ подібні.

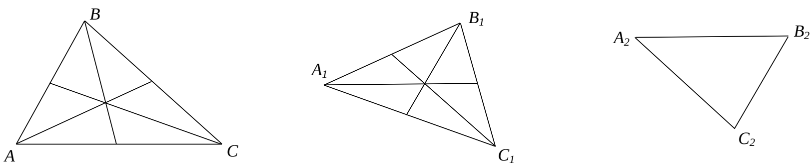


Рис. 6

Розв'язання. Із задачі 4 випливає, що для побудови трикутника $A_1B_1C_1$ достатньо взяти за його сторони такі вектори:

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a}\ ;\ \ \overrightarrow{B_1C_1} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\ ;\ \ \overrightarrow{C_1A_1} = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\ . \tag{8}$$

Введемо для цих векторів позначення: $\overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{C_1A_1} = \overrightarrow{b_1}$, $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{c_1}$.

Аналогічно, для побудови трикутника $A_2B_2C_2$ беремо за його сторони вектори

$$\overrightarrow{A_2B_2} = \overrightarrow{c_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{a_1};\ \ \overrightarrow{B_2C_2} = \vec{a}_1 + \frac{1}{2}\vec{b}_1\ ;\ \ \overrightarrow{C_2A_2} = \vec{b}_1 + \frac{1}{2}\vec{c}_1\ . \tag{9}$$

Підставляючи в (9) вирази для векторів $\vec{a}_1, \vec{b}_1, \vec{c}_1$ та враховуючи, що $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$, отримуємо

$$\overrightarrow{A_2B_2} = \overrightarrow{c_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{a_1} = \left(\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a}\right) + \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) = \vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \vec{c} = \left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right) - \frac{3}{4}\vec{b} = -\frac{3}{4}\vec{b};$$

$$\overrightarrow{B_2C_2} = \overrightarrow{a_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{b_1} = \left(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) + \frac{1}{2}\left(\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right) = \vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c} = \left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right) - \frac{3}{4}\vec{c} = -\frac{3}{4}\vec{c};$$

$$\overrightarrow{C_2A_2} = \overrightarrow{b_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{c_1} = \left(\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}\right) + \frac{1}{2}\left(\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a}\right) = \frac{1}{4}\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right) - \frac{3}{4}\vec{a} = -\frac{3}{4}\vec{a}.$$

Отже, сторонами трикутника $A_2B_2C_2$ є вектори $-\frac{3}{4}\vec{a}$, $-\frac{3}{4}\vec{b}$, $-\frac{3}{4}\vec{c}$, а тому трикутник $A_2B_2C_2$ подібний трикутнику ABC з коефіцієнтом подібності $-\frac{3}{4}$.

Координати вектора і точки. Координатний метод розв’язування геометричних задач

§1. Координати вектора на площині

Нехай $\vec{u}$ і $\vec{v}$ – два довільних неколінеарних вектори на площині P.

Означення 1. Пару неколінеарних векторів $\vec{u}$, $\vec{v}$ будемо називати базисом на площині і позначати $\{\vec{u};\ \vec{v}\}$. Самі вектори $\vec{u}$, $\vec{v}$ ще називають координатними або базисними, або такими, що утворюють базис.

Теорема 1. Кожен вектор $\vec{a}$ площини P у заданому базисі $\{\vec{u};\ \vec{v}\}$ однозначно визначається парою чисел.

Доведення. Перенесемо всі три вектори $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{a}$ в одну точку O площини P (рис. 1). Через кінець A вектора $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ проведемо пряму паралельно вектору $\vec{v}$ до її перетину з прямою, на якій лежать вектор $\vec{u}$. Оскільки $\vec{u} \nparallel \vec{v}$, то ці прямі перетинаються. Позначимо точку їх перетину через B.

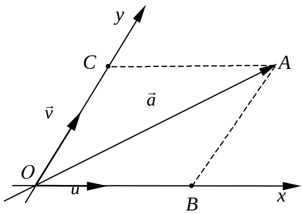


Рис. 1

Тоді

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} \tag{1}$$

Оскільки $\overrightarrow{OB} \parallel \vec{u}$, то існує таке число α, що

$$\overrightarrow{OB} = \alpha\vec{u}\ . \tag{2}$$

Вектор $\overrightarrow{BA} \parallel \vec{v}$, тому існує таке число β, що

$$\overrightarrow{BA} = \beta\vec{v}\ . \tag{3}$$

Підставляючи (2) і (3) в рівність (1), отримуємо

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}\ . \tag{4}$$

Отже, кожному вектору $\vec{a}$ відповідає пара чисел α, β, для яких виконується рівність (4).

Означення 2. Рівність (4) називається розкладом вектора $\vec{a}$ у базисі $\{\vec{u};\ \vec{v}\}$.

Тепер доведемо єдиність розкладу вектора у даному базисі. Нехай поряд з рівністю (4) виконується рівність.

$$\vec{a} = \alpha_1\vec{u} + \beta_1\vec{v}\ . \tag{5}$$

Порівнюючи рівності (4) і (5), отримуємо

$$\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}=\alpha_1\vec{u}+\beta_1\vec{v}\Leftrightarrow(\alpha-\alpha_1)\vec{u}+(\beta-\beta_1)\vec{v}=0. \qquad (6)$$

Доведемо, що рівність (6) виконується лише за умови $\alpha=\alpha_1$, $\beta=\beta_1$.

Доведення проведемо методом від супротивного. Нехай $\alpha-\alpha_1\neq 0$. Тоді рівність (6) можна записати у вигляді

$$\vec{u}=-\frac{\beta-\beta_1}{\alpha-\alpha_1}\vec{v}\cdot \qquad (7)$$

З рівності (7) випливає, що $\vec{u}\parallel\vec{v}$. Це суперечить умові. Отже, $\alpha-\alpha_1=0\Leftrightarrow\alpha=\alpha_1$.

Аналогічно доводиться, що $\beta=\beta_1$. Теорему доведено.

Означення 3. Числа α і β називаються координатами вектора $\vec{a}$ у базисі $\{\vec{u};\ \vec{v}\}$. При цьому для вектора $\vec{a}$ будемо писати $\vec{a}(\alpha;\ \beta)_{\vec{u},\vec{v}}$.

Вектори $\vec{u}$, $\vec{v}$ і точка O визначають координатні осі Ox, Oy (рис. 1). Будемо говорити, що в цьому випадку побудовано систему координат. Якщо вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ загального розташування, то система координат називається загальною або ***афінною***.

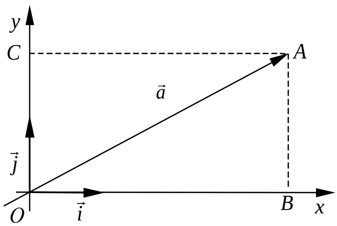


Рис. 2

Однак, у подальшому будемо користуватися спеціальною системою координат, базисні вектори якої одиничні і перпендикулярні. Така система координат називається ***декартовою прямокутною***, а її базисні вектори позначаються через $\vec{i}$, $\vec{j}$. Рис. 1 у цьому випадку приймає вигляд рис. 2.

Запишемо розклад вектора $\vec{a}$ у базисі $\{\vec{i};\vec{j}\}$:

$$\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}. \qquad (8)$$

Вектори $\overrightarrow{OB}$ і $\overrightarrow{OC}$ назвемо ортогональними складовими вектора $\vec{a}$. Абсолютна величина першої координати x дорівнює довжині вектора $\overrightarrow{OB}$, тобто $|x|=|\overrightarrow{OB}|$. Аналогічно, $|y|=|\overrightarrow{OC}|$.

З прямокутного трикутника OBA отримуємо

$$|\vec{a}|^2=\left|\overrightarrow{OB}\right|^2+\left|\overrightarrow{BA}\right|^2=x^2+y^2\Leftrightarrow|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2}. \qquad (9)$$

За формулою (9) знаходиться довжина вектора, заданого своїми декартовими прямокутними координатами x, y.

Приклад 1. Побудувати вектор $\vec{a}(2;-3)_{\vec{i},\vec{j}}$ і знайти його довжину.

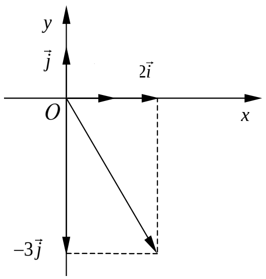


Рис. 3

Розв'язання. Запишемо розклад вектора $\vec{a}$ за базисними векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$: $\vec{a} = 2\vec{i} + (-3)\vec{j}$. Вектор $\vec{a}$ знаходиться як сума векторів за правилом паралелограма, побудованого на векторах $2\vec{i}$ і $-3\vec{j}$ (рис. 3). Використовуючи формулу (9), отримуємо

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13} \text{ (лін. од.).}$$

§2. Координати вектора у просторі

<u>Означення 1</u>. Три некомпланарні вектори $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, взяті у певному порядку, називаються координатними або базисними. Будемо говорити, що вектори $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ утворюють базис простору і записувати $\{\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}\}$, називаючи вектор $\vec{u}$ першим вектором цього базису, $\vec{v}$ – другим, а $\vec{w}$ – третім.

Теорема 1. Кожний вектор $\vec{a}$ простору в заданому базисі $\{\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}\}$ однозначно визначається трійкою чисел.

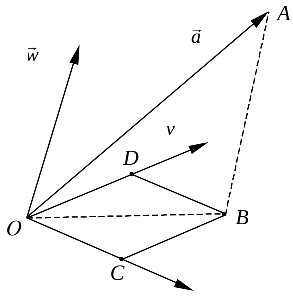


Рис. 1

<u>*Доведення*</u>. Відкладемо вектори $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ від деякої точки O (рис. 1).

Через точку A $\left(\overrightarrow{OA} = \vec{a}\right)$ проведемо пряму паралельно вектору $\vec{w}$. Точку перетину цієї прямої з площиною, яка проходить через вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$, позначимо B.

Розкладемо вектор $\overrightarrow{OB}$ за векторами $\vec{u}$ і $\vec{v}$, що завжди можливо згідно з теоремою 1 §1. Нехай цей розклад має вигляд

$$\overrightarrow{OB} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}, \tag{1}$$

де $\alpha\vec{u} = \overrightarrow{OC},\ \beta\vec{v} = \overrightarrow{OD}$.

Тоді

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}, \tag{2}$$

де $\overrightarrow{BA} = \gamma\vec{w}$, оскільки вектори $\overrightarrow{BA}$ і $\vec{w}$ колінеарні.

Отже, вектору $\vec{a}$ співставляється трійка чисел α, β, γ так, що справедлива рівність (2). Цю рівність називають розкладом вектора $\vec{a}$ у даному базисі.

Доведемо тепер єдиність цього розкладу. Припустимо, що поряд з рівністю (2) виконується рівність

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{u} + \beta_1 \vec{v} + \gamma_1 \vec{w}. \qquad (3)$$

Порівнюючи рівності (2) і (3), отримуємо

$$\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w} = \alpha_1 \vec{u} + \beta_1 \vec{v} + \gamma_1 \vec{w} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\alpha - \alpha_1)\vec{u} + (\beta - \beta_1)\vec{v} + (\gamma - \gamma_1)\vec{w} = 0. \qquad (4)$$

Рівність (4) справедлива лише за умови $\alpha - \alpha_1 = 0$, $\beta - \beta_1 = 0$, $\gamma - \gamma_1 = 0$.

Дійсно, якщо припустити, що $\alpha - \alpha_1 \neq 0$, то рівність (4) можна записати в такому вигляді

$$\vec{u} = -\frac{\beta - \beta_1}{\alpha - \alpha_1}\vec{v} - \frac{\gamma - \gamma_1}{\alpha - \alpha_1}\vec{w},$$

тобто вектор $\vec{u}$ лежить в одній площині з векторами $\vec{v}$ і $\vec{w}$, що суперечить умові некомпланарності векторів $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$. Отже, $\alpha - \alpha_1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \alpha_1$.

Аналогічно доводиться, що

$$\beta - \beta_1 = 0 \Leftrightarrow \beta = \beta_1 \quad \text{і} \quad \gamma - \gamma_1 = 0 \Leftrightarrow \gamma = \gamma_1.$$

Теорему 1 доведено.

Означення 2. Числа α, β, γ називаються координатами вектора $\vec{a}$ у базисі $\{\vec{u};\ \vec{v}; \vec{w}\}$. Для вектора $\vec{a}$ будемо писати $\vec{a}(\alpha; \beta; \gamma)_{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}}$.

Означення 3. Базис називається ***декартовим прямокутним***, якщо базисні вектори взаємно перпендикулярні і їх довжини дорівнюють одиниці.

У подальшому будемо розглядати декартовий прямокутний базис, базисні вектори позначати $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, а координати вектора $\vec{a}$ у цьому базисі – x, y, z, тобто

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \qquad (5)$$

Декартова прямокутна система координат у просторі будується наступним чином: фіксується деяка довільна точка O і в цій точці будується прямокутний базис $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ (рис. 2).

Точка O називається початком координат, а прямі, які проходять через вектори $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ і напрямки на яких введено відповідно векторами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – координатними осями. Вісь, яка проходить через вектор $\vec{i}$, називається віссю

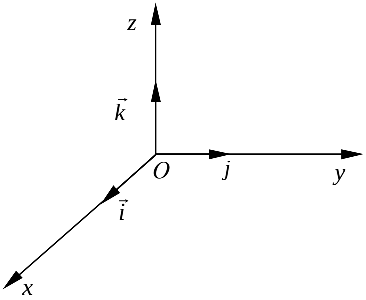


Рис. 2

абсцис або віссю Ox; через вектор $\vec{j}$ – віссю ординат або віссю Oy; через вектор $\vec{k}$ – віссю аплікат або віссю Oz. Площини, які проходять через будь-яку пару координатних осей, називаються координатними і позначаються: площина xOy, площина yOz, площина xOz.

Координатні площини ділять весь простір на 8 частин. Дійсно, якщо ми проведемо тільки площину xOy, то вона розділить простір на дві частини (рис. 3а)). Якщо тепер провести площину xOz, то кожна з цих двох частин розділиться ще на дві частини. Будемо мати чотири частини (рис. 3б)). Якщо ж провести площину yOz, то кожна з цих чотирьох частин розділиться ще на дві частини і ми будемо мати 8 частин (рис. 3в)).

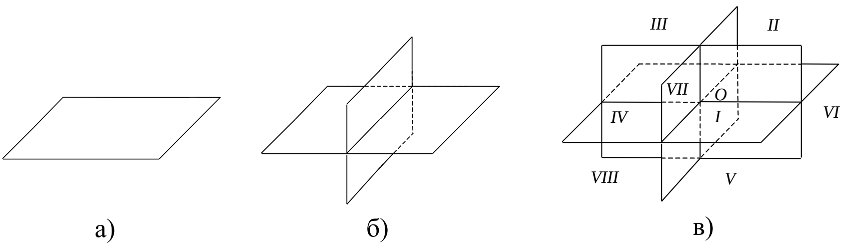


Рис. 3

Ці частини називаються ***октантами***. Октант, який визначається додатними частинами координатних осей, називається нормальним або першим октантом. Будемо нумерувати октанти наступним чином. Спочатку нумеруємо октанти, які лежать по той же бік площини xOy, що і перший октант (назвемо ці октанти верхніми). Починаємо з першого октанта в порядку проти годинкової стрілки, якщо дивитись зверху. Потім нумеруємо нижні октанти: октант, який знаходиться під першим, вважається п’ятим, і далі нумерація йде проти годинникової стрілки (див. рис. 3в)).

Якщо одна з координат вектора $\vec{a}$ дорівнює нулю, то цей вектор лежить в одній з координатних площин, а саме:

якщо $x = 0$, то вектор $\vec{a}$ лежить у площині yOz;

якщо $y = 0$, то вектор $\vec{a}$ лежить у площині xOz;

якщо $z = 0$, то вектор $\vec{a}$ лежить у площині xOy.

Якщо дві координати дорівнюють нулю, то вектор $\vec{a}$ лежить на одній з координатних осей:

якщо $x=0$ і $y=0$, то вектор $\vec{a}$ лежить на осі Oz;

якщо $y=0$ і $z=0$, то вектор $\vec{a}$ лежить на осі Ox;

якщо $x=0$ і $z=0$, то вектор $\vec{a}$ лежить на осі Oy.

Якщо вектор $\vec{a}$ не лежить в жодній з координатних площин, то за допомогою знаків чисел x, y, z можна визначити, в якому з восьми координатних октантів він знаходиться. Дійсно,

якщо $x>0,\ y>0,\ z>0$, то $\vec{a}$ належить першому октанту;

якщо $x<0,\ y>0,\ z>0$, то $\vec{a}$ належить другому октанту;

якщо $x<0,\ y<0,\ z>0$, то $\vec{a}$ належить третьому октанту;

якщо $x>0,\ y<0,\ z>0$, то $\vec{a}$ належить четвертому октанту;

якщо $x>0,\ y>0,\ z<0$, то $\vec{a}$ належить п'ятому октанту;

якщо $x<0,\ y>0,\ z<0$, то $\vec{a}$ належить шостому октанту;

якщо $x<0,\ y<0,\ z<0$, то $\vec{a}$ належить сьомому октанту;

якщо $x>0,\ y<0,\ z<0$, то $\vec{a}$ належить восьмому октанту.

Справедливі і обернені твердження. За цими критеріями легко визначити розташування вектора у просторі за його координатами, не використовуючи рисунок . Так, наприклад, вектор $\vec{a}(1;3;4)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$ розташований у першому октанті; $\vec{b}(2;-5;6)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$ – у четвертому, $\vec{c}(-3;-1;-2)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$ – у сьомому, $\vec{d}(-6;2;-1)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$ – у шостому.

Приклад 1. Побудувати вектор $\vec{a}(2;-2;-3)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$ і знайти його довжину.

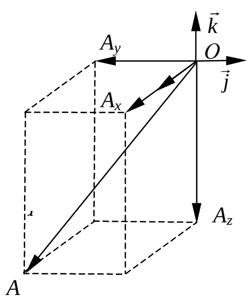


Рис. 4

Розв'язання. Запишемо розклад вектора $\vec{a}$ у базисі $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$: $\vec{a}=2\vec{i}-2\vec{j}-3\vec{k}$.

У точці O будуємо базисні вектори $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ і вектори $\overrightarrow{OA_x}=2\vec{i}$, $\overrightarrow{OA_y}=-2\vec{j}$, $\overrightarrow{OA_z}=-3\vec{k}$ (рис. 4).

На цих векторах будуємо прямокутний паралелепіпед. Тоді діагональ цього паралелепіпеда визначає вектор $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$.

Якщо вектор $\vec{a}$ задано декартовими прямокутними координатами $\vec{a}(x;y;z)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$, то його довжина визначається формулою

$$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \tag{6}$$

Тому $|\vec{a}|=\sqrt{2^2+(-2)^2+(-3)^2}=\sqrt{17}$ (лін. од.).

§3. Координати точки

Перед тим, як ввести поняття координат точки, введемо поняття радіуса-вектора точки.

Виберемо деяку точку O, яку в подальшому будемо вважати початком координат. Нехай M – довільна точка. Поставимо у відповідність цій точці вектор $\overrightarrow{OM}$. Він називається радіусом-вектором точки M відносно точки O.

Навпаки, якщо задано деякий вектор $\vec{a}$, то відклавши його від точки O, отримаємо точку A – кінець вектора $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$. Вектор $\vec{a}$, відкладений від точки O, є радіусом-вектором точки A.

Отже, при вибраній точці O кожній точці M відповідає її радіус-вектор $\overrightarrow{OM}$. Справедливе і обернене: при вибраній точці O кожному вектору відповідає точка, радіусом-вектором якої він є. Радіус-вектор точки M позначатимемо $\vec{r}_M$.

Ввівши поняття радіуси-вектора точки, координати точки M означимо як координати її радіуса-вектора, тобто вектора $\overrightarrow{OM}$.

На перший погляд здається, що поняття координат вектора і точки тотожні. Але це не так. Для визначення координат вектора немає значення положення точки O – початку координат, в той час як координати точки (координати її радіуса-вектора) суттєво залежать від розташування початку координат O. Щоб підкреслити цей факт, короткий запис того, що точка M має координати x, y, z у вказаній системі координат, будемо робити так:

$$M\left(x; y; z\right)_{O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$$

(порівняйте з записом координат вектора).

§4. Координатний метод розв'язування деяких геометричних задач

У цьому параграфі ми розв'яжемо деякі задачі, використовуючи координатний метод. Перед тим, як перейти до розгляду задач, введемо важливе поняття лінійної комбінації заданої системи векторів.

Нехай задано систему векторів

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m. \tag{1}$$

<u>Означення 1</u>. Вектор $\vec{b}$ називається лінійною комбінацією заданої системи векторів (1), якщо існують такі числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, що виконується рівність

$$\vec{b} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \ldots + \lambda_m \vec{a}_m. \tag{2}$$

Задача 1. Нехай систему векторів (1) задано координатами векторів у деякому базисі $\left\{\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right\}$:

$$\vec{a}_1\left(x_1;y_1;z_1\right)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}},\ \vec{a}_2\left(x_2;y_2;z_2\right)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}},\ldots,\ \vec{a}_m\left(x_m;y_m;z_m\right)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}. \qquad (1')$$

Які координати у цьому базисі має вектор $\vec{b}$, що визначається рівністю (2)? Відповідь на це питання дає наступна теорема.

Теорема 1. Перша (друга, третя) координата лінійної комбінації системи векторів (1) дорівнює такій же лінійній комбінації перших (других, третіх) координат даної системи векторів (1).

Доведення. Запишемо розклади векторів системи (1') у базисі $\left\{\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right\}$:

$$\begin{gathered}\vec{a}_1=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k},\\ \vec{a}_2=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k},\\ \vdots\\ \vec{a}_m=x_m\vec{i}+y_m\vec{j}+z_m\vec{k}.\end{gathered} \qquad (3)$$

Помножимо першу рівність системи (3) на λ_1, другу – на $\lambda_2,\ldots,$ m-ту рівність – на λ_m, а потім почленно додамо ці рівності. В результаті будемо мати

$$\begin{gathered}\vec{b}=\left(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\ldots+\lambda_mx_m\right)\vec{i}+\left(\lambda_1y_1+\lambda_2y_2+\ldots+\lambda_my_m\right)\vec{j}+\\ +\left(\lambda_1z_1+\lambda_2z_2+\ldots+\lambda_mz_m\right)\vec{k}.\end{gathered} \qquad (4)$$

Рівність (4) є розкладом вектора $\vec{b}$ за базисними векторами $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$, а коефіцієнти цього розкладу – відповідними координатами вектора $\vec{b}$ у цьому базисі. Теорему доведено.

З використанням теореми 1 знайдемо координати алгебраїчної суми двох векторів і добутку вектора на число.

Нехай задано вектори

$$\vec{a}_1\left(x_1;y_1;z_1\right)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}};\ \vec{a}_2\left(x_2;y_2;z_2\right)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}.$$

Тоді вектор $\vec{b}=\vec{a}_1\pm\vec{a}_2$ $\left(\lambda_1=1,\ \lambda_2=\pm1\right)$ за теоремою 1 має координати

$$\vec{b}\left(x_1\pm x_2;\ y_1\pm y_2;\ z_1\pm z_2\right)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}, \qquad (5)$$

а вектор $\tau\vec{a}$ координати

$$\tau\vec{a}\left(\tau x_1,\ \tau y_1;\ \tau z_1\right)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}. \qquad (6)$$

Задача 2. За заданими координатами точок $M_1(x_1; y_1; z_1)_{O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$ і $M_2(x_2; y_2; z_2)_{O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$ знайти координати вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ та його довжину.

Розв'язання. Оскільки координати точок M_1 і M_2 є координатами їх радіус-векторів, то вектори $\overrightarrow{OM_1}$ і $\overrightarrow{OM_2}$ мають координати

$$\overrightarrow{OM_1}(x_1;\ y_1;\ z_1)_{O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}},\quad \overrightarrow{OM_2}(x_2;\ y_2;\ z_2)_{O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}}. \tag{7}$$

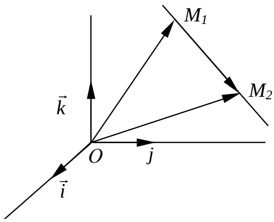


Рис. 1

Тоді (див. рис. 1)

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}.$$

Використовуючи формулу (5), отримуємо

$$\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}. \tag{8}$$

Отже, координати вектора, заданого координатами своїх кінців, дорівнюють різниці координат кінця і початку вектора.

Згідно з формулою (6) §2 маємо

$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \tag{9}$$

Задача 3. Ділення відрізка у заданому відношенні.

<u>**Означення 2**</u>. Точка M ділить напрямлений відрізок $\overrightarrow{M_1M_2}$ у відношенні λ, якщо виконується рівність

$$\overrightarrow{M_1M} = \lambda \overrightarrow{MM_2}. \tag{10}$$

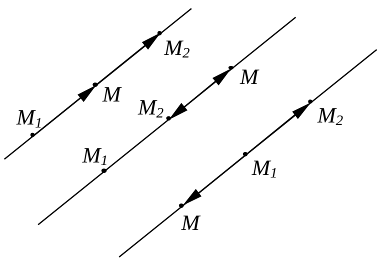
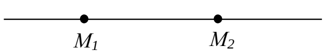


Рис. 2

Легко переконатися, що λ є додатним числом лише для внутрішніх точок відрізка M_1M_2 (див. рис. 2). При цьому λ може приймати довільні значення, які з наближенням точки M до точки M_2 необмежено збільшуються. Точці M_1 відповідає $\lambda = 0$, а точці M_2 не відповідає жодне значення λ.

Аналогічні міркування можна провести для випадку, коли точка M не належить відрізку M_1M_2. Схематично результати цих міркувань можна подати у вигляді

$$-1 < \lambda \le 0 \qquad 0 \le \lambda < \infty \qquad -\infty < \lambda < -1$$



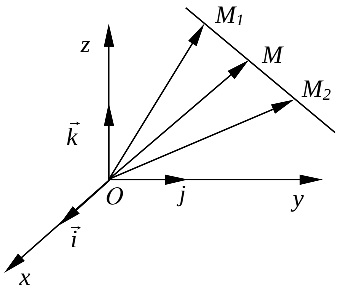


Рис. 3

Розв'яжемо таку **задачу**: для даного числа λ знайти точку M, яка ділить заданий напрямлений відрізок $\overrightarrow{M_1M_2}$ у відношенні λ.

Розв'яжемо цю задачу векторно-алгебраїчним методом. Нехай радіуси-вектори точок M_1, M_2 і шуканої точки M дорівнюють відповідно $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$ і $\overrightarrow{OM}$ (рис. 3). Тоді

$$\overrightarrow{M_1M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_1}\;;\; \overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM}\,. \tag{11}$$

Підставляючи рівність (11) в рівність (10), отримуємо

$$\begin{gathered}\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_1} = \lambda\overrightarrow{OM_2} - \lambda\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}\left(1+\lambda\right) = \overrightarrow{OM_1} + \lambda\overrightarrow{OM_2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OM_1} + \lambda\overrightarrow{OM_2}}{1+\lambda}\,.\end{gathered} \tag{12}$$

Перейдемо від векторного запису формули (12) до координатного. Нехай точки M_1 і M_2 задано координатами $M_1\left(x_1;y_1;z_1\right)_{O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$, $M_2\left(x_2;y_2;z_2\right)_{O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$, а шукана точка M має координати $M\left(x;y;z\right)_{O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$. Рівність (12) можна записати у вигляді

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{OM_1} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{OM_2}\,. \tag{13}$$

Оскільки координати точок M_1, M_2 і M є відповідно координатами векторів $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$ і $\overrightarrow{OM}$, то згідно з теоремою 1 (вектор $\overrightarrow{OM}$ є лінійною комбінацією векторів $\overrightarrow{OM_1}$ і $\overrightarrow{OM_2}$ з коефіцієнтами цієї комбінації відповідно $\frac{1}{1+\lambda}$, $\frac{\lambda}{1+\lambda}$) маємо

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{1+\lambda}x_1 + \frac{\lambda}{1+\lambda}x_2 = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \\ y &= \frac{1}{1+\lambda}y_1 + \frac{\lambda}{1+\lambda}y_2 = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}, \\ z &= \frac{1}{1+\lambda}z_1 + \frac{\lambda}{1+\lambda}z_2 = \frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}. \end{aligned} \tag{14}$$

Як наслідок формул (14), знайдемо координати середини відрізка M_1M_2. У цьому випадку $\lambda = 1$ і формули (14) приймають вигляд

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\ y=\frac{y_1+y_2}{2},\ z=\frac{z_1+z_2}{2}\ . \qquad (15)$$

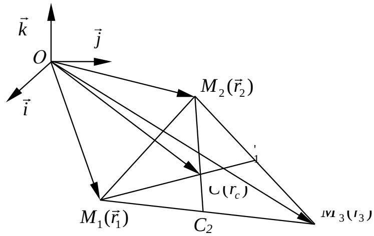


Рис. 4

Доведемо за допомогою отриманої формули (12) добре відому з елементарної геометрії теорему про те, що три медіани трикутника перетинаються в одній точці.

Позначимо через $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ радіуси-вектори вершин трикутника $M_1M_2M_3$ (рис. 4). Побудуємо точку C, радіус-вектор $\vec{r}_c$ якої є середнім арифметичним векторів $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$:

$$\vec{r}_c=\frac{\vec{r}_1+\vec{r}_2+\vec{r}_3}{3}\ . \qquad (16)$$

Вираз для $\vec{r}_c$ перепишемо у такому вигляді:

$$\vec{r}_c=\frac{\vec{r}_1+2\dfrac{\vec{r}_2+\vec{r}_3}{2}}{1+2}=\frac{\vec{r}_1+2\vec{r}_{c_1}}{1+2}\ ,$$

де $\vec{r}_{c_1}$ є радіусом-вектором точки C_1, яка ділить відрізок M_2M_3 навпіл. Згідно з формулою (12) отриманий вираз для $\vec{r}_c$ показує, що $\overrightarrow{M_1C}=\lambda\overrightarrow{CC_1}=2\overrightarrow{CC_1}$, тобто точка C належить медіані $\overrightarrow{M_1C_1}$ і ділить її у відношенні 2:1 від вершини трикутника.

Перепишемо тепер вираз $\vec{r}_c$ в іншому вигляді:

$$\vec{r}_c=\frac{\vec{r}_2+2\dfrac{\vec{r}_1+\vec{r}_3}{2}}{1+2}=\frac{\vec{r}_2+2\vec{r}_{c_2}}{1+2}\ .$$

З останнього виразу можна зробити висновок, що точка C належить медіані M_2C_2 і ділить її у відношенні 2:1. Аналогічно, можна переконатися, що точка C належить і третій медіані трикутника. Отже, три медіани трикутника перетинаються в одній точці і відсікають одна від одної одну третину довжини, рахуючи від основи.

<u>**Означення 3**</u>. Точка C, яка визначається формулою (16), називається центроїдом трикутника.

Якщо вершини трикутника $M_1M_2M_3$ задано координатами $M_1(x_1;y_1)_{O,\vec{i},\vec{j}}$, $M_2(x_2;y_2)_{O,\vec{i},\vec{j}}$, $M_3(x_3;y_3)_{O,\vec{i},\vec{j}}$, то центроїд трикутника визначається формулою

$$C\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)_{O,\vec{i},\vec{j}}$$

Задача 4. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ задано своїми координатами $\vec{a}(x_1;y_1;z_1)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$, $\vec{b}(x_2;y_2;z_2)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$. Знайти необхідні і достатні умови колінеарності цих векторів, виражені в координатах.

Розв'язок цієї задачі дає наступна теорема.

Теорема 2. Для того щоб вектори, які задані своїми координатами, були колінеарними, необхідно і достатньо, щоб всі визначники другого порядку, які складаються з координат цих векторів, дорівнювали нулю.

Доведення. *Необхідність*. Покажемо, що для колінеарних векторів всі визначники другого порядку, які складаються з координат цих векторів, дорівнюють нулю.

Оскільки вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, то згідно з теоремою 2 §4 гл. IV існує таке число λ, для якого

$$\vec{b}=\lambda\vec{a}\,. \tag{17}$$

Тоді за теоремою 1 (див. формулу (6)) маємо

$$x_2=\lambda x_1,\ y_2=\lambda y_1,\ z_2=\lambda z_1\,. \tag{18}$$

Отже,

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ \lambda x_1 & \lambda y_1 \end{vmatrix}=0\,;\quad \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ \lambda x_1 & \lambda z_1 \end{vmatrix}=0\,;\quad \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ \lambda y_1 & \lambda z_1 \end{vmatrix}=0\,,$$

що і доводить необхідність умови.

Достатність. Нехай всі визначники другого порядку, які складаються з координат векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, дорівнюють нулю. Покажемо, що ці вектори колінеарні. За умовою:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}=0\,;\ \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}=0\,;\ \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}=0\,. \tag{19}$$

З першої рівності (19) маємо

$$x_2=\lambda x_1,\ y_2=\lambda y_1\,. \tag{20}$$

Підставляючи першу рівність (20) у другу рівність (19), отримуємо

$$\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ \lambda x_1 & z_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_1\left(z_2 - \lambda z_1\right) = 0 . \qquad (21)$$

Якщо $x_1 \neq 0$, то з умови (21) випливає, що

$$z_2 - \lambda z_1 = 0 \Leftrightarrow z_2 = \lambda z_1 . \qquad (22)$$

Об’єднуючи рівності (20) і (22), отримуємо (18), що і доводить колінеарність векторів у випадку $x_1 \neq 0$.

Якщо ж $x_1 = 0$, то другу рівність (20) підставляємо в третю рівність (19). Отримуємо

$$\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ \lambda y_1 & z_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow y_1\left(z_2 - \lambda z_1\right) = 0 . \qquad (23)$$

Якщо $y_1 \neq 0$, то знову приходимо до рівностей (18), що доводить колінеарність векторів для цього випадку.

Якщо ж $x_1 = 0$ і $y_1 = 0$, то з рівностей (20) отримуємо, що $x_2 = 0$, $y_2 = 0$. Запишемо розклад векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ у базисі:

$$\vec{a} = z_1\vec{k}\ ,\ \vec{b} = z_2\vec{k}\ . \qquad (24)$$

Вирази (24) показують, що вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ паралельні вектору $\vec{k}$, а це означає їх колінеарність. Теорему доведено.

Відмітимо плоский випадок, коли $\vec{a}\left(x_1;\, y_1\right)_{\vec{i},\vec{j}}$, $\vec{b}\left(x_2;\, y_2\right)_{\vec{i},\vec{j}}$. У цьому випадку можемо вважати, що $z_1 = z_2 = 0$. Тоді замість трьох рівностей (19) матимемо одну

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0 , \qquad (25)$$

яка виражає необхідну і достатню умову колінеарності двох векторів на площині в координатній формі.

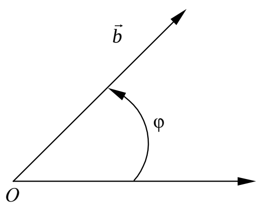


Рис. 5

Задача 5. Обчислення косинуса кута між двома векторами. Нехай вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ зведено до спільного початку O (рис. 5).

<u>Означення 4</u>. Кутом між двома векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ будемо називати кут, на який потрібно повернути перший вектор (вектор $\vec{a}$) навколо точки O до співпадання з напрямком другого вектора (вектора $\vec{b}$), здійснюючи цей поворот проти годинникової стрілки.

Повороту за годинниковою стрілкою приписується від’ємне значення кута.

Зрозуміло, що якщо при обчисленні кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ отримано величину кута φ^0, то цей кут можна оцінити і величною $\varphi^0 + 360^0 k$, де k – довільне ціле число.

Нехай вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ задано координатами $\vec{a}\left(x_1; y_1; z_1\right)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$, $\vec{b}\left(x_2; y_2; z_2\right)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$.

Потрібно визначити косинус кута між цими векторами.

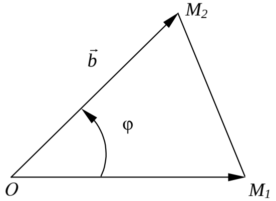


Рис. 6

Розв’язання. Побудуємо вектори $\overrightarrow{OM_1} = \vec{a}$ і $\overrightarrow{OM_2} = \vec{b}$ зі спільним початком O (рис. 6). Застосуємо до трикутника OM_1M_2 теорему косинусів:

$$|\overrightarrow{M_1M_2}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi. \tag{26}$$

Оскільки вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ має координати

$$\overrightarrow{M_1M_2}\left(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1\right)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}},$$

то його довжина визначається формулою

$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2 + \left(z_2 - z_1\right)^2}. \tag{27}$$

Крім того,

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}, \quad \left|\vec{b}\right| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}. \tag{28}$$

Підставляючи рівності (27), (28) в (26) отримуємо

$$\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2 + \left(z_2 - z_1\right)^2 =$$

$$= x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \tag{29}$$

Скалярний добуток. Перетворення координат

§1. Означення і властивості скалярного добутку

<u>Означення 1</u>. Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число, яке дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними.

Для скалярного добутку введемо позначення $\vec{a}\cdot\vec{b}$. Кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ позначимо через φ або $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$. Тоді за означенням скалярного добутку можна записати

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi\vec{a}_1. \quad (1)$$

Формулу (29) §4 гл. V перепишемо у вигляді

$$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2, \quad (2)$$

де $\vec{a}\left(x_1;y_1;z_1\right)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$, $\vec{b}\left(x_2;y_2;z_2\right)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$.

Порівнюючи рівності (1) і (2), отримуємо формулу для обчислення скалярного добутку двох векторів, які задано своїми координатами в декартовій прямокутній системі координат:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2. \quad (3)$$

За допомогою формули (3) легко перевірити наступні властивості скалярного добутку:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (комутативна властивість).

2) $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$ (асоціативна властивість відносно множення на число λ).

3) $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ (дистрибутивна властивість відносно додавання векторів).

Дійсно,

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=x_2x_1+y_2y_1+z_2z_1=\vec{b}\cdot\vec{a}$.

2) $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=(\lambda x_1)x_2+(\lambda y_1)y_2+(\lambda z_1)z_2=\lambda\left(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2\right)=\lambda\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$.

3) Поряд з векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ з (2) розглянемо вектор $\vec{c}\left(x_3,y_3,z_3\right)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$. Тоді декартовими прямокутними координатами вектора $\vec{b}+\vec{c}$ будуть числа x_2+x_3, y_2+y_3, z_2+z_3. Тому

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=x_1\left(x_2+x_3\right)+y_1\left(y_2+y_3\right)+z_1\left(z_2+z_3\right)=$$

$$=\left(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2\right)+\left(x_1x_3+y_1y_3+z_1z_3\right)==\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}.$$

Не варто думати, що скалярний добуток має всі формальні властивості добутку чисел. Так, наприклад, добуток двох чисел може дорівнювати нулю лише у тому випадку, коли хоча б один з множників дорівнює нулю, тоді як скалярний добуток двох векторів може дорівнювати нулю навіть у тому випадку, коли жоден з векторів-множників не дорівнює нулю: достатньо, щоб ці вектори були взаємно перпендикулярними.

Отже, умову перпендикулярності двох векторів у векторній алгебрі можна записати у вигляді алгебраїчної рівності

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0. \tag{4}$$

Для чисел $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ справедлива сполучна властивість $\lambda_1(\lambda_2\lambda_3)=(\lambda_1\lambda_2)\lambda_3$. Проте, якщо $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ – довільні вектори, то, взагалі кажучи, $\vec{a}_1\cdot(\vec{a}_2\cdot\vec{a}_3)\neq(\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2)\cdot\vec{a}_3$. Дійсно, якщо, наприклад, $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_3$ – неколінеарні, то вектори $\vec{p}_1=(\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2)\cdot\vec{a}_3$ і $\vec{p}_2=\vec{a}_1\cdot(\vec{a}_2\cdot\vec{a}_3)$ неколінеарні (рис. 1), а тому і не рівні.

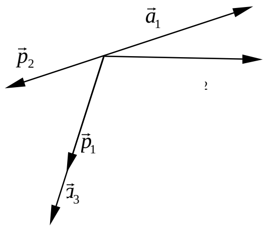


Рис. 1

Отже, якщо у виразі $(\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2)\cdot\vec{a}_3$ опустити дужки і записати його як $\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2\cdot\vec{a}_3$, то він втрачає смисл.

Знайдемо скалярний добуток $\vec{a}\cdot\vec{a}$, який позначимо $\vec{a}^2$. З формули (1) отримуємо

$$\vec{a}^2=|\vec{a}||\vec{a}|\cdot\cos 0=|\vec{a}|^2 \Leftrightarrow |\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^2}. \tag{5}$$

У координатній формі формула (5) набуває вигляду

$$|\vec{a}|=\sqrt{x_1x_1+y_1y_1+z_1z_1}=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}. \tag{6}$$

§2. Проекція вектора

Нехай у просторі задано пряму MN і деякий вектор $\overrightarrow{AB}$, розміщений довільно відносно цієї прямої. Спроектуємо кінці вектора $\overrightarrow{AB}$ на пряму MN, тобто побудуємо точки A_1 і B_1 (рис. 1).

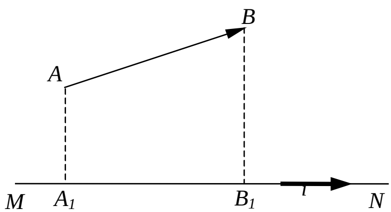


Рис. 1

Точки A_1 і B_1 є точками перетину прямої MN з площинами, проведеними відповідно через точки A і B перпендикулярно прямій MN. Відмітимо, що на відміну від плоского випадку, чотирикутник A_1ABB_1 може бути просторовим.

Нехай на прямій MN вибрано деякий напрямок, який характеризується одиничним вектором $\vec{i}$. Тоді

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \alpha\vec{i}\ . \tag{1}$$

Абсолютна величина числа α дорівнює довжині вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$; число $\alpha > 0$, якщо $\overrightarrow{A_1B_1} \uparrow\uparrow \vec{i}$ і $\alpha < 0$, якщо $\overrightarrow{A_1B_1} \uparrow\downarrow \vec{i}$.

<u>**Означення 1**</u>. Вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ називається ортогональною складовою вектора $\overrightarrow{AB}$, а число α, яке визначається співвідношенням (1), ***ортогональною проекцією*** вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь MN з одиничним вектором $\vec{i}$.

Виведемо формулу для обчислення ортогональної проекції вектора на вісь, яку задано одиничним вектором $\vec{i}$.

Для довільного взаємного розміщення вектора $\overrightarrow{AB}$ і прямої MN справедлива така рівність

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1B}\,. \tag{2}$$

Помножимо обидві частини рівності (2) скалярно на вектор $\vec{i}$:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{i} = \overrightarrow{AA_1}\cdot\vec{i} + \overrightarrow{A_1B_1}\cdot\vec{i} + \overrightarrow{B_1B}\cdot\vec{i}\ . \tag{3}$$

Оскільки вектори $\overrightarrow{AA_1}$ і $\overrightarrow{B_1B}$ перпендикулярні до вектора $\vec{i}$, то

$$\overrightarrow{AA_1}\cdot\vec{i} = 0\,, \quad \overrightarrow{B_1B}\cdot\vec{i} = 0\,. \tag{4}$$

Крім того, згідно з рівністю (1) маємо

$$\overrightarrow{A_1B_1}\cdot\vec{i} = \alpha\vec{i}\cdot\vec{i} = \alpha\,. \tag{5}$$

Підставивши рівності (4) і (5) в (3), отримуємо

$$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{i} = \alpha\ . \tag{6}$$

Ортогональну проекцію α вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь з одиничним вектором $\vec{i}$ будемо позначати так: $\alpha = \text{пр}_{\vec{i}}\overrightarrow{AB}$. Тоді формула (6) приймає вигляд

$$\text{пр}_{\vec{i}}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}\cdot\vec{i}\ . \tag{7}$$

Формула (7) є шуканою формулою для обчислення проекції вектора на вісь, яку задано одиничним вектором $\vec{i}$.

Теорема 1. Ортогональна проекція суми декількох векторів на деяку вісь дорівнює сумі ортогональних проекцій цих векторів на ту ж вісь.

Доведення. Дійсно,

$$\begin{aligned}\text{пр}_{\vec{i}}\left(\vec{a}_1+\vec{a}_2+\ldots+\vec{a}_n\right)=\left(\vec{a}_1+\vec{a}_2+\ldots+\vec{a}_n\right)\cdot\vec{i}=\vec{a}_1\cdot\vec{i}+\vec{a}_2\cdot\vec{i}+\ldots+\vec{a}_n\cdot\vec{i}=\\ =\text{пр}_{\vec{i}}\vec{a}_1+\text{пр}_{\vec{i}}\vec{a}_2+\ldots+\text{пр}_{\vec{i}}\vec{a}_n.\end{aligned} \tag{8}$$

§3. Геометричний зміст декартових прямокутних координат

Нехай задано вектор $\vec{a}(x;\,y;\,z)_{\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{k}}$. Запишемо його розклад у базисі $\left\{\vec{i};\,\vec{j};\,\vec{k}\right\}$:

$$\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\,. \tag{1}$$

Помноживши обидві частини рівності (1) скалярно на вектор $\vec{i}$ і врахувавши, що $\vec{i}\cdot\vec{i}=1$, $\vec{i}\cdot\vec{j}=0$, $\vec{i}\cdot\vec{k}=0$, отримуємо

$$\vec{a}\cdot\vec{i}=x\;\Leftrightarrow\;x=\text{пр}_{\vec{i}}\vec{a}\,. \tag{2}$$

Аналогічно, помноживши обидві частини рівності (1) скалярно на вектор $\vec{j}$, а потім скалярно на вектор $\vec{k}$, будемо мати

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{j}=y\;\Leftrightarrow\;y=\text{пр}_{\vec{j}}\vec{a},\\ \vec{a}\cdot\vec{k}=z\;\Leftrightarrow\;z=\text{пр}_{\vec{k}}\vec{a}\,.\end{aligned} \tag{3}$$

Отже, декартові прямокутні координати вектора є ортогональними проекціями цього вектора на координатні осі. Тому розклад вектора $\vec{a}$ у базисі $\left\{\vec{i};\,\vec{j};\,\vec{k}\right\}$ (формулу (1)) можна подати у вигляді

$$\vec{a}=\left(\vec{a}\cdot\vec{i}\right)\vec{i}+\left(\vec{a}\cdot\vec{j}\right)\vec{j}+\left(\vec{a}\cdot\vec{k}\right)\vec{k}\,. \tag{4}$$

Відмітимо також, що формули (2) і (3) можна записати ще так:

$$x=|\vec{a}|\cos\left(\widehat{\vec{i},\vec{a}}\right),\;\; y=|\vec{a}|\cos\left(\widehat{\vec{j},\vec{a}}\right),\;\; z=|\vec{a}|\cos\left(\widehat{\vec{k},\vec{a}}\right), \tag{5}$$

де $\left(\widehat{\vec{i},\vec{a}}\right)$, $\left(\widehat{\vec{j},\vec{a}}\right)$, $\left(\widehat{\vec{k},\vec{a}}\right)$ – кути між базисними векторами $\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{k}$ і вектором $\vec{a}$.

Дійсно, наприклад, $x=\vec{a}\cdot\vec{i}=|\vec{a}||\vec{i}|\cos\left(\widehat{\vec{i},\vec{a}}\right)=|\vec{a}|\cos\left(\widehat{\vec{i},\vec{a}}\right)$.

Напрям вектора $\vec{a}$ повністю характеризується одиничним вектором

$\vec{a}_0=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$. Координати цього вектора отримуються з координат вектора $\vec{a}$ діленням на $|\vec{a}|$. Тому, використовуючи формули (5), для координат одиничного вектора можна записати

$$\vec{a}_0\left(\cos\left(\widehat{\vec{i},\vec{a}}\right);\cos\left(\widehat{\vec{j},\vec{a}}\right);\cos\left(\widehat{\vec{k},\vec{a}}\right)\right)_{\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{k}}. \qquad (6)$$

<u>Означення 1</u>. Косинуси трьох кутів з (6), утворених координатними осями декартової прямокутної системи координат з вектором $\vec{a}$, називаються ***напрямними косинусами*** вектора $\vec{a}$.

Отже, напрям довільного вектора $\vec{a}$ повністю визначається напрямними косинусами цього вектора.

Оскільки $|\vec{a}_0|^2=1$, то згідно з формулою (6) §1 маємо

$$\cos^2\left(\widehat{\vec{i},\vec{a}}\right)+\cos^2\left(\widehat{\vec{j},\vec{a}}\right)+\cos^2\left(\widehat{\vec{k},\vec{a}}\right)=1. \qquad (7)$$

Введена нами операція скалярного добутку двох векторів дозволяє проводити виклад геометричних фактів на мові алгебри. Покажемо це на конкретних задачах.

<u>Задача 1</u>. Довести, що діагоналі ромба взаємно перпендикулярні.

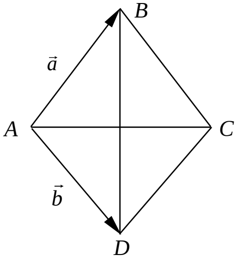


Рис. 1

Розв'язання. Нехай $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ (рис. 1). За умовою $\vec{a}^2=\vec{b}^2$. Для діагоналей ромба можна записати $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$, $\overrightarrow{BD}=\vec{b}-\vec{a}$. Тоді $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\left(\vec{b}-\vec{a}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2-\vec{a}^2-\vec{b}\cdot\vec{a}=$ $=\vec{b}^2-\vec{a}^2+\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}^2-\vec{a}^2=0$. Остання рівність означає, що вектори $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{BD}$ взаємно перпендикулярні.

<u>Задача 2</u>. Довести, що висоти довільного трикутника перетинаються в одній точці.

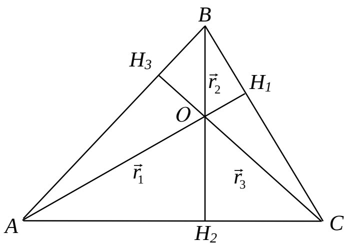


Рис. 2

Розв'язання. Нехай ABC – довільний трикутник (рис. 2). Точка O – точка перетину двох висот AH_1 і BH_2. Якщо позначити вектори $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ відповідно через $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{r}_3$, то

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}=0 \Leftrightarrow \vec{r}_1\cdot\left(\vec{r}_3-\vec{r}_2\right)=0,$$

$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CA}=0 \Leftrightarrow \vec{r}_2\cdot\left(\vec{r}_1-\vec{r}_3\right)=0.$$

Скористаємось тотожністю $\left(\vec{r}_2-\vec{r}_1\right)\cdot\vec{r}_3+\left(\vec{r}_3-\vec{r}_2\right)\cdot\vec{r}_1+\left(\vec{r}_1-\vec{r}_3\right)\cdot\vec{r}_2=0$, в справедливості якої легко переконатись, якщо розкрити дужки. Враховуючи попередні співвідношення, отримуємо: $(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\cdot\vec{r}_3 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OC} = 0$. Звідси випливає, що і третя висота проходить через точку O.

<u>Задача 3</u>. Знайти кути між протилежними ребрами M_1M_2 і M_3M_4 правильної трикутної піраміди, тобто піраміди, у якої довжини всіх ребер однакові (рис. 3).

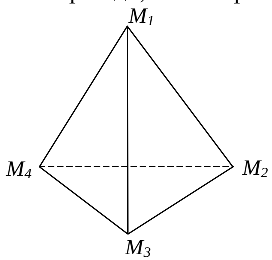


Рис. 3

<u>Розв'язання</u>.

$$\cos\left(\overrightarrow{M_1M_2}\hat{,}\overrightarrow{M_3M_4}\right) = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\overrightarrow{M_3M_4}}{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|\left|\overrightarrow{M_3M_4}\right|}.$$

Оскільки $\overrightarrow{M_3M_4} = \overrightarrow{M_1M_4} - \overrightarrow{M_1M_3}$, то

$$\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\overrightarrow{M_3M_4} = \overrightarrow{M_1M_2}\left(\overrightarrow{M_1M_4} - \overrightarrow{M_1M_3}\right) =$$

$$= \overrightarrow{M_1M_2}\cdot\overrightarrow{M_1M_4} - \overrightarrow{M_1M_2}\cdot\overrightarrow{M_1M_3} =$$

$$= l^2\cos 60^\circ - l^2\cos 60^\circ = 0.$$

Отже, протилежні ребра правильної трикутної піраміди взаємно перпендикулярні.

§4. Перетворення координат векторів у довільних базисах

Вибір вдалої координатної системи відіграє в геометрії надзвичайно важливу роль, оскільки розв'язування задачі в такій системі суттєво спрощується.

Принципове значення має задача про знаходження координат вектора у даному базисі за його координатами в іншому базисі.

Нехай у просторі задано базис $\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\}$, який назвемо старим. Нехай також задано новий базис $\{\vec{u}';\vec{v}';\vec{w}'\}$. При цьому положення нового базису відносно старого повинно бути відомим, а саме, повинні бути заданими координати нових базисних векторів $\vec{u}', \vec{v}', \vec{w}'$ у старому базисі:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u}'(a_{11};a_{12};a_{13})_{\vec{u},\vec{v},\vec{w}} \Leftrightarrow \vec{u}' = a_{11}\vec{u} + a_{12}\vec{v} + a_{13}\vec{w} \\ \vec{v}'(a_{21};a_{22};a_{23})_{\vec{u},\vec{v},\vec{w}} \Leftrightarrow \vec{v}' = a_{21}\vec{u} + a_{22}\vec{v} + a_{23}\vec{w} \\ \vec{w}'(a_{31};a_{32};a_{33})_{\vec{u},\vec{v},\vec{w}} \Leftrightarrow \vec{w}' = a_{31}\vec{u} + a_{32}\vec{v} + a_{33}\vec{w} \end{array}\right\}. \qquad (1)$$

У базисі $\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\}$ вектор $\vec{a}$ має старі координати $\vec{a}(\alpha;\beta;\gamma)_{\vec{u},\vec{v},\vec{w}}$. Для нових координат вектора введемо позначення $\vec{a}(\alpha';\beta';\gamma')_{\vec{u}',\vec{v}',\vec{w}'}$. Знайдемо залежність між старими та новими координатами вектора $\vec{a}$. Для цього запишемо розклад вектора $\vec{a}$ як у старому, так і в новому базисах:

$$\vec{a} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}, \qquad (2)$$

$$\vec{a} = \alpha'\vec{u}' + \beta'\vec{v}' + \gamma'\vec{w}'. \qquad (3)$$

Підставивши в (3) вирази (1), отримуємо

$$\vec{a} = \alpha'\left(a_{11}\vec{u} + a_{12}\vec{v} + a_{13}\vec{w}\right) + \beta'\left(a_{21}\vec{u} + a_{22}\vec{v} + a_{23}\vec{w}\right) + \gamma'\left(a_{31}\vec{u} + a_{32}\vec{v} + a_{33}\vec{w}\right) =$$
$$= \left(a_{11}\alpha' + a_{21}\beta' + a_{31}\gamma'\right)\vec{u} + \left(a_{12}\alpha' + a_{22}\beta' + a_{32}\gamma'\right)\vec{v} + \left(a_{13}\alpha' + a_{23}\beta' + a_{33}\gamma'\right)\vec{w}.$$

Через єдиність розкладу вектора за базисними векторами коефіцієнти при векторах $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ повинні дорівнювати старим координатам α, β, γ вектора $\vec{a}$, тобто

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= a_{11}\alpha' + a_{21}\beta' + a_{31}\gamma' \\ \beta &= a_{12}\alpha' + a_{22}\beta' + a_{32}\gamma' \\ \gamma &= a_{13}\alpha' + a_{23}\beta' + a_{33}\gamma' \end{aligned}\right\}. \qquad (4)$$

<u>**Означення 1**</u>. Формули (4) називаються формулами переходу від старої системи координат до нової.

Розглянемо матриці

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}; \ X = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}; \ X' = \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}. \qquad (5)$$

У матричній формі співвідношення (4) приймають вигляд

$$X = TX'. \qquad (6)$$

Відмітимо, що в першому стовпці матриці T стоять координати нового базисного вектора $\vec{u}'$ відносно старого базису, в другому – координати вектора $\vec{v}'$, в третьому – координати вектора $\vec{w}'$.

<u>**Означення 2**</u>. Матриця T називається матрицею переходу від старого базису до нового.

Оскільки вектори $\vec{u}', \vec{v}', \vec{w}'$ некомпланарні, то $\det T \neq 0$ (рекомендується довести це самостійно). Тому існує обернена матриця T^{-1} до матриці T. Помноживши рівність (6) зліва на матрицю T^{-1}, отримуємо матричну форму співвідношень, що виражають нові координати через старі

$$T^{-1}X = T^{-1}TX' \iff T^{-1}X = EX' \iff X' = T^{-1}X. \qquad (7)$$

Розглянемо у просторі три базиси:

$$\text{I: } \{\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}\}, \ \text{II: } \{\vec{u}'; \vec{v}'; \vec{w}'\}, \ \text{III. } \{\vec{u}''; \vec{v}''; \vec{w}''\}.$$

Нехай матриця T – матриця переходу від базису I до базису II, T_1 – матриця переходу від базису II до базису III, T_2 – матриця переходу від базису I до базису III.

Теорема 1. Для матриці переходу від базису I до базису III справедливі співвідношення

$$T_2 = TT_1, \quad \det T_2 = \det T \det T_1 . \tag{8}$$

Доведення. Координати вектора $\vec{a}$ відповідно в I, II, III базисах запишемо у вигляді матриць-стовпців

$$X = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}; \; X' = \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}; \; X'' = \begin{pmatrix} \alpha'' \\ \beta'' \\ \gamma'' \end{pmatrix}.$$

Згідно з формулою (6) маємо

$$X = TX', \; X' = T_1X'', \; X = T_2X'' . \tag{9}$$

З перших двох рівностей (9) отримуємо

$$X = TT_1X'' . \tag{10}$$

Оскільки третя рівність (9) і рівність (10) справедливі для довільного вектора X'', то порівнюючи ці рівності, приходимо до першої формули (8). Стосовно другої формули (8) див. доведення теореми 2 §7 гл. II.

§5. Перетворення координат точки

У §4 мова йшла про перетворення координат вектора. Координати вектора не залежать від вибору початку координат. Тому, розглядаючи перетворення координат вектора при переході від однієї системи координат до іншої, можна вважати, що початки цих систем координат співпадають.

Перейдемо тепер до перетворення координат точки. На відміну від §4, положення початків координатних систем у цьому випадку має суттєве значення. Нехай у просторі задано стару $\{O; \vec{u}; \vec{v}; \vec{w}\}$ та нову $\{O'; \vec{u}'; \vec{v}'; \vec{w}'\}$ системи координат і нехай положення нової системи відносно старої відоме: $O'(\alpha_0; \beta_0; \gamma_0)_{O,\vec{u},\vec{v},\vec{w}}$, $\vec{u}'(a_{11}; a_{12}; a_{13})_{O,\vec{u},\vec{v},\vec{w}}$, $\vec{v}'(a_{21}; a_{22}; a_{23})_{O,\vec{u},\vec{v},\vec{w}}$, $\vec{w}'(a_{31}; a_{32}; a_{33})_{O,\vec{u},\vec{v},\vec{w}}$.

Розглянемо в цих системах координат точку M (рис. 1) з координатами

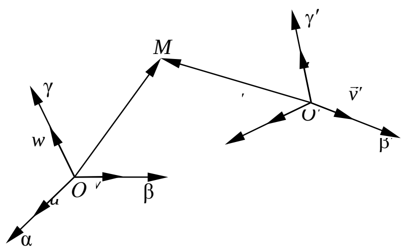


Рис.1

$M(\alpha;\beta;\gamma)_{O,\vec{u},\vec{v},\vec{w}}$, $M(\alpha';\beta';\gamma')_{O',\vec{u}',\vec{v}',\vec{w}'}$. Тоді вектор $\overrightarrow{OM}$ має координати α,β,γ у старій координатній системі $\{O;\vec{u};\vec{v};\vec{w}\}$, а вектор $\overrightarrow{O'M}$ – координати α',β',γ' у новій системі $\{O';\vec{u}';\vec{v}';\vec{w}'\}$. Незалежно від взаємного розміщення точок O, O', M справедлива векторна рівність

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'M} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r}\alpha=\alpha_0+a\\ \beta=\beta_0+b\\ \gamma=\gamma_0+c\end{array}\right\}, \tag{1}$$

де $\overrightarrow{O'M}(a;b;c)_{O,\vec{u},\vec{v},\vec{w}}$ – старі координати вектора $\overrightarrow{O'M}$. Новими координатами цього вектора є координати точки M відносно нового базису $\{O';\vec{u}';\vec{v}';\vec{w}'\}$.

Використовуючи формули (4) §4, отримуємо

$$\left.\begin{array}{l}a=a_{11}\alpha'+a_{21}\beta'+a_{31}\gamma'\\ b=a_{12}\alpha'+a_{22}\beta'+a_{32}\gamma'\\ c=a_{13}\alpha'+a_{23}\beta'+a_{33}\gamma'\end{array}\right\}. \tag{2}$$

Підставимо (2) в рівності (1):

$$\left.\begin{array}{l}\alpha=\alpha_0+a_{11}\alpha'+a_{21}\beta'+a_{31}\gamma'\\ \beta=\beta_0+a_{12}\alpha'+a_{22}\beta'+a_{32}\gamma'\\ \gamma=\gamma_0+a_{13}\alpha'+a_{23}\beta'+a_{33}\gamma'\end{array}\right\}. \tag{3}$$

Формули (3) виражають старі координати точки через нові.

Розглянемо матриці

$$X=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix};\ X_0=\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \beta_0\\ \gamma_0\end{pmatrix};\ X'=\begin{pmatrix}\alpha'\\ \beta'\\ \gamma'\end{pmatrix};\ T=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}&a_{31}\\ a_{12}&a_{22}&a_{32}\\ a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{pmatrix}. \tag{4}$$

Матриця T є матрицею переходу від старого базису до нового. У матричних позначеннях формули (3) набувають вигляду

$$X=X_0+TX' \Leftrightarrow X-X_0=TX'. \tag{5}$$

Оскільки матриця T невироджена, то помноживши рівність (5) зліва на матрицю T^{-1}, отримуємо

$$T^{-1}(X-X_0)=T^{-1}TX' \Leftrightarrow T^{-1}X-T^{-1}X_0=EX' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow X'=T^{-1}X-T^{-1}X_0. \tag{6}$$

Формула (6) виражає нові координати точки через старі.

Розглянемо окремий випадок перетворення координат, при якому змінюється лише положення початку координат, а координатні вектори залишаються незмінними, тобто $\vec{u}' = \vec{u}$, $\vec{v}' = \vec{v}$, $\vec{w}' = \vec{w}$. У цьому випадку матриця переходу від одного базису до іншого дорівнює $T = E$, де E – одинична матриця. Формула (5) приймає вигляд

$$X = X_0 + X' \tag{7}$$

або в координатній формі

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 + \alpha' \\ \beta &= \beta_0 + \beta' \\ \gamma &= \gamma_0 + \gamma' \end{aligned}\right\}. \tag{8}$$

Формули (8) називаються формулами паралельного перенесення системи координат.

Аналогічним способом можемо отримати формули перетворення координат на площині. Нехай на площині дано два базиси: старий $\{\vec{u}; \vec{v}\}$ і новий $\{\vec{u}'; \vec{v}'\}$, де

$$\left.\begin{aligned} \vec{u}' &= a_{11}\vec{u} + a_{12}\vec{v} \\ \vec{v}' &= a_{21}\vec{u} + a_{22}\vec{v} \end{aligned}\right\}. \tag{9}$$

Матрицею переходу від старого базису до нового є невироджена матриця

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Формули перетворення координат вектора $\vec{a}$ мають вигляд

$$X = TX' \iff X' = T^{-1}X, \tag{11}$$

де $X = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ і $X' = \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix}$ – старі і нові координати вектора $\vec{a}$. Запишемо перше матричне співвідношення (11) у координатній формі

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= a_{11}\alpha' + a_{21}\beta' \\ \beta &= a_{12}\alpha' + a_{22}\beta' \end{aligned}\right\}. \tag{12}$$

Для формул перетворення координат точки на площині маємо

$$X = X_0 + TX' \iff X' = T^{-1}X - T^{-1}X_0. \tag{13}$$

У випадку паралельного перенесення ($T=E$) формули (13) приймають вигляд

$$X = X_0 + X' \;\Leftrightarrow\; \left.\begin{array}{l} \alpha = \alpha_0 + \alpha' \\ \beta = \beta_0 + \beta' \end{array}\right\}, \tag{14}$$

де $X_0 = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix}$ – координати нового початку.

§6. Перетворення декартових прямокутних координат

Для переходу від старої декартової прямокутної системи координат $\{\vec{i};\, \vec{j};\, \vec{k}\}$ до нової $\{\vec{i}\,';\, \vec{j}\,';\vec{k}\,'\}$ скористаємось наведеними вище результатами. Проте, спочатку варто звернути увагу на деякі характерні обставини, які мають місце у цьому частинному випадку перетворення координат. А саме, врахуємо, що вектори $\vec{i}\,';\vec{j}\,';\vec{k}\,'$ є одиничними і взаємно ортогональними, так само, як і вектори $\vec{i},\, \vec{j}, \vec{k}$, тобто

$$\vec{i}\,'\cdot\vec{i}\,' = 1,\;\; \vec{j}\,'\cdot\vec{j}\,' = 1,\;\; \vec{k}\,'\cdot\vec{k}\,' = 1,\;\; \vec{i}\,'\cdot\vec{j}\,' = 0,\;\; \vec{i}\,'\cdot\vec{k}\,' = 0,\;\; \vec{j}\,'\cdot\vec{k}\,' = 0. \tag{1}$$

Аналогічні співвідношення можна записати і для векторів $\vec{i},\, \vec{j}, \vec{k}$.

Елементи матриці переходу

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

від базису $\vec{i},\, \vec{j}, \vec{k}$ до базису $\left\{\vec{i}\,';\, \vec{j}\,';\vec{k}\,'\right\}$ внаслідок співвідношень (1) зв'язані рядом залежностей. Щоб отримати ці залежності, запишемо співвідношення (1) у координатній формі, пригадавши, що елементи першого, другого та третього стовпців матриці T є координатами відповідно векторів $\vec{i}\,'$, $\vec{j}\,'$ і $\vec{k}\,'$ у старому базисі $\left\{\vec{i};\, \vec{j};\vec{k}\right\}$:

$$\begin{array}{ll} a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 = 1, & a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} = 0, \\ a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 = 1, & a_{11}a_{31} + a_{12}a_{32} + a_{13}a_{33} = 0, \\ a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1, & a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} = 0. \end{array} \tag{2}$$

Співвідношення (2) можна записати у матричному вигляді

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

або

$$T^T T = E\,, \tag{4}$$

де T^T – транспонована матриця до матриці T. З рівності (4) випливає, що

$$T^{-1} = T^T\,. \tag{5}$$

<u>Означення 1</u>. Матриця T, для якої обернена матриця співпадає з транспонованою матрицею, називається ***ортогональною***.

Легко перевірити, що для ортогональної матриці T $\det T = \pm 1$. Дійсно, з (4) маємо $\det T^T \det T = 1 \Leftrightarrow \det T \det T = 1 \Leftrightarrow (\det T)^2 = 1$.

Формули перетворення координат вектора (4) з §4 з точністю до позначень приймають вигляд (див. також формулу (4) §3)

$$\left.\begin{aligned} x &= \left(\vec{i}\,' \cdot \vec{i}\right)x' + \left(\vec{j}\,' \cdot \vec{i}\right)y' + \left(\vec{k}\,' \cdot \vec{i}\right)z' \\ y &= \left(\vec{i}\,' \cdot \vec{j}\right)x' + \left(\vec{j}\,' \cdot \vec{j}\right)y' + \left(\vec{k}\,' \cdot \vec{j}\right)z' \\ z &= \left(\vec{i}\,' \cdot \vec{k}\right)x' + \left(\vec{j}\,' \cdot \vec{k}\right)y' + \left(\vec{k}\,' \cdot \vec{k}\right)z' \end{aligned}\right\}, \tag{6}$$

а формули, що виражають нові координати вектора через старі – вигляд (див. формулу (7) §4)

$$\left.\begin{aligned} x' &= \left(\vec{i} \cdot \vec{i}\,'\right)x + \left(\vec{j} \cdot \vec{i}\,'\right)y + \left(\vec{k} \cdot \vec{i}\,'\right)z \\ y' &= \left(\vec{i} \cdot \vec{j}\,'\right)x + \left(\vec{j} \cdot \vec{j}\,'\right)y + \left(\vec{k} \cdot \vec{j}\,'\right)z \\ z' &= \left(\vec{i} \cdot \vec{k}\,'\right)x + \left(\vec{j} \cdot \vec{k}\,'\right)y + \left(\vec{k} \cdot \vec{k}\,'\right)z \end{aligned}\right\}. \tag{7}$$

Зауваження 1. Формули (6), (7) отримані нами з використанням загальної теорії перетворення координат. Проте, їх можна отримати безпосередньо шляхом наступних елементарних міркувань. У нових позначеннях базисних векторів і координат рівності (2), (3) §4 приймають вигляд

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x'\vec{i}\,' + y'\vec{j}\,' + z'\vec{k}\,'\,. \tag{8}$$

Помножимо скалярно обидві частини рівності (8) на вектор $\vec{i}$, врахувавши, що $\vec{i}\cdot\vec{i}=1$, $\vec{i}\cdot\vec{j}=0$, $\vec{i}\cdot\vec{k}=0$. В результаті будемо мати

$$x=\left(\vec{i}\,'\cdot\vec{i}\right)x'+\left(\vec{j}\,'\cdot\vec{i}\right)y'+\left(\vec{k}\,'\cdot\vec{i}\right)z',$$

тобто першу рівність (6). Помноживши скалярно обидві частини рівності (8) послідовно на $\vec{j}$ і $\vec{k}$, отримаємо дві інші рівності (6).

У такий спосіб відразу можна отримати і формули для обчислення нових координат за відомими старими координатами, тобто формули (7). Варто лише помножити скалярно рівність (8) послідовно на $\vec{i}\,',\ \vec{j}\,',\vec{k}\,'$.

§7. Перетворення декартових прямокутних координат на площині

Нехай на площині дано два декартових прямокутних базиси: старий $\{\vec{i};\vec{j}\}$ і новий $\{\vec{i}\,';\vec{j}\,'\}$.

<u>Означення 1</u>. Декартовий прямокутний базис $\left\{\vec{i};\vec{j}\right\}$ називається правим, якщо $\left(\widehat{\vec{i},\vec{j}}\right)=90^{\mathrm{O}}$ і лівим, якщо $\left(\widehat{\vec{i},\vec{j}}\right)=-90^{\mathrm{O}}$.

Розглянемо два випадки.

I. Обидва базиси $\{\vec{i};\vec{j}\}$ і $\{\vec{i}\,';\vec{j}\,'\}$ – праві. У цьому випадку положення нового базису повністю визначається кутом повороту φ, тобто кутом на який потрібно повернути вектори $\vec{i},\vec{j}$, щоб отримати координатні вектори $\vec{i}\,',\vec{j}\,'$ (рис. 1).

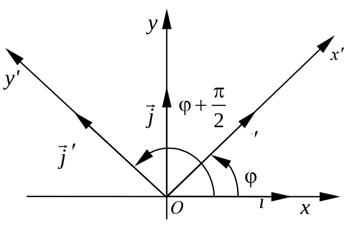


Рис. 1

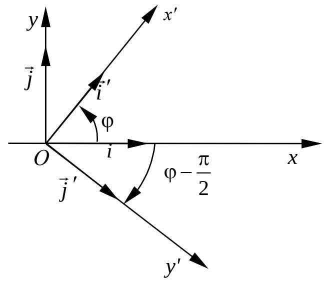


Рис. 2

Дійсно,

$$\vec{i}\,'\left(\cos\varphi;\,\sin\varphi\right)_{\vec{i},\,\vec{j}} \ \Leftrightarrow\ \vec{i}\,' = \cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j},$$
$$\vec{j}\,'\left(\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right);\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)\right)_{\vec{i},\,\vec{j}} \ \Leftrightarrow\ \vec{j}\,' = -\sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j}. \qquad (1)$$

Матрицею переходу від старого базису $\left\{\vec{i},\,\vec{j}\right\}$ до нового є матриця

$$T = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},\ \det T = 1, \qquad (2)$$

а формули переходу від старої системи координат до нової приймають вигляд

$$\left.\begin{array}{l} x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi \\ y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \end{array}\right\}. \qquad (3)$$

II. Базис $\{\vec{i};\,\vec{j}\}$ – правий, а базис $\{\vec{i}\,';\,\vec{j}\,'\}$ – лівий (рис. 2). У цьому випадку

$$\vec{i}\,'\left(\cos\varphi;\,\sin\varphi\right)_{\vec{i},\,\vec{j}} \ \Leftrightarrow\ \vec{i}\,' = \cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j},$$
$$\vec{j}\,'\left(\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right);\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)\right)_{\vec{i},\,\vec{j}} \ \Leftrightarrow\ \vec{j}\,' = \sin\varphi\vec{i} - \cos\varphi\vec{j}. \qquad (4)$$

Матрицею переходу від старого базису до нового є матриця

$$T = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix},\ \det T = -1. \qquad (5)$$

Для формул перетворення координат отримуємо

$$\left.\begin{array}{l} x = x'\cos\varphi + y'\sin\varphi \\ y = x'\sin\varphi - y'\cos\varphi \end{array}\right\}. \qquad (6)$$

Формули, що виражають залежність старих координат точки $M\left(x;\,y\right)_{O,\vec{i},\,\vec{j}}$ від нових $M\left(x';\,y'\right)_{O',\,\vec{i}\,',\,\vec{j}\,'}$, приймають вигляд

$$\left.\begin{array}{l} x = x'\cos\varphi \mp y'\sin\varphi + x_0 \\ y = x'\sin\varphi \pm y'\cos\varphi + y_0 \end{array}\right\}, \qquad (7)$$

де верхній знак відповідає розглянутому випадку **I**, а нижній – випадку **II** і $O'\left(x_0; y_0\right)_{O,\vec{i},\vec{j}}$. Відмітимо, що матриця переходу від базису $\{\vec{i}; \vec{j}\}$ до базису $\{\vec{i}\,'; \vec{j}\,'\}$ ортогональна, тобто $T^{-1} = T^T$, де T^T – транспонована матриця до матриці T. Формули, що виражають нові координати вектора $\vec{a}\left(x'; y'\right)_{\vec{i}\,',\vec{j}\,'}$ через старі координати $\vec{a}\left(x; y\right)_{\vec{i},\vec{j}}$ у матричній формі приймають вигляд

$$X' = T^T X \,, \tag{8}$$

де $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

Векторний і мішаний добутки векторів

§1. Орієнтація базису у просторі та на площині

1.1. Нехай у просторі задано два базиси $\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\}$ і $\{\vec{u}';\vec{v}';\vec{w}'\}$. Збережемо термінологію і позначення §4 гл. VI. Перехід від старого базису $\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\}$ до нового базису $\{\vec{u}';\vec{v}';\vec{w}'\}$ проводиться за допомогою матриці переходу

$$T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Елементи стовпців цієї матриці є координатами векторів нового базису у старому базисі: $\vec{u}'(a_{11};a_{12};a_{13})_{\vec{u},\vec{v},\vec{w}}$, $\vec{v}'(a_{21};a_{22};a_{23})_{\vec{u},\vec{v},\vec{w}}$, $\vec{w}'(a_{31};a_{32};a_{33})_{\vec{u},\vec{v},\vec{w}}$. Очевидно, що для координат векторів старого базису відносно цього ж базису можна записати $\vec{u}(1;0;0)_{\vec{u},\vec{v},\vec{w}}$, $\vec{v}(0;1;0)_{\vec{u},\vec{v},\vec{w}}$, $\vec{w}(0;0;1)_{\vec{u},\vec{v},\vec{w}}$.

Справедливі матричні рівності

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Тому матрицю переходу від старого базису до нового базису можна ще означити як матрицю, яка при множенні на матриці-стовпці координат векторів старого базису дає відповідні матриці-стовпці координат векторів нового базису при розгляданні всіх координат у старому базисі.

Якщо матриці-стовпці координат векторів позначити так, як і самі вектори, то рівності (2) можна записати у вигляді

$$\vec{u}'=T\vec{u},\ \vec{v}'=T\vec{v},\ \vec{w}'=T\vec{w}. \qquad (3)$$

Такий матрично-векторний запис матричних рівностей є досить зручним і буде використовуватись нами в наступних главах.

Нагадаємо ***властивості матриці переходу*** T:

1. $\det T\neq 0$. Тому існує обернена матриця T^{-1} з визначником $\det T^{-1}=\dfrac{1}{\det T}$.

2. Рівності (2) показують, що перехід від старого базису до цього ж базису проводиться за допомогою матриці $T=E$, де E – одинична матриця.

3. Перехід від нового базису до старого проводиться за допомогою оберненої матриці T^{-1}. У першому стовпці цієї матриці стоять координати

старого базисного вектора $\vec{u}$, у другому стовпці – вектора $\vec{v}$ і в третьому стовпці – вектора $\vec{w}$ відносно нового базису $\{\vec{u}';\vec{v}';\vec{w}'\}$.

4. Якщо T – матриця переходу від базису I: $\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\}$ до базису II: $\{\vec{u}';\vec{v}';\vec{w}'\}$, а T_1 – матриця переходу від базису II до базису III: $\{\vec{u}'';\vec{v}'';\vec{w}''\}$, то матрицею переходу від базису I до базису III буде матриця $T_2 = TT_1$ (див. теорему 1 §4 гл. VI.)

Означення 1. Будемо говорити, що базис $\{\vec{u}';\vec{v}';\vec{w}'\}$ має таку ж орієнтацію, що і базис $\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\}$, якщо $\det T > 0$. Для базисів ***однакової орієнтації*** будемо писати $\{\vec{u}';\vec{v}';\vec{w}'\} : \{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\}$.

Якщо $\det T < 0$, то базиси $\{\vec{u}';\vec{v}';\vec{w}'\}$ і $\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\}$ будемо називати базисами з ***протилежною орієнтацією*** і писати $\{\vec{u}';\vec{v}';\vec{w}'\} ; \{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\}$.

Теорема 1. Означення однакової орієнтації двох базисів задовольняє аксіомам рівності, тобто вимогам:

1. <u>Рефлексивності</u>: $\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\} : \{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\}$;

2. <u>Симетрії</u>: з того, що $\{\vec{u}';\vec{v}';\vec{w}'\} : \{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\}$ випливає, що $\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\} : \{\vec{u}';\vec{v}';\vec{w}'\}$.

3. <u>Транзитивності</u>: з того, що $\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\} : \{\vec{u}';\vec{v}';\vec{w}'\}$ і $\{\vec{u}';\vec{v}';\vec{w}'\} : \{\vec{u}'';\vec{v}'';\vec{w}''\}$ випливає, що $\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\} : \{\vec{u}'';\vec{v}'';\vec{w}''\}$.

<u>*Доведення*</u>. 1. Згідно з властивістю 2 матриці переходу T маємо

$$T = E \Rightarrow \det T = \det E = 1 > 0 .$$

2. Ця властивість випливає з властивостей 1, 3 матриці переходу T.

3. Згідно з властивістю 4 матриці переходу маємо $T_2 = TT_1 \Rightarrow$ $\Rightarrow \det T_2 = \det T \det T_1$. За умовою $\det T > 0$, $\det T_1 > 0$. Тому $\det T_2 > 0$.

Теорему доведено.

З наведеного вище випливає, що множина всіх базисів простору розпадається на класи (підмножини базисів), які попарно не перетинаються і мають таку властивість: всі базиси одного якого-небудь класу є базисами однакової орієнтації, а будь-які два базиси, що належать різним класам, мають протилежну орієнтацію.

Теорема 2. Число таких класів дорівнює двом.

<u>*Доведення.*</u> Для того щоб переконатися, що існує принаймні два класи, візьмемо який-небудь базис $\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\}$ і поряд з ним розглянемо базис $\{\vec{u};\vec{v};-\vec{w}\}$. Матрицею переходу від першого з цих базисів до другого є матриця

$$T=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\ \det T=-1\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=-1<0\,.$$

Отже, базиси $\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\}$ і $\{\vec{u};\vec{v};-\vec{w}\}$ мають протилежну орієнтацію, а тому належать до різних класів.

Тепер доведемо, що довільний базис $\{\vec{u}';\vec{v}';\vec{w}'\}$ належить до одного з двох класів: або до класу, що містить базис $\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\}$, або до класу, що містить базис $\{\vec{u};\vec{v};-\vec{w}\}$. Іншими словами, доведемо, що довільний базис $\{\vec{u}';\vec{v}';\vec{w}'\}$, який має протилежну орієнтацію з базисом $\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\}$, є базисом однакової орієнтації з базисом $\{\vec{u};\vec{v};-\vec{w}\}$. Дійсно, нехай матриця переходу від базису $\{\vec{u}';\vec{v}';\vec{w}'\}$ до базису $\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\}$ має від'ємний визначник. Визначник матриці переходу від базису $\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\}$ до базису $\{\vec{u};\vec{v};-\vec{w}\}$ дорівнює –1. Тому матриця переходу від базису $\{\vec{u}';\vec{v}';\vec{w}'\}$ до базису $\{\vec{u};\vec{v};-\vec{w}\}$ (будучи добутком двох матриць) має додатний визначник. Теорему доведено.

Отже, множина всіх базисів простору розбивається на ***два*** класи так, що будь-який базис належить до одного і тільки до одного класу. Два базиси, які належать до одного класу, мають однакову орієнтацію. Будь-які два базиси, які належать до різних класів, орієнтовані протилежно.

Один з цих класів називають класом правих базисів, а самі базиси – ***правими***. Базиси, які не належать до класу правих базисів, називають ***лівими***.

1.2. У векторній алгебрі поняття правого базису вводиться наступним чином. Відкладемо всі три вектори базису $\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\}$ від однієї точки O (рис. 1).

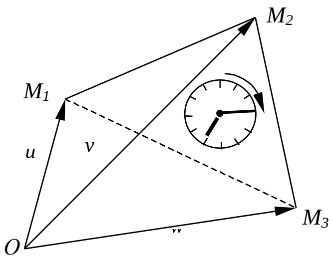


Рис. 1

Кінці M_1, M_2, M_3 цих векторів не тільки визначають трикутник, а напрямок обходу $M_1M_2M_3M_1$ на ньому. Якщо для спостерігача, який дивиться на трикутник $M_1M_2M_3$ з точки O, обхід трикутника в напрямку $M_1M_2M_3M_1$ відбувається за годинниковою стрілкою (годинник слід уявити у площині трикутника $M_1M_2M_3$ циферблатом до спостерігача), то базис $\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\}$ називають ***правим***, якщо ж проти руху годинникової стрілки – то ***лівим***.

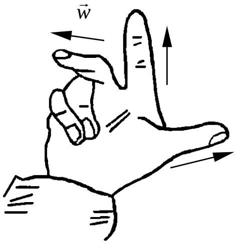


Рис. 2

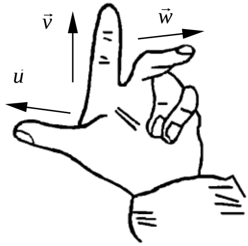


Рис. 3

Правий базис $\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\}$ (ще кажуть, праву трійку векторів) отримаємо, наприклад, тоді, коли вектор $\vec{u}$ спрямуємо вздовж великого пальця правої руки, як показано на рис. 2, вектор $\vec{v}$ – вздовж вказівного пальця, а вектор $\vec{w}$ – вздовж середнього пальця.

Те ж саме, але по відношенню пальців лівої руки (рис. 3), демонструє ліву трійку векторів або лівий базис.

Приклад 1. Показати, що

$$\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\} \sim \{\vec{w};\vec{u};\vec{v}\} \sim \{\vec{v};\vec{w};\vec{u}\}. \tag{4}$$

Розв'язання. Для матриці T_1 переходу від базису $\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\}$ до базису $\{\vec{w};\vec{u};\vec{v}\}$ маємо

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \det T_1 = 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0.$$ Тому $\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\} \sim \{\vec{w};\vec{u};\vec{v}\}$. Аналогічно, для матриці T_2 переходу від базису $\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\}$ до базису $\{\vec{v};\vec{w};\vec{u}\}$:

$$T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ \det T_2 = 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0.$$ Тому $\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\} \sim \{\vec{v};\vec{w};\vec{u}\}$.

Приклад 2. Показати, що

$$1)\ \{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\};\ \{\vec{v};\vec{u};\vec{w}\};$$
$$2)\ \{\vec{v};\vec{u};\vec{w}\} \sim \{\vec{w};\vec{v};\vec{u}\} \sim \{\vec{u};\vec{w};\vec{v}\}. \tag{5}$$

Розв'язання. Нехай T_3 – матриця переходу від базису $\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\}$ до базису $\{\vec{v};\vec{u};\vec{w}\}$. Тоді

$$T_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \det T_3 = 1\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0.$$ Отже, $\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\};\ \{\vec{v};\vec{u};\vec{w}\}$.

Нехай T_4 – матриця переходу від базису $\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\}$ до базису $\{\vec{w};\vec{v};\vec{u}\}$.Тоді

$$T_4=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix},\ \det T_4=1\cdot\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}=-1<0.$$ Отже, $\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\}\ne\{\vec{w};\vec{v};\vec{u}\}$.

Нехай T_5 – матриця переходу від базису $\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\}$ до базису $\{\vec{u};\vec{w};\vec{v}\}$. Тоді

$$T_5=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\ \det T_5=1\cdot\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}=-1<0.$$ Отже, $\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\}\ne\{\vec{u};\vec{w};\vec{v}\}$.

Всі три базиси з 2) мають протилежну орієнтацію з базисом $\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\}$, а тому всі вони орієнтовані однаково.

Приклади 1, 2 показують, що з трьох некомпланарних векторів $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ можна утворити шість різних базисів. При цьому:

1. Базиси (4), які отримуються з базису $\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\}$ круговою перестановкою векторів, мають одну і ту ж орієнтацію.

2. При перестановці лише двох векторів базису його орієнтація змінюється на протилежну.

3. Базиси (5) мають орієнтацію, протилежну до орієнтації базисів (4).

Отже, з прикладів 1, 2 випливає, що орієнтацію базису можна визначити за допомогою обчислень, якщо відома орієнтація якого-небудь одного базису, тобто у цьому випадку не має потреби удаватися до наочних міркувань.

В кожному з двох класів базисів є декартовий прямокутний базис, тобто базис, вектори $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ якого взаємно-ортогональні і мають одиничну довжину (рис. 4, 5).

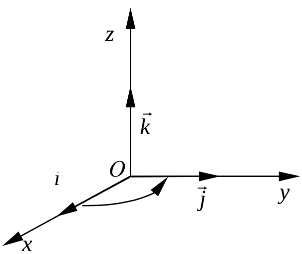


Рис. 4

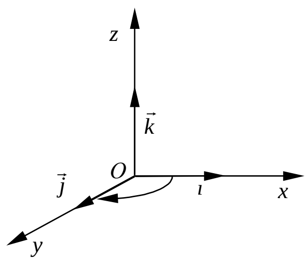


Рис. 5

Поряд з розглянутими вище правилами, праву та ліву трійки векторів можна описати ще так: базис $\{\vec{i};\vec{j};\vec{k}\}$ є правим, якщо найменший поворот вектора $\vec{i}$ до його співпадання з вектором $\vec{j}$ можна здійснити проти годинникової стрілки, спостерігаючи за цим поворотом з кінця вектора $\vec{k}$ (рис. 4). Якщо ж найменший поворот вектора $\vec{i}$ до вектора $\vec{j}$ здійснюється за годинниковою стрілкою (при спостереженні з тієї ж точки), то базис $\{\vec{i};\vec{j};\vec{k}\}$ є лівим.

Це правило застосовне до довільного базису $\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\}$.

Домовимось у подальшому через $\{\vec{i};\vec{j};\vec{k}\}$ позначати ***правий*** декартовий прямокутний базис простору, а систему координат, побудовану на цьому базисі, називати ***правою*** декартовою прямокутною системою координат.

1.3. <u>Означення 2</u>. Базис $\{\vec{u};\vec{v}\}$ на площині називається правим, якщо найменший поворот від $\vec{u}$ до $\vec{v}$ здійснюється проти годинникової стрілки, і називається лівим – якщо за годинниковою стрілкою.

<u>Означення 3</u>. Два базиси $\{\vec{u};\vec{v}\}$ і $\{\vec{u}';\vec{v}'\}$ однієї площини назвемо базисами однакової орієнтації і будемо писати $\{\vec{u};\vec{v}\} \sim \{\vec{u}';\vec{v}'\}$, якщо $\det T > 0$.

Множина всіх базисів однієї площини розбивається на два класи: на множину правих базисів і множину лівих базисів. Клас правих базисів визначається однозначно вибором деякого одного правого базису. Домовляємось у подальшому правий прямокутний декартовий базис позначати через $\{\vec{i};\vec{j}\}$, $(\vec{i},\widehat{\ }\vec{j}) = +90^0$.

Якщо задано деякий правий базис $\{\vec{i};\vec{j}\}$ на площині чи $\{\vec{i};\vec{j};\vec{k}\}$ у просторі, то кажуть, що на площині чи в просторі за допомогою базису $\{\vec{i};\vec{j}\}$ чи $\{\vec{i};\vec{j};\vec{k}\}$ задано додатну орієнтацію. Площину чи простір називають орієнтованою чи орієнтованим.

Орієнтацію, яку задано лівим прямокутним декартовим базисом, називають від'ємною.

§2. Векторний добуток та його властивості

Розглянемо праву декартову прямокутну систему координат з базисом $\{\vec{i};\vec{j};\vec{k}\}$. Нехай вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ мають координати

$$\vec{a}(x_1;y_1;z_1)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}, \quad \vec{b}(x_2;y_2;z_2)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}.$$

<u>Означення 1</u>. Векторним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор

$$\vec{c} = (y_1z_2 - y_2z_1)\vec{i} - (x_1z_2 - x_2z_1)\vec{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\vec{k}. \qquad (1)$$

Для векторного добутку введемо позначення $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$.

Рівність (1) можна записати у вигляді "узагальненого визначника"

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}. \tag{2}$$

Якщо розкласти визначник (2) за елементами першого рядка, то прийдемо до рівності (1).

З властивостей визначників випливають такі властивості векторного добутку:

1. $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$ (антикомутативність).

Доведення.

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_1 & y_1 & z_1\end{vmatrix}=-\vec{b}\times\vec{a}.$$

2. Для довільних векторів $\vec{a}_1\left(x_1;y_1;z_1\right)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$, $\vec{a}_2\left(x_2;y_2;z_2\right)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$, $\vec{a}_3\left(x_3;y_3;z_3\right)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$ і довільних чисел λ і μ справедливі рівності

$$\begin{aligned}&\left(\lambda\vec{a}_1+\mu\vec{a}_2\right)\times\vec{a}_3=\lambda\left(\vec{a}_1\times\vec{a}_3\right)+\mu\left(\vec{a}_2\times\vec{a}_3\right),\\ &\vec{a}_3\times\left(\lambda\vec{a}_1+\mu\vec{a}_2\right)=\lambda\left(\vec{a}_3\times\vec{a}_1\right)+\mu\left(\vec{a}_3\times\vec{a}_2\right).\end{aligned} \tag{3}$$

Доведення.

$$\left(\lambda\vec{a}_1+\mu\vec{a}_2\right)\times\vec{a}_3=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \lambda x_1+\mu x_2 & \lambda y_1+\mu y_2 & \lambda z_1+\mu z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \lambda x_1 & \lambda y_1 & \lambda z_1\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \mu x_2 & \mu y_2 & \mu z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}+\mu\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}=$$

$$=\lambda\left(\vec{a}_1\times\vec{a}_3\right)+\mu\left(\vec{a}_2\times\vec{a}_3\right);$$

$$\vec{a}_3\times\left(\lambda\vec{a}_1+\mu\vec{a}_2\right)=-\left(\lambda\vec{a}_1+\mu\vec{a}_2\right)\times\vec{a}_3=-\left[\lambda\left(\vec{a}_1\times\vec{a}_3\right)+\mu\left(\vec{a}_2\times\vec{a}_3\right)\right]=$$

$$=\lambda\left(\vec{a}_3\times\vec{a}_1\right)+\mu\left(\vec{a}_3\times\vec{a}_2\right).$$

3. $\lambda\vec{a}\times\mu\vec{a}=\vec{0}$.

Доведення. Нехай $\vec{a}\left(x,y,z\right)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$. Тоді

$$\lambda\vec{a}\times\mu\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \lambda x & \lambda y & \lambda z\\ \mu x & \mu y & \mu z\end{vmatrix}=\lambda\mu\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x & y & z\\ x & y & z\end{vmatrix}=\vec{0}\cdot$$

У практичних обчисленнях можна рекомендувати такий порядок знаходження координат векторного добутку $\vec{a}\times\vec{b}$:

1) складаємо матрицю розміру 2×3 з координат векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$

$$\begin{pmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{pmatrix}; \qquad (4)$$

2) щоб отримати першу координату вектора $\vec{a}\times\vec{b}$, закриємо перший стовпчик матриці (4) і обчислимо визначник 2-го порядку, який залишається;

3) друга координата вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ отримується так: закриваємо другий стовпчик матриці (4) і визначник, що залишається, беремо з протилежним знаком;

4) третя координата вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ отримується в результаті обчислення визначника 2-го порядку, який залишається після закриття третього стовпця матриці (4).

Приклад 1. Знайти $\vec{a}\times\vec{b}$, якщо $\vec{a}\left(1;2;3\right)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$, $\vec{b}\left(2;1;1\right)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$.

Розв'язання. Складемо матрицю $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$. Нехай $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$.

Тоді $\vec{c}\left(\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix};\ -\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix};\ \begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}\right)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$ або $\vec{c}\left(-1;5;-3\right)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$.

Приклад 2. Знайти $\vec{i}\times\vec{i}$, $\vec{i}\times\vec{j}$, $\vec{i}\times\vec{k}$, $\vec{j}\times\vec{i}$, $\vec{j}\times\vec{j}$, $\vec{j}\times\vec{k}$, $\vec{k}\times\vec{i}$, $\vec{k}\times\vec{j}$, $\vec{k}\times\vec{k}$.

Розв'язання. Складемо матриці з координат векторів $\vec{i}$ і $\vec{i}$ та векторів $\vec{i}$ і $\vec{j}$:

$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$. Очевидно, що $\vec{i}\times\vec{i}=\vec{0}$, $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}\left(0;0;1\right)$. Аналогічно обчислюються інші векторні добутки. Результати цих обчислень подамо у вигляді таблиці

	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	$\vec{0}$	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	$\vec{0}$	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	$\vec{0}$

Приклад 3. Обчислити $\left(2\vec{a}+3\vec{b}\right)\times\left(5\vec{c}-3\vec{a}\right)$.

Розв'язання. $\left(2\vec{a}+3\vec{b}\right)\times\left(5\vec{c}-3\vec{a}\right)=2\vec{a}\times5\vec{c}+3\vec{b}\times5\vec{c}-2\vec{a}\times3\vec{a}-3\vec{b}\times3\vec{a}=$

$=10\left(\vec{a}\times\vec{c}\right)+15\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)-9\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)=10\left(\vec{a}\times\vec{c}\right)+15\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)+9\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$.

Приклад 4. Обчислити $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$.

Розв'язання. $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\vec{a}\times\vec{a}+\vec{b}\times\vec{a}-\vec{a}\times\vec{b}-\vec{b}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{a}+\vec{b}\times\vec{a}=2\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)$.

§3. Геометричні властивості векторного добутку

3.1. Наведемо геометричні властивості векторного добутку векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Властивість I. Вектор $\vec{a}\times\vec{b}$ перпендикулярний як до вектора $\vec{a}$, так і до вектора $\vec{b}$.

Доведення. Нехай $\vec{a}\left(x_1;y_1;z_1\right)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$, $\vec{b}\left(x_2;y_2;z_2\right)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$.

Тоді $\vec{a}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=x_1\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}-y_1\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}+z_1\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=0$.

Отже, $\vec{a}\perp\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$. Крім того, $\vec{b}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=-\vec{b}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)=0$.

Властивість II. Довжина вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ чисельно дорівнює площі S паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, тобто

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\left(\vec{a},^\wedge\vec{b}\right). \tag{1}$$

Доведення. Нехай $\varphi=\left(\vec{a},^\wedge\vec{b}\right)$. Тоді

$$S^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\sin^2\varphi=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\cos^2\varphi=$$

$$=\left(x_1^2+y_1^2+z_1^2\right)\left(x_2^2+y_2^2+z_2^2\right)-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2=$$

$$=\left(x_1^2+y_1^2+z_1^2\right)\left(x_2^2+y_2^2+z_2^2\right)-\left(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2\right)^2=$$

$$=y_1^2x_2^2+z_1^2x_2^2+x_1^2y_2^2+z_1^2y_2^2+x_1^2z_2^2+y_1^2z_2^2-2x_1x_2y_1y_2-2x_1x_2z_1z_2-2y_1y_2z_1z_2.$$

З іншого боку,

$$|\vec{a}\times\vec{b}|^2=\left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\right)^2+\left(-\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\right)^2+\left(\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right)^2=$$

$$=\left(y_1z_2-y_2z_1\right)^2+\left(x_1z_2-x_2z_1\right)^2+\left(x_1y_2-x_2y_1\right)^2=$$

$$=y_1^2x_2^2+z_1^2x_2^2+x_1^2y_2^2+z_1^2y_2^2+x_1^2z_2^2+y_1^2z_2^2-2x_1x_2y_1y_2-2x_1x_2z_1z_2-2y_1y_2z_1z_2.$$

Отже, $|\vec{a}\times\vec{b}|^2=S^2 \Leftrightarrow |\vec{a}\times\vec{b}|=S$.

Властивість III. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні тоді і тільки тоді, коли $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$. Ця властивість є наслідком попередньої властивості. Проте можна дати таке незалежне доведення.

Доведення. *Необхідність.* Нехай $\vec{a}\parallel\vec{b}$. Покажемо, що тоді $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$. Дійсно, якщо $\vec{a}\parallel\vec{b}$, то $\vec{b}=\lambda\vec{a}$ або $x_2=\lambda x_1$, $y_2=\lambda y_1$, $z_2=\lambda z_1$. Отже,

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ \lambda x_1 & \lambda y_1 & \lambda z_1 \end{vmatrix}=\vec{0}.$$

Достатність. Нехай тепер $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$. Покажемо, що тоді $\vec{a}\parallel\vec{b}$. Дійсно, за умови $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$ маємо

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}=\vec{0}\Leftrightarrow \vec{i}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}=\vec{0}. \qquad (2)$$

Помножимо рівність (2) по черзі на $\vec{i},\vec{j}$ та $\vec{k}$, врахувавши, що $\vec{i}\cdot\vec{i}=1$, $\vec{i}\cdot\vec{j}=0$, $\vec{i}\cdot\vec{k}=0$, $\vec{j}\cdot\vec{j}=1$, $\vec{k}\cdot\vec{k}=1$, $\vec{j}\cdot\vec{k}=0$.

В результаті отримуємо

$$\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}=0.$$

Згідно з теоремою 2 §4 гл. V робимо висновок, що $\vec{a}\parallel\vec{b}$.

Властивість IV. Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – неколінеарні, то вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a}\times\vec{b}$ утворюють правий базис.

Доведення. Достатньо показати, що визначник матриці переходу T від базису $\left\{\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right\}$ до базису $\left\{\vec{a};\vec{b};\vec{a}\times\vec{b}\right\}$ є додатним. Для зручності запишемо визначник, транспонований по відношенню до визначника матриці T, і розкладемо його за елементами останнього рядка:

$$\det T = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \right)^2 + \left(\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \right)^2 + \left(\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right)^2 > 0,$$

оскільки $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – неколінеарні.

3.2. Властивості I–IV визначають векторний добуток $\vec{a} \times \vec{b}$ однозначно для довільних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$: якщо $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то згідно з властивістю III $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$. Якщо $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – неколінеарні, то відповідно до властивості I вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ розміщується перпендикулярно до площини, в якій вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють базис. Цим однозначно (з точністю до паралельності) визначається пряма, до якої вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ є паралельним. Довжина вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ згідно з властивістю II чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, а напрямок вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ однозначно визначається тим, що базис $\left\{\vec{a}; \vec{b}; \vec{a} \times \vec{b}\right\}$ – правий (властивість IV).

Отже, властивості I–IV можна було б прийняти за означення векторного добутку. Це означення в декартовому прямокутному базисі задовольняв би вектор $\vec{a} \times \vec{b}$, який визначається формулою (1) §2 і тільки він. Досить часто так і роблять: векторним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають вектор, який задовольняє властивостям I–IV. Тоді формулу (1) §2 виводять з цього означення і використовують в обчисленнях.

Ілюстрація геометричних властивостей векторного добутку векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ наведена на рис. 1.

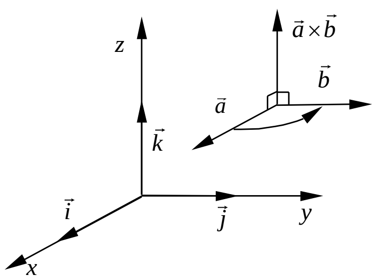


Рис. 1

3.3. Векторний добуток може використовуватись для обчислень площ.

Задача 1. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}\left(x_1;y_1;z_1\right)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$, $\vec{b}\left(x_2;y_2;z_2\right)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$.

<u>*Розв'язання.*</u> Згідно з формулою (1) §2 і властивістю II

$$S_{\square}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2} \text{ (кв. од).} \tag{3}$$

Задача 2. Обчислити площу трикутника, заданого координатами своїх вершин: $M_1\left(x_1;y_1;z_1\right)_{O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$, $M_2\left(x_2;y_2;z_2\right)_{O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$, $M_3\left(x_3;y_3;z_3\right)_{O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$.

<u>*Розв'язання.*</u> Задача зводиться до обчислення половини площі паралелограма, побудованого на векторах

$\overrightarrow{M_1M_2}\left(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1\right)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$ і $\overrightarrow{M_1M_3}\left(x_3-x_1;y_3-y_1;z_3-z_1\right)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$.

Отже,

$$S_{\square}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_2-x_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}^2} \text{ (кв. од.).} \tag{4}$$

§4. Мішаний добуток трьох векторів

4.1. Нехай задано **упорядковану** трійку векторів $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$, тобто вказано не тільки набір векторів, а й порядок, в якому ці вектори слід розглядати: $\vec{a}$ – перший вектор, $\vec{b}$ – другий, $\vec{c}$ – третій. Відмітимо, що упорядкована трійка некомпланарних векторів $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ утворює базис $\left\{\vec{a};\ \vec{b};\ \vec{c}\right\}$.

Означення 1. Мішаним добутком упорядкованої трійки векторів $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ називається число, яке дорівнює скалярному добутку вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ на вектор $\vec{c}$.

Для мішаного добутку будемо застосовувати позначення $\left(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\right)$. Тоді згідно з означенням 1

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\ . \tag{1}$$

Доведемо властивість лінійності мішаного добутку.

Теорема 1. Мішаний добуток є лінійним по кожному з множників, тобто для довільних чисел λ, μ і довільних векторів $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c},\ \vec{d}$ справедливі рівності:

$$\left(\lambda\vec{a}+\mu\vec{d},\vec{b},\vec{c}\right)=\lambda\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)+\mu\left(\vec{d},\vec{b},\vec{c}\right), \tag{2}$$

$$\left(\vec{a},\lambda\vec{b}+\mu\vec{d},\vec{c}\right)=\lambda\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)+\mu\left(\vec{a},\vec{d},\vec{c}\right), \tag{3}$$

$$\left(\vec{a},\vec{b},\lambda\vec{c}+\mu\vec{d}\right)=\lambda\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)+\mu\left(\vec{a},\vec{b},\vec{d}\right). \tag{4}$$

Доведення. Справедливість рівності (2) випливає з властивості лінійності векторного та скалярного добутків:

$$\left(\lambda\vec{a}+\mu\vec{d},\vec{b},\vec{c}\right)=\left[\left(\lambda\vec{a}+\mu\vec{d}\right)\times\vec{b}\right]\cdot\vec{c}=\left[\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)+\mu\left(\vec{d}\times\vec{b}\right)\right]\cdot\vec{c}=$$
$$=\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}+\mu\left(\vec{d}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\lambda\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)+\mu\left(\vec{d},\vec{b},\vec{c}\right).$$

Аналогічно доводиться рівність (3).

Справедливість рівності (4) випливає з властивості лінійності скалярного добутку

$$\left(\vec{a},\vec{b},\lambda\vec{c}+\mu\vec{d}\right)=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\left(\lambda\vec{c}+\mu\vec{d}\right)=\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}+\mu\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{d}=$$
$$=\lambda\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)+\mu\left(\vec{a},\vec{b},\vec{d}\right).$$

Теорему доведено.

4.2. Геометричний зміст мішаного добутку відображає наступна теорема.

Теорема 2. Мішаний добуток трьох некомпланарних векторів дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах, зі знаком "+", якщо трійка векторів – права і зі знаком "-", якщо ця трійка – ліва.

Доведення. Нехай вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ утворюють праву трійку векторів. Оскільки трійка векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{a}\times\vec{b}$ також є правою, то вектори $\vec{c}$ і $\vec{a}\times\vec{b}$ розміщені в одному півпросторі по відношенню до площини векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 1).

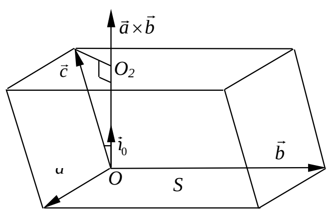


Рис. 1

Позначимо через $\vec{n}_0$ одиничний вектор у напрямку вектора $\vec{a}\times\vec{b}$, а через S – площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Очевидно, що кут $\left(\widehat{\vec{n}_0,\ \vec{c}}\right)$ – гострий.

За означенням

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=S\vec{n}_0\cdot\vec{c}\,, \tag{5}$$

але

$$\vec{n}_0\cdot\vec{c}=1\cdot\left|\vec{c}\right|\cos\left(\vec{n}_0,\hat{\ }\vec{c}\right)=h\,, \tag{6}$$

де h – висота паралелепіпеда (рис. 1). Отже,

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=Sh=V \text{ – об'єм паралелепіпеда} \tag{7}$$

Нехай тепер вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ утворюють ліву трійку. Тоді трійка векторів $\vec{a},\vec{b},\left(-\vec{c}\right)$ буде правою. Згідно з доведеним вище

$$\begin{gathered}\left(\vec{a},\vec{b},\left(-\vec{c}\right)\right)=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\left(-\vec{c}\right)=V\Leftrightarrow-\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=V\Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=-V\,.\end{gathered} \tag{8}$$

Отже, для будь-якої трійки векторів

$$V=\left|\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\right|. \tag{9}$$

Теорема 3. Для того щоб вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ були компланарними, необхідно і достатньо, щоб їх мішаний добуток дорівнював нулю.

Доведення. *Необхідність.* Нехай вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – компланарні. Без будь-якої втрати загальності можна вважати, що вони мають спільний початок. Але тоді ці вектори лежать в одній площині і об'єм паралелепіпеда, побудованого на цих векторах, дорівнює нулю. Згідно з теоремою 2 $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=0$.

Достатність. Нехай $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=0$. Тоді або один з векторів $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right),\vec{c}$ дорівнює нулю або вектори $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right),\vec{c}$ взаємно-перпендикулярні (це означає, вектор $\vec{c}$ лежить у площині векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$). В обох випадках вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ є компланарними.

4.3. Теорема 4. Якщо в декартовому прямокутному базисі задано три вектори $\vec{a}\left(x_1;y_1;z_1\right)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$, $\vec{b}\left(x_2;y_2;z_2\right)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$, $\vec{c}\left(x_3;y_3;z_3\right)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$, то їх мішаний добуток можна знайти за допомогою визначника третього порядку, утвореного з координат цих векторів, а саме

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}. \tag{10}$$

Доведення. Дійсно,
$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}x_3-\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}y_3+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}z_3$. Справа в отриманій рівності маємо розклад визначника (10) за елементами третього рядка, що і доводить теорему.

Відмітимо, що

$$\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)=\begin{cases} 1, & \text{якщо } \left\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right\} - \text{правий декартовий прямокутний базис} \\ -1, & \text{якщо } \left\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right\} - \text{лівий декартовий прямокутний базис.} \end{cases}$$

Теорему 3 можна подати у координатній формі.

Теорема 3′. Для того щоб вектори $\vec{a}\left(x_1;x_2;x_3\right)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$, $\vec{b}\left(x_2;y_2;z_2\right)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$, $\vec{c}\left(x_3;y_3;z_3\right)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$ були компланарними, необхідно і достатньо, щоб

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0. \tag{11}$$

Теорема 5. Якщо у мішаному добутку два множники однакові або колінеарні, то він дорівнює нулю.

Доведення. Дійсно, в цьому випадку визначник (10) буде містити два однакових або два пропорційних рядки, а тому дорівнюватиме нулю.

Відмітимо, що теорема 5 є безпосереднім наслідком теореми 3, оскільки три вектори у даному випадку є компланарними.

4.4. Теорема 6. Для того щоб базис $\left\{\vec{a};\vec{b};\vec{c}\right\}$ був правим, необхідно і достатньо, щоб $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)>0$.

Доведення. *Необхідність.* Нехай базис $\left\{\vec{a};\vec{b};\vec{c}\right\}$ – правий. Тоді необхідна умова $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)>0$ випливає безпосередньо з теореми 2.

Достатність. Нехай $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)>0$. Тоді за формулою (10) $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\det T^T=\det T>0$, де T – матриця переходу від правого базису $\left\{\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right\}$ до базису $\left\{\vec{a};\vec{b};\vec{c}\right\}$, а T^T – транспонована матриця до матриці T. Отже, якщо $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)>0$, то базис $\left\{\vec{a};\vec{b};\vec{c}\right\}$ – правий, що і доводить теорему.

Теорема 7. При перестановці двох множників мішаний добуток змінює знак.

Доведення. Перестановка двох векторів базису $\left\{\vec{a};\vec{b};\vec{c}\right\}$ призводить до зміни його орієнтації (див. §1, приклади 1, 2). Тому на основі теореми 6 можна стверджувати, що знак мішаного добутку $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$ при перестановці двох множників буде змінюватись. Що стосується модуля мішаного добутку, то він згідно з формулою (9) при будь-якій перестановці множників не змінюється.

Зауваження 1. Для доведення теореми 7 можна скористатись також формулою (10), наприклад

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=-\left(\vec{b},\vec{a},\vec{c}\right). \qquad (12)$$

Тут використано властивість визначника змінювати знак при перестановці рядків.
Як наслідок теореми 7 можна записати рівності

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{b},\vec{c},\vec{a}\right)=\left(\vec{c},\vec{a},\vec{b}\right)=-\left(\vec{a},\vec{c},\vec{b}\right)=-\left(\vec{c},\vec{b},\vec{a}\right)=-\left(\vec{b},\vec{a},\vec{c}\right). \qquad (13)$$

Зауваження 2. Розглянемо рядки довільного визначника

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

як координати векторів $\vec{a}_1,\vec{a}_{2,},\vec{a}_3$ у деякій декартовій прямокутній правій системі координат.

Тоді $\Delta=\begin{cases} V, & \text{якщо трійка векторів } \vec{a}_1,\, \vec{a}_2,\, \vec{a}_3 \text{ є правою,} \\ -V, & \text{якщо трійка векторів } \vec{a}_1,\, \vec{a}_2,\, \vec{a}_3 \text{ є лівою,} \end{cases}$

де V – об’єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}_1,\vec{a}_{2,},\vec{a}_3$.

Отже, довільний визначник третього порядку можна розглядати з точністю до знака як об’єм паралелепіпеда, побудованого на векторах, координати яких є рядками цього визначника.

4.5. Скористаємось мішаним добутком векторів для знаходження об’єму трикутної піраміди.

Нехай дано трикутну піраміду $M_1M_2M_3M_4$ (рис. 2).

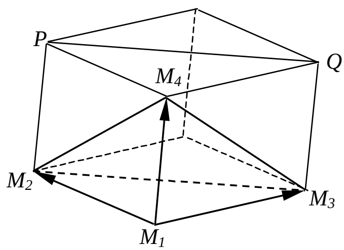


Рис. 2

На ребрах M_1M_2, M_1M_3, M_1M_4 побудуємо паралелепіпед. Об’єм трикутної піраміди дорівнює $\frac{1}{3}$ об’єму призми $M_1M_2M_3M_4PQ$. Об’єм цієї призми у свою чергу дорівнює $\frac{1}{2}$ об’єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$, $\overrightarrow{M_1M_4}$.

Тому об’єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$ дорівнює $\frac{1}{6}$ об’єму цього паралелепіпеда.

Отже,

$$V_{nip} = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{M_1M_2},\ \overrightarrow{M_1M_3},\ \overrightarrow{M_1M_4}\right)\right|. \qquad (14)$$

Якщо $M_1\left(x_1;y_1;z_1\right)_{0,\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$, $M_2\left(x_2;y_2;z_2\right)_{0,\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$, $M_3\left(x_3;y_3;z_3\right)_{0,\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$, $M_4\left(x_4;y_4;z_4\right)_{0,\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$, то формулу (14) можна записати у координатній формі:

$$V_{nip} = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}\right|. \qquad (15)$$

Нагадаємо, що визначник береться по модулю тому, що мішаний добуток додатний, якщо трійка векторів – права, і від’ємний, якщо ця трійка – ліва.

§5. Подвійний векторний добуток

Нехай $\vec{a}\left(a_1;a_2;a_3\right)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$, $\vec{b}\left(b_1;b_2;b_3\right)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$, $\vec{c}\left(c_1;c_2;c_3\right)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$ – довільні вектори.

<u>Означення 1</u>. Вектор $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$ називається подвійним векторним добутком.

Наступна теорема дає просте правило знаходження подвійного векторного добутку.

Теорема 1. Для довільних трьох векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ справедлива формула

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) = \left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\vec{b} - \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}, \qquad (1)$$

де $\vec{a}\cdot\vec{c}$ – скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{c}$, а $\vec{a}\cdot\vec{b}$ – скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

<u>Доведення</u>. Оскільки

$$\vec{b}\times\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}\vec{k}, \quad \text{то}$$

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix}=$$

$$=\left(a_2b_1c_2-a_2b_2c_1+a_3b_1c_3-a_3b_3c_1\right)\vec{i}+\left(a_1b_2c_1-a_1b_1c_2+a_3b_2c_3-a_3b_3c_2\right)\vec{j}+$$

$$+\left(a_1b_3c_1-a_1b_1c_3+a_2b_3c_2-a_2b_2c_3\right)\vec{k}=$$

$$=\left[b_1\left(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3\right)-c_1\left(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\right)\right]\vec{i}+$$

$$+\left[b_2\left(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3\right)-c_2\left(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\right)\right]\vec{j}+$$

$$+\left[b_3\left(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3\right)-c_3\left(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\right)\right]\vec{k}=$$

$$=\left(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3\right)\left(b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}\right)-\left(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\right)\left(c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+c_3\vec{k}\right)=$$

$$=\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\vec{b}-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}\ .$$

Теорема 2. Для довільних трьох векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ справедлива тотожність

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)+\vec{b}\times\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)+\vec{c}\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\vec{0}\ . \qquad (2)$$

Доведення. За теоремою 1 маємо:

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\vec{b}-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}\ ,$$

$$\vec{b}\times\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)=\left(\vec{b}\cdot\vec{a}\right)\vec{c}-\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)\vec{a}\ ,$$

$$\vec{c}\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\left(\vec{c}\cdot\vec{b}\right)\vec{a}-\left(\vec{c}\cdot\vec{a}\right)\vec{b}\ .$$

Додаючи почленно ці рівності і використовуючи комутативність скалярного добутку $\left(\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}\right)$, приходимо до тотожності (2).

Пряма на площині

§1. Рівняння лінії

<u>**Означення 1**</u>. Геометричним місцем точок на площині називають множину всіх точок цієї площини, які мають деяку спільну властивість.

Ця властивість повинна бути такою, щоб про кожну точку площини можна було однозначно сказати, має вона дану властивість чи не має. Наприклад, всі точки кола знаходяться на одній і тій же відстані від центра кола, тоді як кожна точка, що не лежить на колі, не має цієї властивості, тобто не знаходиться на даній відстані від центра. Іншими словами, коло є геометричним місцем точок, що знаходяться на однаковій відстані від деякої точки, яка називається центром кола.

Аналітичне дослідження геометричного місця точок проводиться за такою схемою:

1. Передусім, вибирається деяка координатна система. В принципі, ця система може бути довільною. Проте, досить часто саме властивість, що визначає дане геометричне місце точок, вказує на вибір такої координатної системи, з використанням якої подальше аналітичне дослідження набуває найпростішого вигляду. Довільну точку M, що належить до даного геометричного місця точок, назвемо змінною точкою цього геометричного місця точок. Координати змінної точки M у вибраній системі координат позначимо x, y і назвемо змінними координатами.
2. Геометричні співвідношення між точками даного геометричного місця точок за допомогою відомих формул аналітичної геометрії подаються у вигляді співвідношень між координатами цих точок, тобто у деякому формульному вигляді. Зокрема, це може бути деяке рівняння з двома невідомими x і y, якому задовольняють координати точок даного геометричного місця. У самому загальному випадку таке рівняння можна записати у вигляді
$$F(x,y)=0, \qquad (1)$$
де $F(x,y)$ – символ функції двох змінних, тобто символ деякої операції, що проводиться над змінними x і y.
3. Якщо для деякого геометричного місця точок складено рівняння вигляду (1), то це рівняння повністю визначає це геометричне місце точок. Дійсно, стосовно кожної точки M_1 з координатами x_1, y_1 без будь-яких ускладнень чисто аналітично можна вияснити, належить ця точка до даного геометричного місця точок чи не належить. Якщо числа x_1, y_1 задовольняють рівнянню (1), тобто має місце тотожність

$$F(x_1, y_1) = 0,$$

то точка M_1 належить геометричному місцю. Якщо ж

$$F(x_1, y_1) \neq 0,$$

то точка M_1 не належить геометричному місцю точок, яке визначається рівнянням (1).

У зв'язку з цим введемо наступні означення.

Означення 2. Нехай задано рівняння (1) $F(x, y) = 0$. Множину всіх точок M координатної площини, координати x і y яких задовольняють даному рівнянню, називають лінією, що визначається цим рівнянням.

Означення 3. Нехай на координатній площині задано деяку лінію l. Рівнянням, що відповідає даній лінії або просто рівнянням лінії l називають таке рівняння (1) $F(x, y) = 0$, якому задовольняють координати x і y всіх точок цієї лінії і не задовольняють координати будь-якої точки, яка не лежить на цій лінії.

З означень 2 і 3 випливає, що для того щоб показати, що рівняння (1) є рівнянням даної лінії, потрібно довести два твердження:

1. Якщо деяка точка M площини лежить на даній лінії, то її координати x, y задовольняють рівнянню (1).
2. Якщо координати x, y якої-небудь точки M площини задовольняють рівнянню (1), то ця точка лежить на даній лінії.

Іншими словами, якщо задано рівняння (1) і ставиться задача відшукати лінію, що визначається цим рівнянням, то потрібно зібрати всі точки M, координати x, y яких задовольняють даному рівнянню. Навпаки, якщо задано лінію і потрібно написати (скласти) її рівняння, то слід підібрати таке рівняння з двома змінними, якому задовольняють координати всіх точок даної лінії і тільки цих точок.

Якщо рівняння деякої лінії відоме, то дослідження геометричних властивостей цієї лінії зводиться до вивчення властивостей її рівняння – у цьому полягає одна з основних ідей аналітичної геометрії. Цінність цієї ідеї в тому, що дослідження рівняння є значно простішим, а ніж безпосереднє геометричне дослідження лінії. Крім того, для дослідження рівняння існують добре розроблені методи алгебри і математичного аналізу.

Для прикладу, отримаємо рівняння кола як рівняння геометричного місця точок площини, рівновіддалених від даної точки цієї площини.

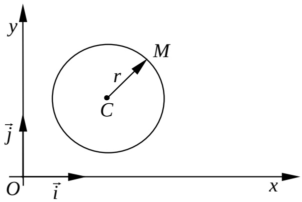


Рис. 1

Отже, нехай точка $C(a;b)_{O,\vec{i},\vec{j}}$ є центром кола з радіусом r (рис 1). Для довільної точки $M(x;y)_{O,\vec{i},\vec{j}}$ кола має місце рівність

$$|CM| = r. \tag{2}$$

З іншого боку, $|CM|$ є відстанню між двома точками C і M, тобто

$$|CM| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}.$$

Тому рівність (2) набуває вигляду

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r \quad \Leftrightarrow \quad (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2. \tag{3}$$

Отже, координати довільної точки кола задовольняють рівнянню (3).

Легко бачити, що для точки M, яка не лежить на колі, виконується одна з двох умов: $|CM| > r$ або $|CM| < r$. Це свідчить про те, що рівнянню (3) задовольняють координати тільки точок кола, а тому рівняння (3) є рівнянням кола.

Означення 4. Лінія називається алгебраїчною, якщо її рівняння (1) є алгебраїчним.

Означення 5. Степінь рівняння алгебраїчної лінії називається порядком цієї лінії.

Оскільки степінь рівняння (3) дорівнює двом, то коло є лінією другого порядку.

Рівняння типу (1) можуть бути не алгебраїчними, наприклад, $\sin x + \cos x - 1 = 0$, $2^y - \ln x + 2 = 0$, $\dfrac{y}{x} - \operatorname{tg}\sqrt{x^2 + y^2} = 0$ тощо.

Якщо лінія визначається не алгебраїчним рівнянням, то вона називається неалгебраїчною або трансцендентною.

§2. Загальне рівняння прямої

Означення 1. Рівнянням першого степеня або лінійним рівнянням відносно змінних x і y називається рівняння вигляду

$$Ax + By + C = 0, \tag{1}$$

де A, B, C – сталі, причому A і B одночасно не дорівнюють нулю, тобто $A^2 + B^2 \neq 0$.

Теорема 1. Довільну пряму на площині можна задати у декартовій прямокутній системі координат лінійним рівнянням (1). Навпаки, довільне лінійне рівняння (1) відносно декартових координат x, y є рівнянням деякої прямої на площині.

Доведення. Нехай на площині вибрано декартову прямокутну систему координат xOy і задано пряму лінію l. Пряма l однозначно визначається точкою $M_0\left(x_0; y_0\right)_{O,\vec{i},\vec{j}}$, через яку вона проходить, і перпендикулярним до неї ненульовим вектором $\vec{N}\left(A;B\right)_{\vec{i},\vec{j}}$ (рис. 1). Оскільки далі розглядається виключно декартова прямокутна система координат $\{O;\vec{i};\vec{j}\}$, замість $M\left(x;y\right)_{O,\vec{i},\vec{j}}$ будемо писати просто $M\left(x;y\right)$. Те ж саме стосується і позначення вектора: $\vec{N}\left(A;B\right)_{\vec{i},\vec{j}} = \vec{N}\left(A;B\right)$.

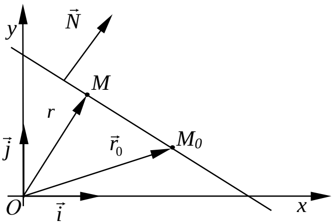


Рис. 1

Виберемо на прямій l довільну точку M зі змінними координатами x, y. Тоді вектори $\overrightarrow{M_0M}$ і $\vec{N}$ перпендикулярні і їх скалярний добуток дорівнює нулю

$$\overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{N} = 0. \tag{2}$$

Але

$$\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0,$$

де $\vec{r}$ – радіус-вектор точки M, а $\vec{r}_0$ – радіус-вектор точки M_0. Тому рівняння (2) приймає вигляд

$$\left(\vec{r} - \vec{r}_0\right)\cdot\vec{N} = 0. \tag{3}$$

Якщо точка M не лежить на прямій l, то порушується перпендикулярність векторів $\overrightarrow{M_0M}$ і $\vec{N}$. Тому для точок, що не лежать на прямій l, рівність (3) не виконується. Це означає, що рівняння (3) є ***рівнянням прямої*** l ***у векторній формі***. Щоб записати це рівняння у координатній формі, потрібно скористатися виразом для скалярного добутку у координатній формі.

Вектор $\vec{r} - \vec{r}_0$ має координати $x - x_0,\ y - y_0$, а вектор $\vec{N}$ – координати A, B. Тому рівняння (3) можна подати у вигляді

$$A\left(x - x_0\right) + B\left(y - y_0\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Ax + By + C = 0, \tag{4}$$

де $C = -\left(Ax_0 + By_0\right)$. Цим доведено, що координати x, y змінної точки M прямої l задовольняють лінійному рівнянню (4).

Покажемо тепер, що довільне лінійне рівняння (4), де $A^2+B^2\neq 0$, визначає пряму на площині. Для цього досить звести це рівняння шляхом тотожних перетворень до вигляду (3).

Нехай $(x_0;y_0)$ – пара чисел, які є розв'язком рівняння (4), тобто

$$Ax_0+By_0+C=0. \tag{5}$$

Точка $M_0(x_0;y_0)$ належить до геометричного місця точок, яке визначається рівнянням (4). Віднімемо від рівняння (4) тотожність (5). Отримаємо рівняння, рівносильне рівнянню (4):

$$Ax+By+C-(Ax_0+By_0+C)=0 \Leftrightarrow A(x-x_0)+B(y-y_0)=0. \tag{6}$$

Якщо ввести позначення $\vec{r}(x;y)$, $\vec{r}_0(x_0;y_0)$, $\overrightarrow{N}(A;B)$ (за умовою $\overrightarrow{N}$ – ненульовий вектор), то у векторній формі рівняння (6) прийме вигляд (3)

$$(\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot\overrightarrow{N}=0.$$

Згідно з доведеним вище це означає, що рівняння (6), а тому і рівносильне йому рівняння (4), визначає пряму l, яка проходить через точку $M_0(x_0;y_0)$ перпендикулярно вектору $\overrightarrow{N}(A;B)$.

Теорему доведено.

Означення 2. Рівняння (4) називається загальним рівнянням прямої, а вектор $\overrightarrow{N}(A;B)$ – нормальним вектором прямої.

Означення 3. Напрямним вектором прямої називається довільний вектор $\vec{a}$, який паралельний до цієї прямої.

Теорема 2. Вектор $\vec{a}(-B;A)$ є одним з напрямних векторів прямої, заданої загальним рівнянням (4).

Доведення. Потрібно показати, що $\vec{a}\cdot\overrightarrow{N}=0$. Дійсно $\vec{a}\cdot\overrightarrow{N}=-BA+AB=0$ і теорему доведено.

§3. Дослідження загального рівняння прямої

Дослідження загального рівняння прямої

$$Ax+By+C=0 \tag{1}$$

– це дослідження того, як залежить розміщення прямої на площині від перетворення в нуль деяких з його коефіцієнтів.

Можливі такі випадки:

1°. $A\neq 0, B\neq 0, C\neq 0$. Пряма (1) перетинає координатні осі у різних точках і називається прямою загального положення (рис. 1).

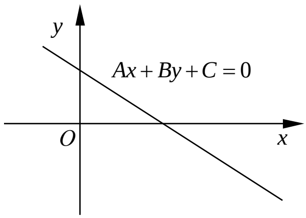


Рис. 1

2°. $A \neq 0, B \neq 0, C = 0$. Рівняння (1) приймає вигляд

$$Ax + By = 0. \tag{2}$$

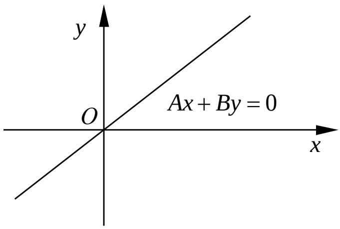


Рис. 2

Рівнянню (2) задовольняють координати початку координат $O(0;\,0)$. Тому рівняння (2) визначає пряму, що проходить через початок координат (рис. 2).

3°. $A \neq 0, B = 0, C \neq 0$. Рівняння (1) приймає вигляд

$$Ax + C = 0 \;\Leftrightarrow\; x = -\frac{C}{A}. \tag{3}$$

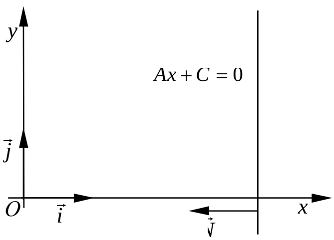


Рис. 3

Нормальний вектор $\vec{N}(A;0)$ прямої (3) паралельний базисному вектору $\vec{i}(1;0)$. Тому рівняння (3) визначає пряму, яка паралельна осі Oy (рис. 3). Якщо в умовах 3° і $C = 0$, то рівняння (3) приймає вигляд

$$Ax = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0. \tag{4}$$

Пряма (4) паралельна базисному вектору $\vec{j}(0;1)$ і проходить через початок координат. Тому рівняння (4) є рівнянням координатної осі Oy. Про те, що рівняння (4) є рівнянням осі Oy, можна також зробити висновок, виходячи з того, що тільки для точок осі Oy абсциса x дорівнює нулю.

4. $A=0, B\neq 0, C\neq 0$. Рівняння (1) набуває вигляду

$$By+C=0 \;\Leftrightarrow\; y=-\frac{C}{B}. \qquad (5)$$

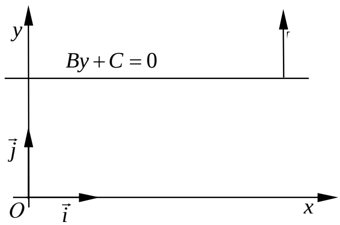


Рис. 4

Нормальний вектор прямої (5) $\vec{N}(0;B)$ паралельний базисному вектору $\vec{j}(0;1)$. Тому рівняння (5) визначає пряму, паралельну координатній осі Ox (рис. 4). Якщо в умовах 4° і $C=0$, то рівняння (5) приймає вигляд

$$y=0. \qquad (6)$$

Рівняння (6) є рівнянням координатної осі Ox.

§4. Взаємне розміщення двох прямих на площині

Нехай у декартовій прямокутній системі координат на площині задано загальні рівняння двох прямих

$$A_1x+B_1y+C_1=0, \qquad (1)$$

$$A_2x+B_2y+C_2=0. \qquad (2)$$

Можливі такі випадки взаємного розміщення цих прямих:

1) вони можуть перетинатися;

2) можуть бути паралельними;

3) можуть співпадати.

Відмітимо, що дослідження взаємного розміщення двох прямих, заданих рівняннями (1) і (2) – це з точки зору алгебри дослідження розв’язку системи двох лінійних рівнянь з двома невідомими. Перетину двох прямих з алгебраїчної точки зору відповідає випадок, коли система рівнянь (1), (2) має єдиний розв’язок; паралельності прямих - випадок, коли ця система не має розв’язків, тобто є несумісною; співпаданню прямих - випадок, коли система має нескінченну множину розв’язків.

Розглядаючи можливі випадки взаємного розміщення прямих, будемо використовувати як геометричні, так і алгебраїчні міркування.

Теорема 1. Для того щоб прямі (1) і (2) перетинались, необхідно і достатньо, щоб

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (3)$$

<u>Доведення</u>. Необхідність. Покажемо, що для прямих (1) і (2), які перетинаються, виконується умова (3).

Дійсно, нехай прямі (1) і (2) перетинаються. Тоді нормальні вектори $\overrightarrow{N_1}\left(A_1;B_1\right)$ і $\overrightarrow{N_2}\left(A_2;B_2\right)$ відповідно прямих (1) і (2) не колінеарні. Умовою неколінеарності векторів $\overrightarrow{N_1}$ і $\overrightarrow{N_2}$ є умова (3). Необхідність доведено.

Достатність. Нехай тепер виконується умова (3). Покажемо, що за цієї умови прямі (1) і (2) перетинаються. Дійсно, за умови (3) система двох лінійних рівнянь (1), (2) з двома невідомими x, y згідно з правилом Крамера має єдиний розв'язок $\left(x_0;y_0\right)$, який визначає спільну точку $M_0\left(x_0;y_0\right)$ прямих (1) і (2).

Теорему доведено.

Теорема 2. Для того щоб дві різні прямі (1) і (2) були паралельними, необхідно і достатньо, щоб

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0 \text{, проте або } \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0 \text{, або } \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0 . \quad (4)$$

Доведення. *Необхідність.* Покажемо, що для паралельних прямих (1) і (2) умови (4) виконуються. Дійсно, за умови паралельності прямих (1) і (2) нормальні вектори цих прямих $\overrightarrow{N_1}\left(A_1;B_1\right)$ і $\overrightarrow{N_2}\left(A_2;B_2\right)$ колінеарні, тобто має місце рівність

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0 . \quad (5)$$

З (5) випливає, що

$$A_2 = \lambda A_1, \quad B_2 = \lambda B_1 , \quad (6)$$

де λ – число, відмінне від нуля, оскільки у противному разі було б $A_2 = 0$ і $B_2 = 0$, що неможливо $\left(A_2^2 + B_2^2 \neq 0\right)$.

Підставимо (6) в (2):

$$\lambda A_1 x + \lambda B_1 x + C_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A_1 x + B_1 y + \frac{C_2}{\lambda} = 0. \quad (7)$$

З (7) випливає, що

$$\frac{C_2}{\lambda} \neq C_1 \quad \Leftrightarrow \quad C_2 \neq \lambda C_1 , \quad (8)$$

оскільки у противному разі рівняння (1) і (2) зображали б одну і ту ж пряму, а це суперечить умові, що прямі (1) і (2) різні.

З умов (6) і (8) випливають умови (4).

Достатність. Покажемо тепер, що за умов (4) прямі (1), (2) є паралельними. Дійсно, з умов (4) випливає, що система лінійних рівнянь (1), (2) не має розв'язків. Геометрично це означає, що прямі (1) і (2) паралельні.

Теорему доведено.

Аналогічно теоремі (2) доводиться наступна теорема.

Теорема 3. Для того щоб прямі (1) і (2) співпадали, необхідно і достатньо виконання умов

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0, \; \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0, \; \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; A_2 = \lambda A_1,\, B_2 = \lambda B_1,\, C_2 = \lambda C_1,$$

тобто пропорційності коефіцієнтів одного рівняння відповідним коефіцієнтам другого рівняння.

Приклад 1. Дослідити взаємне розміщення двох прямих:

а) $\begin{array}{l} x + y + 1 = 0, \\ -x + y + 2 = 0; \end{array}$ б) $\begin{array}{l} x + 2y + 3 = 0, \\ 2x + 4y - 7 = 0; \end{array}$ в) $\begin{array}{l} 2x + 3y + 7 = 0, \\ 4x + 6y + 14 = 0. \end{array}$

Розв'язання. а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2 \neq 0.$ Прямі перетинаються.

б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0,$ але $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} = -7 - 6 = -13 \neq 0$. Прямі паралельні.

в) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0,$ $\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 14 \end{vmatrix} = 28 - 28 = 0,$ $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 6 & 14 \end{vmatrix} = 42 - 42 = 0.$ Прямі співпадають.

§5. Пучок прямих

5.1. **<u>Означення 1</u>**. Пучком прямих, що перетинаються, називають множину всіх прямих площини, які проходять через деяку M_0. Точку M_0 називають центром пучка.

Далі пучок прямих, що перетинаються, будемо називати просто пучком прямих.

Пучок прямих можна задати або координатами центра пучка $(x_0; y_0)$, або двома прямими, що перетинаються і належать пучку. Дійсно, ці прямі визначають центр пучка, тобто точку свого перетину.

Теорема 1. Якщо у декартовій прямокутній системі координат задано пучок прямих ω з центром у точці $(x_0; y_0)$, то рівняння

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = 0, \tag{1}$$

де α і β – довільні числа, не рівні одночасно нулю $(\alpha^2 + \beta^2 \neq 0)$, визначає даний пучок.

<u>*Доведення*</u>. Нехай α, β – довільні числа, такі що $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$. Рівняння (1) рівносильне рівнянню

$$\beta(x - x_0) - \alpha(y - y_0) = 0 \;\Leftrightarrow\; \beta x - \alpha y + \alpha y_0 - \beta x_0 = 0. \tag{2}$$

Рівняння (2) – це лінійне рівняння, яке згідно з теоремами 1, 2 §2 визначає пряму, що проходить через точку $(x_0; y_0)$ паралельно вектору $\vec{a}(\alpha;\beta)$, тобто деяку пряму пучка ω.

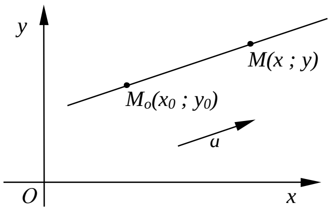


Рис. 1

Навпаки, нехай l – довільна пряма пучка ω, а вектор $\vec{a}(\alpha;\beta)$ – її напрямний вектор (рис. 1).

Точка $M(x; y)$ лежить на прямій l тоді і тільки тоді, коли вектор $\overrightarrow{M_0M}$ і вектор $\vec{a}$ колінеарні, тобто

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = 0.$$

Отже, рівняння будь-якої прямої l пучка ω можна записати у вигляді (1).

Теорему доведено.

У рівнянні (1) x_0 і y_0 – сталі, а α і β – параметри, тобто величини, які можуть приймати довільні значення, не рівні одночасно нулю.

Нехай задано дві прямі

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \qquad (3)$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0, \qquad (4)$$

які перетинаються в точці $M_0(x_0; y_0)$.

Теорема 2. Якщо у декартовій прямокутній системі координат пучок прямих ω задано двома різними прямими (3) і (4), то рівняння

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0, \qquad (5)$$

де α і β – довільні числа, не рівні одночасно нулю $(\alpha^2 + \beta^2 \neq 0)$, визначає даний пучок.

Доведення. Рівняння (5) рівносильне рівнянню

$$(\alpha A_1 + \beta A_2)x + (\alpha B_1 + \beta B_2)y + \alpha C_1 + \beta C_2 = 0. \qquad (6)$$

Рівняння (6) буде рівнянням деякої прямої, якщо коефіцієнти при x і y в цьому рівнянні не дорівнюють одночасно нулю.

Припустимо протилежне, тобто

$$\begin{cases} A_1\alpha + A_2\beta = 0 \\ B_1\alpha + B_2\beta = 0. \end{cases} \qquad (7)$$

Маємо систему лінійних однорідних рівнянь (7) відносно невідомих α і β. Визначник цієї системи

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

оскільки прямі (3) і (4) за умовою перетинаються. Тоді за формулами Крамера система (7) має єдиний розв'язок $\alpha = 0,\ \beta = 0$. Отримали протиріччя, оскільки за умовою $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$.

Отже, для будь-яких значень α і β, що не дорівнюють одночасно нулю, рівняння (6) або рівносильне йому рівняння (5) визначає деяку пряму. Ця пряма проходить через точку перетину прямих (3) і (4). Дійсно, якщо $x_0,\ y_0$ – координати точки перетину прямих (3) і (4), то

$$A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 = 0 \quad \text{і} \quad A_2x_0 + B_2y_0 + C_2 = 0.$$

Тоді для довільних α і β

$$\alpha\left(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1\right) + \beta\left(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2\right) = 0.$$

Отже, ми довели, що для довільних α і β $\left(\alpha^2 + \beta^2 \neq 0\right)$ пряма (5) належить пучку прямих ω.

Навпаки, для будь-якої прямої l пучка ω можна так підібрати числа α і β, що рівняння (5) стане рівнянням прямої l.

Дійсно, пряма l визначається центром пучка – точкою $M_0\left(x_0; y_0\right)$ і якою-небудь іншою точкою $M_1\left(x_1; y_1\right)$, через яку вона проходить. Підставимо координати точки $M_1\left(x_1; y_1\right)$ у рівняння (5):

$$\alpha\left(A_1x_1 + B_1y_1 + C_1\right) + \beta\left(A_2x_1 + B_2y_1 + C_2\right) = 0. \tag{8}$$

Числа $A_1x_1 + B_1y_1 + C_1$ і $A_2x_1 + B_2y_1 + C_2$ одночасно не дорівнюють нулю, оскільки у противному разі точки $M_0\left(x_0; y_0\right)$ і $M_1\left(x_1; y_1\right)$ будуть співпадати. Нехай, наприклад,

$$A_2x_1 + B_2y_1 + C_2 \neq 0.$$

Тоді рівність (8) можна переписати у вигляді

$$\beta = -\frac{A_1x_1 + B_1y_1 + C_1}{A_2x_1 + B_2y_1 + C_2}\alpha. \tag{9}$$

Виберемо α довільним, а β – з рівності (9). При такому виборі α і β рівняння (5) визначає пряму, що проходить через точки $M_0\left(x_0; y_0\right)$ і $M_1\left(x_1; y_1\right)$, тобто є рівнянням прямої l.

Теорему доведено.

Приклад 1. Написати рівняння пучка прямих з центром у точці $M_0(3;-4)$.

Розв'язання. Шукане рівняння отримаємо, якщо підставимо координати точки $M_0(3;-4)$ в рівняння (1):

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+4 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = 0 \iff \beta(x-3)-\alpha(y+4)=0.$$

Приклад 2. Написати рівняння пучка, що визначається прямими $2x+3y+4=0$ і $-3x+2y-5=0$.

Розв'язання. Задані прямі перетинаються, оскільки

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 4+9=13 \neq 0.$$

Шукане рівняння пучка отримаємо, скориставшись рівнянням (5):

$$\alpha(2x+3y+4)+\beta(-3x+2y-5)=0 \iff$$
$$\iff (2\alpha-3\beta)x+(3\alpha+2\beta)y+4\alpha-5\beta=0. \qquad (10)$$

Приклад 3. Знайти рівняння прямої з пучка (10), яка проходить через точку $M_1(1;1)$.

Розв'язання. Оскільки пряма проходить через точку $M_1(1;1)$, то

$$(2\alpha-3\beta)\cdot 1+(3\alpha+2\beta)\cdot 1+4\alpha-5\beta=0 \iff 9\alpha-6\beta=0 \iff \alpha=\frac{2}{3}\beta, \qquad (11)$$

де $\beta \neq 0$ – довільне число.

Щоб отримати шукане рівняння, підставимо (11) в (10):

$$\left(\frac{4}{3}\beta-3\beta\right)x+\left(3\cdot\frac{2}{3}\beta+2\beta\right)y+\frac{8}{3}\beta-5\beta=0 \iff -\frac{5}{3}\beta x+4\beta y-\frac{7}{3}\beta=0 \iff -5x+12y-7=0.$$

Отже, $-5x+12y-7=0$ – рівняння прямої пучка (10), яка проходить через точку $M_1(1;1)$.

5.2. Нехай задано три прямі своїми рівняннями у декартовій прямокутній системі координат:

$$\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1&=0,\\ A_2x+B_2y+C_2&=0,\\ A_3x+B_3y+C_3&=0. \end{aligned} \qquad (12)$$

Знайдемо умову перетину прямих (12) в одній точці, тобто умову належності цих прямих до одного пучка ω.

Теорема 3. Для того щоб три прямі, задані рівняннями (12), належали до одного пучка прямих ω, необхідно і достатньо, щоб

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{13}$$

<u>*Доведення*</u>. *Необхідність.* Покажемо, що для трьох прямих (12), які належать до одного пучка прямих ω, умова (13) виконується.

Дійсно, нехай прямі (13) належать до одного пучка ω з центром у точці $M_0\left(x_0; y_0\right)$. Тоді

$$\begin{gathered} A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 = 0 \Leftrightarrow C_1 = A_1\left(-x_0\right) + B_1\left(-y_0\right), \\ A_2x_0 + B_2y_0 + C_2 = 0 \Leftrightarrow C_2 = A_2\left(-x_0\right) + B_2\left(-y_0\right), \\ A_3x_0 + B_3y_0 + C_3 = 0 \Leftrightarrow C_3 = A_3\left(-x_0\right) + B_3\left(-y_0\right). \end{gathered} \tag{14}$$

З рівностей (14) видно, що елементи третього стовпця визначника (13) є лінійною комбінацією елементів перших двох стовпців. Тому визначник Δ (13) дорівнює нулю. Необхідність доведено.

Достатність. Нехай тепер визначник (13) $\Delta = 0$. Покажемо, що за цієї умови прямі (12) належать до одного пучка прямих ω. Для цього спочатку знайдемо за допомогою формул Крамера координати точки перетину перших двох прямих системи (12):

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1x + B_1y = -C_1 \\ A_2x + B_2y = -C_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \dfrac{\begin{vmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} \\ y_0 = \dfrac{\begin{vmatrix} A_1 & -C_1 \\ A_2 & -C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \dfrac{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} \\ y_0 = -\dfrac{\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} \end{cases}, \quad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{15}$$

Доведемо, що точка $M_0\left(x_0;y_0\right)$ лежить на третій прямій (12), тобто

$$A_3x_0+B_3y_0+C_3=0\,. \tag{16}$$

Для цього розкладемо визначник (13) Δ за елементами третього рядка, в результаті чого рівність (13) приймає вигляд

$$A_3\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}-B_3\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}+C_3\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}=0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; A_3\,\frac{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}-B_3\,\frac{\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}+C_3=0 \;\Leftrightarrow\; A_3x_0+B_3y_0+C_3=0.$$

Отже, отримали рівність (16). Теорему доведено.

Приклад 4. Довести, що прямі $x-y=0$, $x+y-2=0$, $3x-y-2=0$ перетинаються в одній точці.

Розв'язання. Обчислюємо визначник

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=2\cdot 2-2\cdot 2=0\,.$$

За теоремою 3 робимо висновок, що всі три прямі належать до одного пучка, тобто перетинаються в одній точці. Оскільки прямі $x-y=0$ і $x+y-2=0$ перетинаються в точці $M_0\left(1;1\right)$, то всі три прямі проходять через одну точку $M_0\left(1;1\right)$ (центр пучка).

§6. Спеціальні форми рівняння прямої

Довільну пряму на площині можна задати її загальним рівнянням

$$Ax+By+C=0\,. \tag{1}$$

Разом з тим, цю пряму можна задати і рівнянням

$$\lambda Ax+\lambda By+\lambda C=0\,, \tag{2}$$

де λ – довільне число, відмінне від нуля. Тому взаємно-однозначної відповідності між множиною всіх рівнянь першого степеня і множиною всіх прямих на площині встановити не можна. Хоча кожному рівнянню першого степеня і відповідає єдина пряма на площині, обернене твердження є хибним: кожну пряму на площині можна задати нескінченною кількістю лінійних рівнянь вигляду (2).

Довільністю числа λ в рівнянні (2) можна скористатись для того, щоб зробити один з відмінних від нуля коефіцієнтів рівняння прямої рівним деякому наперед заданому числу. Зокрема, для спрощення рівняння прямої природно підібрати число λ так, щоб один з коефіцієнтів, що не дорівнює нулю, став рівним одиниці.

У зв'язку з цим можливі такі спеціальні форми рівняння прямої:

$$\frac{A}{C}x+\frac{B}{C}y+1=0,\ \text{якщо}\ C\neq 0,\ \ \lambda=\frac{1}{C}; \tag{3}$$

$$\frac{A}{B}x+y+\frac{C}{B}=0,\ \text{якщо}\ B\neq 0,\ \ \lambda=\frac{1}{B}. \tag{4}$$

6.1. Розглянемо спочатку рівняння (3). До такого вигляду можна звести рівняння лише тих прямих, які не проходять через початок координат, оскільки $C\neq 0$. Загальне рівняння прямої (1) за цієї умови допускає такі тотожні перетворення (вважаємо також, що $A\neq 0$ і $B\neq 0$):

$$Ax+By+C=0 \Leftrightarrow Ax+By=-C \Leftrightarrow \frac{A}{-C}x+\frac{B}{-C}y=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{-\frac{C}{A}}+\frac{y}{-\frac{C}{B}}=1 \Leftrightarrow \frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1, \tag{5}$$

де $p=-\dfrac{C}{A}$, $q=-\dfrac{C}{B}$, $A\neq 0$, $B\neq 0$.

<u>**Означення 1**</u>. Рівняння прямої у формі (5) називається рівнянням прямої у відрізках.

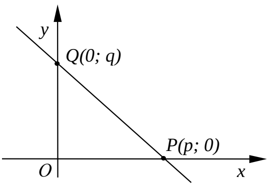


Рис. 1

Коефіцієнти $\dfrac{1}{p}$ і $\dfrac{1}{q}$ в рівнянні (5) мають простий геометричний смисл. Дійсно, позначимо через P і Q точки перетину прямої (5) з координатними осями Ox і Oy (рис. 1). Тоді ці точки мають координати $P(p;0)$, $Q(0;q)$.

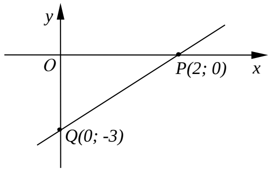


Рис. 2

Приклад 1. Записати рівняння прямої, що відтинає на осях координат відрізки, для яких $p=2$, $q=-3$.

Розв'язання. Підставимо в рівняння (5) значення $p=2$, $q=-3$. В результаті отримуємо рівняння прямої у відрізках $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{-3}=1$ (рис. 2). Це рівняння можна перетворити до загального рівняння прямої: $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{-3}=1 \Leftrightarrow 3x-2y-6=0$.

6.2. Перейдемо до рівняння прямої у формі (4). До такої форми можна звести загальне рівняння (1) прямої, яка не паралельна осі Oy $\left(B \neq 0\right)$:

$$Ax + By + C = 0 \Leftrightarrow By = -Ax - C \Leftrightarrow y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \Leftrightarrow y = kx + b, \qquad (6)$$

де $k = -\frac{A}{B}$, $b = -\frac{C}{B}$.

<u>Означення 2</u>. Число $k = -\frac{A}{B}$ називається кутовим коефіцієнтом прямої.

<u>Означення 3</u>. Рівняння прямої (6) називається рівнянням прямої в явній формі або рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом.

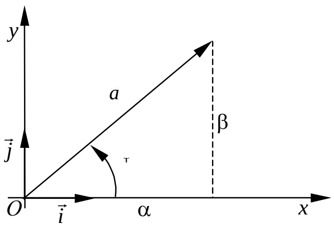


Рис. 3

<u>Зауваження 1</u>. Нехай у декартовій прямокутній системі координат задано вектор $\vec{a}(\alpha;\beta)$. Число $k = \frac{\beta}{\alpha}$ називається кутовим коефіцієнтом вектора $\vec{a}$. З рис. 3 випливає геометричний смисл кутового коефіцієнта вектора:

$$k = \frac{\beta}{\alpha} = \operatorname{tg}\left(\widehat{\vec{i}, \vec{a}}\right) = \operatorname{tg}\varphi .$$

Кутовий коефіцієнт вектора характеризує його напрямок і не залежить від довжини вектора.

Напрямним вектором прямої (1) є вектор $\vec{a}\left(-B;A\right)$. Тому згідно з означенням 2 кутовий коефіцієнт прямої дорівнює кутовому коефіцієнту напрямного вектора цієї прямої. Прямі, які паралельні осі Oy, не мають кутового коефіцієнта.

Вияснимо геометричний смисл коефіцієнта b у рівнянні (6). Для цього покладемо в (6) $x = 0$. В результаті отримуємо $y = b$. Отже, число b є ординатою точки перетину $Q\left(0;b\right)$ прямої (6) з віссю Oy (рис. 4).

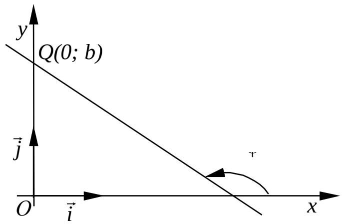


Рис. 4

Запишемо рівняння прямої, що має заданий кутовий коефіцієнт k і проходить через задану точку $M_0\left(x_0;y_0\right)$.

Оскільки пряма (6) проходить через точку $M_0\left(x_0;y_0\right)$, отримуємо тотожність

$$y_0 = kx_0 + b \;\Leftrightarrow\; b = y_0 - kx_0 . \qquad (7)$$

Підставивши (7) в (6), будемо мати шукане рівняння

$$y = kx_0 + y_0 - kx_0 \;\Leftrightarrow y - y_0 = k\left(x - x_0\right). \qquad (8)$$

§7. Формула для знаходження відстані від точки до прямої. Нормальне рівняння прямої

7.1. Нехай пряму l задано загальним рівнянням

$$Ax + By + C = 0 . \qquad (1)$$

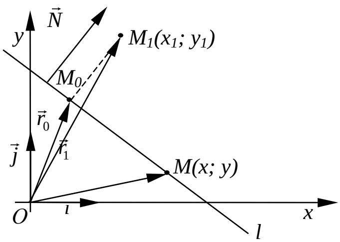


Рис. 1

Як і раніше, $\left(x; y\right)$ – координати змінної точки M прямої l (рис. 1), $\vec{N}\left(A; B\right)$ – нормальний вектор прямої l, $\vec{r} = \overrightarrow{OM}\left(x; y\right)$ – радіус-вектор змінної точки $M\left(x; y\right)$. У векторній формі рівняння (1) набуває вигляду

$$\vec{r} \cdot \vec{N} + C = 0 , \qquad (2)$$

оскільки скалярний добуток векторів $\vec{r}$ і $\vec{N}$ дорівнює $\vec{r} \cdot \vec{N} = Ax + By$.

Нехай задано точку $M_1\left(x_1; y_1\right)$ (рис. 1). Потрібно знайти відстань d від точки M_1 до прямої l. Позначимо ортогональну проекцію точки $M_1\left(x_1; y_1\right)$ на пряму l через $M_0\left(x_0; y_0\right)$, а радіуси-вектори точок M_1 і M_0 – через $\vec{r}_1 = \overrightarrow{OM_1}$ і $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}$. Тоді

$$d = \left|\overrightarrow{M_0M_1}\right| = \left|\vec{r}_1 - \vec{r}_0\right| . \qquad (3)$$

Вектор $\overrightarrow{M_0M_1}$ колінеарний вектору $\vec{N}$, тобто справедлива рівність

$$\vec{r}_1 - \vec{r}_0 = \lambda\vec{N} . \qquad (4)$$

Для знаходження невідомого множника λ обидві частини рівності (4) помножимо скалярно на вектор $\vec{N}$:

$$\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_0\right) \cdot \vec{N} = \lambda\vec{N} \cdot \vec{N} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{r}_1 \cdot \vec{N} - \vec{r}_0 \cdot \vec{N} = \lambda\left|\vec{N}\right|^2 . \qquad (5)$$

Скористаємось тепер тим, що точка M_0 лежить на прямій l і тому

$$\vec{r}_0 \cdot \vec{N} + C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{r}_0 \cdot \vec{N} = -C . \qquad (6)$$

Якщо підставити (6) у (5), то будемо мати

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{N} + C = \lambda \left|\vec{N}\right|^2 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{N} + C}{\left|\vec{N}\right|^2}. \tag{6'}$$

З (3), (4), (6′) знаходимо шукану відстань d :

$$d = \left|\overrightarrow{M_0M_1}\right| = \left|\lambda\vec{N}\right| = \frac{\left|\left(\vec{r}_1 \cdot \vec{N} + C\right)\vec{N}\right|}{\left|\vec{N}\right|^2} = \frac{\left|\vec{r}_1 \cdot \vec{N} + C\right|}{\left|\vec{N}\right|}. \tag{7}$$

Формулу (7) можна записати у координатній формі:

$$d = \frac{\left|Ax_1 + By_1 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \tag{8}$$

Отже, щоб знайти відстань від заданої точки $M\left(x_1; y_1\right)$ до заданої прямої (1), потрібно підставити координати цієї точки у ліву частину рівняння (1) і модуль отриманого таким чином числа поділити на довжину нормального вектора прямої (1).

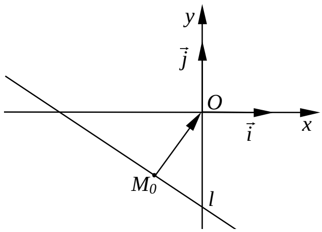


Рис. 2

Звернемо увагу на частинний випадок, коли точка M_1 співпадає з початком координат (рис. 2). Нехай M_0 – основа перпендикуляра, опущеного з початку координат O на пряму l. Врахувавши, що $\vec{r}_1 = \vec{0}$, $\vec{r}_0 = -\overrightarrow{M_0O}$, з (4), (6′) отримуємо

$$\overrightarrow{M_0O} = \lambda\vec{N} = \frac{\vec{0} \cdot \vec{N} + C}{\left|\vec{N}\right|^2}\vec{N} = \frac{C\vec{N}}{\left|\vec{N}\right|^2}, \tag{9}$$

$$d_0 = \left|\overrightarrow{M_0O}\right| = \frac{\left|C\vec{N}\right|}{\left|\vec{N}\right|^2} = \frac{\left|C\right|}{\left|\vec{N}\right|}. \tag{10}$$

Звичайно, формулу (10) для розглянутого частинного випадку можна отримати безпосередньо з формули (7).

Приклад 1. Знайти відстань від точки $M_1(3;-4)$ до прямої l, заданої рівнянням $4x + 3y - 10 = 0$.

Розв'язання. Підставимо координати точки M_1 та коефіцієнти $A = 4$ і $B = 3$ у формулу (8):

$$d = \frac{\left|4 \cdot 3 - 3 \cdot 4 - 10\right|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{\left|-10\right|}{5} = 2 \text{ (лін. од.)}.$$

7.2. Нехай пряма (2) не проходить через початок координат, тобто $C \neq 0$.

<u>Означення 1</u>. Одиничний вектор $\vec{n}_0$, перпендикулярний до прямої і напрямлений від початку координат до прямої (рис. 3), назвемо одиничним вектором нормалі.

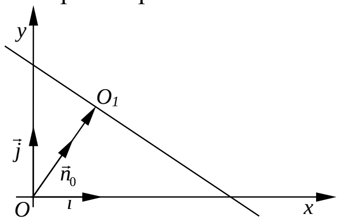


Рис. 3

Згідно з формулами (9) і (10) маємо

$$\vec{n}_0 = \frac{\overrightarrow{OO_1}}{\left|\overrightarrow{OO_1}\right|} = -\frac{C\vec{N}}{\left|\vec{N}\right|^2} : \frac{|C|}{\left|\vec{N}\right|} = -\frac{C}{|C|}\frac{\vec{N}}{\left|\vec{N}\right|}. \qquad (11)$$

Отже,

$$\begin{cases} \vec{n}_0 = -\dfrac{\vec{N}}{\left|\vec{N}\right|}, & \text{якщо} \quad C > 0 \\ \vec{n}_0 = \dfrac{\vec{N}}{\left|\vec{N}\right|}, & \text{якщо} \quad C < 0. \end{cases} \qquad (12)$$

Помножимо обидві частини рівняння (2) на довільний ненульовий множник λ. В результаті отримаємо рівносильне рівняння

$$\vec{r} \cdot \left(\lambda \vec{N}\right) + \lambda C = 0, \qquad (13)$$

яке визначає ту ж саму пряму l, що і рівняння (2).

Нормальним вектором у рівнянні (13) є вектор $\lambda\vec{N}$. Довжину цього вектора можна зробити якою завгодно шляхом відповідного підбору множника λ. Виберемо множник λ таким, щоб вектор $\lambda\vec{N}$ дорівнював одиничному вектору нормалі до прямої, тобто, щоб

$$\lambda\vec{N} = \vec{n}_0. \qquad (14)$$

Згідно з формулою (11) для цього потрібно взяти

$$\lambda = \lambda_0 = -\frac{C}{|C|}\frac{1}{\left|\vec{N}\right|}, \qquad (15)$$

тобто

$$\begin{cases} \lambda_0 = -\dfrac{1}{\left|\vec{N}\right|}, & \text{якщо} \quad C > 0 \\ \lambda_0 = \dfrac{1}{\left|\vec{N}\right|}, & \text{якщо} \quad C < 0. \end{cases} \qquad (15')$$

Означення 2. Множник λ_0, що визначається формулою (15) (або (15′)), називається нормувальним множником прямої l.

Підставимо в рівняння (13) замість λ його значення λ_0 з (15):

$$\vec{r}\cdot\vec{n}_0+\frac{C(-C)}{|C||\vec{N}|}=0 \Leftrightarrow \vec{r}\cdot\vec{n}_0-\frac{C^2}{|C||\vec{N}|}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{r}\cdot\vec{n}_0-\frac{|C|^2}{|C||\vec{N}|}=0 \Leftrightarrow \vec{r}\cdot\vec{n}_0-\frac{|C|}{|\vec{N}|}=0.$$

Звідси, згідно з формулою (10),

$$\vec{r}\cdot\vec{n}_0-d_0=0. \qquad (16)$$

Означення 3. Рівняння прямої (16) називається нормальним рівнянням прямої.

До нормального вигляду можна звести рівняння будь-якої прямої, що не проходить через початок координат. Зручність використання нормального рівняння прямої (16) пояснюється геометричним змістом вектора $\vec{n}_0$ і числа d_0, які визначають це рівняння: $\vec{n}_0$ – одиничний вектор нормалі до прямої; d_0 – відстань від початку координат до прямої.

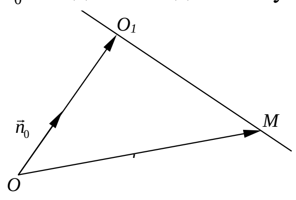


Рис. 4

Відмітимо, що рівняння (16) можна отримати дуже просто шляхом наступних геометричних міркувань: проекція вектора $\overrightarrow{OM}$ (рис. 4), тобто радіуса-вектора $\vec{r}$ довільної точки прямої (2), на одиничний вектор нормалі $\vec{n}_0$ дорівнює відстані d_0 від початку координат O до прямої. З іншого боку, ця проекція дорівнює скалярному добутку $\text{пр}_{\vec{n}_0}\vec{r}=\vec{r}\cdot\vec{n}_0$. Отже, $d_0=\vec{r}\cdot\vec{n}_0 \Leftrightarrow \vec{r}\cdot\vec{n}_0-d_0=0$.

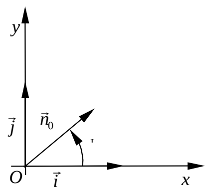


Рис. 5

Цінність наведеного вище аналітичного виведення рівняння (16) полягає у тому, що це виведення дало нам формулу (15) для нормувального множника і без будь-яких змін може бути перенесеним на випадок векторів тривимірного простору. Повернемося до формули (11) і перепишемо її з врахуванням того, що вектор $\vec{N}$ має координати $(A;B)$:

$$\vec{n}_0=-\frac{C}{|C|}\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}\left(A\vec{i}+B\vec{j}\right). \qquad (17)$$

З іншого боку, для вектора $\vec{n}_0$ можна записати (рис. 5)

$$\vec{n}_0 = \vec{i}\cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi, \tag{18}$$

де $\varphi = \left(\widehat{\vec{i}, \vec{n}_0}\right)$ – кут між віссю Ox і вектором $\vec{n}_0$. Порівнюючи (17) і (18), отримуємо

$$\cos\varphi = -\frac{C}{|C|}\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \quad \sin\varphi = -\frac{C}{|C|}\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}. \tag{19}$$

Якщо тепер обидві частини загального рівняння (1)

$$Ax + By + C = 0$$

прямої помножити на нормувальний множник (15)

$$\lambda_0 = -\frac{C}{|C|}\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

і скористатись формулами (19), (10), то отримаємо рівняння

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - d_0 = 0. \tag{20}$$

<u>**Означення 4**</u>. Рівняння (20) називається нормальним рівнянням прямої у координатній формі.

Цінність рівняння (20) полягає у чіткій геометричній інтерпретації його коефіцієнтів.

Зауваження 1. Якщо пряма (2) проходить через початок координат, тобто $C = 0$, то одиничний вектор нормалі $\vec{n}_0$ визначається з точністю до знака:

$$\vec{n}_0 = \pm\frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}.$$

Нормальне рівняння прямої у цьому випадку приймає вигляд

$$\vec{r}\cdot\vec{n}_0 = 0.$$

Зауваження 2. Якщо пряму l у декартовій прямокутній системі координат задано нормальним рівнянням (16) або (20), то відстань від точки $M_1(x_1; y_1)$ до прямої l дорівнює модулю лівої частини рівняння прямої (16) або (20), куди замість змінного радіуса-вектора $\vec{r}$ або змінних координат $(x; y)$ потрібно підставити радіус-вектор $\vec{r}_1$ або координати $(x_1; y_1)$ точки M_1. Дійсно, за формулами (7) або (8) отримуємо відповідно

$$d = \frac{|\vec{r}_1\cdot\vec{n}_0 - d_0|}{|\vec{n}_0|} = |\vec{r}_1\cdot\vec{n}_0 - d_0|$$

або

$$d = \frac{\left|x_1\cos\varphi + y_1\sin\varphi - d_0\right|}{\sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}} = \left|x_1\cos\varphi + y_1\sin\varphi - d_0\right| .$$

Приклад 2. Написати нормальне рівняння прямої, заданої у декартовій прямокутній системі координат рівнянням

$$3x + 4y - 5 = 0 . \qquad (21)$$

Розв'язання. За формулою (15) знаходимо нормувальний множник λ_0 прямої:

$$\lambda_0 = -\frac{C}{|C|}\frac{1}{\left|\vec{N}\right|} = -\frac{(-5)}{5\sqrt{9+16}} = \frac{1}{5} .$$

Нормальне рівняння прямої отримуємо, помноживши рівняння (21) на нормувальний множник $\lambda_0 = \frac{1}{5}$:

$$\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 1 = 0 .$$

При цьому $\cos\varphi = \frac{3}{5}$, $\sin\varphi = \frac{4}{5}$.

§8. Задачі на складання рівнянь прямих. Параметричні рівняння прямої

8.1. Розглянемо деякі задачі на складання рівняння прямої.

Задача 1. Записати рівняння прямої l, заданої у декартовій прямокутній системі координат ненульовим напрямним вектором $\vec{a}(\alpha;\beta)$ і точкою $M_0(x_0;y_0)$, через яку ця пряма проходить.

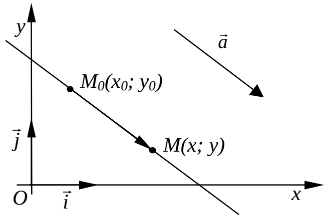


Рис. 1

Розв'язання. Нагадаємо, що напрямний вектор $\vec{a}$ прямої l – це вектор, паралельний до прямої l (рис. 1). Довільна точка M лежить на прямій l тоді і тільки тоді, коли вектор $\overrightarrow{M_0M}$ колінеарний вектору $\vec{a}$. Якщо координати точки M позначити $(x;y)$, то $\overrightarrow{M_0M}(x-x_0, y-y_0)$. Умова колінеарності векторів $\overrightarrow{M_0M}$ і $\vec{a}$ запишеться так:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = 0 . \qquad (1)$$

Якщо точка M не лежить на прямій l, то колінеарність векторів порушується і умова (1) не виконується. Отже, умові (1) задовольняють всі точки прямої l і тільки ці точки.

Розкриємо визначник (1). В результаті отримуємо лінійне рівняння

$$\beta\left(x-x_0\right)-\alpha\left(y-y_0\right)=0, \qquad (1')$$

яке визначає пряму l.

Якщо жодна з координат вектора $\vec{a}$ не дорівнює нулю, то умову колінеарності векторів $\overrightarrow{M_0M}$ і $\vec{a}$ можна подати у вигляді

$$\frac{x-x_0}{\alpha}=\frac{y-y_0}{\beta}. \qquad (2)$$

У випадку $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ рівняння (1) і (2) рівносильні.

Задавати пряму співвідношеннями (2) можна і у випадку, коли один із знаменників α чи β в (2) дорівнює нулю, якщо вважати, що дорівнює нулю і відповідний чисельник. Наприклад, запис

$$\frac{x-x_0}{0}=\frac{y-y_0}{\beta}$$

означає, що $x-x_0=0 \Leftrightarrow x=x_0$, тобто пряма проходить через точку $M_0\left(x_0;y_0\right)$ паралельно вектору $\vec{a}\left(0;\beta\right)$ (паралельно осі Oy).

<u>Означення 1</u>. Рівняння (1) або (2) називається канонічним рівнянням прямої.

Задача 2. Записати рівняння прямої l, що проходить через дві задані точки $M_1\left(x_1;y_1\right)$ і $M_2\left(x_2;y_2\right)$.

Розв'язання. За напрямний вектор прямої l можна взяти вектор $\overrightarrow{M_1M_2}\left(x_2-x_1;y_2-y_1\right)$ і задача зведеться до задачі 1. Рівняння прямої l приймає вигляд

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \qquad (3)$$

Задача 3. Записати рівняння прямої l, яка проходить через задану точку $M_0\left(x_0;y_0\right)$ перпендикулярно ненульовому вектору $\vec{N}\left(A;B\right)$.

Ця задача розв'язана нами при доведені теореми 1 §2. Рівняння прямої l має вигляд

$$A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)=0. \qquad (4)$$

Задача 4. Записати рівняння прямої l, що проходить через задану точку $M_0(x_0; y_0)$ і має заданий кутовий коефіцієнт k.

Ця задача розв'язана в §6, де показано, що рівняння прямої l має вигляд

$$y - y_0 = k(x - x_0). \qquad (5)$$

8.2. Перейдемо до параметричних рівнянь прямої. Під такими рівняннями розуміють рівняння, в яких координати довільної точки прямої виражаються через довільний параметр t.

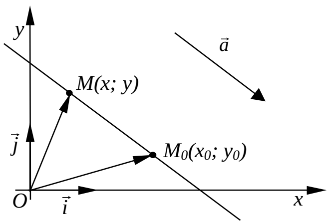


Рис. 2

Нехай пряма l проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$ паралельно вектору $\vec{a}(\alpha; \beta)$ (рис. 2). Довільна точка $M(x; y)$ лежить на прямій l тоді і тільки тоді, коли вектори $\overrightarrow{M_0M}$ і $\vec{a}$ колінеарні, тобто тоді і тільки тоді, коли ці вектори відрізняються числовим множником

$$\overrightarrow{M_0M} = t\vec{a}. \qquad (6)$$

Векторну рівність (6) можна подати у координатній формі:

$$\begin{cases} x - x_0 = \alpha t \\ y - y_0 = \beta t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t. \end{cases} \qquad (7)$$

<u>Означення 2</u>. Рівняння (7) називаються параметричними рівняннями прямої.

Смисл цих рівнянь полягає в тому, що для довільного дійсного числа t точка з координатами x, y з (7) завжди лежить на прямій l і навпаки, для довільної точки прямої l завжди знайдеться таке дійсне число t, що координати x, y цієї точки виражаються через x_0, y_0, α, β співвідношеннями (7).

Якщо параметр t приймає всі дійсні значення, то точка M з координатами (7) пробігає всю пряму.

Введемо радіуси-вектори $\overrightarrow{OM_0} = \vec{r}_0$ і $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ (рис. 2). Тоді рівність (6) можна подати у вигляді

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = t\vec{a} \Leftrightarrow \vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a}. \qquad (8)$$

<u>Означення 3</u>. Рівняння (8) називається векторним параметричним рівнянням прямої, що проходить через точку $M(\vec{r}_0)$ і має напрямний вектор $\vec{a}$.

Приклад 1. Написати параметричні рівняння прямої, яка проходить через точки $M_1(1;1)$ і $M_2(3;5)$.

Розв'язання. За напрямний вектор прямої візьмемо вектор $\overrightarrow{M_1M_2}(2;4)$. Тоді параметричні рівняння прямої можна записати так:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + 4t, \quad -\infty < t < \infty. \end{cases} \tag{9}$$

§9. Обчислення кута між двома прямими в орієнтованій площині. Умови перпендикулярності двох прямих

9.1. Передусім уточнимо поняття кута між двома прямими, що розглядаються у певному порядку, тобто із зазначенням того, яка пряма вважається першою, а яка – другою (такі прямі будемо називати впорядкованими).

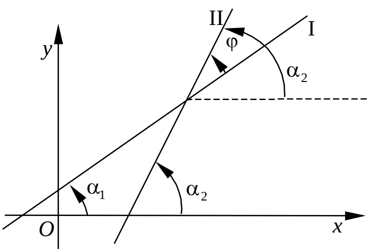


Рис. 1

<u>Означення 1</u>. Кутом між прямою I (перша пряма) і прямою II (друга пряма) називається кут φ, на який потрібно повернути пряму I навколо точки перетину обох прямих з тим, щоб вона співпала з прямою II (рис. 1). Якщо поворот здійснюється проти руху годинникової стрілки, то кут φ вважається додатним, а якщо за годинниковою стрілкою - від'ємним.

Отже, кут φ між двома впорядкованими прямими може вимірюватись або додатним, або від'ємним числом. Крім того, легко бачити, що цей кут визначається неоднозначно, оскільки поворот на 180° переводить пряму саму в себе. Так, якщо φ_0 – найменший по модулю кут між прямими I і II, то повернувши пряму I на кут $\varphi_0 + k \cdot 180^{\circ}$ (k – довільне ціле додатне або від'ємне число), ми знову сумістимо пряму I з прямую II. Якщо кут φ між прямими I і II потрібно визначити однозначно, то накладають обмеження, розглядаючи, наприклад, $0 \le \varphi < 2\pi$ або $-\pi < \varphi \le \pi$. Кут φ між прямими I і II, взятими у зазначеному порядку, можна знайти, якщо відомі вектори $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$, паралельні відповідно прямим I і II. Тоді

$$\varphi = \varphi_0 + 180^{o} \cdot k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

де φ_0 – кут між векторами $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$.

Якщо прямі I і II задано загальними рівняннями відповідно

$$A_1x+B_1y+C_1=0 \quad \text{і} \quad A_2x+B_2y+C_2=0,$$

то напрямними векторами цих прямих є вектори відповідно

$$\vec{a}_1(-B_1;A_1) \quad \text{і} \quad \vec{a}_2(-B_2;A_2).$$

Тоді

$$\cos\left(\vec{a}_1,\hat{\ }\vec{a}_2\right)=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}} \tag{1}$$

і для кута φ між прямими I і II можна записати

$$\varphi=\left(\vec{a}_1,\hat{\ }\vec{a}_2\right)+180^\circ\cdot k, \quad k=0,\pm1,\pm2,\ldots .$$

Знаходження кута φ зручно проводити у випадку, коли прямі I і II задано рівняннями з кутовими коефіцієнтами.

Нехай жодна з прямих I і II не паралельна осі Oy, тобто $B_1\neq0$ і $B_2\neq0$. Тоді рівняння цих прямих можна подати у формі рівнянь з кутовими коефіцієнтами:

$$\begin{aligned} &y=k_1x+b_1, \quad k_1=-\frac{A_1}{B_1}, \quad b_1=-\frac{C_1}{B_1}; \\ &y=k_2x+b_2, \quad k_2=-\frac{A_2}{B_2}, \quad b_2=-\frac{C_2}{B_2} . \end{aligned} \tag{2}$$

Повернемося до рис. 1. Позначимо через α_1 кут між віссю Ox і прямою I, а через α_2 – кут між віссю Ox і прямою II. Оскільки α_1 дорівнює куту повороту осі Ox до співпадання з прямою I, а кут φ – куту повороту прямої I до співпадання з прямою II, то

$$\alpha_2=\alpha_1+\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \varphi=\alpha_2-\alpha_1 .$$

Скориставшись відомою формулою тригонометрії, можна записати

$$\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}(\alpha_2-\alpha_1)=\frac{\operatorname{tg}\alpha_2-\operatorname{tg}\alpha_1}{1+\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2} . \tag{3}$$

Якщо тепер врахувати, що $\operatorname{tg}\alpha_1=k_1$ і $\operatorname{tg}\alpha_2=k_2$, то для тангенса кута між прямими I і II будемо мати

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2} . \tag{4}$$

Ще раз відмітимо, що тут k_1 – кутовий коефіцієнт першої прямої, а k_2 – кутовий коефіцієнт другої прямої. Якщо визначається кут між прямою II і прямою I, то в чисельнику формули (4) потрібно брати $k_1 - k_2$, тобто права частина формули (4) змінює знак на протилежний. Тому кутом між прямими II і I буде кут $\pi - \varphi$. Якщо за умовою задачі вимагається розглядання того і іншого кута, то у правій частині формули (4) слід взяти подвійний знак.

У багатьох випадках потрібно визначити кут між двома прямими, які не індивідуалізуються, тобто не вказується, яка з цих прямих є першою, а яка другою. У таких випадках у чисельнику формули (4) можна брати кутові коефіцієнти в довільному порядку. Для одного порядку ми будемо мати гострий кут між прямими, а для другого – суміжний з ним тупий кут, оскільки тангенси суміжних кутів відрізняються лише знаком. Зручно користуватися формулою

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|, \tag{5}$$

яка дає додатний тангенс, тобто завжди визначає гострий кут між прямими.

За допомогою формули (4) досить просто навести вже відоме нам геометричне тлумачення кутового коефіцієнта k прямої, заданої у декартовій (правій) прямокутній системі координат рівнянням $y = kx + b$. Дійсно, нехай φ – кут між координатною прямою $y = 0$ і прямою $y = kx + b$ (порядок слідування прямих є суттєвим). Приймаючи до уваги, що кутовий коефіцієнт прямої $y = 0$ дорівнює нулю, за формулою (4) отримуємо

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k - 0}{1 + k \cdot 0} = k.$$

Приклад 1. Знайти кут між прямими

$$4x + y - 1 = 0 \quad \text{і} \quad 5x - 3y - 7 = 0.$$

Розв'язання. За формулою (1) отримуємо

$$\cos\varphi = \frac{4 \cdot 5 + 1 \cdot (-3)}{\sqrt{16+1}\sqrt{25+9}} = \frac{17}{\sqrt{17}\sqrt{34}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Отже, $\varphi = 45^\circ$.

Приклад 2. Знайти кут між прямими

$$3x - 5y + 7 = 0 \quad \text{і} \quad 2x - 3y + 4 = 0.$$

Розв'язання. Знаходимо кутові коефіцієнти прямих: $k_1 = \frac{3}{5}$, $k_2 = \frac{2}{3}$.

За формулою (4) $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\frac{2}{3} - \frac{3}{5}}{1 + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3}} = \dfrac{1}{21}$. Скориставшись таблицями тригонометричних функцій, отримуємо кут $\varphi = 2^\circ 48'$.

9.2. При розв'язуванні багатьох задач аналітичної геометрії часто використовуються умови перпендикулярності і паралельності прямих.

Нехай прямі I і II задано загальними рівняннями відповідно

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \text{і} \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0 .$$

Прямі I і II перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли нормальні вектори $\vec{N}_1\left(A_1;B_1\right)$ і $\vec{N}_2\left(A_2;B_2\right)$ цих прямих перпендикулярні. Оскільки за умовою вектори $\vec{N}_1$ і $\vec{N}_2$ є ненульовими векторами, то перпендикулярність цих векторів рівносильна рівності нулю їх скалярного добутку:

$$\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 = 0 \;\Leftrightarrow\; A_1A_2 + B_1B_2 = 0 . \qquad (6)$$

Отже, умова (6) є необхідною і достатньою умовою перпендикулярності прямих I і II.

Нехай жодна з прямих I і II не паралельна осі Oy, тобто $B_1 \neq 0$ і $B_2 \neq 0$. Розділимо обидві частини рівності (6) на $\left(-B_1\right)\left(-B_2\right)$:

$$\left(-\frac{A_1}{B_1}\right)\left(-\frac{A_2}{B_2}\right) + 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; k_1k_2 + 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; k_1k_2 = -1 \cdot \qquad (7)$$

Умова (7) є необхідною і достатньою умовою перпендикулярності прямих I і II з кутовими коефіцієнтами k_1 і k_2.

У §4 доведено необхідні і достатні умови паралельності двох прямих I і II (див. теорему 2 §4). Якщо k_1 і k_2 – кутові коефіцієнти прямих I і II, то необхідною і достатньою умовою паралельності цих прямих є рівність

$$k_1 = k_2 . \qquad (8)$$

§10. Геометричний зміст нерівності першого степеня з двома невідомими

Розглянемо тричлен

$$\delta = Ax + By + C , \qquad (1)$$

в якому коефіцієнти A і B не дорівнюють одночасно нулю.

Всі точки M, координати $(x;y)$ яких задовольняють рівнянню

$$\delta = Ax + By + C = 0 , \qquad (2)$$

лежать на прямій l з нормальним вектором $\vec{N}\left(A;B\right)$.

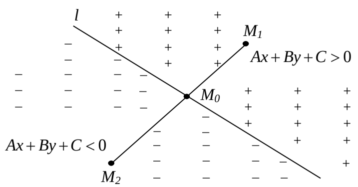


Рис. 1

По відношенню до прямої l вся площина розпадається на дві півплощини, для яких ця пряма є спільною межею (рис. 1). Якщо точка $M_1(x_1; y_1)$ не лежить на прямій l, то

$$\delta_1 = Ax_1 + By_1 + C \neq 0.$$

Отже, для будь-якої точки $(x; y)$, що не лежить на прямій l, число δ з (1) відмінне від нуля. Виясним геометричний зміст знака числа δ.

Теорема 1. Нехай у декартовій прямокутній системі координат пряму l задано загальним рівнянням (2). Тоді для координат x, y всіх точок площини $M(x; y)$, які лежать по один бік від прямої l, виконується нерівність

$$\delta = Ax + By + C > 0, \tag{3}$$

а для координат x, y всіх точок $M(x; y)$, які лежать по інший бік від цієї прямої – нерівність (рис .1)

$$\delta = Ax + By + C < 0. \tag{4}$$

Доведення. Нехай $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2; y_2)$ – дві довільні точки, які лежать по різні боки від прямої l, заданої рівнянням (2). Це означає, що на відрізку M_1M_2 існує внутрішня точка $M_0(x_0; y_0)$, яка належить прямій l (рис. 1). Нехай λ – відношення, в якому точка M_0 ділить напрямний відрізок $\overrightarrow{M_1M_2}$. Тоді $\lambda > 0$ і

$$x_0 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y_0 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Точка M_0 лежить на прямій l. Тому її координати задовольняють рівнянню прямої l:

$$A\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} + B\frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} + C = 0 \iff$$

$$\iff Ax_1 + By_1 + C + \lambda(Ax_2 + By_2 + C) = 0 \iff$$

$$\iff \delta_1 + \lambda\delta_2 = 0 \iff \lambda = -\frac{\delta_1}{\delta_2}. \tag{5}$$

Оскільки $\lambda > 0$, то з (5) випливає, що числа

$$\delta_1 = Ax_1 + By_1 + C \text{ і } \delta_2 = Ax_2 + By_2 + C$$

мають різні знаки.

Зафіксуємо точку M_1, а точку M_2 будемо вважати змінною і такою, що весь час лежить з точкою M_1 по різні боки від прямої l. Тоді число $\delta_2 = Ax_2 + By_2 + C$ для всіх змінних точок M_2 має один і той же знак, протилежний знаку числа $\delta_1 = Ax_1 + By_1 + C$.

Нехай тепер точка M_2 – фіксована, а точка M_1 – змінна і весь час знаходиться з точкою M_2 по різні боки від прямої l. Тоді число δ_1 має один і той же знак для всіх змінних точок M_1 і цей знак протилежний знаку числа δ_2.

Отже, для всіх точок однієї півплощини число δ має один і той же знак, а для всіх точок іншої півплощини – один і той же, але протилежний знак.

Теорему доведено.

Означення 1. Півплощину, для координат всіх точок якої $\delta > 0$, називають додатною, а півплощину, для координат всіх точок якої $\delta < 0$ – від'ємною.

Теорема 2. Нехай пряму l задано загальним рівнянням (2). Якщо нормальний вектор $\vec{N}(A;B)$ цієї прямої відкласти від будь-якої точки $M_0(x_0;y_0)$, що лежить на l, то кінець P ($\vec{N} = \overrightarrow{M_0P}$, рис. 2) відкладеного вектора буде знаходитись у додатній півплощині прямої l.

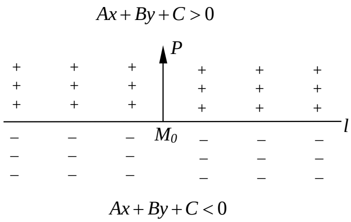


Рис. 2

Доведення. Точка P має координати $x_0 + A, y_0 + B$. Підставимо ці координати у тричлен (1). В результаті матимемо:

$$\delta = A(x_0 + A) + B(y_0 + B) + C =$$

$$= Ax_0 + By_0 + C + A^2 + B^2 = A^2 + B^2 > 0.$$

Теорему доведено.

Окремо зупинимось на випадку, коли пряма (2) не проходить через початок координат, тобто коли $C \neq 0$. За точку M_2 візьмемо початок координат – точку O.

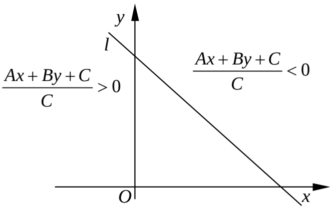


Рис. 3

Теорема 1 у цьому випадку стає більш визначеною, а саме: для координат всіх точок площини, які лежать по той же бік від прямої l, що і початок координат, знак лінійного тричлена (1) співпадає зі знаком числа C, тобто $\frac{\delta}{C} > 0$, а для координат всіх точок, які лежать по інший бік від прямої l, цей знак протилежний знаку числа C, тобто $\frac{\delta}{C} < 0$ (рис. 3).

Приклад 1. Дано дві точки $M_1(1;2)$, $M_2(-1;2)$ і пряму $5x+y+1=0$. Вияснити, чи проходить ця пряма через внутрішню точку відрізка M_1M_2.

Розв'язання. Підставимо координати точок M_1 і M_2 в ліву частину рівняння прямої:

$$\delta_1 = 5\cdot 1 + 1\cdot 2 + 1 = 8 > 0\,; \quad \delta_2 = 5(-1) + 1\cdot 2 + 1 = -2 < 0\,.$$

Оскільки числа δ_1 і δ_2 мають різні знаки, то точки M_1 і M_2 лежать по різні боки від прямої, тобто дана пряма перетинає відрізок M_1M_2 у його внутрішній точці.

§11. Деякі задачі на пряму лінію на площині

Вище нами вже розглянуто ряд задач на пряму лінію на площині: знаходження різних форм рівняння прямої, обчислення кута між прямими, обчислення відстані від точки до прямої, встановлення умов паралельності та перпендикулярності двох прямих.

У цьому параграфі розглядаються задачі, які розвивають і поглиблюють матеріал попередніх параграфів.

Приклад 1. Знайти рівняння прямих, що проходять через точку $M_0(3;4)$ під кутом 60^o до прямої $2x+3y+6=0$.

Розв'язання. Для розв'язання задачі достатньо знайти кутові коефіцієнти прямих I і II, які позначимо відповідно k_1 і k_2 (рис. 1). Щоб сумістити прямі I і II із заданою прямою l, потрібно пряму I повернути навколо точки M_1 на кут -60^o (за годинниковою стрілкою), а пряму II – навколо точки M_2 на кут $+60^o$ (проти годинникової стрілки), тобто, кут між прямою I і заданою прямою дорівнює -60^o, а кут між прямою II і заданою прямою – $+60^o$.

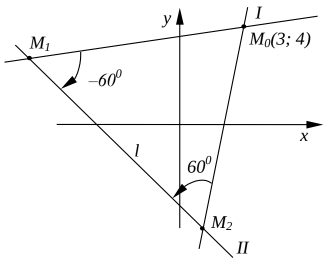


Рис. 1

Кутовий коефіцієнт заданої прямої дорівнює $k=-\frac{2}{3}$. За формулою (4) §9 отримуємо

$$\operatorname{tg}(-60^o) = \frac{-\frac{2}{3}-k_1}{1+\left(-\frac{2}{3}k_1\right)} \Leftrightarrow -\sqrt{3} = \frac{-\frac{2}{3}-k_1}{1-\frac{2}{3}k_1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k_1 = \frac{24-13\sqrt{3}}{3};$$

$$\operatorname{tg}60^o = \frac{-\frac{2}{3}-k_2}{1-\frac{2}{3}k_2} \Leftrightarrow \sqrt{3} = \frac{-\frac{2}{3}-k_2}{1-\frac{2}{3}k_2} \Leftrightarrow k_2 = \frac{24+13\sqrt{3}}{3}.$$

Шукані рівняння прямих знаходяться за формулою (5) §8:

$$y-4=\frac{24-13\sqrt{3}}{3}(x-3) \text{ – рівняння прямої I;}$$

$$y-4=\frac{24+13\sqrt{3}}{3}(x-3) \text{ – рівняння прямої II.}$$

Приклад 2. Знайти рівняння бісектрис кутів між прямими $12x+9y-17=0$ і $3x+4y+11=0$.

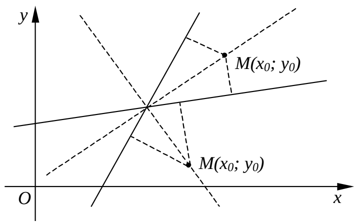


Рис. 2

Розв'язання. Зробимо схематичний рисунок (рис. 2). Бісектриса – це геометричне місце точок, рівновіддалених від даних прямих. Якщо $M_0(x_0;y_0)$ – довільна точка бісектриси (не важливо якої), то

$$d_1=\frac{|12x_0+9y_0-17|}{\sqrt{12^2+9^2}}=\frac{|12x_0+9y_0-17|}{15};$$

$$d_2=\frac{|3x_0+4y_0+11|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|3x_0+4y_0+11|}{5}.$$

Прирівнюючи d_1 і d_2, отримуємо рівняння шуканих бісектрис:

$$\frac{|12x_0+9y_0-17|}{15}=\frac{|3x_0+4y_0+11|}{5} \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{12x_0+9y_0-17}{15}=\dfrac{3x_0+4y_0+11}{5}\\ \dfrac{12x_0+9y_0-17}{15}=-\dfrac{3x_0+4y_0+11}{5}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3x_0-3y_0-50=0\\ 21x_0+21y_0+17=0.\end{array}\right.$$

Для змінних координат точки M введемо звичні позначення (x,y), тобто замінимо x_0 на x, а y_0 – на y.

Отже, рівняннями бісектрис кутів між заданими прямими є

$$3x-3y-50=0 \text{ і } 21x+21y+17=0.$$

Легко переконатись, що знайдені бісектриси перпендикулярні. Дійсно, умова перпендикулярності двох прямих $A_1A_2+B_1B_2=0$ виконується: $21\cdot 3+21(-3)=0$.

Приклад 3. Скласти рівняння бісектриси того кута між двома прямими $x+y+2=0$ і $x+7y+3=0$, в якому знаходиться точка $A(2;-1)$.

<u>*Розв'язання*</u>. Підставимо координати точки A у ліві частини рівнянь заданих прямих: $2-1+2=3>0$, $2-7+3=-2<0$. Точка A лежить у тій частині площини, для координат точок якої $x+y+2>0$, $x+7y+3<0$.

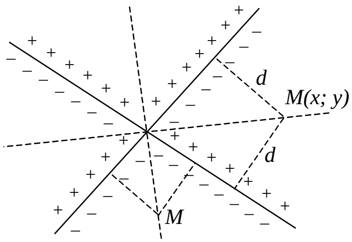


Рис. 3

Тому шукана бісектриса є бісектрисою того кута, для координат внутрішніх точок якого функції $x+y+2$ і $x+7y+3$ мають різні знаки (рис. 3). Отже, рівняння шуканої бісектриси (див. приклад 2) буде таким

$$\frac{x+y+2}{\sqrt{2}}=-\frac{x+7y+3}{\sqrt{50}} \Leftrightarrow 6x+12y+13=0.$$

Приклад 4. Дано вершини трикутника $A(2;-1)$, $B(5;3)$, $C(7;11)$. Знайти рівняння бісектриси внутрішнього кута A.

Розв'язання. Запишемо рівняння сторін AB і AC:

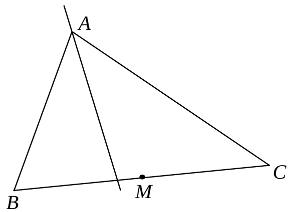


Рис. 4

$\dfrac{x-2}{5-2}=\dfrac{y+1}{3+1} \Leftrightarrow 4x-3y-11=0$ – рівняння сторони AB;

$\dfrac{x-2}{7-2}=\dfrac{y+1}{11+1} \Leftrightarrow 12x-5y-29=0$ – рівняння сторони AC.

Знайдемо середину відрізка BC. Цією серединою є точка $M(6;7)$. Тоді дану задачу можна звести до задачі з прикладу 3.

Якщо $(x;y)$ – змінна точка бісектриси, то

$$\frac{|4x-3y-11|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{|12x-5y-29|}{\sqrt{12^2+5^2}} \Leftrightarrow \pm\frac{4x-3y-11}{5}=\pm\frac{12x-5y-29}{13}. \qquad (1)$$

Підставимо координати точки M у ліві частини рівнянь прямих AB і AC:

$$4\cdot 6-3\cdot 7-11=-3<0;\ 12\cdot 6-5\cdot 7-29=8>0.$$

Отже, ліву частину рівняння (1) беремо зі знаком мінус, а праву частину – зі знаком плюс. В результаті отримуємо рівняння шуканої бісектриси:

$$-\frac{4x-3y-11}{5}=\frac{12x-5y-29}{13} \Leftrightarrow 7x-4y-18=0.$$

Лінії другого порядку

У даній главі вивчаються геометричні властивості еліпса, гіперболи і параболи з використанням канонічних рівнянь цих ліній. Названі лінії часто зустрічаються в різних питаннях природознавства. Наприклад, матеріальна точка у центральному полі тяжіння рухається вздовж однієї з цих ліній.

§1. Канонічне рівняння еліпса

Означення 1. Еліпсом називається геометричне місце точок площини, сума відстаней від кожної з яких до двох заданих точок цієї площини, що називаються фокусами еліпса, є величиною сталою і більшою за відстань між фокусами.

Позначимо цю сталу через $2a$, відстань між фокусами еліпса – через $2c$, а самі фокуси – через F_1 і F_2. Для виведення канонічного рівняння еліпса виберемо на площині прямокутну декартову систему координат так, щоб її початок O співпадає з серединою відрізка F_1F_2, а вісь абсцис – з прямою F_1F_2. За напрям осі абсцис візьмемо напрям від точки O до точки F_1 (рис. 1).

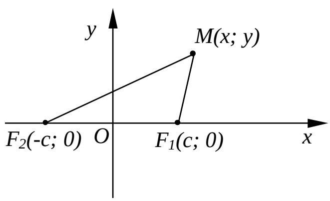


Рис. 1

Оскільки $F_1F_2 = 2c$, то у вибраній системі координат фокуси мають координати $F_1(c; 0)$, $F_2(-c; 0)$.

Нехай $M(x; y)$ – довільна точка еліпса. Тоді згідно з означенням 1

$$MF_1 + MF_2 = 2a \Leftrightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a. \qquad (1)$$

Навпаки, якщо координати деякої точки площини задовольняють рівнянню (1), то ця точка належить еліпсу. Тому у вибраній системі координат рівняння (1) є рівнянням еліпса.

Будемо спрощувати рівняння (1). Передусім спробуємо звільнитись від радикалів. Перенесемо перший радикал у праву частину і піднесемо обидві частини до квадрата:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2.$$

Відокремимо радикал і розкриємо всі дужки. Звівши подібні члени і скоротивши рівняння на 4, отримуємо

$$cx - a^2 = -a\sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2}.$$

Піднесемо обидві частини останнього рівняння до квадрата і перенесемо після цього члени, що містять x і y, в одну сторону, а вільні члени – в іншу. В результаті будемо мати

$$\left(a^2-c^2\right)x^2+a^2y^2=\left(a^2-c^2\right)a^2 .$$

Оскільки за умовою $a>c$, то $a^2-c^2>0$. Позначимо

$$a^2-c^2=b^2. \tag{2}$$

Тоді

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{3}$$

З рівняння (1) ми отримали рівняння (3). Тому координати всіх точок еліпса поряд з рівнянням (1) задовольняють також і рівнянню (3). Доведемо обернене твердження: якщо числа x, y задовольняють рівнянню (3), то точка $M\left(x; y\right)$ належить еліпсу.

Нехай координати довільної точки $M\left(x; y\right)$ площини задовольняють рівнянню (3). Знайдемо відстані $\rho_1=MF_1$ і $\rho_2=MF_2$:

$$\rho_1=\sqrt{\left(x-c\right)^2+y^2}=\sqrt{x^2-2xc+c^2+y^2}=\sqrt{x^2-2xc+c^2+b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}=$$

$$=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2-2xc+c^2+b^2}=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2-2xc+a^2}=\sqrt{\left(a-\frac{c}{a}x\right)^2}=\left|a-\frac{c}{a}x\right|.$$

Якщо $x\le 0$, то $a-\dfrac{c}{a}x>0$. Якщо ж $x>0$, то з (3) випливає, що $x\le a$. Тому $a-\dfrac{c}{a}x\ge a-\dfrac{c}{a}a=a-c>0$.

Отже, для всіх можливих значень x маємо, що $a-\dfrac{c}{a}x>0$ і

$$\rho_1=\left|a-\frac{c}{a}x\right|=a-\frac{c}{a}x. \tag{4}$$

Аналогічно доводиться, що

$$\rho_2=a+\frac{c}{a}x. \tag{5}$$

Таким чином, якщо координати точки M задовольняють рівнянню (3), то

$$MF_1+MF_2=\left(a-\frac{c}{a}x\right)+\left(a+\frac{c}{a}x\right)=2a,$$

тобто точка M належить еліпсу. Цим самим доведемо, що рівняння (1), (3) рівносильні і рівняння (3) є рівнянням еліпса.

Означення 2. Рівняння (3) називається канонічним рівнянням еліпса, а вибрана система координат – канонічною системою.

Розглянемо частинний випадок, коли фокуси F_1 і F_2 співпадають, тобто $c=0$. Тоді з (2) випливає, що $a^2=b^2$ і рівняння (3) набуває вигляду

$$x^2+y^2=a^2. \tag{6}$$

Рівняння (6) є рівнянням кола з центром у початку координат і радіусом a. Отже, якщо фокуси еліпса співпадають, то еліпс є колом.

Зауваження 1. Рівняння (3) отримано нами за умови, що у вибраній системі координат $a>b$. Проте рівняння (3) визначає еліпс і при $a<b$. Дійсно, проведемо перетворення координат, що полягає у зміні назв координатних осей. Тоді рівняння (3), в якому $a<b$, визначає еліпс із фокусами на осі Oy, а відстань від початку координат до фокусів дорівнює $c=\sqrt{b^2-a^2}$. Нижче, якщо не обумовлено протилежне, будемо вважати, що в канонічному рівнянні еліпса $a>b$.

§2. Дослідження форми еліпса за допомогою канонічного рівняння

Нехай еліпс задано канонічним рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{1}$$

і точка $M_0(x_0;\, y_0)$ належить еліпсу, тобто координати цієї точки задовольняють рівнянню (1) (рис. 1).

Оскільки змінна x входить до рівняння (1) з квадратом, то пара чисел $(-x_0;\, y_0)$ також задовольняє рівнянню (1). Це означає, що точка $M_1(-x_0;\, y_0)$ належить еліпсу. Точки $M_0(x_0;\, y_0)$ і $M_1(-x_0;\, y_0)$ відрізняються лише знаком абсциси, тобто є симетричними відносно осі Oy. Отже, кожній точці еліпса відповідає інша його точка, симетрична першій відносно осі Oy. Іншими словами, весь еліпс симетричний відносно осі Oy. Аналогічні міркування застосовні і до осі Ox.

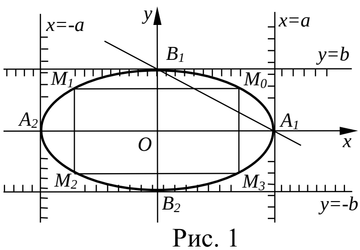


Рис. 1

Таким чином, внаслідок того, що змінні x і y входять до рівняння (1) з квадратом, еліпс є симетричним відносно координатних осей.

Якщо одночасно змінити знаки в x_0 і y_0, то числа $-x_0$, $-y_0$ також будуть задовольняти рівнянню (1). Точки $M_0(x_0; y_0)$ і $M_2(-x_0; -y_0)$ симетричні відносно початку координат. Отже, кожній точці еліпса можна поставити у відповідність іншу його точку, симетричну першій відносно початку координат, тобто початок координат є центром симетрії еліпса. Тому будь-яка хорда еліпса, яка проходить через початок координат, ділиться в ньому пополам.

Візьмемо довільну пряму $y = kx$ (пряма проходить через початок координат) і знайдемо точки її перетину з еліпсом. Для цього необхідно розв’язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = kx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{k^2x^2}{b^2} = 1 \\ y = kx \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2\left(b^2 + k^2a^2\right)}{a^2b^2} = 1 \\ y = kx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\dfrac{ab}{\sqrt{b^2 + k^2a^2}} \\ y = \pm\dfrac{kab}{\sqrt{b^2 + k^2a^2}} \end{cases}.$$

Отже, кожна пряма, яка проходить через початок координат, перетинає еліпс у двох точках, симетричних відносно початку координат:

$$C_1\left(\frac{ab}{\sqrt{b^2 + k^2a^2}},\ \frac{kab}{\sqrt{b^2 + k^2a^2}}\right),$$
$$C_2 = \left(-\frac{ab}{\sqrt{b^2 + k^2a^2}},\ -\frac{kab}{\sqrt{b^2 + k^2a^2}}\right). \tag{2}$$

Зокрема, вісь Ox перетинає еліпс у двох точках $A_1(a; 0)$, $A_2(-a; 0)$, а вісь Oy – у двох точках $B_1(0; b)$, $B_2(0; -b)$.

Означення 1. Точки перетину еліпса з його осями симетрії називається вершинами еліпса.

Означення 2. Піввіссю еліпса називається відрізок (а також довжина цього відрізка), одним кінцем якого є центр симетрії еліпса, а другим – одна з його вершини.

У рівнянні (1) a і b – півосі еліпса, причому a називають більшою піввіссю, а b – меншою піввіссю.

Означення 3. Відрізок A_1A_2, кінцями якого є вершини A_1 і A_2 еліпса, розміщені на тій осі симетрії, що і фокуси еліпса (а також довжина $2a$ цього відрізка), називається більшою віссю еліпса, а відрізок B_1B_2 (і його довжина $2b$) – меншою віссю еліпса.

Знайдемо область визначення змінних x і y в рівнянні (1). Оскільки кожен з доданків лівої частини рівняння (1) не може бути від'ємним і в сумі ці доданки дають одиницю, то кожен з них окремо не може перевищувати одиниці:

$$\frac{x^2}{a^2} \le 1 \Leftrightarrow x^2 \le a^2 \Leftrightarrow -a \le x \le a,$$

$$\frac{y^2}{b^2} \le 1 \Leftrightarrow y^2 \le b^2 \Leftrightarrow -b \le y \le b.$$

Геометрично це означає, що всі точки еліпса знаходяться всередині смуги, обмеженої паралельними прямими $x = -a$ і $x = a$, і всередині смуги, обмеженої паралельними прямими $y = -b$ і $y = b$. Тому весь еліпс знаходиться всередині прямокутника, що є перетином цих смуг (рис. 1).

Розв'яжемо рівняння (1) відносно y:

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\ . \tag{3}$$

Внаслідок симетрії еліпса достатньо дослідити тільки ту його частину, яка лежить у першому квадранті $\left(x \ge 0,\ y \ge 0\right)$. Для цього у формулі (3) перед радикалом запишемо знак плюс і будемо змінювати x від 0 до a. Якщо $x = 0$, то $y = b$. Зі збільшенням x підкореневий вираз в (3) зменшується, а тому буде зменшуватись і y. Якщо $x = a$, то $y = 0$. На геометричній мові це означає, що праворуч від точки B_1 еліпс весь час спадає, наближаючись до точки A_1. Приймаючи до уваги симетричність еліпса відносно координатних осей, робимо висновок, що еліпс є замкненою лінією.

Проведемо пряму через точки A_1 і B_1 (рис. 1). Рівняння цієї прямої

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \Leftrightarrow y = \frac{b}{a}\left(a - x\right). \tag{4}$$

Покажемо, що ордината змінної точки еліпса (3) при $0 < x < a$ більша за ординату прямої (4), тобто

$$y_{ел.} = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} > y_{пр.} = \frac{b}{a}\left(a - x\right).$$

Дійсно,

$$y_{ел} = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - 2ax + x^2 + 2ax - x^2 - x^2} =$$
$$= \frac{b}{a}\sqrt{(a-x)^2 + 2x(a-x)}\ .$$

Другий доданок під радикалом додатний, оскільки $0 < x < a$. Якщо цей доданок відкинути, то радикал зменшиться:

$$y_{ел} > \frac{b}{a}\sqrt{(a-x)^2} = \frac{b}{a}|a-x| = \frac{b}{a}(a-x) = y_{пр}\ .$$

Отже, ми показали, що між точками B_1 і A_1 еліпс розміщується над прямою A_1B_1.

Наведених вище міркувань достатньо, щоб накреслити еліпс. Еліпс показано на рис. 1.

§3. Ексцентриситет і директриси еліпса

Еліпси бувають різної форми, а саме, більш або менш витягнутими. Форму еліпса характеризують наступним числом.

<u>Означення 1</u>. Відношення половини відстані між фокусами еліпса (фокальної відстані) до більшої півосі еліпса називається ***ексцентриситетом*** еліпса і позначається буквою e:

$$e = \frac{c}{a}. \tag{1}$$

Оскільки $0 \le c < a$, то $0 \le e < 1$.

Підставимо значення c з формули (2) §1 у формулу (1):

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}\ . \tag{2}$$

Отже, ексцентриситет еліпса визначається відношенням його півосей. Навпаки, знаючи ексцентриситет, завжди можна знайти відношення півосей еліпса.

Розглянемо систему еліпсів з однією і тією ж більшою віссю, але різними ексцентриситетами. З рівності (2) випливає, що зі зменшенням e число b збільшується і при $e = 0$ $b = a$, тобто еліпс перетворюється в коло. При цьому

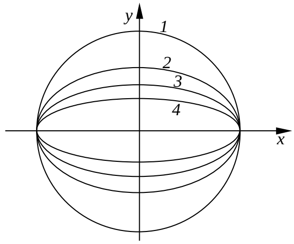


Рис. 1

$c = 0$, тобто фокуси співпадають з центром кола. Навпаки, зі збільшенням ексцентриситету число b зменшується і еліпс стає більш витягнутим. На рис. 1 показано еліпси, ексцентриситети яких задовольняють нерівності $0 = e_1 < e_2 < e_3 < e_4$. Якщо e прямує до одиниці, число b прямує до нуля.

Означення 2. Дві прямі, які проходять перпендикулярно до осі еліпса, що містить його фокуси, на відстані $\frac{a}{e}$ від центра еліпса, називаються ***директрисами*** еліпса. Тут, як і раніше, a – більша піввісь еліпса, а e – його ексцентриситет.

Коло, для якого $e = 0$, не має директрис. Нехай еліпс задано канонічним рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

причому $a > b$. Фокуси F_1 і F_2 розміщені на осі Ox. Оскільки $0 \le e < 1$, то $\frac{a}{e} > a$. Тому директриси не перетинають еліпс, тобто знаходяться далі від центра еліпса, ніж його вершини (рис. 2). Рівняння директрис мають вигляд

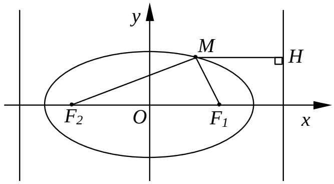


Рис. 2

$$x = -\frac{a}{e} \quad \text{і} \quad x = \frac{a}{e}.$$

Означення 3. Фокус і директрису, які знаходяться по один бік від меншої осі еліпса, будемо називати такими, що відповідають одне одному.

За означенням фокусу $F_1(c;\,0)$ відповідає директриса $x = \frac{a}{e}$, а фокусу $F_2(-c;\,0)$ – директриса $x = -\frac{a}{e}$ (рис. 2).

Означення 4. Відрізки F_1M і F_2M (рис. 2) називаються фокальними радіусами точки M еліпса.

Згідно з формулами (4) і (5) §1 фокальні радіуси точки M еліпса визначаються формулами

$$\rho_1 = F_1M = a - \frac{c}{a}x = a - ex, \tag{3}$$

$$\rho_2 = F_2M = a + \frac{c}{a}x = a + ex. \qquad (4)$$

Теорема 1 (директоріальна властивість еліпса). Еліпс – це геометричне місце точок, відношення відстаней від кожної з яких до фокуса еліпса і до відповідної цьому фокусу директриси є величиною сталою і такою, що дорівнює ексцентриситету еліпса.

<u>Доведення</u>. Розглянемо фокус $F_1(c;\,0)$ і відповідну йому директрису $x = \frac{a}{e}$. Візьмемо довільну точку $M(x;\,y)$ еліпса (рис. 2) і знайдемо відстані F_1M і $d_1 = MH$, де H – основа перпендикуляра, опущеного з точки M на директрису $x = \frac{a}{e}$. Згідно з формулою (3) $F_1M = a - ex$. Відстань $d_1 = MH$ знаходимо за формулою (8) §7 гл. XIII:

$$d_1 = MH = \frac{\left|x - \frac{a}{e}\right|}{\sqrt{1+0}} = \left|\frac{ex-a}{e}\right| = \frac{a-ex}{e} = \frac{F_1M}{e}.$$

Звідси $\frac{F_1M}{d_1} = \frac{F_1M}{F_1M/e} = e$. Аналогічно доводиться, що $\frac{F_2M}{d_2} = e$, де F_2M – відстань від точки M еліпса до його фокуса F_2, а d_2 – відстань від цієї ж точки до директриси $x = -\frac{a}{e}$, що відповідає фокусу F_2.

Навпаки, нехай для точки $M(x;\,y)$ площини $\frac{F_1M}{MH} = e$, де H – основа перпендикуляра, опущеного з точки M на пряму $x = \frac{a}{e}$. Оскільки $F_1M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, $MH = \left|x - \frac{a}{e}\right|$, то $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = e\left|x - \frac{a}{e}\right|$. Піднесемо останню рівність до квадрата:

$$(x-c)^2 + y^2 = e^2\left(x^2 - 2\frac{xa}{e} + \frac{a^2}{e^2}\right) \Leftrightarrow x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = e^2x^2 - 2xae + a^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(1-e^2\right) + y^2 = a^2 - c^2 \Leftrightarrow x^2\left(\frac{a^2-c^2}{a^2}\right) + y^2 = b^2 \Leftrightarrow \frac{x^2b^2}{a^2} + y^2 = b^2 \Leftrightarrow \quad .$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Цим показано, що кожна точка геометричного місця точок належить еліпсу. Теорему доведено.

Приклад 1. Записати рівняння директрис еліпса $4x^2+9y^2=144$.

Розв'язання. Поділимо обидві частини рівняння на 144. В результаті будемо мати канонічне рівняння еліпса $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{16}=1$.

Звідси

$$a^2=36 \Leftrightarrow a=6,$$
$$b^2=16 \Leftrightarrow b=4.$$

Знаючи a і b, із співвідношення $a^2-b^2=c^2$ знаходимо

$$c=\sqrt{36-16}=2\sqrt{5}\,.$$

Ексцентриситетом еліпса є число

$$e=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{5}}{6}=\frac{\sqrt{5}}{3}\,.$$

Тому рівняння директрис мають вигляд

$$x=\frac{a}{e}=\frac{6}{\sqrt{5}/3}=\frac{18}{\sqrt{5}} \quad \text{і} \quad x=-\frac{a}{e}=-\frac{18}{\sqrt{5}}\,.$$

§4. Рівняння дотичної до еліпса. Оптична властивість еліпса

Нехай еліпс задано канонічним рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

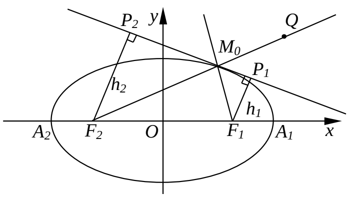


Рис. 1

і точка $M_0(x_0,\, y_0)$ лежить на еліпсі. Будемо вважати, що $y_0 \neq 0$, тобто точка M_0 не співпадає з вершинами A_1 і A_2 (рис. 1).

Розглянемо достатньо малу частину еліпса, що містить точку M_0, як графік функції

$$y=y(x)=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

і продиференціюємо по x обидві частини рівності

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{\left(y(x)\right)^2}{b^2}=1.$$

В результаті отримуємо

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2yy'}{b^2}=0 \Leftrightarrow y'=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}.$$

Звідси випливає, що кутовий коефіцієнт дотичної до еліпса у точці M_0 дорівнює

$$k=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0},$$

а рівняння цієї дотичної приймає вигляд

$$y-y_0=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}\left(x-x_0\right) \Leftrightarrow \frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}-\left(\frac{x_0{}^2}{a^2}+\frac{y_0{}^2}{b^2}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}-1=0 \Leftrightarrow \frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1. \qquad (1)$$

Тут враховано, що точка $M_0\left(x_0;\, y_0\right)$ лежить на еліпсі, тобто

$$\frac{x_0{}^2}{a^2}+\frac{y_0{}^2}{b^2}=1.$$

При виведенні рівняння (1) з розгляду виключались вершини еліпса A_1 і A_2 (рис. 1). Проте це рівняння є рівнянням дотичної до еліпса і в точках A_1 і A_2. Дійсно, якщо точка M_0 співпадає з вершиною A_1, то $x_0=a$, $y_0=0$ і рівняння (1) набуває вигляду $x=a$, тобто перетворюється у рівняння дотичної до еліпса в точці A_1. Аналогічно, при співпаданні точок M_0 і A_2 рівняння (1) перетворюється у рівняння дотичної до еліпса в точці A_2.

Отже, рівняння дотичної до еліпса у довільній його точці $M_0\left(x_0;\, y_0\right)$ має вигляд (1).

Теорема 1. Дотична до еліпса у довільній його точці M_0 є бісектрисою зовнішнього кута M_0 трикутника $F_1F_2M_0$, тобто трикутника з вершинами у фокусах еліпса F_1, F_2 і точці M_0 (рис. 1).

<u>*Доведення*</u>. Знайдемо за формулою (8) § 7 гл. XIII відстані h_1 і h_2 від фокусів $F_1\left(c;\, 0\right)$ і $F_2\left(-c;\, 0\right)$ еліпса до дотичної до еліпса у точці $M_0\left(x_0,\, y_0\right)$:

$$h_1 = \frac{\left|\frac{cx_0}{a^2} - 1\right|}{\sqrt{\frac{x_0^{\,2}}{a^4} + \frac{y_0^{\,2}}{b^4}}} = \frac{|ex_0 - a|}{\sqrt{\frac{x_0^{\,2}}{a^4} + \frac{y_0^{\,2}}{b^4}}a} = \frac{a - ex_0}{\sqrt{\frac{x_0^{\,2}}{a^4} + \frac{y_0^{\,2}}{b^4}}a} = \frac{\rho_1}{\sqrt{\frac{x_0^{\,2}}{a^4} + \frac{y_0^{\,2}}{b^4}}a},$$

$$h_2 = \frac{\left|\frac{cx_0}{a^2} + 1\right|}{\sqrt{\frac{x_0^{\,2}}{a^4} + \frac{y_0^{\,2}}{b^4}}} = \frac{a + ex_0}{\sqrt{\frac{x_0^{\,2}}{a^4} + \frac{y_0^{\,2}}{b^4}}a} = \frac{\rho_2}{\sqrt{\frac{x_0^{\,2}}{a^4} + \frac{y_0^{\,2}}{b^4}}a},$$

де ρ_1 і ρ_2 визначаються формулами (3) і (4) §3.

Тоді $\frac{h_1}{h_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}$.

Відмітимо, що числа $\frac{cx_0}{a^2} - 1$ і $\frac{-cx_0}{a^2} - 1$, які отримуються в результаті підстановок координат фокусів $F_1\left(c;\, 0\right)$ і $F_2\left(-c;\, 0\right)$ у ліву частину рівняння дотичної, є числами одного знака. Дійсно,

$$\frac{cx_0}{a^2} - 1 = \frac{ex_0}{a} - 1 = -\frac{a - ex_0}{a} = -\frac{\rho_1}{a} < 0,$$

$$\frac{-cx_0}{a^2} - 1 = -\frac{ex_0}{a} - 1 = -\frac{ex_0 + a}{a} = -\frac{\rho_2}{a} < 0.$$

Це означає, що обидва фокуси F_1 і F_2 розміщуються по один бік від дотичної до еліпса у довільній його точці.

Позначимо через P_1 і P_2 основи перпендикулярів, опущених з точок F_1 і F_2 на дотичну до еліпса, проведену в точці M_0 (рис. 1). Тоді трикутники $F_1P_1M_0$ і $F_2P_2M_0$ будуть подібними ($\Delta F_1P_1M_0 \sim \Delta F_2P_2M_0$), оскільки обидва вони прямокутні і згідно з доведеним

$$\frac{F_1P_1}{F_2P_2} = \frac{F_1M_0}{F_2M_0}.$$

Звідси випливає рівність кутів $\angle F_1M_0P_1 = \angle F_2M_0P_2$, а, отже, і рівність кутів $\angle F_1M_0P_1 = \angle P_1M_0Q$, де точка Q лежить на продовженні променя F_2M_0 за точку M_0.

Отже, дотична до еліпса в точці M_0 є бісектрисою зовнішнього кута M_0 трикутника $F_1F_2M_0$.

Теорему доведено.

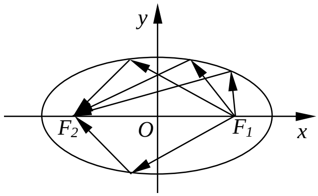


Рис. 2

Доведену теорему можна наділити наступним фізичним змістом: якщо розмістити в одному з фокусів еліпса джерело світла, то промені світла після відбиття від еліпса будуть збиратися у другому фокусі еліпса, оскільки промінь світла відбивається від еліпса як від дотичної до нього в точці падіння променя (рис. 2).

Приклад 1. Написати рівняння дотичних до еліпса

$$\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{12}=1,$$

проведених з точки $A(12;\,-3)$.

Розв'язання. Точка A не лежить на еліпсі, оскільки

$$\frac{12^2}{32}+\frac{3^2}{12}=\frac{144}{32}+\frac{9}{12}\neq 1.$$

Нехай $\frac{x_0x}{32}+\frac{y_0y}{18}=1$ є шуканим рівнянням дотичної, де $(x_0;\,y_0)$ – точка дотику. Оскільки точка $A(12;\,-3)$ лежить на дотичній, то

$$\frac{12x_0}{32}-\frac{3y_0}{18}=1\Leftrightarrow 9x_0-4y_0=24.$$

Точка дотику $(x_0;\,y_0)$ лежить на даному еліпсі, тому

$$\frac{{x_0}^2}{32}+\frac{{y_0}^2}{18}=1\Leftrightarrow 9{x_0}^2+16{y_0}^2=288.$$

Розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} 9x_0-4y_0=24\\ 9{x_0}^2+16{y_0}^2=288, \end{cases}$$

знаходимо два її розв'язки

$$\begin{cases} x_1=4\\ y_1=3 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} x_2=\dfrac{4}{5}\\ y_2=-\dfrac{21}{5}. \end{cases}$$

Шуканих дотичних дві:

$$\frac{4x}{32}+\frac{3y}{18}=1\Leftrightarrow 3x+4y-24=0,$$

$$\frac{\frac{4}{5}x}{32}-\frac{\frac{21}{5}y}{18}=1\Leftrightarrow 3x-28y-120=0.$$

§5. Еліпс як результат стиску кола до його діаметра. Параметричні рівняння еліпса

5.1. Розглянемо наступне перетворення площини (рис. 1): кожна точка M площини переходить у точку M' цієї площини, що лежить з точкою M на одному перпендикулярі до осі Ox і відношення

$$\frac{PM}{PM'} = k \tag{1}$$

залишається величиною сталою для всіх точок M.

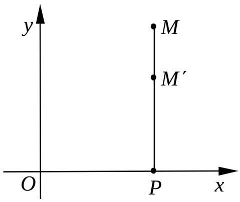


Рис. 1

<u>Означення 1</u>. Перетворення точок площини, при якому кожній точці M ставиться у відповідність точка M' описаним вище способом, називається рівномірним стиском площини до осі Ox. Число k називається коефіцієнтом стиску, точка M' – образом точки M, а точка M – прообразом точки M' при рівномірному стиску площини до осі Ox.

Якщо координати довільної точки M позначати через x і y, а координати її образа (точки M') – через x' і y', то

$$\begin{cases} x = x' \\ \dfrac{y}{y'} = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = ky'. \end{cases} \tag{2}$$

Формули (2) є формулами рівномірного стиску площини до осі Ox. Якщо $k > 0$, то точки M і M' лежать по один бік від осі Ox, а якщо $k < 0$, то по різні боки. При $|k| > 1$ всі точки наближаються до осі Ox, а при $|k| < 1$ – віддаляються від цієї осі. В останньому випадку правильніше було б говорити не про “стиск”, а про “розтягування” площини. Проте в обох випадках перетворення називають стиском до осі Ox.

При перетворенні (2) кожна точка M осі Ox співпадає зі своїм образом M'. Те ж саме, але для всіх точок площини, будемо мати у випадку, коли $k = 1$. Якщо $k = -1$, отримуємо симетрію відносно осі Ox.

Теорема 1. При рівномірному стиску площини до діаметра кола образом кола є еліпс.

Навпаки, кожен еліпс можна отримати як образ кола при рівномірному стиску площини до діаметра цього кола.

<u>Доведення</u>. Розглянемо коло

$$x^2 + y^2 = a^2. \tag{3}$$

з центром у початку координат і радіусом a (рис. 2).

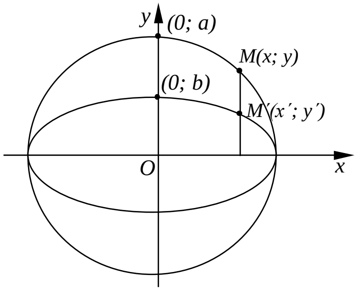


Рис. 2

Виконаємо рівномірний стиск площини до осі Ox з коефіцієнтом стиску $k > 1$. Нехай при цьому образом точки $(0; a)$ є точка $(0; b)$. Тоді $k = \dfrac{a}{b}$ і формули (2) приймають вигляд

$$\begin{cases} x = x' \\ y = \dfrac{a}{b} y'. \end{cases} \tag{4}$$

Підставимо (4) в (3):

$$(x')^2 + \frac{a^2}{b^2}(y')^2 = a^2 \Leftrightarrow \frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1\,. \tag{5}$$

Отже, при перетворенні стиску коло перетворюється в еліпс з півосями a і b (рис. 2).

Навпаки, будь-який еліпс (5) можна отримати як результат рівномірного стиску кола. Дійсно, нехай задано еліпс (5), де $a > b$. Побудуємо коло з центром у початку координат і радіусом a. Якщо координати x' і y' задовольняють рівнянню (5), то координати (4) будуть задовольняти рівнянню (3), тобто рівнянню побудованого кола. Отже, побудовано коло, результатом рівномірного стиску якого є даний еліпс.

Теорему доведено.

5.2. Перейдемо до виведення параметричних рівнянь еліпса.

Нехай еліпс задано канонічним рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,. \tag{6}$$

Розглянемо коло

$$X^2 + Y^2 = a^2\,, \tag{7}$$

яке переходить у даний еліпс в результаті стиску

$$X = x\,,\ Y = \frac{a}{b} y\,.$$

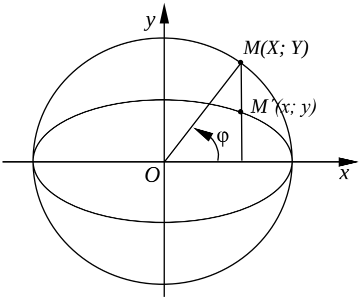


Рис. 3

Тут координати образа точки M ми позначили через x і y, а координати прообраза точки M' – через X і Y (рис. 3).

Нехай $M'(x;y)$ – довільна точка даного еліпса (6), а $M(X;Y)$ – її прообраз на колі (7).

Позначимо через φ кут між додатним напрямком осі Ox і променем OM. Тоді

$$X = a\cos\varphi, \quad Y = a\sin\varphi$$

і

$$x = a\cos\varphi, \; y = \frac{b}{a}Y = \frac{b}{a}a\sin\varphi = b\sin\varphi.$$

Рівняння

$$x = a\cos\varphi, \; y = b\sin\varphi \tag{8}$$

є параметричними рівняннями еліпса.

<u>Означення 2</u>. Параметр φ називається ексцентричним кутом точки еліпса.

Якщо задано точку M' еліпса, то для знаходження φ потрібно побудувати коло на більшій осі еліпса, як на діаметрі, і через точку M' провести пряму, паралельну меншій осі еліпса. Точка $M(X;Y)$ перетину цієї прямої з колом буде прообразом точки $M'(x;y)$ при рівномірному стиску площини до діаметра кола. Кут між віссю Ox і променем OM буде ексцентричним кутом φ, що відповідає вибраній точці M' на еліпсі (рис. 3).

§6. Канонічне рівняння гіперболи

<u>Означення 1</u>. Гіперболою називається геометричне місце точок площини, модуль різниці відстаней від кожної з яких до двох заданих точок цієї площини, що називаються фокусами, є величиною сталою і меншою за відстань між фокусами.

Позначимо цю сталу через $2a$, відстань між фокусами еліпса – через $2c$, а самі фокуси – через F_1 і F_2.

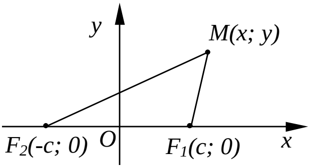


Рис. 1

Виберемо на площині декартову прямокутну систему координат так, щоб початок O співпадав з серединою відрізка F_1F_2, а вісь абсцис – з прямою F_1F_2. Напрямки осей Ox і Oy візьмемо такими, як показано на рис. 1.

У вибраній системі координат фокус F_1 має координати $(c; 0)$, а фокус F_2 – координати $(-c; 0)$.

Якщо $M(x; y)$ – довільна точка гіперболи, то за означенням 1

$$\left|MF_1 - MF_2\right| = 2a \Leftrightarrow \left|\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right| = 2a. \qquad (1)$$

Навпаки, якщо координати деякої точки площини задовольняють рівнянню (1), то ця точка буде точкою гіперболи. Тому у вибраній системі координат рівняння (1) є рівнянням гіперболи. Щоб спростити це рівняння, перепишемо його у вигляді

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

і обидві частини піднесемо до квадрата:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mp a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - xc \Leftrightarrow \mp\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a - \frac{c}{a}x.$$

Ще раз піднесемо останню рівність до квадрата:

$$(x-c)^2 + y^2 = a^2 - 2cx + \frac{c^2}{a^2}x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(\frac{a^2 - c^2}{a^2}\right) + y^2 = a^2 - c^2.$$

На відміну від еліпса, тепер $a < c$. Якщо ввести позначення

$$c^2 - a^2 = b^2, \qquad (2)$$

то попереднє рівняння можна перетворити до вигляду

$$-\frac{b^2}{a^2}x^2+y^2=-b^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,. \qquad (3)$$

Рівняння (3) отримано нами з рівняння (1). Тому координати довільної точки гіперболи задовольняють рівнянню (3).

Доведемо протилежне: якщо координати деякої точки $M(x;\,y)$ задовольняють рівнянню (3), то ця точка лежить на гіперболі, тобто

$$\left|MF_1-MF_2\right|=2a\,.$$

Для цього знайдемо відстані $\rho_1=MF_1$ і $\rho_2=MF_2$:

$$\rho_1=\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\sqrt{x^2-2xc+c^2+y^2}=$$

$$=\sqrt{x^2-2xc+c^2+b^2\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right)}=$$

$$=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2-2xc+a^2}=\sqrt{\left(\frac{c}{a}x-a\right)^2}=\left|\frac{c}{a}x-a\right|.$$

З рівності (3) випливає, що $|x|\ge a$. Дійсно, розв'язавши (3) відносно y, отримуємо вираз

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\,,$$

який має смисл тоді і тільки тоді, коли $|x|\ge a$.

Нехай $x>0$. Тоді $\frac{c}{a}x-a>0$ і $\rho_1=\frac{c}{a}x-a$. Якщо $x<0$, то $\frac{c}{a}x-a<0$ і тому $\rho_1=a-\frac{c}{a}x$.

Отже, для всіх допустимих x маємо:

$$\begin{aligned}&\text{якщо } x>0, \text{ то } \rho_1=\frac{c}{a}x-a\,,\\ &\text{якщо } x<0, \text{ то } \rho_1=a-\frac{c}{a}x\,.\end{aligned} \qquad (4)$$

Аналогічно доводяться наступні твердження:

$$\begin{aligned} &\text{якщо } x>0, \quad \text{то} \quad \rho_2 = \frac{c}{a}x + a, \\ &\text{якщо } x<0, \quad \text{то} \quad \rho_2 = -\frac{c}{a}x - a. \end{aligned} \tag{5}$$

Тому для $x \geq a$

$$\rho_1 - \rho_2 = \frac{c}{a}x - a - \frac{c}{a}x - a = -2a.$$

Якщо ж $x \leq -a$, то

$$\rho_1 - \rho_2 = a - \frac{c}{a}x + \frac{c}{a}x + a = 2a.$$

В обох випадках $|\rho_1 - \rho_2| = 2a$.

Отже, ми довели, що рівняння (3) є рівнянням гіперболи.

<u>Означення 2</u>. Рівняння (3) називається канонічним рівнянням гіперболи, а вибрана система координат – канонічною системою координат.

§7. Дослідження форми гіперболи за допомогою канонічного рівняння

Нехай гіперболу задано канонічним рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{1}$$

Оскільки координати x і y входять до рівняння (1) з квадратом, то шляхом міркувань, аналогічних міркуванням §2 для еліпса, доводиться, що осі Ox і Oy є осями симетрії гіперболи, яку задано рівнянням (1), а початок координат – центром симетрії цієї гіперболи.

Розв’яжемо рівняння (1) відносно x

$$x = \pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2 + y^2}. \tag{2}$$

і відносно y

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}. \tag{3}$$

З (2) випливає, що y може приймати всі значення від $-\infty$ до $+\infty$. З (3) випливає, що

$$x^2 \geq a^2 \Leftrightarrow |x| \geq a \Leftrightarrow x \in (-\infty, a] \cup [a, \infty).$$

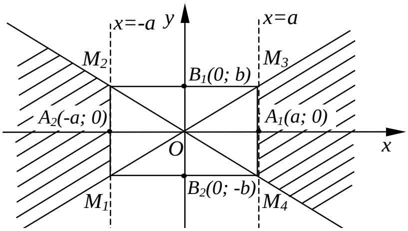


Рис. 1

Іншими словами, x може приймати всі значення, крім значень, що містяться між $-a$ і a (рис. 1). Тому гіпербола розміщується поза смугою, утвореною прямими $x = -a$ і $x = a$. Уверх і донизу вона простягається необмежено, оскільки y може змінюватись від $-\infty$ до ∞.

Вісь Ox перетинає гіперболу у двох точках $A_1(a; 0)$ і $A_2(-a; 0)$. Вісь Oy не перетинає гіперболу в жодній точці, оскільки рівняння (1) при $x = 0$ має суто уявні розв'язки $\pm bi$.

<u>Означення 1</u>. Точки A_1 і A_2 називаються вершинами гіперболи, відрізок A_1A_2 – дійсною віссю гіперболи, а відрізок B_1B_2 (рис. 1) – уявною віссю гіперболи. Числа a і b у канонічному рівнянні (1) гіперболи називаються відповідно дійсною і уявною півосями гіперболи.

Розглянемо питання про взаємне розміщення гіперболи і прямої, що проходить через початок координат. Для цього розв'яжемо систему

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = kx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2\left(b^2 - k^2a^2\right) = a^2b^2 \\ y = kx. \end{cases} \tag{4}$$

Можливі три випадки:

1°. $b^2 - k^2a^2 > 0$. У цьому випадку пряма $y = kx$ перетинає гіперболу (1) у двох точках

$$\left(\frac{ab}{\sqrt{b^2 - k^2a^2}}; \frac{kab}{\sqrt{b^2 - k^2a^2}}\right) \quad \text{і} \quad \left(-\frac{ab}{\sqrt{b^2 - k^2a^2}}; -\frac{kab}{\sqrt{b^2 - k^2a^2}}\right),$$

симетричних відносно початку координат.

2º. $b^2 - k^2a^2 = 0$. У цьому випадку система (4) не має ні дійсних, ні комплексних розв'язків, тобто є несумісною. Геометрично це означає, що пряма $y = kx$ не перетинає гіперболу.

3º. $b^2 - k^2a^2 < 0$. Система (4) має комплексні розв'язки. Отже, і в цьому випадку пряма $y = kx$ не перетинає гіперболу.

Дослідимо розміщення прямої $y = kx$ для кожного з розглянутих випадків, врахувавши, що $k = \operatorname{tg}\alpha$, де α – кут між віссю Ox і цією прямою. Маємо:

1º. $k^2a^2 < b^2 \Leftrightarrow k^2 < \dfrac{b^2}{a^2} \Leftrightarrow -\dfrac{b}{a} < k < \dfrac{b}{a} \Leftrightarrow -\dfrac{b}{a} < \operatorname{tg}\alpha < \dfrac{b}{a}$.

2º. $k^2a^2 = b^2 \Leftrightarrow k^2 = \dfrac{b^2}{a^2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k_1 = \dfrac{b}{a} \\ k_2 = -\dfrac{b}{a} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}\alpha_1 = \dfrac{b}{a} \\ \operatorname{tg}\alpha_2 = -\dfrac{b}{a}. \end{array}\right.$

3º. $k^2a^2 > b^2 \Leftrightarrow k^2 > \dfrac{b^2}{a^2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k > \dfrac{b}{a} \\ k < -\dfrac{b}{a} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}\alpha > \dfrac{b}{a} \\ \operatorname{tg}\alpha < -\dfrac{b}{a}. \end{array}\right.$

Побудуємо прямокутник, сторони $2a$ і $2b$ якого паралельні осям координат, а центр співпадає з початком координат. На рис. 1 це прямокутник з вершинами у точках M_1, M_2, M_3, M_4. Випадку **1º** відповідають прямі, які розміщуються всередині горизонтальних кутів M_1OM_2 і M_3OM_4. Випадку **2º** відповідають дві прямі M_1M_3 і M_2M_4, які є діагоналями прямокутника $M_1M_2M_3M_4$. Випадку **3º** відповідають прямі, які розміщуються всередині вертикальних кутів M_2OM_3 і M_1OM_4.

Отже, серед прямих, які проходять через початок координат, тільки ті перетинають гіперболу, які розміщуються всередині кутів M_1OM_2 і M_3OM_4.

Зіставляючи всі попередні дослідження, приходимо до висновку, що гіпербола всіма своїми точками розміщується в області, яку на рис. 1 заштриховано. Звідси випливає, що гіпербола на відміну від еліпса складається з двох віток, симетричних одна одній відносно осі Oy.

Розглянемо прямі, що відповідають випадку **2°** і визначають межі області, в якій знаходиться гіпербола.

Означення 2. Прямі, що проходять через початок канонічної системи координат і мають кутові коефіцієнти $\frac{b}{a}$ і $-\frac{b}{a}$, називаються асимптотами гіперболи.

Наступна теорема пояснює смисл терміна "асимптота".

Теорема 1. Точки гіперболи при віддалені від осі Oy необмежено (асимптотично) наближаються до відповідних асимптот, тобто відстань між точкою гіперболи і відповідною асимптотою зі збільшенням x зменшується, прямує до нуля, але не досягає нуля.

Доведення. Оскільки гіпербола симетрична відносно осей координат, то теорему достатньо довести для тієї її частини, яка знаходиться у першому квадранті (рис. 2).

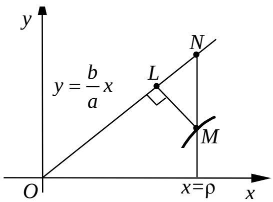


Рис. 2

Візьмемо довільне $x=\rho>a$. Йому відповідає точка $M\left(\rho;\ \frac{b}{a}\sqrt{\rho^2-a^2}\right)$ гіперболи (1) (див. (3)) і точка $N\left(\rho;\ \frac{b}{a}\rho\right)$ асимптоти $y=\frac{b}{a}x$.

Оскільки $\frac{b}{a}\rho>\frac{b}{a}\sqrt{\rho^2-a^2}$, то точка N лежить вище точки M (рис. 2) і

$$MN=\frac{b}{a}\rho-\frac{b}{a}\sqrt{\rho^2-a^2}\ . \qquad (5)$$

Будемо досліджувати поведінку довжини відрізка MN при необмеженому зростанні ρ. Оскільки зі збільшенням ρ обидва члени правої частини (5) збільшуються, то незрозуміло, що відбувається з їх різницею. Тому спочатку перетворимо вираз (5):

$$MN=\frac{\frac{b}{a}\left(\rho-\sqrt{\rho^2-a^2}\right)\left(\rho+\sqrt{\rho^2-a^2}\right)}{\rho+\sqrt{\rho^2-a^2}}=\frac{\frac{b}{a}\left(\rho^2-\rho^2+a^2\right)}{\rho+\sqrt{\rho^2-a^2}}=\frac{ab}{\rho+\sqrt{\rho^2-a^2}}\,.$$

Звідси очевидно, що

$$\lim_{\rho\to\infty}MN=\lim_{\rho\to\infty}\frac{ab}{\rho+\sqrt{\rho^2-a^2}}=0\,. \qquad (6)$$

Нехай ML – відстань від точки M до відповідної асимптоти (рис. 2). Оскільки $ML<MN$, то згідно з (6) довжина відрізка ML прямує до нуля при $\rho\to\infty$.

Теорему доведено.

Зображення гіперболи за її канонічним рівнянням (1) рекомендується виконувати так (рис. 3): спочатку будують прямокутник з центром у початку координат і зі сторонами $2a$ і $2b$, паралельними відповідно осями Ox і Oy. Прямі, що з’єднують протилежні вершини цього прямокутника, є асимптотами гіперболи. Потім креслять вітки гіперболи: ліва вітка повинна дотикатись прямокутника зовні в точці A_2 (вершині гіперболи) і своїми “кінцями” наближатися до асимптот; права вітка дотикається прямокутника зовні в іншій вершині гіперболи – точці A_1 і своїми “кінцями” наближається до асимптот. Побудову віток гіперболи потрібно проводити симетрично осям координат.

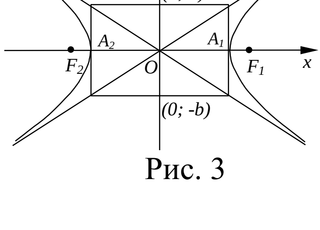


Рис. 3

§8. Ексцентриситет і директриси гіперболи

Означення 1. Число $e = \dfrac{c}{a}$ називається ексцентриситетом гіперболи. Дві прямі, що проходять на відстані $\dfrac{a}{e}$ від центра гіперболи перпендикулярно її дійсній осі, називаються директрисами гіперболи.

Оскільки $0 < a < c$, то $e > 1$. Тому $\dfrac{a}{e} < a$ і відстань від центра гіперболи до директрис менша за довжину дійсної півосі (рис. 1).

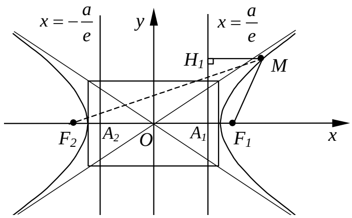


Рис. 1

Рівняння директрис мають вигляд

$$x = \frac{a}{e} \quad \text{і} \quad x = -\frac{a}{e}.$$

Означення 2. Фокус і директрису гіперболи, які розміщені по один бік від уявної осі, назвемо такими, що відповідають одне одному.

Згідно з означенням 2 фокусу $F_1(c;\,0)$ відповідає директриса $x = \dfrac{a}{e}$, а фокусу $F_2 = (-c;\,0)$ – директриса $x = -\dfrac{a}{e}$.

Означення 3. Відрізки F_1M і F_2M називаються фокальними радіусами точки M гіперболи (рис. 1).

Формули (4) і (5) §6 можна тепер записати у вигляді:

Якщо $x \geq a$, то $\rho_1 = ex - a$, $\rho_2 = ex + a$; (1)

Якщо $x \leq -a$, то $\rho_1 = a - ex$, $\rho_2 = -ex - a$. (2)

Теорема 1 (директоріальна властивість гіперболи). Гіпербола є геометричним місцем точок, відношення відстаней від кожної з яких до фокуса гіперболи і до відповідної цьому фокусу директриси є величиною сталою і такою, що дорівнює ексцентриситету гіперболи.

Доведення. Нехай

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

– рівняння даної гіперболи, а F_1 і $x=\frac{a}{e}$ – фокус і директриса, що відповідають одне одному. Візьмемо довільну точку $M(x;\,y)$ гіперболи і знайдемо відстані F_1M і MH_1, де H_1 – основа перпендикуляра, опущеного з точки M на директрису $x=\frac{a}{e}$ (рис. 1).

Якщо $x>0$, то відстань ρ_1 від точки $M(x;\,y)$ до фокуса $F_1(c;\,0)$ згідно з формулою (1) дорівнює

$$F_1M=\rho_1=ex-a\,.$$

Відстань MH_1 знаходимо за формулою (8) §7 гл. XIII:

$$MH_1=\left|x-\frac{a}{e}\right|=\left|\frac{ex-a}{e}\right|=\frac{ex-a}{e}\,.$$

Отже,

$$\frac{F_1M}{MH_1}=\frac{ex-a}{\frac{ex-a}{e}}=e\,.$$

Якщо $x<0$, то згідно з (2)

$$F_1M=a-ex\,,$$

а $MH_1=\frac{|ex-a|}{e}=\frac{a-ex}{e}$, оскільки $x<a$. Тому і в цьому випадку

$$\frac{F_1M}{MH_1}=\frac{a-ex}{\frac{a-ex}{e}}=e\,.$$

Аналогічно доводиться, що

$$\frac{F_2M}{MH_2}=e\,,$$

де $F_2M = \rho_2$ – відстань від точки $M(x;\, y)$ гіперболи до її фокуса $F_2(-c;\, 0)$, а MH_2 – відстань від тієї ж точки M до директриси $x = -\frac{a}{e}$, що відповідає фокусу F_2.

Навпаки, нехай для точки $M(x;\, y)$ площини

$$\frac{MF_1}{MH_1} = e, \qquad (3)$$

де H_1 – основа перпендикуляра, опущеного з точки M на пряму $x = \frac{a}{e}$.

Оскільки

$$MF_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \quad MH_1 = \frac{|ex-a|}{e},$$

то рівність (3) приймає вигляд

$$\frac{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}}{\frac{|ex-a|}{e}} = e \Leftrightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = |ex-a|.$$

Після піднесення останньої рівності до квадрата, отримуємо:

$$x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = e^2x^2 - 2xae + a^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(1-e^2\right) + y^2 = a^2 - c^2 \Leftrightarrow x^2\left(\frac{a^2-c^2}{a^2}\right) + y^2 = a^2 - c^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ оскільки } a^2 - c^2 = -b^2.$$

Отже, кожна точка геометричного місця є точкою гіперболи.

Теорему доведено.

Приклад 1. Визначити півосі, координати фокусів, ексцентриситет, рівняння директрис і рівняння асимптот гіперболи

$$4x^2 - 9y^2 = 36.$$

Розв'язання. Запишемо канонічне рівняння гіперболи:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1.$$

Тому $a^2 = 9 \Leftrightarrow a = 3$; $b^2 = 4 \Leftrightarrow b = 2$ і $c = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$.

Фокуси F_1 і F_2 мають координати $F_1\left(\sqrt{13};\,0\right)$, $F_2\left(-\sqrt{13};\,0\right)$. Ексцентриситет дорівнює $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{\dfrac{13}{3}}$. Рівняннями директрис є

$$x=\frac{a}{e}=\frac{3}{\sqrt{13}/3}=\frac{9}{\sqrt{13}} \quad \text{і} \quad x=-\frac{9}{\sqrt{13}},$$

а асимптоти гіперболи визначаються рівнянням

$$y=\frac{b}{a}x=\frac{2}{3}x \quad \text{і} \quad y=-\frac{2}{3}x.$$

§9. Рівняння дотичної до гіперболи. Оптична властивість гіперболи

Рівняння дотичної до гіперболи

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{1}$$

у точці $M_0\left(x_0;\,y_0\right)$ знаходиться з використанням тих же міркувань, що й у випадку з еліпсом (див. §4), і має вигляд

$$\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1. \tag{2}$$

Рекомендується провести необхідні викладки і отримати рівняння (2) самостійно.

Теорема 1. Дотична до гіперболи у довільній її точці M_0 є бісектрисою внутрішнього кута M_0 трикутника $F_1M_0F_2$, що має своїми вершинами фокуси гіперболи і дану точку M_0.

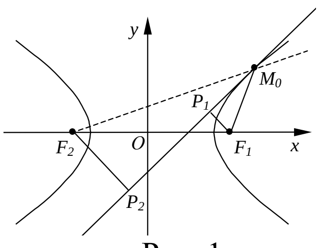


Рис. 1

Доведення. Нехай гіперболу задано канонічним рівнянням (1). Рівняння дотичної (2) до гіперболи у точці $M_0\left(x_0;\,y_0\right)$ запишемо у вигляді

$$\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}-1=0. \tag{3}$$

Нехай для визначеності $x_0>0$, тобто точка M_0 належить правій вітці гіперболи (1) (рис. 1). У випадку $x_0<0$ доведення проводиться аналогічно.

Підставимо координати точок $F_1(c;0)$ і $F_2(-c;0)$ у ліву частину рівняння (3). В результаті будемо мати числа різних знаків. Дійсно,

$$d_1 = \frac{cx_0}{a^2} - 1 = \frac{ex_0 - a}{a} = \frac{\rho_1}{a} > 0,$$

$$d_2 = -\frac{cx_0}{a^2} - 1 = -\frac{ex_0 + a}{a} = -\frac{\rho_2}{a} < 0.$$

Тут ми скористались формулами (1) §8. Отже, фокуси F_1 і F_2 знаходяться по різні боки від дотичної.

Нехай P_1 і P_2 – ортогональні проекції фокусів F_1 і F_2 на дотичну (3). За формулою (8) §7 гл. XIII знаходимо відстані F_1P_1 і F_2P_2 від фокусів $F_1(c;0)$ і $F_2(-c;0)$ гіперболи до дотичної (3):

$$F_1P_1 = \frac{\left|\frac{x_0 c}{a^2} - 1\right|}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}} = \frac{ex_0 - a}{a\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}} = \frac{\rho_1}{a\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}},$$

$$F_2P_2 = \frac{\left|-\frac{x_0 c}{a^2} - 1\right|}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}} = \frac{\left|-(ex_0 + a)\right|}{a\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}} = \frac{\rho_2}{a\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}}.$$

Відношення цих відстаней дорівнює

$$\frac{F_1P_1}{F_2P_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{F_1M_0}{F_2M_0}. \qquad (4)$$

З рівностей (4) випливає, що прямокутні трикутники $F_1P_1M_0$ і $F_2P_2M_0$ подібні. Тому $\angle F_1M_0P_1 = \angle F_2M_0P_2$, тобто дотична є бісектрисою внутрішнього кута M_0 трикутника $F_1M_0F_2$.

Теорему доведено.

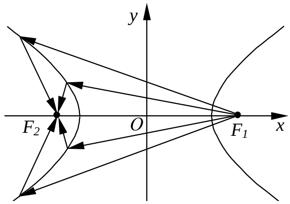


Рис. 2

Доведену теорему можна наділити "оптичним" тлумаченням аналогічно тому, як це було зроблено для еліпса: якщо помістити в один із фокусів гіперболи джерело світла, то промені після відбиття від гіперболи зберуться у другому фокусі (рис. 2)

Приклад 1. Скласти рівняння дотичних до гіперболи

$$\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1, \tag{5}$$

які перпендикулярні прямій

$$4x+3y-7=0. \tag{6}$$

Розв'язання. Позначимо через $(x_0;\, y_0)$ точку дотику. Тоді рівняння дотичної в цій точці матиме вигляд

$$\frac{xx_0}{20}-\frac{yy_0}{5}=1. \tag{7}$$

Кутові коефіцієнти прямих (6) і (7) дорівнюють відповідно

$$k_1=-\frac{4}{3},\ k_2=\frac{x_0}{4y_0}.$$

Оскільки прямі (6) і (7) за умовою перпендикулярні, то згідно з формулою (7) §9 гл. XIII

$$-\frac{4}{3}\cdot\frac{x_0}{4y_0}=-1 \Leftrightarrow x_0=3y_0. \tag{8}$$

Точка $(x_0;\, y_0)$ лежить на гіперболі (5). Тому, враховуючи (8),

$$\frac{9{y_0}^2}{20}-\frac{{y_0}^2}{5}=1 \Leftrightarrow {y_0}^2=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y_1=2 \\ y_2=-2. \end{array}\right.$$

Отже, маємо дві точки дотику $M_1(6;\, 2)$ і $M_2(-6;\, -2)$, які симетричні відносно початку координат.

Тепер можна записати рівняння дотичних до гіперболи (5) у точках M_1 і M_2:

$$\frac{6x}{20}-\frac{2y}{5}=1 \Leftrightarrow 3x-4y-10=0,$$

$$-\frac{6x}{20}+\frac{2y}{5}=1 \Leftrightarrow 3x-4y+10=0\cdot$$

§10. Параметричні рівняння гіперболи

Нехай гіперболу задано її канонічним рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{1}$$

Рівняння (1) можна подати у вигляді

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=1.$$

Покладемо

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=t, \tag{2}$$

де $t\neq 0$. Тоді

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\frac{1}{t}. \tag{3}$$

Почленним додаванням і відніманням рівностей (2) і (3) знаходимо

$$x=\frac{a}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right),\quad y=\frac{b}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right). \tag{4}$$

Отже, координати $(x;y)$ довільної точки гіперболи можна подати у вигляді (4). Навпаки, для будь-якого $t\neq 0$ точка з координатами (4) лежить на гіперболі. Дійсно, підставляючи (4) в (1), отримуємо

$$\frac{a^2\left(t+\frac{1}{t}\right)^2}{4a^2}-\frac{b^2\left(t-\frac{1}{t}\right)^2}{4b^2}=\frac{t^2+2+\frac{1}{t^2}-t^2+2-\frac{1}{t^2}}{4}=\frac{4}{4}=1.$$

Цим самим нами доведено наступну теорему.

Теорема 1. У канонічній системі координат рівняння (4) є параметричними рівняннями гіперболи.

Якщо точка $M(x;y)$ лежить на правій вітці гіперболи, тобто $x\geq a$, то

$$\frac{a}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)=\frac{a}{2}\left(\frac{t^2+1}{t}\right)>0\Leftrightarrow t>0.$$

Навпаки, якщо $t>0$, то

$$x=\frac{a}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\geq\frac{a}{2}\cdot 2=a,$$

оскільки $t+\frac{1}{t}\geq 2$.

Отже, для додатних значень t маємо праву вітку гіперболи.

Якщо t змінюється на проміжку $(0, 1]$, значення x спадає від $+\infty$ до a, а значення y зростає від $-\infty$ до 0.

Якщо t змінюється на проміжку $[1, \infty)$, x зростає від a до $+\infty$, а y зростає від 0 до $+\infty$. Значенню $t=1$ відповідає вершина $(a; 0)$ гіперболи (рис. 1).

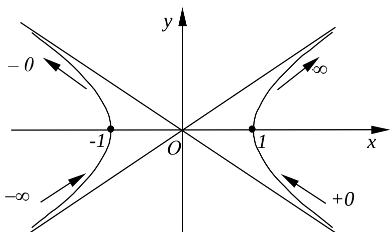


Рис. 1

Від'ємним значенням параметра t відповідає ліва вітка гіперболи. Якщо t змінюється на проміжку $(-\infty, -1]$, значення x зростає від $-\infty$ до $-a$, а значення y зростає від $-\infty$ до 0. Якщо t змінюється на проміжку $[-1, 0)$, то значення x спадає від $-a$ до $-\infty$, а значення y зростає від 0 до $+\infty$.

§11. Спряжені гіперболи. Рівностороння гіпербола

11.1. ***Задача 1***. Дослідити лінію, яку в декартовій прямокутній системі координат задано рівнянням

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1. \tag{1}$$

Дослідження лінії (1) можна було б провести у повній аналогії до тільки що проведеного дослідження лінії

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Проте у повторенні такого дослідження немає ніякої потреби. Достатньо перейти до нової координатної системи $\{O; \vec{i}'; \vec{j}'\}$, в якій нові базисні вектори $\vec{i}', \vec{j}'$ отримуються зі старих базисних векторів $\vec{i}, \vec{j}$ наступним чином

$$\vec{i}' = \vec{j}, \ \vec{j}' = \vec{i}. \tag{2}$$

Якщо точка M у старій системі координат $\{O; \vec{i}; \vec{j}\}$ має координати x, y, то у новій системі координат $\{O; \vec{i}'; \vec{j}'\}$ вона буде мати координати y, x. Це впливає з рівності

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} = x\vec{j}' + y\vec{i}' \Leftrightarrow M(y; x)_{O, \vec{i}', \vec{j}'}.$$

Отже, формулами (2) здійснюється перетворення координат

$$x' = y, \; y' = x, \tag{3}$$

де $(x; y)$ – старі координати точки M, а $(x'; y')$ – її нові координати.

Замінимо у рівнянні (1) старі координати x і y новими координатами x' і y' згідно з формулами (3). В результаті отримуємо, що нові координати точок лінії, яка досліджується, задовольняють рівнянню

$$\frac{(x')^2}{b^2} - \frac{(y')^2}{a^2} = 1. \tag{4}$$

Тепер згідно з результатами §6 – §9 можна стверджувати, що лінія, яку задано рівнянням (1) у координатній системі $\{O; \vec{i}; \vec{j}\}$, є гіперболою з центром у початку координат O. Координатні осі Ox і Oy є осями симетрії цієї гіперболи. Дійсною віссю гіперболи є вісь Oy, оскільки для кривої (4) дійсною віссю є вісь Ox'; b – дійсна піввісь, a – уявна піввісь (рис. 1).

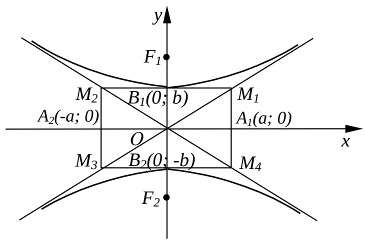


Рис. 1

Фокуси $F_1(0; c)$ і $F_2(0; -c)$ лежать на осі Oy, причому $c^2 = a^2 + b^2$. Діагоналі прямокутника $M_1M_2M_3M_4$ є асимптотами гіперболи (1). Всі точки гіперболи знаходяться всередині тієї пари кутів, які містять дійсну вісь Oy.

Ексцентриситет гіперболи (1) $e = \dfrac{c}{b}$, а директриси визначаються рівняннями $y = \dfrac{b}{e}$ і $y = -\dfrac{b}{e}$.

Означення 1. Дві гіперболи, які задано рівняннями

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{і} \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

в одній і тій же декартовій прямокутній системі координат з одними і тими ж значеннями півосей a і b, називаються спряженими.

Використовуючи результати задачі 1, зобразимо спряжені гіперболи на одному рисунку (рис. 2).

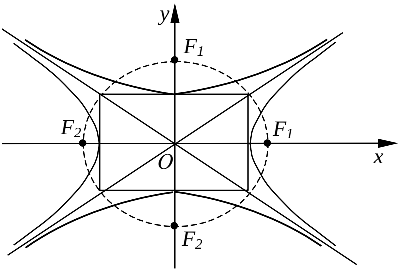


Рис. 2

Відмітимо, що спряжені гіперболи мають одні і ті ж асимптоти і одні і ті ж значення c. Фокуси обох гіпербол лежать на колі, описаному навколо прямокутника (рис. 2).

Оскільки гіпербола $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ має параметричні рівняння

$$\begin{cases} x=\frac{a}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right) \\ y=\frac{b}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right), \end{cases}$$

то параметричними рівняннями спряженої до неї гіперболи $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ будуть рівняння

$$\begin{cases} x=\frac{a}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right) \\ y=\frac{b}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right). \end{cases}$$

11.2. <u>Означення 2</u>. Гіпербола, у якої дійсна піввісь дорівнює уявній півосі, називається рівносторонньою.

Оскільки $a=b$, то канонічне рівняння рівносторонньої гіперболи набуває вигляду

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1 \Leftrightarrow x^2-y^2=a^2. \qquad (5)$$

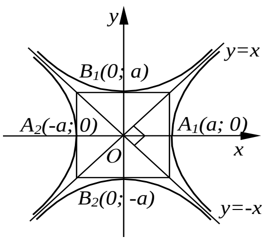


Рис. 3

Асимптоти рівносторонньої гіперболи (5) співпадають з бісектрисами координатних кутів $y=x$ і $y=-x$, а тому є перпендикулярними (рис. 3). Спряженою гіперболою до рівностронньої гіперболи (5) є рівностороння гіпербола (рис. 3)

$$-x^2+y^2=a^2. \qquad (6)$$

Спряжені гіперболи (5) і (6) конгруентні.

У математиці та її застосуваннях часто зустрічається рівняння вигляду $xy = k$ або $y = \dfrac{k}{x}$ ($k = \mathrm{const} \neq 0$). Це рівняння називається рівнянням оберненої пропорційності величини x і y. У зв'язку з цим розглянемо таку задачу.

Задача 2. Дослідити лінію, яку в декартовій прямокутній системі координат $\{O; \vec{i}; \vec{j}\}$ задано рівнянням

$$xy = k. \tag{7}$$

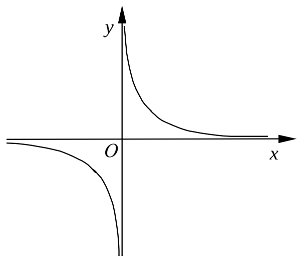


Рис. 4

Знаходячи різні розв'язки рівняння (7) і будуючи відповідні точки, можна впевнетись у тому, що лінія (7) при додатному k має схематичний вигляд, зображений на рис. 4. Всі точки цієї лінії розміщені у першому і третьому квадрантах; вся лінія симетрична відносно початку координат. Координатні осі не перетинають лінію ні в дійсних, ні в уявних точках. При необмеженому віддалені точки, що лежить на лінії (7), від початку координат, вона необмежено наближається до однієї з координатних осей. Наприклад, при необмеженому зростанні координати x координата $y = \dfrac{k}{x}$ необмежено спадає.

На основі викладеного природно припустити, що лінія (7) є гіперболою, центр якої знаходиться у початку координат і для якої координатні осі є асимптотами. Це припущення потрібно або довести, або спростити.

Для доведення припущення, що лінія (7) є гіперболою, потрібно показати, що точки, які лежать на цій лінії, мають геометричну властивість точок гіперболи (див. §6) або довести рівносильне цьому факту твердження, що існує така нова координатна система $\{O'; \vec{i}'; \vec{j}'\}$ з осями $O'x'$ і $O'y'$, в якій координати точок лінії (7) задовольняють канонічному рівнянню гіперболи.

Доведемо, що така координатна система дійсно існує.

Нехай початок O' нової координатної системи співпадає з початком старої координатної системи $\{O; \vec{i}; \vec{j}\}$. Оскільки добуток xy старих координат ми хочемо перетворити у різницю квадратів нових координат x' і y', то природно старі координати точки x і y виразити через її нові координати x' і y' за допомогою таких рівностей

$$x = x' - y', \; y = x' + y'. \tag{8}$$

Згідно з формулами перетворення координат (див. §5 гл. VI) новими базисними векторами будуть вектори

$$\vec{e}_1(1;1)_{O,\vec{i},\vec{j}}, \quad \vec{e}_2(-1;1)_{O,\vec{i},\vec{j}}. \tag{9}$$

Легко перевірити, що вектори $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$ ортогональні. Дійсно, їх скалярний добуток дорівнює нулю: $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = -1+1=0$. Вектори $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$ паралельні бісектрисам координатних кутів старої системи координат.

Нормуємо вектори $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$:

$$\vec{i}' = \frac{\vec{e}_1}{|\vec{e}_1|}, \quad \vec{j}' = \frac{\vec{e}_2}{|\vec{e}_2|}.$$

Оскільки $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = \sqrt{2}$, то

$$\vec{i}' = \frac{\vec{e}_1}{\sqrt{2}}, \quad \vec{j}' = \frac{\vec{e}_2}{\sqrt{2}}. \tag{10}$$

За нову координатну систему з осями Ox' і Oy' виберемо декартову прямокутну систему з базисом $\{O; \vec{i}'; \vec{j}'\}$ (рис. 5).

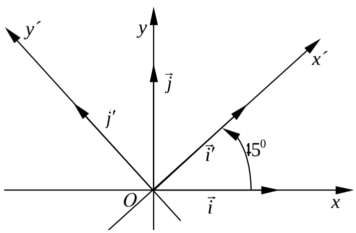


Рис. 5

Оскільки новими базисними векторами тепер є вектори (10), а не вектори (9), залежності старих координат точки x, y від її нових координат x', y' (тут збережені ті ж позначення нових координат, що і в (8) для базису $\{O; \vec{e}_1; \vec{e}_2\}$) набувають вигляду

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'-y'), \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y'). \tag{11}$$

Підставимо вирази (11) для x і y в рівняння (7). В результаті отримуємо рівняння

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(x'-y')\frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y') = k \Leftrightarrow (x')^2 - (y')^2 = 2k. \tag{12}$$

Рівняння (12) визначає рівносторонню гіперболу з півосями $a = b = \sqrt{2|k|}$. Асимптоти цієї гіперболи у новій координатній системі $Ox'y'$ мають рівняння

$$y' = x', \quad y' = -x'. \tag{13}$$

Розв'яжемо систему рівнянь (11) відносно x' і y':

$$x' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y), \; y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x+y). \tag{14}$$

Якщо тепер підставити (14) у (13), то будемо мати рівняння асимптот гіперболи (7) у старих координатах:

$$y' = x' \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(-x+y) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) \Leftrightarrow x = 0,$$

$$y' = -x' \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(-x+y) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) \Leftrightarrow y = 0.$$

Отже, старі осі координат Ox і Oy є асимптотами гіперболи (7).

Якщо число k додатне, гіпербола (7) перетинає нову вісь абсцис а, якщо від'ємне – нову вісь ординат.

Отже, рівняння (7) визначає рівносторонню гіперболу з півосями $a = b = \sqrt{2|k|}$. Її асимптоти співпадають з координатними осями. Гіпербола розміщується у першому та третьому квадрантах, якщо $k > 0$ (рис. 6), і в другому та четвертому квадрантах, якщо $k < 0$ (рис. 7).

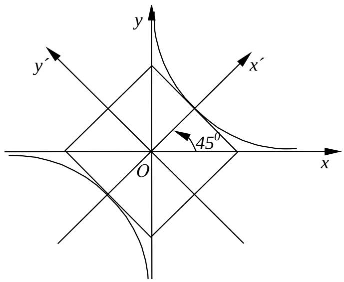


Рис. 6

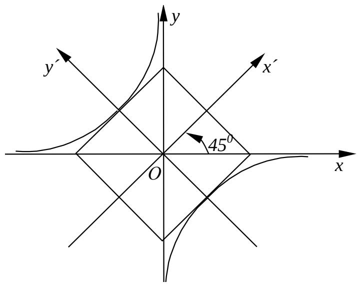


Рис. 7

Гіперболи, зображені на рис. 6, 7, спряжені.

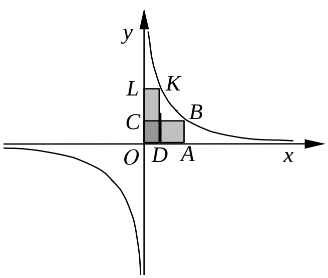


Рис. 8

Рівняння (7) показує, що для будь-якої точки рівносторонньої гіперболи добуток координат є величиною сталою. З іншого боку, цей добуток дорівнює площі прямокутника, сторони якого знаходяться на асимптотах, а одна вершина – на гіперболі. Отже, всі ці прямокутники мають одну і ту ж площу. Два таких прямокутники $OABC$ і $ODKL$ зображено на рис. 8. Відмічена властивість рівносторонньої гіперболи не пов'язана з системою координат, а є властивістю цієї гіперболи та її асимптот.

Задача 3. Дослідити лінію, яку в декартовій прямокутній системі координат $\{O; \vec{i}; \vec{j}\}$ задано рівнянням

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}, \tag{15}$$

де a, b, c, d – деякі дійсні числа.

<u>Означення 3</u>. Вираз (15) називається дробово-лінійною функцією.

Якщо $c = d = 0$, формула (15) не визначає ніякої лінії.

Якщо $c = 0,\ d \neq 0$, з (15) отримуємо лінійну функцію

$$y = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d},$$

яка визначає пряму лінію на площині.

Нехай $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \lambda$. Тоді $a = \lambda c$, $b = \lambda d$ і формула (15) набуває вигляду

$$y = \frac{\lambda cx + \lambda d}{cx+d} = \lambda .$$

Отже, рівняння (15) при $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ або $ad = bc$ також визначає пряму. Тому будемо розглядати дробово-лінійну функцію при

$$c \neq 0 \quad \text{і} \quad ad \neq bc .$$

У цьому випадку

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \Leftrightarrow y = \frac{a\left(x+\frac{d}{c}\right)+b-\frac{ad}{c}}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2}\frac{1}{x+\frac{d}{c}} \Leftrightarrow y - \frac{a}{c} = \frac{k}{x+\frac{d}{c}}, \tag{16}$$

де $k = \frac{bc-ad}{c^2}$.

Виконаємо перетворення координат за формулами

$$y' = y - \frac{a}{c}, \quad x' = x + \frac{d}{c}. \tag{17}$$

Це перетворення є паралельним перенесенням координатної системи $\{O; \vec{i}; \vec{j}\}$ у точку $O_1\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$.

У новій координатній системі $\{O_1; \vec{i}; \vec{j}\}$ з новими координатними осями O_1x' і O_1y' рівняння (15) набуває вигляду

$$y' = \frac{k}{x'}. \tag{18}$$

Тому лінія (15) є тією ж гіперболою, що і лінія $y = \frac{k}{x}$, тільки центр її знаходиться у точці O_1 (рис. 9, 10).

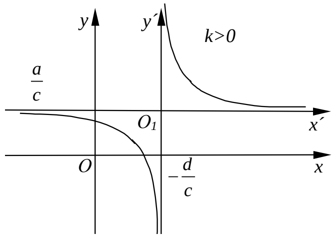


Рис. 9

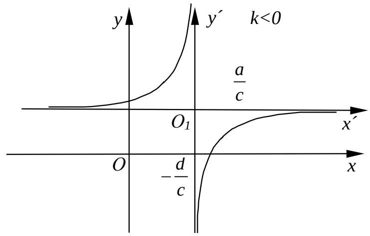


Рис. 10

Отже, графіком дробово-лінійної функції є рівностороння гіпербола з центром у точці O_1 і асимптотами $y = \frac{a}{c}$ і $x = -\frac{d}{c}$.

Точками перетину цієї гіперболи зі старими осями Ox і Oy є точки $\left(0; \frac{b}{d}\right)$ і $\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$.

Приклад 1. Дослідити лінію, яку в декартовій прямокутній системі координат задано рівнянням

$$y = \frac{x+2}{x+1}. \tag{19}$$

Розв'язання. Запишемо рівняння (19) у вигляді

$$y = \frac{x+1+1}{x+1} \Leftrightarrow y = 1 + \frac{1}{x+1} \Leftrightarrow y - 1 = \frac{1}{x+1}. \tag{20}$$

Нехай

$$x' = x+1, \; y' = y-1. \tag{21}$$

Перетворенню координат (21) відповідає паралельне перенесення старої координатної системи xOy у точку $O_1(-1; 1)$. Нові координатні осі O_1x' і O_1y' паралельні старим осям Ox і Oy.

У новій координатній системі $x'O_1y'$ рівняння (19) або рівносильне йому рівняння (20) набуває вигляду

$$y' = \frac{1}{x'}. \tag{22}$$

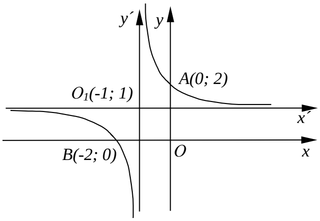


Рис. 11

Рівняння (22) визначає рівносторонню гіперболу (рис. 11).

Центром цієї гіперболи є точка $O_1(-1;1)$, а асимптотами – прямі $x=-1$, $y=1$. Гіпербола перетинає старі осі координат у точках $A(0;\ 2)$ і $B(-2;\ 0)$.

§12. Канонічне рівняння параболи

Означення 1. Параболою називається геометричне місце точок площини, рівновіддалених від фіксованої точки F цієї площини та фіксованої прямої l, що лежить у цій же площині і не проходить через точку F (рис. 1). Точка F називається фокусом параболи, пряма l – директрисою параболи, а відстань p від фокуса до директриси – фокальним параметром параболи. Відрізок, що з'єднує точку M параболи з її фокусом F, називається фокальним радіусом точки M.

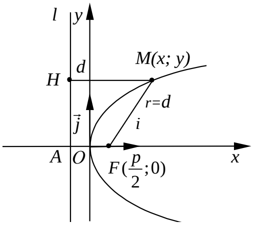


Рис. 1

Опустимо з фокуса F перпендикуляр на директрису l і точку перетину цього перпендикуляра з директрисою позначимо A. Виберемо на площині декартову прямокутну систему координат наступним чином. За початок координат O візьмемо середину відрізка AF, за вісь Ox – пряму AO, причому напрям осі Ox виберемо так, щоб фокус F знаходився на додатному промені цієї осі (рис. 1). За вісь Oy візьмемо пряму, яка проходить через точку O паралельно директрисі l. Напрям цієї осі може бути довільним. У вибраній системі координат фокус F має координати $\left(\frac{p}{2};\ 0\right)$, а директриса l – рівняння

$$x=-\frac{p}{2}. \tag{1}$$

Нехай $M(x;\ y)$ – довільна точка площини. Позначимо через r відстань MF від точки M до фокуса параболи, а через d – відстань MH від точки M до директриси параболи. Тоді для довільної точки $M(x;\ y)$ параболи маємо

$$r=d \Leftrightarrow \sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|. \tag{2}$$

Навпаки, якщо координати деякої точки площини задовольняють рівнянню (2), то ця точка належить параболі. Отже, рівняння (2) у вибраній системі координат є рівнянням параболи.

Для спрощення рівняння параболи піднесемо обидві частини рівності (2) до квадрата і розкриємо дужки:

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4} \Leftrightarrow y^2 = 2px\,. \qquad (3)$$

Рівняння (3) є наслідком рівняння (2). Тому координати точки, яка належить параболі, задовольняють рівнянню (3).

Доведемо обернене твердження: якщо координати точки $M(x;\,y)$ задовольняють рівнянню (3), то ця точка належить параболі. Дійсно, нехай координати деякої точки $M(x;\,y)$ задовольняють рівнянню (3). Тоді

$$r = MF = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 - px + \frac{p^2}{4} + 2px} =$$

$$= \sqrt{x^2 + px + \frac{p^2}{4}} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right| = MH = d\,,$$

тобто точка M є точкою параболи. Звідси випливає, що рівняння (2) і (3) рівносильні, а тому рівняння (3) є рівнянням параболи.

<u>**Означення 2**</u>. Рівняння (3) називається канонічним рівнянням параболи, а вибрана система координат – канонічною.

§13. Дослідження форми параболи за допомогою канонічного рівняння

Нехай параболу задано її канонічним рівнянням

$$y^2 = 2px\,. \qquad (1)$$

Змінна y входить до рівняння (1) з квадратом. Тому, якщо параболі належить точка $M_1(x_1;\,y_1)$, то їй належить і точка $M_2(x_1;\,-y_1)$. Точки M_1 і M_2 симетричні відносно осі Ox. Отже, парабола є симетричною лінією відносно осі Ox. Вісь симетрії параболи називають просто віссю параболи.

Розв’яжемо рівняння (1) відносно y:

$$y = \pm\sqrt{2px}\,. \qquad (2)$$

Областю визначення цієї функції є

$$0 \le x < \infty\,.$$

Це означає, що парабола (1) знаходиться справа від осі Oy, причому розміщується у першому та четвертому квадрантах.

Нехай x зростає, починаючи з нуля. Перед радикалом у (2) беремо знак плюс, оскільки внаслідок симетрії достатньо дослідити верхню частину параболи. Якщо $x = 0$, то $y = 0$, тобто парабола проходить через початок координат. Зі збільшенням x збільшується і y. Тому вітка параболи при русі вправо весь час прямує вгору. Парабола – незамкнена крива, оскільки і x і y можуть зростати необмежено.

Дослідимо взаємне розміщення прямої $y = kx$ і параболи (1). Для цього розглянемо питання про існування розв'язків системи

$$\begin{cases} y^2 = 2px \\ y = kx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k^2x^2 - 2px = 0 \\ y = kx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\left(k^2x - 2p\right) = 0 \\ y = kx. \end{cases} \qquad (3)$$

Якщо $k = 0$, система має єдиний розв'язок $(x = 0,\ y = 0)$.

Геометрично це означає, що вісь Ox перетинає параболу в одній точці $O(0;\,0)$ (у вершині параболи).

Означення 1. Точка перетину параболи та її осі називається вершиною параболи.

Якщо $k \ne 0$, то система (3) має два розв'язки, яким відповідають точки $M_1(0;\,0)$ і $M_2\left(\dfrac{2p}{k^2};\ \dfrac{2p}{k}\right)$. Звідси випливає, що будь-яка пряма, яка проходить через початок координат і не співпадає з осями координат, перетинається з параболою у двох точках.

Проведене дослідження дозволяє схематично зобразити форму параболи (1) (рис. 1).

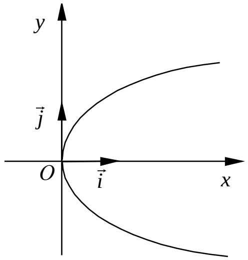


Рис. 1

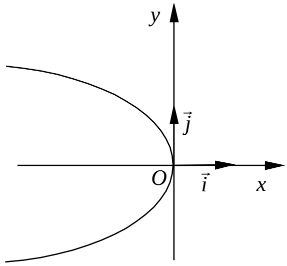


Рис. 2

Рівняння

$$y^2 = -2px, \tag{4}$$

де $p > 0$, зводиться до рівняння (1) заміною x на $-x$, тобто перетворенням координат, що полягає у зміні додатного напрямку осі Ox на протилежний (рис. 2).

Крива, що визначається рівнянням

$$x^2 = 2py, \tag{5}$$

також є параболою з вершиною у початку координат. Віссю симетрії цієї параболи є вісь Oy. Дійсно, перейдемо до нової координатної системи $\{O; \vec{i}'; \vec{j}'\}$, в якій

$$\vec{i}' = \vec{j}, \quad \vec{j}' = \vec{i}.$$

Тоді нові координати x' і y' будуть задовольняти рівнянню

$$(y')^2 = 2px'.$$

Звідси випливає, що лінія (5) є параболою з віссю Oy, оскільки вісь Ox' співпадає з віссю Oy (рис. 3).

Аналогічно, рівняння

$$x^2 = -2py \tag{6}$$

визначає параболу з вершиною у точці O і віссю Oy, але розміщеною вздовж від'ємного напрямку осі Oy (рис. 4).

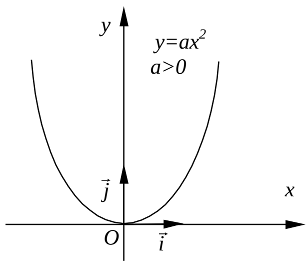


Рис. 3

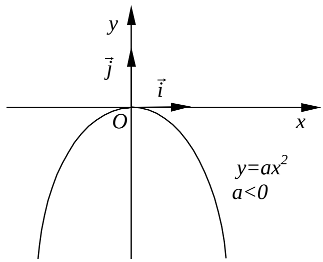


Рис. 4

Рівняння (5) і (6) зазвичай подають у вигляді

$$y = ax^2, \tag{7}$$

де $a \neq 0$, $|a| = \dfrac{1}{2p}$. Тоді $p = \dfrac{1}{2|a|}$.

Приклад 1. Написати рівняння парабол з вершинами у початку координат, якщо відомо, що

1) парабола є симетричною відносно осі Oy і проходить через точку $M(4; -8)$;

2) фокус параболи знаходиться у точці $F(0; -3)$.

Розв'язання. 1) Рівняння параболи згідно з (7) має вигляд $y = ax^2$. Оскільки парабола проходить через точку M, то

$$-8 = a \cdot 16 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}.$$

Тоді $y = -\dfrac{1}{2}x^2 \Leftrightarrow -2y = x^2$.

2) Знаходимо параметр параболи p. Оскільки $p > 0$, то $\dfrac{p}{2} = 3 \Leftrightarrow p = 6$. Скориставшись формулою (6), отримуємо

$$x^2 = -12y.$$

§14. Рівняння дотичної до параболи. Оптична властивість параболи

Знайдемо рівняння дотичної до параболи

$$y^2 = 2px \tag{1}$$

у точці $M_0(x_0; y_0)$. Для цього продиференціюємо рівняння (1) за умови, що y є функцією від x:

$$2yy' = 2p \Leftrightarrow y' = \frac{p}{y}.$$

Отже,

$$y'(x_0)=\frac{p}{y_0}. \tag{2}$$

Рівняння дотичної у точці $M_0(x_0;\, y_0)$ має вигляд

$$y-y_0=k(x-x_0), \tag{3}$$

де $k=y'(x_0)$. Якщо підставити (2) в (3) і врахувати, що точка $M_0(x_0;\, y_0)$ лежить на параболі, то отримаємо шукане рівняння дотичної до параболи (1) у точці $M_0(x_0;\, y_0)$:

$$y-y_0=\frac{p}{y_0}(x-x_0)\Leftrightarrow yy_0-y_0{}^2=px-px_0\Leftrightarrow yy_0-2px_0=px-px_0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow yy_0=p(x+x_0). \tag{4}$$

Тепер знайдемо рівняння дотичної до параболи у точці $M_0(x_0;\, y_0)$, якщо цю параболу задано рівнянням

$$y=ax^2,\ a\neq 0. \tag{5}$$

Кутовий коефіцієнт дотичної у точці $M_0(x_0;\, y_0)$ дорівнює

$$k=2ax_0, \tag{6}$$

оскільки $y'=2ax$. Підставивши (6) в (3) і врахувавши, що точка $M_0(x_0;\, y_0)$ є точкою параболи, отримуємо шукане рівняння дотичної:

$$y-y_0=2ax_0(x-x_0)\Leftrightarrow y-ax_0{}^2=2ax_0x-2ax_0{}^2\Leftrightarrow y+ax_0{}^2=2ax_0x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y+y_0=2ax_0x. \tag{7}$$

Теорема 1. Дотична до параболи є бісектрисою кута FM_0D між фокальним радіусом M_0F точки дотику і перпендикуляром, опущеним із точки дотику на директрису.

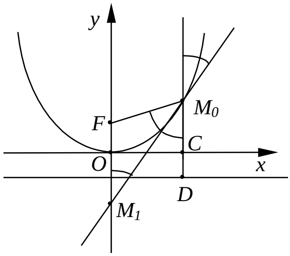


Рис. 1

Доведення. Проведемо дотичну (7) до параболи (5) у точці $M_0(x_0; y_0)$ (рис. 1). Нехай ця дотична перетинає вісь Oy у точці M_1. Щоб знайти координати цієї точки, покладемо в рівнянні (7) $x = 0$. Тоді $y = -y_0$ (рис. 1). За означенням параболи

$$M_0F = M_0D\,; \quad M_0D = M_0C + CD\,.$$

Але

$$y_0 = M_0C = |-y_0| = OM_1\,, \quad CD = OF\,.$$

Тоді $M_0D = OM_1 + OF = FM_1$. Трикутник M_1FM_0 рівнобедрений, оскільки $FM_1 = FM_0$. Тому $\angle FM_1M_0 = \angle FM_0M_1$, але $\angle FM_1M_0 = \angle M_1M_0D$. Отже, $\angle FM_0M_1 = \angle M_1M_0D$.

Теорему доведено.

Теорема 1 відображає важливу оптичну властивість параболічного дзеркала. Нехай у фокусі F розміщено джерело світла. Промені світла від джерела F, падаючи на параболу, відбиваються від неї за законом: кут падіння дорівнює куту відбиття. Згідно з тільки що доведеною рівністю кутів

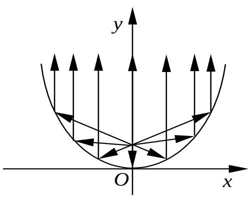


Рис. 2

це означає, що відбитий промінь паралельний до осі параболи. Іншими словами, всі відбиті від параболи промені поширюються паралельним пучком (рис. 2). Ця оптична властивість параболи є визначальною при будові прожекторів, автомобільних фар тощо.

Приклад 1. Написати рівняння дотичної до параболи

$$y^2 = 8x, \tag{8}$$

що паралельна прямій

$$2x + 2y + 3 = 0. \tag{9}$$

Розв'язання. За формулою (4) рівнянням дотичної до параболи (8) у точці $M_0(x_0; y_0)$ є рівняння

$$yy_0 = 4(x + x_0). \tag{10}$$

Знайдемо кутові коефіцієнти прямих (9) і (10), які позначимо відповідно через k_1 і k_2:

$$k_1 = -1, \; k_2 = \frac{4}{y_0}.$$

З умови паралельності прямих (9) і (10) випливає рівність їх кутових коефіцієнтів:

$$-1 = \frac{4}{y_0} \Leftrightarrow y_0 = -4.$$

Підставляючи $y_0 = -4$ в рівняння параболи (8), знаходимо абсцису x_0 точки дотику $M_0(x_0; y_0)$:

$$16 = 8x_0 \Leftrightarrow x_0 = 2.$$

Рівняння шуканої дотичної приймає вигляд

$$y(-4) = 4(x + 2) \Leftrightarrow x + y + 2 = 0.$$

Приклад 2. Із фокуса параболи $y^2 = 12x$ під гострим кутом α до осі Ox направлено промінь світла, причому $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$. Написати рівняння прямої, на якій буде знаходитись промінь, відбитий від параболи.

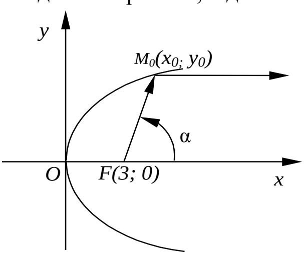


Рис. 3

Розв'язання. Фокус параболи має координати $F(3; 0)$. Нехай точка $M_0(x_0; y_0)$ параболи є такою, що кутовий коефіцієнт вектора $\overrightarrow{FM_0}$ дорівнює $\frac{3}{4}$ (рис. 3). Нагадаємо, що кутовий коефіцієнт вектора – це відношення його другої координати до першої.

Тоді

$$\frac{3}{4} = \frac{y_0}{x_0 - 3} \Leftrightarrow y_0 = \frac{3}{4}(x_0 - 3). \tag{11}$$

Оскільки $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4} > 0$, то $x_0 - 3 > 0$ і $y_0 > 0$. Знайдемо координати точки $M_0\left(x_0;\, y_0\right)$, підставивши (11) в рівняння параболи $y^2 = 12x$:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(x_0 - 3\right)^2 = 12x_0 \Leftrightarrow 3\left(x_0{}^2 - 6x_0 + 9\right) = 64x_0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x_0{}^2 - 82x_0 + 27 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 27 \\ x_0 = \frac{1}{3}. \end{array}\right.$$

Значення $x_0 = \frac{1}{3}$ не задовольняє умові задачі, оскільки $x_0 > 3$. Тому точка $M_0\left(x_0;\, y_0\right)$ має координати $\left(27;\, 18\right)$. Згідно з доведеною вище теоремою відбитий промінь лежить на прямій, яка паралельна осі Ox. Тому шуканою прямою є пряма $y = 18$.

§15. Парабола як графік квадратного тричлена

Теорема 1. Лінія, яка у деякій декартовій прямокутній системі координат визначається рівнянням

$$y = ax^2 + bx + c\,, \quad a \neq 0\,, \tag{1}$$

є параболою з віссю, паралельною осі Oy.

<u>Доведення</u>. Піддамо квадратний тричлен, що стоїть у правій частині рівняння (1), алгебраїчному перетворенню, яке називається виділенням повного квадрата:

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Звідси

$$y + \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2. \tag{2}$$

Виберемо нову координатну систему $\left\{O_1;\, \vec{i}';\, \vec{j}'\right\}$ так, щоб нові координати x' і y' будь-якої точки виражалися через старі координати x і y цієї ж точки за формулами

$$x' = x + \frac{b}{2a}, \quad y' = y + \frac{b^2 - 4ac}{4a}. \tag{3}$$

Тоді у новій системі координат рівняння (2) матиме вигляд

$$y' = a(x')^2. \tag{4}$$

Рівнянню (4) повинні задовольняти нові координати всіх точок, які лежать на лінії (1), а тому ця лінія є параболою.

Для побудови даної параболи потрібно спершу побудувати нову координатну систему. Для цього виразимо старі координати через нові:

$$x = -\frac{b}{2a} + x', \; y = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} + y'. \tag{5}$$

З (5) випливає, що

$$\begin{cases} O_1\left(-\dfrac{b}{2a}; -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}\right)_{O,\vec{i},\vec{j}}, \\ \vec{i}' = \vec{i}, \; \vec{j}' = \vec{j}. \end{cases} \tag{6}$$

Отже, перетворення (5) є паралельним перенесенням старої системи координат $\{O; \vec{i}; \vec{j}\}$ у точку O_1.

Виконавши побудову точок параболи, заданої у новій координатній системі рівнянням (4), ми цим самим отримаємо і точки, що лежать на лінії (1). Парабола (1) проходить через точку $O_1\left(-\dfrac{b}{2a}; -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}\right)_{O,\vec{i},\vec{j}}$, оскільки ця точка є початком нової координатної системи. Пряма, яка проходить через точку O_1 паралельно осі Ox, дотикається до параболи (1), оскільки ця пряма є віссю O_1x' нової координатної системи. Пряма, яка проходить через точку O_1 паралельно осі Oy, є віссю симетрії параболи (1). Параболу (1) зображено на рис. 1.

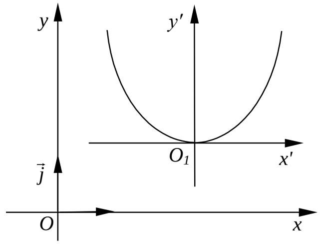


Рис. 1

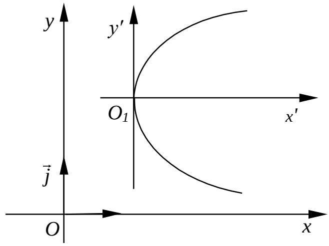


Рис. 2

Аналогічно теоремі 1 доводиться наступна теорема.

Теорема 2. Лінія, яку задано рівнянням

$$x = ay^2 + by + c\,,\ \ a \neq 0\,, \tag{7}$$

є параболою з віссю, паралельною осі Ox.

<u>*Доведення*</u>. Виділимо повний квадрат у правій частині рівняння (7):

$$x = a\left(y^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(y + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a\left(y + \frac{b}{2a}\right)^2. \tag{8}$$

Нову координатну систему вводимо за допомогою формул

$$x' = x + \frac{b^2 - 4ac}{4a}\,, \quad y' = y + \frac{b}{2a}$$

або

$$x = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} + x'\,,\ \ y = -\frac{b}{2a} + y'\,. \tag{9}$$

Формули (9) визначають паралельне перенесення старої координатної системи $\left\{O; \vec{i}; \vec{j}\right\}$ у точку

$$O_1\left(-\frac{b^2 - 4ac}{4a}; -\frac{b}{2a}\right); \quad \vec{i}' = \vec{i}\,,\ \ \vec{j}' = \vec{j}\,. \tag{10}$$

У новій координатній системі $\left\{O_1; \vec{i}'; \vec{j}'\right\}$ рівняння (7) визначає параболу

$$x' = a\left(y'\right)^2. \tag{11}$$

(див. рис. 2). Ця парабола проходить через точку $O_1\left(-\frac{b^2-4ac}{4a}; -\frac{b}{2a}\right)_{O,\bar{i},\bar{j}}$. Пряма, яка проходить через точку O_1 паралельно осі Oy, дотикається до параболи (7), а пряма, яка проходить через O_1 паралельно осі Ox, є віссю симетрії параболи.

Теорему доведено.

Зауваження 1. Після того, як встановлено, що рівняння (1) є рівнянням параболи з віссю, паралельною осі Oy, вершину цієї параболи можна знайти іншими різними способами. Вкажемо на два з них.

Перший спосіб. Із симетрії параболи відносно її осі випливає, що абсциса вершини є середнім арифметичним коренів x_1 і x_2 тричлена (1):

$$\frac{x_1+x_2}{2}.$$

Оскільки сума коренів квадратного тричлена (1) дорівнює $-\frac{b}{a}$, то для абсциси точки O_1 отримуємо $-\frac{b}{2a}$ (див. (6)). Підставивши знайдену абсцису в рівняння параболи (1), будемо мати ординату точки O_1. Ці міркування неприйнятні у випадку, коли корені тричлена (1) – комплексні.

Другий спосіб. У вершині дотична до параболи (1) паралельна осі Ox. Тому похідна $\frac{dy}{dx}$ дорівнює нулю:

$$\frac{dy}{dx}=2ax+b=0 \Leftrightarrow x=-\frac{b}{2a}.$$

Вкажемо на вплив параметрів a, b, c на графік квадратного тричлена (1).

1°. Якщо $a>0$, то парабола опукла вниз (розбігається вгору); якщо $a<0$, то парабола опукла вгору (розбігається вниз).

2°. Чим менше $|a|$, тим ширшою є парабола.

3°. Якщо $b=0$, то вершина параболи знаходиться на осі Oy, яка є віссю параболи. При $b\neq 0$ вісь параболи зсувається вліво або вправо.

4°. Якщо $c=0$, парабола проходить через початок координат.

Приклад 1. Для параболи $y=-2x^2+4x-3$ визначити координати вершини, вісь параболи, напрям опуклості, точки перетину з осями координат.

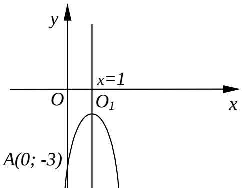


Рис. 3

Розв’язання. Згідно з (6) знаходимо координати вершини параболи: $O_1(1;-1)$. Оскільки $a<0$, то парабола опукла вгору (розбігається вниз). Віссю параболи є пряма $x=1$. Оскільки $D=b^2-4ac<0$, то парабола не перетинає осі Ox. З віссю Oy парабола перетинається у точці $A(0;-3)$. Графік параболи зображено на рис. 3.

Рівняння поверхні та лінії у просторі

§1. Рівняння поверхні

Основним питанням в аналітичній геометрії на площині було питання про задання плоских ліній за допомогою рівнянь. Як ми вже знаємо (див. §1 гл. XIII), будь-яке рівняння $F(x,\ y)=0$, де x і y вважаються координатами точок площини, визначає, взагалі кажучи, деяку лінію на координатній площині. Вислів “взагалі кажучи” означає, що можливі певні винятки. Наприклад, рівнянню $x^2+y^2+1=0$ не відповідає на площині жоден геометричний образ, оскільки не існує дійсних чисел, які задовольняють цьому рівнянню. Поняття рівняння лінії дає можливість звести геометричні задачі до алгебраїчних – саме у цьому і полягає одна з основних ідей аналітичної геометрії.

У просторі трьох вимірів x, y, z поряд з одновимірними образами (лініями) доводиться розглядати ще й двовимірні образи (поверхні). Питання про рівняння поверхні багато в чому аналогічне питанню про рівняння плоскої лінії.

Розглянемо деяке рівняння з трьома змінними $x,\ y,\ z$

$$F(x,\ y,\ z)=0. \tag{1}$$

Введемо у просторі прямокутну декартову систему координат. Числа $x,\ y,\ z$ будемо вважати координатами деякої точки $M(x;\ y;\ z)$ у цій системі. Для координат $(x;\ y;\ z)$ одних точок рівняння (1) задовольняється, а для координат інших точок – ні. Розглянемо множину S всіх точок простору, координати яких задовольняють рівнянню (1). Ця множина точок є, взагалі кажучи, деякою поверхнею у просторі. Дійсно, розглянемо спочатку випадок, коли рівняння (1) можна розв’язати відносно z, тобто виразити z як функцію від x і y:

$$z=f(x,\ y). \tag{2}$$

Покладемо $x=x_1$, $y=y_1$ і обчислимо значення

$$z_1=f(x_1,\ y_1).$$

Трійка чисел $x_1,\ y_1,\ z_1$ є розв’язком рівняння (2).

Означення 1. Сукупність всіх пар чисел x і y, для яких $z=f(x,\ y)$ приймає дійсне значення, називається областю визначення, заданою рівнянням (2). Позначимо цю область через D.

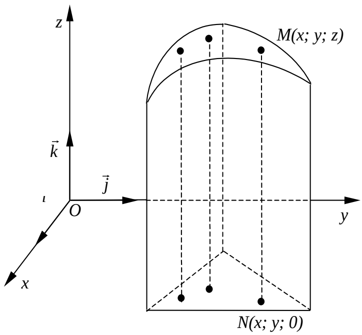


Рис. 1

Введемо прямокутну декартову систему координат (рис. 1) і розглянемо у площині xOy всі можливі точки $N(x;\, y;\, 0)$, координати x і y яких, як пари чисел, входять до області визначення D. Через кожну з цих точок проведемо перпендикуляр до площини xOy і відкладемо на ньому відрізок NM, що дорівнює (з врахуванням знака) відповідному значенню z, обчисленому з рівняння (2).

Множина S всіх точок $M(x;\, y;\, f(x,\, y))$ утворює деяку поверхню.

Чому ми стверджуємо, що геометричне місце кінців перпендикулярів є саме поверхнею, а не лінією? Тому, що це геометричне місце містить стільки ж точок, скільки їх містить площина. Можна, наприклад, уявити собі, що кожну точку площини піднято чи опущено вздовж перпендикуляра (рис. 1). Іншими словами, геометричне місце кінців перпендикулярів простягається над всією площиною або над її частиною, тобто над кожною точкою площини знаходиться одна точка цього геометричного місця.

Перейдемо до рівняння (1).

Означення 2. Якщо задано рівняння (1), то поверхнею, що визначається цим рівнянням, називається множина S всіх точок простору, координати яких задовольняють даному рівнянню.

Означення 3. Якщо задано деяку поверхню S у просторі, то рівнянням цієї поверхні називається таке рівняння (1), яке визначає поверхню, що співпадає з поверхнею S.

Приклад 1. Знайти рівняння сфери (сфера – поверхня кулі) з центром у початку координат і з радіусом R.

Розв'язання. Всі точки цієї сфери знаходяться на відстані R від початку координат. Візьмемо довільну точку $M(x;\, y;\, z)$, яка лежить на сфері, і запишемо для неї цю умову:

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=R.$$

Звільнимось від радикала:

$$x^2+y^2+z^2=R^2. \tag{3}$$

Рівняння (3) є шуканим рівнянням сфери. Йому задовольняють точки сфери і тільки вони. Для точок, які лежать всередині кулі, обмеженої сферою (3), маємо

$$x^2+y^2+z^2<R^2,$$

а для точок, що знаходяться зовні кулі –

$$x^2+y^2+z^2>R^2.$$

Приклад 2. Знайти рівняння координатної площини xOy.

Розв'язання. Ця площина є геометричним місцем точок простору, для яких

$$z = 0. \tag{4}$$

Будь-яка точка $M(x; y; z)$, яка задовольняє рівнянню (4), лежить на площині xOy. Аналогічно, $x = 0$ є рівнянням координатної площини yOz, а $y = 0$ – координатної площини xOz.

Аналогічно поняттю алгебраїчної лінії на площині вводиться поняття алгебраїчної поверхні.

Означення 4. Поверхня називається алгебраїчною, якщо її рівняння (1) є алгебраїчним. Степінь рівняння алгебраїчної поверхні називається порядком цієї поверхні.

Так, сфера (3) є поверхнею другого порядку, а площина (4) – поверхнею першого порядку.

Якщо поверхня визначається не алгебраїчним рівнянням, то її називають неалгебраїчною або трансцендентною.

Вивчаючи рівняння $F(x, y) = 0$ на площині, ми переконались в існуванні особливих випадків, коли таке рівняння визначає не криву, а тільки одну точку або сукупність ізольованих одна від одної точок. Траплялось також, що рівняння не визначало жодного геометричного образу.

Аналогічні особливі випадки мають місце і для рівнянь вигляду (1): у деяких випадках таке рівняння визначає не поверхню, а тільки криву у просторі або окрему точку цього простору, або сукупність ізольованих одна від одної точок, або у просторі немає жодної точки $M(x; y; z)$, координати якої задовольняли б цьому рівнянню.

Наведемо ряд прикладів.

Приклад 3. Рівняння $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 0$ задовольняється, якщо одночасно $x = a$ і $y = b$. Але у просторі ці значення визначають пряму, паралельну осі Oz, а не поверхню.

Приклад 4. Рівняння $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = 0$ задовольняється, якщо одночасно $x = a$, $y = b$, $z = c$. У цьому випадку рівняння визначає одну єдину точку $M(a; b; c)$ простору.

Приклад 5. Рівнянню $\left(x^2-1\right)^2 + \left(y^2-1\right)^2 + \left(z^2-1\right)^2 = 0$ задовольняють координати восьми ізольованих одна від одної точок $M_1(1; 1; 1), \ldots, M_8(-1; -1; -1)$ простору і тільки цих точок.

Приклад 6. Рівнянню $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ не задовольняють координати жодної точки простору.

За винятком наведених особливих випадків рівняння (1) визначає у просторі поверхню. Тому кажуть, що рівняння (1) у просторі визначає, взагалі кажучи, поверхню.

§2. Рівняння циліндричної поверхні з твірними, паралельними одній з координатних осей

<u>Означення 1</u>. Поверхня називається циліндричною, якщо її можна утворити переміщенням прямої паралельно самій собі вздовж деякої лінії l. Ця лінія l називається ***напрямною*** циліндричної поверхні, а всі можливі положення прямої, що рухається – ***твірними*** цієї поверхні (рис. 1).

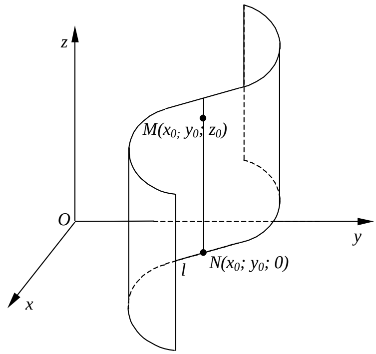


Рис. 1

Розглянемо частинний випадок, коли рівняння

$$F(x,\ y,\ z)=0$$

не містить однієї з координат. Нехай, наприклад, дано рівняння

$$F(x,\ y)=0\,. \qquad (1)$$

Особливістю рівняння (1) є те, що ним встановлюється зв'язок лише між першими двома координатами. Третя координата може приймати довільні значення, які не залежать від значень перших двох координат.

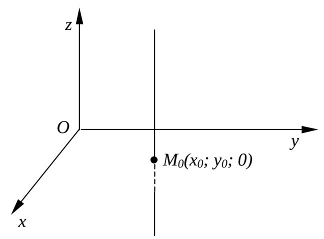


Рис. 2

Наприклад, якщо точка $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ задовольняє рівнянню (1), то точки з координатами $(x_0;\ y_0;1)$, $(x_0;\ y_0;\ 15)$ і, взагалі, $(x_0;\ y_0;\ z)$ також задовольняють рівнянню (1) незалежно від z. Геометрично це означає, що всі точки перпендикуляра до площини *xOy*, проведеного через точку $M_0(x_0;\ y_0;\ 0)$ (рис. 2), задовольняють рівнянню (1). Ці міркування формують уяву про поверхню (1) як про циліндричну поверхню.

Теорема 1. Якщо рівняння з двома змінними визначає у просторі деяку поверхню, то ця поверхня циліндрична.

<u>Доведення</u>. Нехай дано рівняння (1) $F(x,\ y)=0$, яке на площині xOy у деякій декартовій прямокутній системі координат визначає лінію l. Розглянемо циліндричну поверхню S, твірні якої паралельні осі Oz, а напрямною S є лінія l (рис. 1). Нехай $M(x_0;\ y_0;\ z_0)$ – довільна точка, а $N(x_0;\ y_0;\ 0)$ – її проекція на площину xOy. Якщо M належить S, то N належить l, і координати точки N задовольняють заданому рівнянню (1): $F(x_0,\ y_0)=0$. Але тоді цьому рівнянню задовольняють і числа $x_0,\ y_0,\ z_0$, оскільки $F(x,\ y)$ не залежить від z. Отже, якщо точка M лежить на

поверхні S, то її координати задовольняють рівнянню (1). Навпаки, нехай координати точки $M\left(x_0;\, y_0;\, z_0\right)$ задовольняють рівнянню (1). Тоді цьому рівнянню задовольняють і координати точки $N\left(x_0;\, y_0;\, 0\right)$ – проекції точки M на площину xOy. Тому точка N лежить на лінії l, а точка M – на поверхні S.

Якщо точка M знаходиться поза поверхнею S, то N не лежить на l і координати точки M не задовольняють рівнянню (1).

Отже, рівняння (1) визначає у просторі циліндричну поверхню S. Теорему доведено.

Аналогічними рівняннями циліндричних поверхонь з твірними, паралельними осі Oy і осі Oz, є відповідно рівняння

$$F\left(x,\, z\right)=0 \tag{2}$$

і

$$F\left(y,\, z\right)=0\,. \tag{3}$$

Якщо за напрямні циліндричних поверхонь брати різні криві другого порядку, які лежать у площині xOy, а за напрям твірних вибрати напрям осі Oz, то отримаємо наступні циліндричні поверхні та їх рівняння:

1*. *Еліптичний циліндр

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\cdot \tag{4}$$

Віссю цього циліндра є вісь Oz (рис. 3).

2*. *Гіперболічний циліндр

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,. \tag{5}$$

Віссю циліндра є вісь Oz (рис. 4).

3*. *Параболічний циліндр

$$y=ax^2\,. \tag{6}$$

Віссю циліндра є вісь Oz (рис. 5).

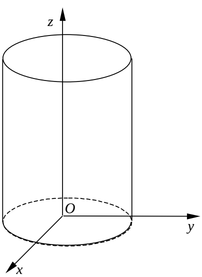


Рис. 3

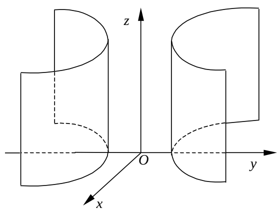


Рис. 4

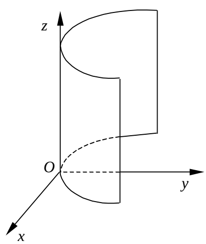


Рис. 5

Частинним випадком еліптичного циліндра є круговий циліндр з рівнянням

$$x^2 + y^2 = R^2. \tag{7}$$

Віссю цього циліндра є вісь Oz.

Всі ці поверхні називаються ***циліндрами другого порядку***, оскільки їх рівняння є рівняннями другого степеня відносно змінних координат. Різних типів циліндрів другого порядку стільки ж, скільки і різних типів кривих другого порядку.

Аналогічно, можна записати рівняння циліндрів другого порядку з осями Ox та Oy. Рекомендується зробити це самостійно

§3. Рівняння лінії у просторі

В аналітичній геометрії на площині одне рівняння з двома змінними x і y визначає множину точок площини, координати $(x;\, y)$ яких задовольняють цьому рівнянню, тобто геометричне місце точок, яке є лінією. Два сумісних рівняння з двома змінними визначають одну чи декілька точок площини.

У просторі ситуація дещо інша, оскільки розглядаються рівняння з трьома змінними. Одне рівняння з трьома змінними x, y, z визначає множину точок простору, координати $(x;\, y;\, z)$ яких задовольняють цьому рівнянню, тобто геометричне місце точок, яке є поверхнею.

Якщо задано систему двох сумісних рівнянь

$$\begin{cases} F(x,\, y,\, z) = 0 \\ \Phi(x,\, y,\, z) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

то у просторі існує геометричне місце точок, координати яких задовольняють обом рівнянням. Це геометричне місце бідніше своїми точками, ніж поверхня, оскільки дві умови, накладені на координати, є більш сильним обмеженням, ніж одна.

Рівняння

$$F(x,\, y,\, z) = 0 \tag{1_1}$$

зображається деякою поверхнею. Всі точки, координати яких задовольняють рівнянню (1), лежать на цій поверхні.

Рівняння

$$\Phi(x,\, y,\, z) = 0 \tag{1_2}$$

зображається іншою поверхнею. Всі точки, координати яких задовольняють рівнянню (1_2), лежать на цій іншій поверхні.

Ми шукаємо точки, координати яких задовольняють одночасно і рівнянню (1_1), і рівнянню (1_2), тобто системі рівнянь (1). Такі точки лежать одночасно на обох поверхнях, тобто на лінії перетину цих поверхонь.

Отже, приходимо до такого означення.

Означення 1. Рівнянням лінії у просторі є система (1) двох рівнянь з трьома змінними, якій задовольняють координати всіх точок даної лінії і тільки цих точок, тобто координати точок, які не лежать на даній лінії, не задовольняють обом рівнянням системи (1) одночасно. Лінія, яка зображає пару рівнянь, є лінією перетину поверхонь, які зображають кожне з цих двох рівнянь окремо.

Приклад 1. Знайти рівняння координатних осей.

Розв'язання. У всіх точок осі Oz і тільки у них координати x і y дорівнюють нулю. Тому рівнянням осі Oz є система

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Перше з рівнянь (2) є рівнянням площини yOz, а друге – площини xOz. Лінія перетину цих площин і є віссю Oz.

Аналогічно, системи

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \tag{3}$$

є рівняннями відповідно координатних осей Ox і Oy.

Приклад 2. У просторі рівняння

$$x^2 + y^2 = R^2 \tag{4}$$

визначає круговий циліндр з твірними, паралельними осі Oz. Написати рівняння напрямної, яка лежить у площині xOy.

Розв'язання. Напрямною кругового циліндра, яка лежить у площині xOy, є коло з рівнянням

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ z = 0. \end{cases}$$

Важливо відмітити, що в той час, як пара рівнянь повністю визначає деяку лінію, обернене твердження є хибним: якщо задано лінію у просторі і потрібно знайти її рівняння, то це можна зробити нескінченною кількістю способів, оскільки існують різні пари поверхонь, що перетинаються по одній і тій же лінії.

Щоб переконатися у цьому, повернемося до системи (1), яка визначає деяку лінію. Складемо рівняння

$$\lambda F(x,\ y,\ z) + \mu\Phi(x,\ y,\ z) = 0, \tag{5}$$

де λ і μ – довільні дійсні числа, не рівні одночасно нулю.

Рівняння (5) є рівнянням поверхні. Оскільки координати довільної точки, що лежить на лінії, задовольняють одночасно рівнянням $F(x, y, z)=0$ і $\Phi(x, y, z)=0$, то вони будуть задовольняти і рівнянню (5) для довільних значень λ і μ. Для різних значень λ і μ рівняння (5) буде визначати різні поверхні, кожна з яких проходить через лінію (1). Дану лінію можна задати рівняннями будь-яких двох поверхонь, що проходять через неї.

§4. Параметричне задання кривих у просторі. Гвинтова лінія

4.1. У §3 даної глави показано, що кожну лінію у просторі можна задати як лінію перетину двох поверхонь за допомогою системи двох рівнянь, кожне з яких визначає одну з цих поверхонь. Поряд з цим часто доводиться задавати лінію у просторі параметричними рівняннями. Параметричне задання лінії у просторі повністю аналогічне параметричному заданню лінії на площині. Означення 1 §6 гл. XV для випадку просторової лінії набуває вигляду.

Означення 1. Параметричними рівняннями лінії у декартовій прямокутній системі координат називаються рівняння вигляду

$$x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t),\ a\le t\le b. \qquad (1)$$

Кожному значенню t з $[a, b]$ відповідає точка $M\big(x(t); y(t); z(t)\big)$ даної лінії і для довільної точки M лінії знайдеться таке значення $t\in[a, b]$, що $x(t)$, $y(t)$ і $z(t)$ будуть координатами цієї точки M. Змінна t називається параметром.

Це нове означення лінії співпадає зі старим означенням лінії з §3. Дійсно, розв’язуючи, наприклад, третє рівняння (1) відносно t, тобто виражаючи t через z, і підставляючи знайдений вираз у перші два рівняння (1), отримаємо для змінних x і y вирази через змінну z:

$$x=\varphi_1(z),\ y=\varphi_2(z). \qquad (2)$$

Кожне з рівнянь (2) визначає поверхню і лінія є перетином цих поверхонь, тобто приходимо до означення лінії з §3.

Навпаки, якщо лінію задано рівняннями вигляду (2), то покладаючи $z=\varphi_3(t)$, де $\varphi_3(t)$ – довільна функція, ми отримуємо рівняння вигляду (1):

$$x=\varphi_1\left[\varphi_3(t)\right],\ y=\varphi_2\left[\varphi_3(t)\right],\ z=\varphi_3(t)$$

або

$$x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t),$$

де введено позначення

$$x(t)=\varphi_1\left[\varphi_3(t)\right],\ y(t)=\varphi_2\left[\varphi_3(t)\right],\ z(t)=\varphi_3(t).$$

Приклад 1. Знайти параметричні рівняння лінії

$$\begin{cases} y^2+z^2=R^2 \\ x=a. \end{cases}$$

Розв'язання. Покладемо $z=R\sin t$. Тоді

$$y=\sqrt{R^2-z^2}=\sqrt{R^2-R^2\sin^2 t}=R\cos t\ .$$

Отже, маємо параметричні рівняння

$$x=a\ ,\ \ y=R\cos t\ ,\ \ z=R\sin t\ . \qquad (3)$$

Перед радикалом ми взяли лише знак "+", оскільки знак "-" перед $\cos t$ не дає нічого нового. Точку $x=a$, $y=-R\cos t$, $z=R\sin t$ можна отримати з рівнянь (3) заміною t на $\pi-t$.

Приклад 2. Лінію задано параметричними рівняннями

$$x=3\sin t\ ,\ \ y=4\sin t\ ,\ \ z=5\cos t\ .$$

Записати рівняння лінії, як лінії перетину двох поверхонь.

Розв'язання. Піднесемо всі рівняння до квадрата і додамо почленно. В результаті отримуємо

$$x^2+y^2+z^2=9\sin^2 t+16\sin^2 t+25\cos^2 t \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2=25\ .$$

З першого і другого рівняння виключимо параметр t:

$$4x-3y=0\ .$$

Отже, лінія є лінією перетину поверхонь

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=25 \\ 4x-3y=0 \end{cases}.$$

4.2. **<u>Означення 2</u>**. Гвинтовою лінією називається крива, яку описує точка, що рухається наступним чином: вона рівномірно обертається навколо деякої нерухомої осі на постійній відстані від неї і одночасно рівномірно переміщується у напрямі, паралельному цій осі.

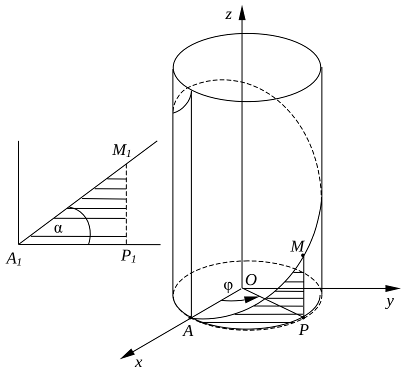


Рис. 1

Рух точки можна охарактеризувати ще так: проекція точки на площину, перпендикулярну осі, рівномірно рухається по деякому колу, центр якого знаходиться на цій осі; в той же час проекція точки на саму вісь рівномірно рухається вздовж цієї осі.

Наочно гвинтову лінію можна отримати, якщо намотувати на циліндр площину, на якій проведено пряму. Ця пряма і перейде у гвинтову лінію на циліндрі (рис. 1). Вибрана пряма на площині може мати будь-який напрям, крім горизонтального (тоді вона перейде не в гвинтову лінію, а в коло) і вертикального (тоді вона перейде не в гвинтову лінію, а в пряму). Крім того, якщо кут α (рис. 1) – від'ємний або більший за 90^0, то при намотуванні площини на циліндр у тому напрямі, який показано на рис. 1, гвинтова лінія "піде" не доверху, а донизу. Тому приймаємо, що $0 < \alpha < 90^0$.

Позначимо через R радіус циліндра, а через α – кут між заданою прямою A_1M_1 площини і прямою A_1P_1, яка намотується на коло основи. Осі координат виберемо так: за вісь Oz візьмемо вісь циліндра, за вісь Ox – радіус основи, який проходить через ту точку A кола, що й гвинтова лінія. Трикутник $A_1P_1M_1$ при намотуванні площини на циліндр перейде в заштриховану на рис. 1 частину циліндра APM. Введемо для кута AOP позначення φ (рис. 1) і виразимо через φ координати точки M. Оскільки P є проекцією точки M на площину xOy, то проектуючи OP на осі Ox і Oy, ми отримаємо відповідно x і y для точки P, а тому і для точки M:

$$x = R\cos\varphi, \; y = R\sin\varphi.$$

Знаходимо z:

$$z = PM = P_1M_1 = A_1P_1 \operatorname{tg}\alpha.$$

Приймаючи до уваги, що

$$A_1P_1 = \overset{\frown}{AP} = R\varphi,$$

отримуємо

$$z = R\varphi \operatorname{tg}\alpha.$$

Отже, параметричними рівняннями гвинтової лінії є рівняння

$$x = R\cos\varphi, \; y = R\sin\varphi, \; z = R\varphi\operatorname{tg}\alpha, \quad 0 < \alpha < 90^0.$$

Оскільки кут α постійний, то можна позначити коефіцієнт пропорційності $R\operatorname{tg}\alpha$ однією буквою b. Тоді параметричні рівняння гвинтової лінії перепишуться так:

$$x = R\cos\varphi, \; y = R\sin\varphi, \; z = b\varphi. \tag{4}$$

За означенням гвинтової лінії, при зміщенні точки P вздовж кола на рівні кути висота точки M над площиною xOy, тобто координата z, буде збільшуватись на рівні відрізки. Зокрема, кожного разу, як тільки точка P буде здійснювати повний оберт, z буде збільшуватись на деяку постійну величину l. Ця величина l називається кроком чи ходом гвинтової лінії. Можна ще сказати, що крок чи хід гвинтової лінії – це відстань між послідовними точками перетину гвинтової лінії з якою-небудь однією твірною циліндра, тобто $l = M_1M_2 = M_2M_3 = \cdots$ (рис. 2).

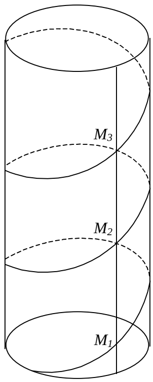


Рис. 2

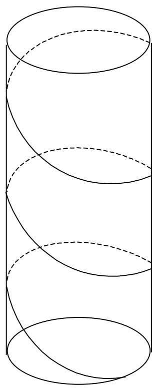


Рис. 3

Щоб обчислити хід гвинтової лінії, потрібно у третій формулі (4) надати φ послідовних значень φ_0 і $\varphi_0 + 2\pi$, а потім від другого значення z відняти перше:

$$l = \left(2\pi + \varphi_0\right)b - b\varphi_0 = 2\pi b = 2\pi R \operatorname{tg}\alpha = C \operatorname{tg}\alpha ,$$

де C – довжина кола основи циліндра.

Нарізка будь-якого штора чи гвинта має вигляд гвинтової лінії. Дійсно, коли б вертикальне просування по цій нарізці, тобто поступальне просування гвинта, не було пропорційним куту повороту гвинта, а отже, хід нарізки не був постійним, то кожен наступний оберт нарізки не зміг би пройти шляхом, прокладеним попереднім обертом.

Здебільшого використовуються гвинти і штори з нарізками у вигляді правої гвинтової лінії, яка характеризується певним зв'язком між обертанням гвинта і поступальним рухом, який він отримує при цьому. А саме, якщо правий гвинт (гвинт з нарізкою у вигляді правої гвинтової лінії) укручувати паралельно осі Oz, обертаючи його в додатному напрямку (тобто, від додатної частини Ox до додатної частини осі Oy по найменшому куту), то він буде угвинчуватися по осі Oz у додатному напрямку.

Гвинтова лінія, зображена на рис. 1, 2 – права.

У лівого гвинта зв'язок між обертальним і поступальним рухами – протилежний у порівнянні з правим гвинтом. Звідси випливає, що для одержання лівої гвинтової лінії потрібно у правій гвинтовій лінії змінити або напрям обертання, або напрям поступального руху. Перше аналітично досягається заміною φ на $-\varphi$ в рівняннях (4), а друге – заміною знака у α або у b. Якщо b – від'ємне, то при намотуванні площини на циліндр у тому ж напрямку, що і на рис. 1, гвинтова лінія “піде” донизу. Отже, рівняння (4) при $b > 0$ зображають праву гвинтову лінію, а при $b < 0$ – ліву.

На рис. 2 і 3 зображено дві гвинтові лінії – праву і ліву з однаковим радіусом основи циліндра і однаковим ходом. Ці дві лінії не конгруентні, тобто їх не можна сумістити шляхом того чи іншого руху у просторі, як не можна сумістити праву та ліву системи координат. Дзеркальне відображення правої гвинтової лінії є лівою гвинтовою лінією.

Якщо виключити φ з перших двох рівнянь (4), то отримаємо рівняння

$$x^2 + y^2 = R^2, \tag{5}$$

яке описує проекцію гвинтової лінії на основу циліндра. Це – коло, що очевидно і безпосередньо з означення гвинтової лінії. Якщо виключаючи φ з двох останніх рівнянь (4), то отримаємо рівняння

$$y = R\sin\frac{z}{b},$$

яке описує проекцію гвинтової лінії на площину осьового перерізу yOz. Ця проекція є синусоїдою. Проекція гвинтової лінії на площину осьового перерізу xOz описується рівнянням

$$x = R\cos\frac{z}{b}.$$

За формою вона нічим не відрізняється від попередньої лінії, проте розміщена відносно осей по-іншому.

Отже, гвинтову лінію можна розглядати як перетин циліндра $x^2 + y^2 = R^2$ з синусоїдальним циліндром $y = R\sin\frac{z}{b}$.

Площина у просторі

§1. Загальне рівняння площини

Розв’язання багатьох задач на площину у просторі з використанням векторно-аналітичного способу аналогічне розв’язанню відповідних задач для прямої на площині. Тому ми рекомендуємо читачу не розпочинати вивчення даного параграфа, поки він не відновить у пам’яті весь матеріал §2, 3, 4, 5 глави XIII і не спробує самостійно узагальнити цей матеріал на випадок площини.

Означення 1. Лінійним рівнянням відносно змінних x, y і z називається рівняння вигляду

$$Ax + By + Cz + D = 0\,, \tag{1}$$

де A, B, C – сталі, які не дорівнюють нулю одночасно, тобто $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Теорема 1. Будь-яку площину у декартовій прямокутній системі координат можна задати лінійним рівнянням (1). Навпаки, будь-яке лінійне рівняння (1) відносно декартових координат є рівнянням площини.

Доведення. Нехай у просторі задано декартову прямокутну систему координат $\left\{O; \vec{i}\,; \vec{j}; \vec{k}\right\}$ і деяку площину α (рис. 1).

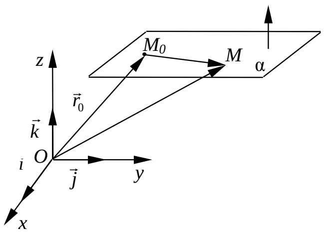


Рис. 1

Площина α однозначно визначається точкою M_0, через яку вона проходить, і ненульовим вектором $\vec{N}\left(A; B; C\right)$, перпендикулярним до цієї площини. Нехай M – змінна точка площини α. Введемо радіуси-вектори точок M_0 і M:

$$\vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0} \quad \text{і} \quad \vec{r} = \overrightarrow{OM}\,.$$

Вектор $\overrightarrow{M_0M}$, який з’єднує задану точку M_0 площини α з довільною точкою M цієї площини, перпендикулярний вектору $\vec{N}$. Тому скалярний добуток цих векторів дорівнює нулю:

$$\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{N} = 0 \Leftrightarrow \left(\vec{r} - \vec{r}_0\right) \cdot \vec{N} = 0\,. \tag{2}$$

Якщо точка M не лежить на площині α, то умова перпендикулярності векторів $\overrightarrow{M_0M}$ і $\vec{N}$ порушується, а тому рівність (2) не виконується. Отже, рівнянню (2) задовольняють радіуси-вектори $\vec{r}$ тільки тих точок, які лежать на площині α, тобто рівняння (2) є рівнянням цієї площини.

Якщо точки M_0 і M мають координати $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$ і $M(x;\, y;\, z)$, то в координатній формі рівняння (2) набуває вигляду

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow Ax+By+Cz+D=0\,, \tag{3}$$

де $D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$.

У вигляді (2) або (3) можна подати рівняння будь-якої площини, оскільки будь-яка площина перпендикулярна деякому вектору $\vec{N}$ і проходить через деяку точку M_0.

Доведемо обернене: всі точки, координати яких задовольняють рівнянню (1) або (3), заповнюють площину, перпендикулярну вектору $\vec{N}(A;\, B;\, C)$. Для доведення знайдемо який-небудь частинний розв'язок рівняння (3). Щоб це зробити, достатньо в рівнянні (3) двом невідомим, наприклад, x і y надати довільних значень $x=x_0$, $y=y_0$, а третє невідоме z_0 знайти з цього рівняння. Отже, нехай x_0, y_0, z_0 – розв'язок рівняння (3), тобто

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0\,. \tag{4}$$

Віднявши від рівняння (3) тотожність (4), отримуємо рівняння, рівносильне (3):

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0\,. \tag{5}$$

У рівнянні (5) $x,\, y,\, z$ будемо розглядати як координати довільної точки M, тобто $\vec{r}=\overrightarrow{OM}(x;\, y;\, z)$, а частинний розв'язок $x_0,\, y_0,\, z_0$ – як координати фіксованої точки $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$, тобто $\vec{r}_0=\overrightarrow{OM_0}(x_0;\, y_0;\, z_0)$, деякої поверхні S.

У векторній формі рівняння (5) має вигляд

$$(\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot\vec{N}=0\,.$$

З останнього рівняння випливає, що всі точки, координати яких задовольняють цьому рівнянню, а отже і рівносильному йому рівнянню (1), заповнюють площину, яка проходить через точку $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{N}(A;\, B;\, C)$.

Теорему 1 доведено.

<u>Означення 2</u>. Рівняння (1) називається загальним рівнянням площини, а вектор $\vec{N}(A;\, B;\, C)$ – нормальним вектором площини.

Зауваження 1. Вектор

$$\vec{a}(m;\, n;\, p)$$

буде паралельним до площини (1) тоді і тільки тоді, коли він перпендикулярний до нормального вектора $\vec{N}(A; B; C)$ цієї площини, тобто

$$\vec{a} \cdot \vec{N} = 0 \Leftrightarrow Am + Bn + Cp = 0 . \qquad (6)$$

Отже, рівність (6) є необхідною і достатньою умовою паралельності вектора $\vec{a}$ і площини (1).

Зауваження 2. Легко перевірити, що вектори

$$\vec{a}_1(B; -A; 0),\ \vec{a}_2(C; 0; -A),\ \vec{a}_3(0; C; -B)$$

паралельні до площини (1).

Дійсно,

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{N} = AB - BA + 0 = 0 ; \quad \vec{a}_2 \cdot \vec{N} = AC + 0 - CA = 0 ; \quad \vec{a}_3 \cdot \vec{N} = 0 + BC - CB = 0 .$$

§2. Дослідження загального рівняння площини

У загальному рівнянні площини α деякі з коефіцієнтів можуть дорівнювати нулю. Вияснимо, як це впливає на розміщення площини α у просторі.

Розглянемо наступні випадки:

1º. Нехай $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$, $D = 0$. Тоді загальне рівняння площини α приймає вигляд

$$Ax + By + Cz = 0 . \qquad (1)$$

Координати точки $O(0; 0; 0)$ задовольняють рівнянню (1), тому площина α проходить через початок координат (рис. 1)

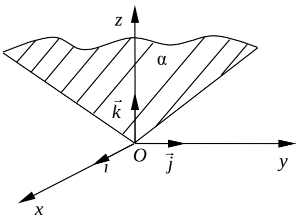


Рис. 1

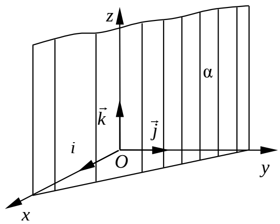


Рис. 2

2º. Нехай $A \neq 0$, $B \neq 0$, $D \neq 0$, $C = 0$. Тоді загальне рівняння площини прийме вигляд

$$Ax + By + D = 0 . \qquad (2)$$

Нормальним вектором площини (2) є вектор $\vec{N}(A; B; 0)$. У цьому випадку вектор $\vec{k}(0; 0; 1)$ буде паралельним до площини (2), оскільки умова (6) §1 виконується. Дійсно,

$$\vec{N} \cdot \vec{k} = A \cdot 0 + B \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0 .$$

Отже, площина (2) і вектор $\vec{k}$ паралельні. Але оскільки ця площина не проходить через початок координат $(D \neq 0)$, то вона паралельна до осі Oz (рис. 2).

3°. Нехай $A \neq 0$, $C \neq 0$, $D \neq 0$, $B = 0$. Тоді загальне рівняння площини набуває вигляду

$$Ax + Cz + D = 0 . \tag{3}$$

Ця площина паралельна вектору $\vec{j}(0; 1; 0)$, оскільки

$$\vec{N} \cdot \vec{j} = A \cdot 0 + 0 \cdot 1 + C \cdot 0 = 0 .$$

Крім цього, $D \neq 0$. Тому площина (3) паралельна осі Oy (рис. 3).

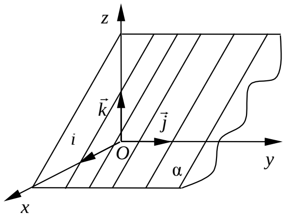


Рис. 3

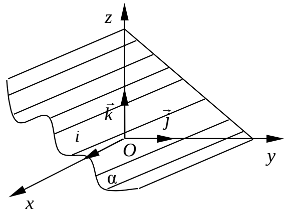


Рис. 4

4°. Нехай $B \neq 0, C \neq 0, D \neq 0, A = 0$. Тоді площина визначається рівнянням

$$By + Cz + D = 0 \tag{4}$$

і паралельна осі Ox (рис. 4).

5°. Якщо у випадках 2°, 3°, 4° умову $D \neq 0$ замінити на умову $D = 0$, то отримаємо рівняння площини α відповідно

$$Ax + By = 0 , \tag{5}$$

$$Ax + Cz = 0 , \tag{6}$$

$$By + Cz = 0 . \tag{7}$$

Оскільки $D = 0$, то площина (5) проходить через вісь Oz (рис. 5),

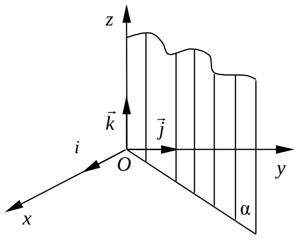


Рис. 5

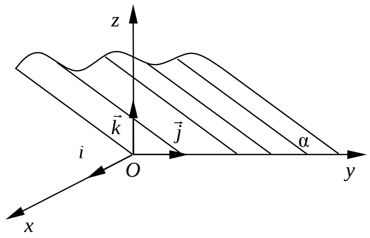


Рис. 6

площина (6) – через вісь Oy (рис. 6), а площина (7) – через вісь Ox (рис. 7).

6º. Нехай $A \neq 0,\ B = 0,\ C = 0,\ D \neq 0$. Тоді рівняння площини α має вигляд

$$Ax + D = 0. \tag{8}$$

У цьому випадку вектори $\vec{j}$ і $\vec{k}$ паралельні до площини α. Оскільки ця площина не проходить через початок координат $\left(D \neq 0\right)$, то вона паралельна координатній площині yOz (рис. 8).

7º. Якщо $A = 0,\ B \neq 0,\ C = 0,\ D \neq 0$, то площина

$$By + D = 0 \tag{9}$$

не проходить через початок координат і паралельна координатній площині xOz (рис. 9).

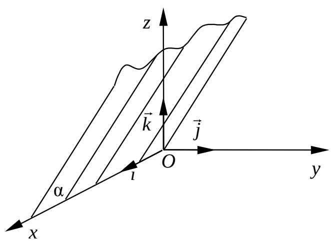


Рис. 7

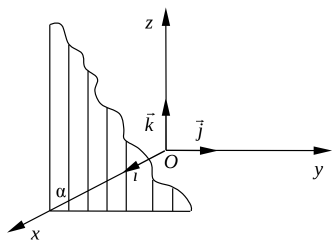


Рис. 8

8º. У випадку $A = 0,\ B = 0,\ C \neq 0,\ D \neq 0$ отримуємо площину α

$$Cz + D = 0, \tag{10}$$

паралельну координатній площині xOy (рис. 10).

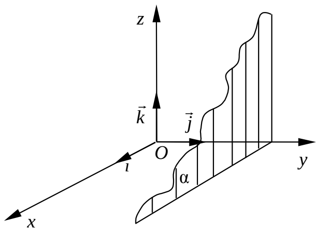


Рис. 9

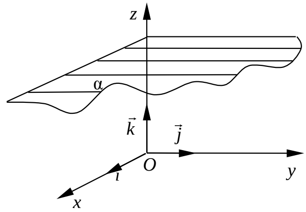


Рис. 10

9º. Якщо у випадках 6º, 7º, 8º покласти $D=0$, то рівняння площини α прийме вигляд відповідно

$$Ax=0 \Leftrightarrow x=0, \tag{11}$$

$$By=0 \Leftrightarrow y=0, \tag{12}$$

$$Cz=0 \Leftrightarrow z=0. \tag{13}$$

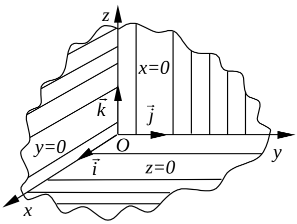


Рис. 11

Площина (11) є координатною площиною yOz, площина (12) – координатною площиною xOz, а площина (13) – координатною площиною xOy (рис. 11).

§3. Рівняння площини у відрізках. Сліди площини на координатних площинах

3.1. Нехай у рівнянні площини α

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{1}$$

всі коефіцієнти відмінні від нуля. Геометрично це означає, що площина α перетинає всі три координатні осі і не проходить через початок координат. Покладаючи по черзі: 1) $y=z=0$; 2) $x=z=0$; 3) $x=y=0$, знаходимо точки перетину площини α з координатними осями. Такими точками будуть відповідно точки

$$M_1\left(-\frac{D}{A};\,0;\,0\right),\quad M_2\left(0;\,-\frac{D}{B};\,0\right),\quad M_3\left(0;\,0;\,-\frac{D}{C}\right).$$

Перетворимо рівняння (1) наступним чином:

$$Ax+By+Cz+D=0 \Leftrightarrow Ax+By+Cz=-D \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{Ax}{-D}+\frac{By}{-D}+\frac{Cz}{-D}=1 \Leftrightarrow \frac{x}{-\frac{D}{A}}+\frac{y}{-\frac{D}{B}}+\frac{z}{-\frac{D}{C}}=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{p}+\frac{y}{q}+\frac{z}{r}=1, \qquad (2)$$

де $p=-\frac{D}{A}$, $q=-\frac{D}{B}$, $r=-\frac{D}{C}$.

Означення 1. Рівняння (2) площини α називається рівнянням площини у відрізках.

Геометричний зміст коефіцієнтів рівняння (2) полягає в наступному: числа p, q і r є відповідно абсцисою, ординатою і аплікатою точок перетину площини α відповідно з осями Ox, Oy і Oz, тобто точок

$$M_1(p;\,0;\,0),\ M_2(0;\,q;\,0) \text{ і } M_3(0;\,0;\,r).$$

Приклад 1. Дано площину

$$2x+3y+4z-12=0 .$$

Знайти рівняння цієї площини у відрізках і побудувати її ескіз.

Розв'язання. Перетворимо дане рівняння до вигляду (2):

$$2x+3y+12z=12 \Leftrightarrow \frac{2x}{12}+\frac{3y}{12}+\frac{4z}{12}=1 \Leftrightarrow \frac{x}{6}+\frac{y}{4}+\frac{z}{3}=1 .$$

Останнє рівняння є рівнянням заданої площини у відрізках. Будуємо точки $M_1(6;\,0;\,0)$, $M_2(0;\,4;\,0)$, $M_3(0;\,0;\,3)$ і проводимо через них площину (рис. 1).

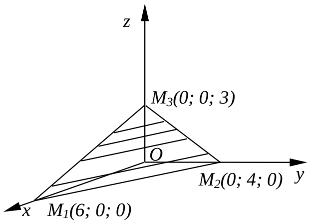


Рис. 1

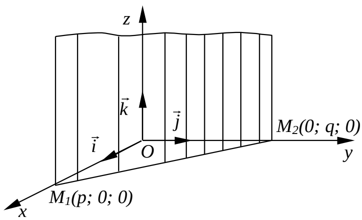


Рис. 2

Зауваження 1. Якщо один з коефіцієнтів A, B, C дорівнює нулю, наприклад, $C=0$, то замість рівняння (2) отримуємо рівняння

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1, \qquad (3)$$

де p і q мають той же самий геометричний зміст, що і в рівнянні (2). Рівняння (3) визначає площину α, яка паралельна осі Oz і перетинає осі Ox і Oy відповідно у точках $M_1(p;\,0;\,0)$ і $M_2(0;\,q;\,0)$ (рис. 2). Аналогічно записуються рівняння площини для випадків, коли $A=0$ або $B=0$.

Зауваження 2. Якщо площина проходить через початок координат, тобто $D=0$, то всі три точки перетину її з осями координат співпадають з $O(0;\,0;\,0)$. Щоб побудувати таку площину, потрібно взяти ще які-небудь дві точки, що належать цій площині. Найпростіше взяти точки, які лежать на координатних площинах, і через ці дві точки і точку O побудувати ескіз площини.

Приклад 2. Побудувати ескіз площини

$$x+y-z=0\,.$$

Розв'язання. Нехай $x=0$, $y=1$. Тоді $z=1$. Якщо $x=1$, $y=0$, то $z=1$. Через точки $O(0;\,0;\,0)$, $M_1(0;\,1;\,1)$ і $M_2(1;\,0;\,1)$ проводимо площину α (рис. 3).

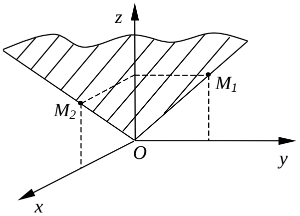


Рис. 3

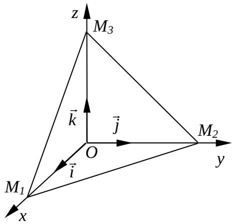


Рис. 4

3.2. <u>**Означення 2**</u>. Прямі перетину площини (1) з координатними площинами називаються слідами цієї площини на координатних площинах (рис. 4).

Рівняння прямої M_1M_2, по якій задана площина α перетинається з площиною xOy, отримуємо як рівняння геометричного місця точок, координати яких одночасно задовольняють як рівнянню заданої площини α, так і рівнянню площини xOy. Оскільки площина xOy має рівняння $z=0$, то для запису рівняння сліду M_1M_2 потрібно у рівнянні заданої площини α покласти $z=0$.

Отже, рівняння сліду M_1M_2 заданої площини α на площині xOy мають вигляд

$$\begin{cases} Ax+By+D=0 \\ z=0. \end{cases} \tag{4}$$

Перше з рівнянь (4) визначає площину, паралельну осі Oz, а друге рівняння вказує не те, що на цій площині розглядаються точки, які належать площині xOy. У площині xOy перше з рівнянь (4) визначає пряму M_1M_2.

Аналогічно, рівняння

$$\begin{cases} Ax + Cz + D = 0 \\ y = 0 \end{cases} \tag{5}$$

визначають слід M_1M_3 площини α на площині xOz, а рівняння

$$\begin{cases} By + Cz + D = 0 \\ x = 0 \end{cases} -$$

слід M_2M_3 площини α на площині yOz.

§4. Взаємне розміщення двох площин

Нехай у декартовій прямокутній системі координат задано дві площини своїми рівняннями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \tag{1}$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \tag{2}$$

За рівняннями (1) і (2) будемо визначати взаємне розміщення цих площин, тобто коли вони паралельні, коли співпадають і коли перетинаються.

Використовуючи поняття слідів площини на координатних площинах, умови паралельності, співпадання та перетину площин (1) і (2) легко отримати з раніше вивчених відповідних умов для двох прямих на площині (див. §4 гл. XIII). Площини (1) і (2) будуть паралельними, співпадати або перетинатися тоді і тільки тоді, коли будуть відповідно паралельними, співпадати або перетинатися їх сліди на координатних площинах (рис. 1).

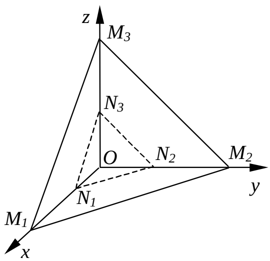


Рис. 1

Сліди площин (1) і (2) на площині xOy позначимо відповідно через M_1M_2 і N_1N_2, на площині xOz – через M_1M_3 і N_1N_3 і на площині yOz – через M_2M_3 і N_2N_3 (рис. 1).

Умовою паралельності слідів M_1M_2 і N_1N_2

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + D_1 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} A_2x + B_2y + D_2 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

є умова

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} \neq \frac{D_2}{D_1}. \tag{3}$$

Аналогічно, умовою паралельності слідів M_1M_3 і N_1N_3

$$\begin{cases} A_1x + C_1z + D_1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} A_2x + C_2z + D_2 = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

є умова

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{C_2}{C_1} \neq \frac{D_2}{D_1}, \tag{4}$$

а умовою паралельності слідів M_2M_3 і N_2N_3

$$\begin{cases} B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} -$$

умова

$$\frac{B_2}{B_1} = \frac{C_2}{C_1} \neq \frac{D_2}{D_1}. \tag{5}$$

З рівностей (3), (4) і (5) випливають необхідні і достатні умови паралельності площин (1) і (2):

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{C_2}{C_1} \neq \frac{D_2}{D_1}. \tag{6}$$

За тією ж схемою знаходяться необхідні і достатні умови співпадання та перетину площин (1) і (2). Тому, опустивши викладки, наведемо лише результати.

Для співпадання двох площин (1) і (2) необхідно і достатньо співпадання їх слідів. Умова співпадання слідів дає

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{C_2}{C_1} = \frac{D_2}{D_1}. \tag{7}$$

Рівності (7) є необхідними і достатніми умовами співпадання площин (1) і (2).

Для перетину двох площин (1) і (2) необхідно і достатньо перетину їх слідів. Умовою перетину слідів є виконання хоча б однієї з трьох нерівностей

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{8}$$

Отже, виконання хоча б однієї з трьох нерівностей (8) є необхідною і достатньою умовою перетину площин (1) і (2).

Задача про взаємне розміщення двох площин з алгебраїчної точки зору зводиться до дослідження системи двох рівнянь (1) і (2) з трьома невідомими x, y, z. У загальному випадку така задача розв'язувалась нами у §2 гл. IX.

Необхідною і достатньою умовою сумісності системи рівнянь (1), (2) є за теоремою Кронекера-Капеллі рівність

$$rang\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = rang\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix},$$

де символом $rang$ позначено ранг матриці.

Резюмуючи викладене вище, приходимо до справедливості наступних теорем.

Теорема 1. Для того щоб площини (1) і (2) перетинались, необхідно і достатньо виконання будь-якої з наступних умов:

1º. Хоча б один з визначників

$$\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$$

відмінний від нуля.

2º. Нормальні вектори $\vec{N}_1(A_1; B_1; C_1)$ і $\vec{N}_2(A_2; B_2; C_2)$ даних площин неколінеарні.

3º. $rang\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2$.

Теорема 2. Необхідною і достатньою умовою паралельності площин (1) і (2) є виконання однієї з трьох умов:

1º. $\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$,

але хоча б один з визначників $\begin{vmatrix} A_1 & D_1 \\ A_2 & D_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} B_1 & D_1 \\ B_2 & D_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & D_1 \\ C_2 & D_2 \end{vmatrix}$ не дорівнює нулю.

2º. Нормальні вектори $\vec{N}_1$ і $\vec{N}_2$ даних площин колінеарні, але

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{C_2}{C_1} \neq \frac{D_2}{D_1}.$$

3º. $rang\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 1$, $rang\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = 2$.

Теорема 3. Для того щоб площини (1) і (2) співпадали, необхідно і достатньо виконання однієї з трьох умов:

1º. $\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & D_1 \\ A_2 & D_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_1 & D_1 \\ B_2 & D_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_1 & D_1 \\ C_2 & D_2 \end{vmatrix} = 0$.

2°. Нормальні вектори $\vec{N}_1$ і $\vec{N}_2$ площин (1) і (2) колінеарні і $\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{C_2}{C_1} = \frac{D_2}{D_1}$.

3°. $rang\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = rang\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = 1$.

§5. Рівняння площини, що проходить через три точки. Рівняння площини, що проходить через задану точку паралельно двом неколінеарним векторам

5.1. Нехай задано три точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ і $M_3(x_3; y_3; z_3)$, які не лежать на одній прямій. За цієї умови задані точки визначають одну і тільки одну площину α, яка через них проходить. Знайдемо рівняння цієї площини.

Нехай $M(x; y; z)$ – довільна точка простору (рис. 1). Введемо радіуси вектори точок M_1, M_2, M_3, M:
$\vec{r}_1 = \overrightarrow{OM_1}(x_1; y_1; z_1)$, $\vec{r}_2 = \overrightarrow{OM_2}(x_2; y_2; z_2)$,
$\vec{r}_3 = \overrightarrow{OM_3}(x_3; y_3; z_3)$, $\vec{r} = \overrightarrow{OM}(x; y; z)$.
Якщо точка M лежить у площині α, то вектори $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ і $\overrightarrow{M_1M_3}$ компланарні і навпаки, якщо вектори $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ і $\overrightarrow{M_1M_3}$ компланарні, то точка M лежить у площині α. Умовою компланарності цих трьох векторів є рівність нулю їх мішаного добутку, тобто

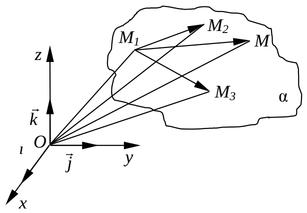


Рис. 1

$$\overrightarrow{M_1M}\,\overrightarrow{M_1M_2}\,\overrightarrow{M_1M_3} = 0 \Leftrightarrow (\vec{r} - \vec{r}_1)(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)(\vec{r}_3 - \vec{r}_1) = 0. \qquad (1)$$

Зауваження 1. Тут і далі мішаний добуток векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ позначається послідовним записом цих векторів, тобто $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$, а не $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, як у §4 гл. VII.

Рівність (1) є необхідною і достатньою умовою того, що точка M лежить у площині α.

Отже, всі точки, радіуси-вектори $\vec{r}$ яких задовольняють рівнянню (1), заповнюють площину, що визначається точками M_1, M_2 і M_3.

Означення 1. Рівняння (1) називається векторним рівнянням площини, що проходить через точки M_1, M_2, M_3.

Врахувавши, що вектори $\vec{r}-\vec{r}_1$, $\vec{r}_2-\vec{r}_1$ і $\vec{r}_3-\vec{r}_1$ мають координати відповідно

$$\left(x-x_1;\ y-y_1;\ z-z_1\right),\quad \left(x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1\right) \text{ і } \left(x_3-x_1;\ y_3-y_1;\ z_3-z_1\right),$$

перепишемо рівняння (1) у вигляді

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \tag{2}$$

Розкладаючи визначник за елементами першого рядка, отримуємо

$$\left(x-x_1\right)\begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}-\left(y-y_1\right)\begin{vmatrix} x_2-x_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}+\left(z-z_1\right)\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}=0$$

або

$$A\left(x-x_1\right)+B\left(y-y_1\right)+\left(z-z_1\right)=0, \tag{3}$$

де

$$A=\begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix},\ B=-\begin{vmatrix} x_2-x_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix},\ C=\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix},$$

причому хоча б одне з чисел A, B, C відмінне від нуля, оскільки за умовою вектори $\overrightarrow{M_1M_2}$ і $\overrightarrow{M_1M_3}$ не паралельні.

Рівняння (3) можна подати у вигляді

$$Ax+By+Cz+D=0, \tag{4}$$

де $D=-\left(Ax_1+By_1+Cz_1\right)$.

Рівняння (4) є шуканим рівнянням площини α (у координатній формі), що проходить через три задані точки M_1, M_2, M_3.

5.2. Запишемо рівняння площини, що проходить через задану точку M_1 паралельно двом неколінеарним векторам $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$. Відкладемо вектори $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$ від точки M_1, яка лежить у площині α (рис. 2).

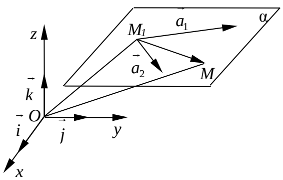


Рис. 2

Для того щоб довільна точка $M\left(x;\ y;\ z\right)$ лежала у площині α, необхідно і достатньо, щоб вектори $\overrightarrow{M_1M}$, $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$ були компланарними, тобто

$$\overrightarrow{M_1M}\,\vec{a}_1\,\vec{a}_2=0 \Leftrightarrow \left(\vec{r}-\vec{r}_1\right)\vec{a}_1\,\vec{a}_2=0, \tag{5}$$

де $\vec{r}=\overrightarrow{OM}\left(x;\ y;\ z\right)$, $\vec{r}_1=\overrightarrow{OM_1}\left(x_1;\ y_1;\ z_1\right)$.

Отже, всі точки, радіуси-вектори яких задовольняють рівнянню (5), заповнюють площину α, яка проходить через задану точку M_1 паралельно заданим неколінеарним векторам $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$.

<u>Означення 2</u>. Рівняння (5) називається векторним рівнянням цієї площини α.

Запишемо рівняння (5) у координатній формі. Нехай вектори $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$ задано своїми координатами

$$\vec{a}_1\left(m_1;\, n_1;\; p_1\right), \quad \vec{a}_2\left(m_2;\, n_2;\; p_2\right).$$

Тоді рівняння (5) перепишеться так:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0 \cdot \qquad (6)$$

Розкриваючи визначник рівняння (6) за елементами першого рядка, ми отримаємо загальне рівняння площини α, що проходить через точку M_1 паралельно неколінеарним векторам $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$.

§6. Параметричні рівняння площини

Площина α визначається однозначно, якщо задано точку M_1, що їй належить, і два неколінеарні вектори $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$, кожен з яких паралельний до α. Рівняння цієї площини отримано нами у §5 (див. (6) §5). У даному параграфі розглядається параметричне задання площини. Записати параметричні рівняння площини означає виразити координати довільної точки цієї площини через довільні параметри.

Нехай

$$M_1\left(x_1;\, y_1;\, z_1\right),\ \vec{a}_1\left(m_1;\, n_1;\; p_1\right),\ \vec{a}_2\left(m_2;\, n_2;\; p_2\right).$$

Теорема 1. Параметричні рівняння площини, яка проходить через точку M_1 паралельно двом неколінеарним векторам $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$, у декартовій прямокутній системі координат мають вигляд

$$x = x_1 + um_1 + vm_2\,; \quad y = y_1 + un_1 + vn_2\,; \quad z = z_1 + up_1 + vp_2\,, \qquad (1)$$

де $-\infty < u < \infty,\ -\infty < v < \infty$.

<u>Доведення</u>. Довільна точка $M\left(x;\, y;\, z\right)$ простору лежить на площині α тоді і тільки тоді, коли вектори $\overrightarrow{M_1M}\left(x-x_1;\, y-y_1;\, z-z_1\right),\ \vec{a}_1, \vec{a}_2$ компланарні. Оскільки вектори $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$ неколінеарні, то вектор $\overrightarrow{M_1M}$ можна однозначно розкласти за цими векторами, тобто для довільної точки M площини α

існують такі числа u і v, що виконується рівність (рис. 1).

$$\overrightarrow{M_1M} = u\vec{a}_1 + v\vec{a}_2. \quad (2)$$

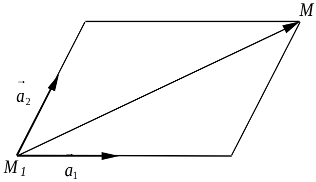


Рис. 1

Навпаки, довільна точка M, для якої справедлива рівність (2) при деяких u і v, лежить на площині α.

У координатній формі рівність (2) приймає вигляд

$$\begin{cases} x - x_1 = um_1 + vm_2 \\ y - y_1 = un_1 + vn_2 \\ z - z_1 = up_1 + vp_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 + um_1 + vm_2 \\ y = y_1 + un_1 + vn_2 \\ z = z_1 + up_1 + vp_2. \end{cases}$$

Теорему доведено.

Змінюючи u і v, ми можемо отримати будь-яку точку M площини α. Зокрема, для $u = v = 0$ отримуємо точку $M_1(x_1;\, y_1;\, z_1)$.

Зміст параметричних рівнянь площини полягає у наступному: якими б не були дійсні числа u і v, точка з координатами x, y, z, що визначаються за формулами (1), лежить у площині α. Навпаки, якщо $(x; y; z)$ – точка площини α, то завжди знайдуться такі числа u і v, що x, y, z будуть виражатись через координати точки M_1 і координати векторів $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$ за допомогою формул (1).

Зауваження 1. Рівність (2) є розкладом вектора $\overrightarrow{M_1M}$ у базисі $\{M_1; \vec{a}_1; \vec{a}_2\}$, а параметри u і v – координатами вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ у цьому базисі.

Зауваження 2. Якщо $\vec{r}_1 = \overrightarrow{OM_1},\ \vec{r} = \overrightarrow{OM}$ – радіуси-вектори точок M_1 і M_2, то рівність (2) можна записати у вигляді

$$\vec{r} - \vec{r}_1 = u\vec{a}_1 + v\vec{a}_2 \Leftrightarrow \vec{r} = \vec{r}_1 + u\vec{a}_1 + v\vec{a}_2\,. \quad (3)$$

Рівняння (3) є векторно-параметричним рівнянням площини, що проходить через точку M_1 паралельно двом неколінеарним векторам $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$.

§7. Геометричний зміст нерівності першого степеня з трьома невідомими

Цей параграф повністю аналогічний §10 гл. XIII, в якому розглядалось питання про дві півплощини, що визначаються заданою прямою на площині.

Розглянемо чотиричлен

$$\delta = Ax + By + Cz + D, \quad (1)$$

в якому коефіцієнти A, B, C одночасно не дорівнюють нулю.

Всі точки $M(x;\,y;\,z)$ простору, координати яких задовольняють рівнянню

$$\delta = Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (2)$$

заповнюють площину α з нормальним вектором $\vec{N}(A;\,B;\,C)$.

Якщо точка $M(x;\,y;\,z)$ не лежить на площині α, то

$$\delta = Ax + By + Cz + D \neq 0 .$$

Геометричний зміст знака чотиричлена (1) виясняється аналогічно тому, як це було зроблено в §10 гл. XIII.

Площина α розбиває простір на два підпростори, для яких вона є межею.

Аналогічно теоремі 1 §10 гл. XIII доводиться наступна теорема.

Теорема 1. Нехай у декартовій прямокутній системі координат площину α задано загальним рівнянням (2). Тоді для координат $x,\,y,\,z$ всіх точок $M(x;\,y;\,z)$, які лежать по один бік від площини α, виконується нерівність

$$Ax + By + Cz + D > 0 , \qquad (3)$$

а для координат $x,\,y,\,z$ всіх точок $M(x;\,y;\,z)$, які лежать по інший бік від площини α – нерівність

$$Ax + By + Cz + D < 0 . \qquad (4)$$

<u>Означення 1</u>. Підпростір, для координат всіх точок якого виконується нерівність (3), називається додатним. Якщо для координат всіх точок підпростору виконується нерівність (4), то він називається від'ємним.

Теорема 2. Нехай у декартовій прямокутній системі координат площину α задано загальним рівнянням (2). Якщо відкласти нормальний вектор $\vec{N}(A;\,B;\,C) = \overrightarrow{M_0P}$ від довільної точки M_0 площини α, то кінець P цього вектора буде знаходитись у додатному підпросторі даної площини α.

Доведення теореми 2 проводиться за схемою доведення теореми 2 §10 гл. XIII. Наочний зміст наведених вище теорем 1, 2 аналогічний змісту теорем про півплощини, що визначаються на площині заданою прямою.

Для того щоб точки $M_1(x_1;\,y_1;\,z_1)$ і $M_2(x_2;\,y_2;\,z_2)$ лежали по один бік (по різні боки) від площини α, необхідно і достатньо, щоб числа

$$\delta_1 = Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D \quad \text{і} \quad \delta_2 = Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D$$

мали один і той же знак (різні знаки).

Множина точок простору належить додатному підпростору площини (2), якщо всі точки цієї множини знаходяться по той же бік від площини (2), що і кінець її нормального вектора $\vec{N}(A;\,B;\,C)$ за умови, що останній прикладено до деякої точки площини (2).

Приклад 1. Нехай w – внутрішня область того двогранного кута, утвореного площинами

$$3x - y + 4z + 1 = 0 \quad \text{і} \quad x + y + z - 2 = 0,$$

який містить початок координат.

Записати лінійні нерівності, які характеризують область w.

Розв'язання. Скористаємось теоремою 1. У даному випадку

$$\delta_1 = 3 \cdot 0 - 0 + 4 \cdot 0 + 1 = 1 > 0, \ \delta_2 = 0 + 0 + 0 - 2 = -2 < 0.$$

Тому область w характеризується нерівностями

$$\begin{cases} 3x - y + 4z + 1 > 0 \\ x + y + z - 2 < 0. \end{cases}$$

Приклад 2. Записати нерівності, які характеризують внутрішню область w трикутної призми $AOBA_1O_1B_1$, зображеної на рис. 1, якщо $A(3;\,0;\,0)$, $O(0;\,0;\,0)$, $B(0;\,2;\,0)$, $A_1(3;\,0;\,5)$, $O_1(0;\,0;\,5)$, $B_1(0;\,2;\,5)$.

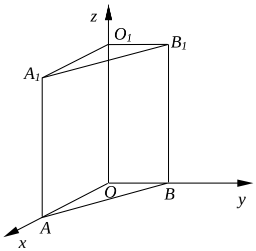


Рис. 1

Розв'язання. Призма обмежена п'ятьма площинами $A_1O_1B_1$, AOB, AA_1O_1O, BB_1O_1O і ABB_1A_1.

Запишемо рівняння всіх цих площин:

$$A_1O_1B_1 \to z = 5; \quad BB_1O_1O \to x = 0; \quad AOB \to z = 0;$$

$$ABB_1A_1 \to \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1; \quad AA_1O_1O \to y = 0.$$

Область w розміщена між паралельними площинами $A_1O_1B_1$ і AOB, тому для всіх точок w маємо: $0 < z < 5 \Leftrightarrow z(z-5) < 0$. Точки області w лежать по той же бік від площини ABB_1A_1, що і початок координат, тому $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} - 1 < 0$.

Аналогічно отримуємо ще дві нерівності: $y > 0$ і $x > 0$. Отже, область w характеризується нерівностями

$$z(z-5) < 0; \quad y > 0; \ x > 0; \quad \frac{x}{3} + \frac{y}{2} - 1 < 0.$$

§8. Формула для обчислення відстані від точки до площини. Нормальне рівняння площини

8.1. Нехай у декартовій прямокутній системі координат площину α задано загальним рівнянням

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{1}$$

або рівнянням у векторній формі

$$\vec{r} \cdot \vec{N} + D = 0, \tag{2}$$

де $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ – радіус-вектор змінної точки $M(x;\, y;\, z)$ площини α, а $\vec{N}(A;\, B;\, C)$ – нормальний вектор цієї площини. Знайдемо відстань від точки $M_1(x_1;\, y_1;\, z_1)$ до площини α (рис. 1).

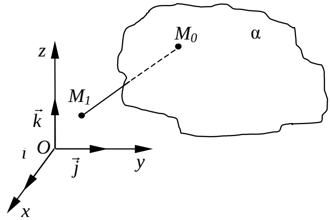


Рис. 1

Позначимо через M_0 основу перпендикуляра, опущеного з точки M_1 на площину α. Шукана відстань d дорівнює довжині вектора $\overrightarrow{M_0M_1}$. Якщо $\vec{r}_1 = \overrightarrow{OM_1}$ – радіус-вектор точки M_1, то повторюючи дослівно міркування §7 гл. XIII, отримуємо векторну рівність

$$\overrightarrow{M_0M_1} = \frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{N} + D}{\left|\vec{N}\right|^2}\vec{N}\,, \tag{3}$$

звідки випливає, що

$$d = \left|\overrightarrow{M_0M_1}\right| = \frac{\left|\vec{r}_1 \cdot \vec{N} + D\right|}{\left|\vec{N}\right|^2}\left|\vec{N}\right| = \frac{\left|\vec{r}_1 \cdot \vec{N} + D\right|}{\left|\vec{N}\right|} \tag{4}$$

або в координатній формі

$$d = \frac{\left|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{5}$$

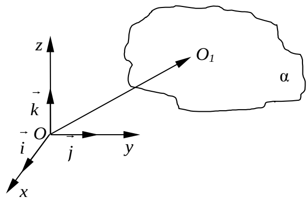


Рис. 2

Розглянемо частинний випадок, коли точка M_1 співпадає з початком координат O (рис. 2). Ортогональну проекцію точки O на площину α позначимо через O_1. Тоді з формули (3) отримуємо

$$\overrightarrow{O_1O} = \frac{D}{\left|\vec{N}\right|^2}\vec{N} \tag{6}$$

і для відстані d_0 від початку координат до площини α можна записати

$$d_0 = \left|\overrightarrow{O_1O}\right| = \frac{|D|}{\left|\vec{N}\right|^2}\left|\vec{N}\right| = \frac{|D|}{\left|\vec{N}\right|} = \frac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\,, \tag{7}$$

що безпосередньо випливає і з формули (4) або (5).

8.2. Нехай площина (1) не проходить через початок координат, тобто $D \neq 0$.

<u>Означення 1</u>. Одиничний вектор $\vec{n}_0$, перпендикулярний до площини α і напрямлений від початку координат до цієї площини, називається одиничним вектором нормалі.

З формул (6) і (7) випливає, що

$$\vec{n}_0 = \frac{\overrightarrow{OO_1}}{\left|\overrightarrow{OO_1}\right|} = -\frac{D}{\left|\vec{N}\right|^2}\vec{N} : \frac{|D|}{\left|\vec{N}\right|} = -\frac{D}{|D|}\frac{\vec{N}}{\left|\vec{N}\right|}. \tag{8}$$

Тоді

$$\vec{n}_0 = -\frac{\vec{N}}{\left|\vec{N}\right|}, \text{ якщо } D \text{ – додатне число і}$$

$$\vec{n}_0 = \frac{\vec{N}}{\left|\vec{N}\right|}, \text{ якщо } D \text{ – від’ємне число.}$$

Повторюючи хід міркувань §7 гл. XIII, приходимо до наступного висновку. Якщо обидві частини рівняння (1) або (2) помножити на нормувальний множник

$$\lambda_0 = -\frac{D}{|D|}\frac{1}{\left|\vec{N}\right|} = -\frac{D}{|D|\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \tag{9}$$

то будемо мати нормальне рівняння площини

$$\vec{r}\cdot\vec{n}_0 - d_0 = 0 \tag{10}$$

або в координатній формі

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - d_0 = 0, \tag{11}$$

де α, β, γ – кути, які утворює одиничний вектор нормалі з додатними напрямками осей координат.

Без будь-яких змін на випадок площини переносяться зауваження 1 і 2 §7 гл. XIII.

Приклад 1. Скласти рівняння площини α, яка паралельна даній площині

$$2x + 2y - z - 11 = 0, \tag{12}$$

якщо відомо, що відстань між цими площинами дорівнює 5; крім цього, шукана площина і точка $M_1(1;\ 2;\ 4)$ знаходяться по різні боки від заданої площини (12).

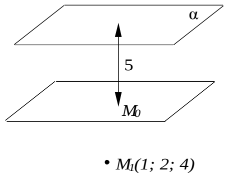


Рис. 3

Розв'язання. Шукана площина α буде мати рівняння

$$2x+2y-z+D=0\,,\ D\neq -11. \qquad (13)$$

Нехай $M_0\left(x_0;\ y_0;\ z_0\right)$ – довільна точка заданої площини (12), тобто

$$2x_0+2y_0-z_0-11=0 \Leftrightarrow 2x_0+2y_0-z_0=11\,. \qquad (14)$$

Відстань від точки $M_0\left(x_0;\ y_0;\ z_0\right)$ до шуканої площини (13) дорівнює 5, тобто

$$5=\frac{\left|2x_0+2y_0-z_0+D\right|}{\sqrt{4+4+1}}=\frac{\left|2x_0+2y_0-z_0+D\right|}{3}\,. \qquad (15)$$

Підставимо у рівність (15) рівність (14):

$$15=\left|11+D\right| \Leftrightarrow 11+D=\pm 15 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} D_1=4 \\ D_2=-26. \end{array}\right.$$

Отже, маємо дві площини

$$2x+2y-z+4=0\,, \qquad (16)$$

$$2x+2y-z-26=0. \qquad (17)$$

Вияснимо, яка з площин (16) чи (17) задовольняє умові задачі. Для цього знайдемо знак чотиричлена, що визначається заданою площиною (12), у точці $M_1(1;\ 2;\ 4)$:

$$\delta\left(M_1\right)=2\cdot 1+2\cdot 2-4-11<0\,.$$

Нехай $M_2\left(x_2;\ y_2;\ z_2\right)$ – довільна точка площини (16) або (17), тобто

$$2x_2+2y_2-z_2+4=0 \Leftrightarrow 2x_2+2y_2-z_2=-4 \qquad (18)$$

або

$$2x_2+2y_2-z_2-26=0 \Leftrightarrow 2x_2+2y_2-z_2=26\,. \qquad (19)$$

Для точки M_2 за умовою задачі маємо: $\delta\left(M_2\right)>0$. Перевіримо, яка з площин (16) чи (17) задовольняє цій умові.

Для точки M_2 площини (16)

$$\delta\left(M_2\right)=2x_2+2y_2-z_2-11\,. \qquad (20)$$

Підставляючи в (20) рівність (18), отримуємо

$$\delta\left(M_2\right)=-4-11=-15<0\,.$$

Тому площина (16) не задовольняє умові задачі.

Для точки M_2 площини (17)

$$\delta\left(M_2\right)=2x_2+2y_2-z_2-11=26-11=15>0\,.$$

Отже, шуканою площиною є площина

$$2x+2y-z-26=0. \qquad (21)$$

Приклад 2. Написати рівняння площини, яка ділить пополам той двогранний кут між площинами

$$3x-4y-z+5=0, \qquad (22)$$
$$4x-3y+z+5=0, \qquad (23)$$

в якому міститься початок координат.

Розв'язання. Оскільки в рівняннях (22) і (23) $D\neq 0$, то площини (22) і (23) не проходять через початок координат.

Розв'язання даного прикладу аналогічне розв'язанню прикладу 3 §11 гл. XIII.

Площину α, яка ділить двогранний кут пополам, називають бісекторною площиною. Нехай $M(X;Y;Z)$ – довільна точка бісекторної площини. Тоді відстані від точки $M(X;Y;Z)$ до площин (22) і (23) рівні, тобто

$$\frac{|3X-4Y-Z+5|}{\sqrt{9+16+1}}=\frac{|4X-3Y+Z+5|}{\sqrt{16+9+1}}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3X-4Y-Z+5=\pm(4X-3Y+Z+5). \qquad (24)$$

Підставляючи координати початку координат O в рівняння (22) і (23), отримуємо відповідно

$$\delta_1(O)=3\cdot 0-4\cdot 0-0+5>0,\ \delta_2(O)=4\cdot 0-3\cdot 0+0+5>0.$$

Оскільки $\delta_1(O)>0$ і $\delta_2(O)>0$, то у правій частині рівності (24) потрібно брати знак "+".

Отже, рівнянням шуканої бісекторної площини є рівняння

$$3X-4Y-Z+5=4X-3Y+Z+5\Leftrightarrow X+Y+2Z=0.$$

Запишемо це рівняння у звичних позначеннях змінних координат

$$x+y+2z=0.$$

§9. Знаходження кута між двома площинами

Нехай у декартовій прямокутній системі координат задано дві площини

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \qquad (1)$$
$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \qquad (2)$$

Якщо ці площини перетинаються, то вони утворюють чотири двогранних кути. Позначимо величини цих кутів через $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ (рис. 1).

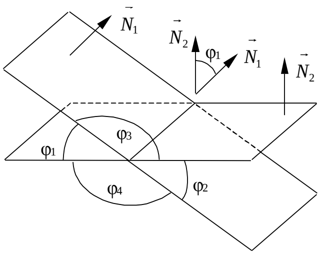


Рис. 1

Оскільки $\varphi_1 = \varphi_2$, $\varphi_3 = \varphi_4$ і $\varphi_1 + \varphi_3 = 180^0$, то достатньо знайти один з цих кутів. Кут між двома площинами вимірюється, як відомо, лінійним кутом двогранного кута, одного з двох, утворених цими площинами. Його можна виміряти кутом між векторами, перпендикулярними до заданих площин, тобто кутом між нормальними векторами $\vec{N}_1$ і $\vec{N}_2$ (рис. 1). Позначимо кут між площинами буквою φ. Тоді

$$\cos\varphi = \cos\left(\widehat{\vec{N}_1, \vec{N}_2}\right) = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{\left|\vec{N}_1\right|\left|\vec{N}_2\right|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \qquad (3)$$

Формула може давати знак плюс або знак мінус. У першому випадку ми отримаємо гострий кут між площинами (1) і (2), а у другому – кут, який доповнює перший до 180^0.

Якщо ми хочемо знайти гострий кут між двома площинами, то для $\cos\varphi$ слід брати додатне число, тобто користуватись формулою

$$\cos\varphi = \left|\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}\right|. \qquad (4)$$

Якщо площини (1) і (2) перпендикулярні, то вектори $\vec{N}_1$ і $\vec{N}_2$ також перпендикулярні. Тому скалярний добуток цих векторів дорівнює нулю:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \qquad (5)$$

Навпаки, якщо виконується умова (5), то площини (1) і (2) перпендикулярні.

Приклад 1. Визначити той двогранний кут, утворений площинами

$$2x - y + 2z - 3 = 0, \qquad (6)$$
$$6x + 2y - 3z + 8 = 0, \qquad (7)$$

всередині якого розміщена точка $M_0(1; 1; 8)$.

Розв'язання. Нормальними векторами даних площин є вектори

$$\vec{N}_1(2; -1; 2) \text{ і } \vec{N}_2(6; 2; -3).$$

Дослідимо розміщення цих векторів і точки M_0 відносно площин (6) і (7). Оскільки в результаті підстановки координат точки M_0 у ліву частину рівняння (6) отримується додатне число, а у ліву частину рівняння (7) – від'ємне число, то вектори

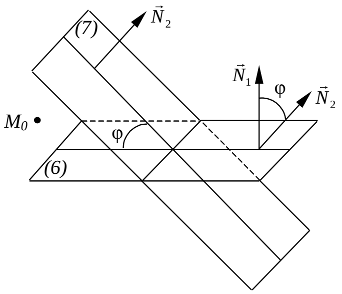


Рис. 2

$\vec{N}_1$ і $\vec{N}_2$ (див. §7) розміщені так, як показано на рис. 2, тобто всередині кута, що не містить точку M_0. Шуканий кут φ дорівнює куту між векторами $\vec{N}_1$ і $\vec{N}_2$:

$$\cos\varphi = \frac{2\cdot 6 - 1\cdot 2 + 2(-3)}{\sqrt{4+1+4}\sqrt{36+4+9}} = \frac{4}{21}.$$

§10. Пучок площин

Розглянемо дві площини

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \qquad (1)$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \qquad (2)$$

які перетинаються по прямій l.

<u>Означення 1</u>. Множину всіх площин, які проходять через пряму l, називають пучком площин. Пряму l називають віссю пучка.

Наша задача полягає у знаходженні загального рівняння, що визначає пучок площин з віссю l. Ця задача розв'язується шляхом доведення теореми, аналогічної теоремі 2 §5 гл. XIII.

Теорема 1. Якщо у декартовій прямокутній системі координат пучок площин w задано двома площинами (1) і (2), які перетинається, то рівняння

$$\lambda\left(A_1x + B_1y + C_1z + D_1\right) + \mu\left(A_2x + B_2y + C_2z + D_2\right) = 0, \qquad (3)$$

де λ і μ можуть приймати довільні значення, не рівні одночасно нулю, визначає даний пучок w.

<u>Доведення</u>. Насамперед доведемо, що рівняння (3) є лінійним рівнянням щодо змінних x, y, z. Для цього запишемо його у вигляді

$$\left(\lambda A_1 + \mu A_2\right)x + \left(\lambda B_1 + \mu B_2\right)y + \left(\lambda C_1 + \mu C_2\right)z + \lambda D_1 + \mu D_2 = 0. \qquad (4)$$

Рівняння (4) рівносильне рівнянню (3). Коефіцієнти при x, y, z цього рівняння не можуть одночасно дорівнювати нулю. Дійсно, нехай

$$\lambda A_1 + \mu A_2 = 0,\ \lambda B_1 + \mu B_2 = 0,\ \lambda C_1 + \mu C_2 = 0. \qquad (5)$$

Не порушуючи загальності міркувань, можна вважати, що $\mu \neq 0$, оскільки λ і μ одночасно не дорівнюють нулю. Тоді рівності (5) запишуться так:

$$A_2 = -\frac{\lambda}{\mu}A_1,\ B_2 = -\frac{\lambda}{\mu}B_1,\ C_2 = -\frac{\lambda}{\mu}C_1. \qquad (6)$$

З рівностей (6) випливає, що площини (1) і (2) паралельні. Але це суперечить умові їх перетину.

Отже, рівняння (4), а разом з ним і рівняння (3) є лінійним рівнянням відносно змінних x, y, z, а тому для довільних значень λ і μ, не рівних одночасно нулю, визначає площину.

Покажемо, що площина (3) проходить через пряму l – лінію перетину площин (1) і (2). Дійсно, нехай точка $M_0\left(x_0;\, y_0;\, z_0\right)$ є довільною точкою прямої l. Тоді її координати задовольняють обом рівнянням (1) і (2):

$$A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 = 0\,,\ A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2 = 0\,. \qquad (7)$$

Але тоді координати точки M_0 будуть задовольняти і рівнянню (3), оскільки у цьому рівнянні вирази, що стоять у дужках, згідно з рівностями (7) перетворюються в нуль.

При $\mu = 0$ з рівняння (3) отримуємо рівняння площини (1), а при $\lambda = 0$ – рівняння площини (2).

Надаючи інші значення числам λ і μ, будемо отримувати інші площини, які проходять через пряму l. Доведемо, що таким чином ми отримаємо всі площини, що проходять через l.

Нехай α – довільна площина, відмінна від площин (1), (2) і така, що проходить через пряму l і деяку точку $M_1\left(x_1;\, y_1;\, z_1\right)$, яка не лежить на цій прямій. Покажемо, що при певних значеннях λ і μ площина α визначається рівнянням (3), тобто виділимо з пучка w потрібну нам площину.

Підставимо координати точки M_1 в рівняння (3) і виберемо λ і μ такими, щоб воно стало тотожністю. Тоді рівняння (3) при таких λ, μ і буде рівнянням площини α, яка проходить через точку M_1 і пряму l. Цими умовами площина визначається однозначно.

У відповідності до нашого плану з тотожності

$$\lambda\left(A_1x_1 + B_1y + C_1z + D_1\right) + \mu\left(A_2x_1 + B_2y + C_2z + D_2\right) = 0\,,$$

де вирази в дужках не дорівнюють нулю (площини (1) і (2) не проходять через точку M_1), знаходимо

$$\frac{\mu}{\lambda} = -\frac{A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 + D_1}{A_2x_1 + B_2y_1 + C_2z_1 + D_2} \Leftrightarrow \mu = \lambda p\,,$$

де

$$p = -\frac{A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 + D_1}{A_2x_1 + B_2y_1 + C_2z_1 + D_2}\,.$$

Підставимо λ і $\mu = \lambda p$ в рівняння (3). При цих значеннях параметрів λ і μ (λ – довільне) рівняння (3) визначає площину α.

Теорему доведено.

Зауваження 1. Якщо поділити рівняння (3) на λ і покласти $\tau = \dfrac{\mu}{\lambda}$, то рівнянню пучка площин можна надати більш зручної форми, яка містить лише один параметр:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \tau\left(A_2x + B_2y + C_2z + D_2\right) = 0\,. \tag{8}$$

Проте слід пам'ятати, що з рівняння (8) не можна отримати рівняння (2) другої з площин, які визначають пучок w, оскільки для цього потрібно покладати $\lambda = 0$.

Приклад 1. Написати рівняння площини α, яка проходить через лінію перетину площин

$$x + y + z - 3 = 0, \tag{9}$$

$$x - y - z + 1 = 0 \tag{10}$$

паралельно осі Ox.

Розв'язання. Площина α належить пучку, що визначається площинами (9) і (10), і тому має рівняння

$$\begin{gathered}\lambda\left(x + y + z - 3\right) + \mu\left(x - y - z + 1\right) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(\lambda + \mu\right)x + \left(\lambda - \mu\right)y + \left(\lambda - \mu\right)z - 3\lambda + \mu = 0\,.\end{gathered} \tag{11}$$

За умовою площина α паралельна осі Ox. Тому в рівнянні (11) має дорівнювати нулю коефіцієнт при x, тобто

$$\lambda + \mu = 0 \Leftrightarrow \mu = -\lambda\,. \tag{12}$$

Підставимо значення μ з (12) в рівняння (11):

$$2\lambda y + 2\lambda z - 4\lambda = 0 \Leftrightarrow y + z - 2 = 0\,. \tag{13}$$

Отже, рівнянням площини α є рівняння (13).

Теорема 2. Для того щоб три площини

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \tag{14}$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \tag{15}$$

$$A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \tag{16}$$

належали до одного і того ж пучка, необхідно і достатньо, щоб існували такі три числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, не рівні одночасно нулю, для яких відносно змінних x, y, z має місце тотожність

$$\begin{gathered}\lambda_1\left(A_1x + B_1y + C_1z + D_1\right) + \lambda_2\left(A_2x + B_2y + C_2z + D_2\right) + \\ + \lambda_3\left(A_3x + B_3y + C_3z + D_3\right) \equiv 0\,.\end{gathered} \tag{17}$$

Доведення. *Необхідність*. Нехай площини (14), (15), (16) належать до одного пучка. Покажемо, що існують такі числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, не рівні нулю одночасно, для яких справедлива тотожність (17). Дійсно, у цьому випадку одна з площин (14), (15) або (16), наприклад, (16) належить пучку, що визначається двома іншими площинами. Тому

$$A_3x+B_3y+C_3z+D_3=\lambda\left(A_1x+B_1y+C_1z+D_1\right)+\mu\left(A_2x+B_2y+C_2z+D_2\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\lambda\left(A_1x+B_1y+C_1z+D_1\right)+\mu\left(A_2x+B_2y+C_2z+D_2\right)+$$
$$+(-1)\left(A_3x+B_3y+C_3z+D_3\right)=0\,.$$

Отже, тотожність (17) виконується при $\lambda_1=\lambda$, $\lambda_2=\mu$, $\lambda_3=-1$ і необхідність доведено.

Достатність. Нехай існують такі числа $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$, не рівні нулю одночасно, для яких справедлива тотожність (17). Покажемо, що площини (14), (15) і (16) належать до одного і того ж пучка. Дійсно, якщо $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ – деяка трійка чисел, для яких справедлива тотожність (17), то два з них, наприклад, λ_2 і λ_3 не дорівнюють нулю одночасно, оскільки у противному разі мала б місце тотожність

$$\lambda_1\left(A_1x+B_1y+C_1z+D_1\right)=0$$

при $\lambda_1\neq 0$, що неможливо. Тому тотожність (17) можна переписати у вигляді

$$A_3x+B_3y+C_3z+D_3=\frac{\lambda_1}{-\lambda_3}\left(A_1x+B_1y+C_1z+D_1\right)+\frac{\lambda_2}{-\lambda_3}\left(A_2x+B_2y+C_2z+D_2\right),$$

звідки випливає, що площина (16) належить до пучка, який породжується першими двома площинами (14) і (15).

Теорему доведено.

§11. В'язка площин

<u>Означення 1</u>. Множину всіх площин простору, які проходять через задану точку M_0, називають в'язкою площин. Точку M_0 називають центром в'язки.

Якщо у просторі вибрано декартову прямокутну систему координат, то в'язку площин можна задати або координатами центра, або трьома площинами, які перетинаються в одній єдиній точці – центрі в'язки. Розглянемо кожен з цих випадків.

Нехай задано точку $M_0\left(x_0;\,y_0;\,z_0\right)$. Візьмемо яку-небудь площину

$$Ax+By+Cz+D=0\,, \tag{1}$$

що проходить через цю точку. Тоді

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0\Leftrightarrow D=-\left(Ax_0+By_0+Cz_0\right). \tag{2}$$

Підставимо (2) в (1):

$$Ax+By+Cz-\left(Ax_0+By_0+Cz_0\right)=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)+C\left(z-z_0\right)=0\,. \tag{3}$$

Надаючи параметрам A, B, C різних значень, будемо отримувати різні площини в'язки з центром у точці M_0. Позначимо $\lambda_1 = A$, $\lambda_2 = B$, $\lambda_3 = C$. Тоді рівняння в'язки запишеться у вигляді

$$\lambda_1(x - x_0) + \lambda_2(y - y_0) + \lambda_3(z - z_0) = 0 . \tag{4}$$

Теорема 1. Якщо у декартовій прямокутній системі координат дано в'язку площин з центром $(x_0; y_0; z_0)$, то рівняння (4), де $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ можуть приймати довільні значення, не рівні одночасно нулю, визначає цю в'язку.

Доведення. Нехай $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – довільні числа, не рівні одночасно нулю. Тоді рівняння (4) є лінійним рівнянням, якому задовольняють числа $x = x_0$, $y = y_0$ і $z = z_0$. Тому воно визначає площину, що має нормальний вектор $\vec{N}_1(\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3)$ і проходить через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$, тобто деяку площину в'язки.

Навпаки, нехай α – деяка площина в'язки, нормальний вектор $\vec{N}$ якої має координати $(\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3)$. Тоді, оскільки α проходять через точку $(x_0; y_0; z_0)$, рівняння цієї площини запишеться у вигляді (4).

Теорему доведено.

Нехай тепер центр в'язки – точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ визначається як єдина точка перетину трьох площин

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \tag{5}$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \tag{6}$$
$$A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0. \tag{7}$$

Теорема 2. Якщо у декартовій прямокутній системі координат в'язку площин задано трьома площинами (5), (6) і (7), що перетинаються в одній єдиній точці, то рівняння

$$\begin{gathered}\lambda_1(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda_2(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) + \\ + \lambda_3(A_3x + B_3y + C_3z + D_3) = 0 ,\end{gathered} \tag{8}$$

де $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ приймають довільні значення, не рівні нулю одночасно, визначає дану в'язку.

Доведення теореми аналогічне доведенню теореми 1 §10.

У рівнянні (8) завжди можна перейти від трьох параметрів до двох. Дійсно, розділивши рівняння (8) на один з трьох параметрів (наприклад, на λ_3), який відмінний від нуля, отримаємо рівносильне йому рівняння

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_3}(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \frac{\lambda_2}{\lambda_3}(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) + (A_3x + B_3y + C_3z + D_3) = 0 \cdot$$

Кожна з площин (5), (6), (7) належить до в'язки, заданої рівнянням (8). Площина (5) отримується з (8), якщо $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$; площина (6) – якщо $\lambda_2 = 1$, $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$; площина (7) – якщо $\lambda_3 = 1$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Теорема 3. Для того щоб чотири площини

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \tag{9}$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \tag{10}$$
$$A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0, \tag{11}$$
$$A_4x + B_4y + C_4z + D_4 = 0, \tag{12}$$

три з яких перетинаються в одній точці, належали до однієї в'язки площин, необхідно і достатньо, щоб визначник 4-го порядку, складений з коефіцієнтів цих рівнянь, дорівнював нулю, тобто

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = 0. \tag{13}$$

Доведення. Необхідність. Покажемо, що для площин (9), (10), (11), (12), які належать до однієї в'язки $\Delta = 0$. Дійсно, нехай ці площини належать до однієї в'язки з центром $M_0(x_0; y_0; z_0)$. Тоді

$$\begin{aligned} A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 = 0 \Leftrightarrow D_1 = A_1(-x_0) + B_1(-y_0) + C_1(-z_0), \\ A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2 = 0 \Leftrightarrow D_2 = A_2(-x_0) + B_2(-y_0) + C_2(-z_0), \\ A_3x_0 + B_3y_0 + C_3z_0 + D_3 = 0 \Leftrightarrow D_3 = A_3(-x_0) + B_3(-y_0) + C_3(-z_0), \\ A_4x_0 + B_4y_0 + C_4z_0 + D_4 = 0 \Leftrightarrow D_4 = A_4(-x_0) + B_4(-y_0) + C_4(-z_0). \end{aligned} \tag{14}$$

З рівностей (14) випливає, що елементи $4^{\text{го}}$ стовпця визначника Δ є лінійною комбінацією елементів перших трьох стовпців. Тому визначник Δ дорівнює нулю.

Достатність. Нехай тепер визначник $\Delta = 0$. Покажемо, що чотири площини (9), (10), (11), (12), три з яких перетинаються в одній точці, належать до однієї в'язки. Не порушуючи загальності, можна вважати, що в одній точці перетинаються площини (10), (11), (12). Необхідною і достатньою умовою цього є нерівність

$$\begin{vmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Координати $(x_0; y_0; z_0)$ точки перетину площин (10), (11), (12) визначаються за формулами

$$x_0 = \frac{-\begin{vmatrix} D_2 & B_2 & C_2 \\ D_3 & B_3 & C_3 \\ D_4 & B_4 & C_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{vmatrix}},\ y_0 = \frac{-\begin{vmatrix} A_2 & D_2 & C_2 \\ A_3 & D_3 & C_3 \\ A_4 & D_4 & C_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{vmatrix}},\ z_0 = \frac{-\begin{vmatrix} A_2 & B_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & D_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{vmatrix}}. \tag{15}$$

Для того щоб площина (9) проходила через цю ж точку $(x_0; y_0; z_0)$, необхідно і достатньо, щоб

$$A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 = 0 .$$

Підставивши в останню рівність замість x_0, y_0, z_0 їх значення (15), отримуємо

$$A_1\begin{vmatrix} D_2 & B_2 & C_2 \\ D_3 & B_3 & C_3 \\ D_4 & B_4 & C_4 \end{vmatrix} + B_1\begin{vmatrix} A_2 & D_2 & C_2 \\ A_3 & D_3 & C_3 \\ A_4 & D_4 & C_4 \end{vmatrix} + C_1\begin{vmatrix} A_2 & B_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & D_4 \end{vmatrix} - D_1\begin{vmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = 0 ,$$

що доводить теорему.

§12. Взаємне розміщення трьох площин у просторі

Нехай задано три площини $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ своїми загальними рівняннями

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0, \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

З алгебраїчної точки зору задача про взаємне розміщення трьох площин у просторі зводиться до дослідження розв’язків системи лінійних рівнянь (1). Згідно з критерієм сумісності системи лінійних рівнянь (теорема Кронекера-Капеллі) маємо: система лінійних рівнянь сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг основної матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці цієї системи (див. §2 гл. IX). Тому складемо основну матрицю A і розширену матрицю B з коефіцієнтів рівнянь (1):

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}.$$

Позначимо ранги цих матриць відповідно $r(A) = r_1$ і $r(B) = r_2$.

Можливі наступні випадки:

1º. $r_1 = 3$. У цьому випадку $r_2 = 3$ і система рівнянь (1) згідно з правилом Крамера має єдиний розв'язок. Площини $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, які визначаються рівняннями (1), мають єдину спільну точку (рис. 1).

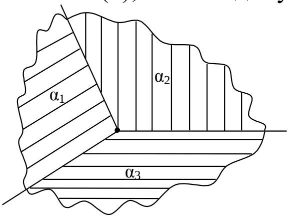


Рис. 1

2º. $r_1 = 2, \quad r_3 = 3$. Система рівнянь (1) у цьому випадку є несумісною, а тому площини $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ не мають точок, які одночасно належать до кожної з них. У випадку **2º** можливі два розміщення площин.

а) Серед нормальних векторів $\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{N}_3$ площин $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ немає колінеарних, тобто не існує двох рядків матриці A, відповідні елементи яких пропорційні. Геометрично це означає, що кожні дві площини з площин $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ перетинаються по прямій і ці три прямі перетину паралельні, причому прямі перетину попарно різні. Площини $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ вирізають з простору нескінченну трикутну призму (рис. 2).

б) Серед нормальних векторів $\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{N}_3$ площин $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ є два колінеарних (всі вектори не можуть бути колінеарними, оскільки $r_1 = 2$). Це означає, що в матриці A існують два рядки, відповідні елементи яких пропорційні. З геометричної точки зору маємо дві паралельні площини, які перетинаються третьою площиною (рис. 3).

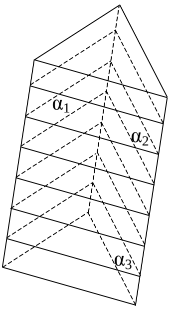


Рис. 2

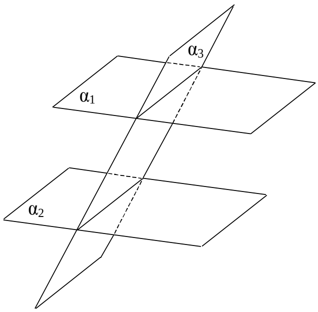


Рис. 3

3º. $r_1 = 2$, $r_2 = 2$. У цьому випадку система (1) сумісна і має нескінченну множину розв'язків. Серед рівнянь системи (1) незалежних лише два, наприклад, перше і друге, а третє рівняння є їх наслідком. Це означає, що спільні розв'язки перших двох рівнянь (ці розв'язки залежать лише від одного параметра) є також і розв'язками третього рівняння. З геометричної точки зору маємо дві площини, які перетинаються по прямій, і третю площину, що проходить через цю пряму. У випадку **3º** також можливі два розміщення площин.

а) Серед нормальних векторів $\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{N}_3$ площин $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ немає колінеарних. Тоді у матриці B не існує двох рядків, відповідні елементи яких пропорційні. Це означає, що всі площини $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – різні і проходять через одну і ту ж пряму (рис. 4).

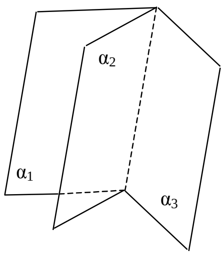


Рис. 4

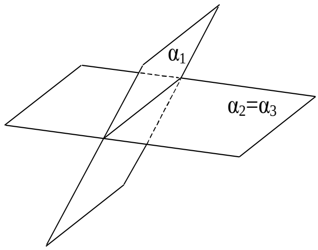


Рис. 5

б) Серед нормальних векторів $\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{N}_3$ є два колінеарних. У матриці B у цьому випадку існує два рядки, відповідні елементи яких пропорційні. Це означає, що два з рівнянь (1) визначають одну і ту ж площину, яку перетинає третя площина (рис. 5).

4º. $r_1 = 1$, $r_2 = 2$. Система (1) несумісна. Можливі такі випадки.

а) У матриці B не існує двох рядків, відповідні елементи яких пропорційні. Це означає, що площини $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ різні і будь-які дві з них паралельні (рис. 6).

б) У матриці B є два рядки, відповідні елементи яких пропорційні. У цьому випадку два з рівнянь (1) визначають одну і ту ж площину, яка паралельна третій площині (рис. 7).

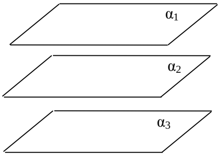


Рис. 6

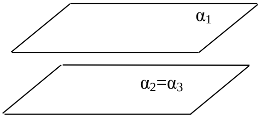


Рис. 7

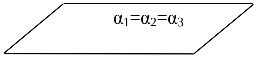


Рис. 8

5°. $r_1 = 1,\ r_2 = 1$. У цьому випадку всі три рівняння (1) визначають одну і ту ж площину (рис. 8).

Випадок $r_1 = 1$, $r_2 = 3$ неможливий.

Приклад 1. Вияснити взаємне розміщення трьох площин $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, які задано такими рівняннями

$$\begin{aligned} &x + y - z - 1 = 0, \\ &x + 4y - 5 = 0, \\ &2x + 5y - z - 6 = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Розв'язання. Нормальними векторами площин $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ є відповідно вектори

$$\vec{N}_1(1; 1; -1),\ \vec{N}_2(1; 4; 0),\ \vec{N}_3(2; 5; -1).$$

Оскільки серед нормальних векторів немає колінеарних, то всі три площини різні.
Застосуємо метод Гаусса до системи (2):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 5 \\ 2 & 5 & -1 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Отже, $r_1 = 2$ і $r_2 = 2$. Маємо випадок **3°** а). Площини α_1 і α_2 перетинаються по прямій, а площина α_3 проходить через цю пряму, тобто площини $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ належать до одного пучка площин.

Пряма у просторі

§1. Пряма як лінія перетину двох площин

Згідно з означенням 1 §3 гл. XVI лінія у просторі визначається як перетин двох поверхонь. Оскільки пряму у просторі можна розглядати як перетин двох непаралельних площин, то її у декартовій прямокутній системі координат завжди можна задати двома лінійними рівняннями

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \tag{1}$$

що визначають ці площини. З іншого боку, два лінійних рівняння (1) є рівняннями деякої прямої тоді і тільки тоді, коли відповідні їм площини не паралельні, тобто коли виконується одна з таких умов:

1°. Хоча б один з визначників

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \tag{2}$$

відмінний від нуля. Ця умова у векторній формі рівносильна умові $\vec{N}_1 \times \vec{N}_2 \neq \vec{0}$. Тут $\vec{N}_1$ і $\vec{N}_2$ – нормальні вектори площин (1), а знак “$\times$” є знаком векторного добутку.

2°. Нормальні вектори $\vec{N}_1\left(A_1; B_1; C_1\right)$ і $\vec{N}_2\left(A_2, B_2, C_2\right)$ площин (1) неколінеарні, тобто відповідні координати цих векторів не пропорційні.

3°. $rang\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2 \cdot$

<u>**Означення 1**</u>. Рівняння системи (1) називаються загальними рівняннями прямої, якщо виконується одна з умов **1°**, **2°**, **3°**.

Ми визначили пряму як перетин двох площин. Але через задану пряму можна провести нескінченну кількість площин, тобто пучок площин, віссю якого є дана пряма. Будь-які дві різні площини цього пучка визначають дану пряму. Отже, виявляється, що у виборі рівнянь прямої є певна довільність: кожне з рівнянь системи (1) можна замінити рівнянням (див. теорему 1 §10 гл. XVII)

$$\lambda\left(A_1x + B_1y + C_1z + D_1\right) + \mu\left(A_2x + B_2y + C_2z + D_2\right) = 0, \quad \lambda, \mu \in R$$

будь-якої іншої площини пучка, відмінної від площин (1). Цією довільністю можна скористатись для зображення даної прямої як перетину площин, що мають найпростіші рівняння.

Зручно користуватись площинами, паралельними координатним осям, тобто площинами, які проектують дану пряму на координатні площини.

Рівняння таких площин не містять однієї координати і тому їх можна отримати шляхом виключення відповідної координати з рівнянь системи (1). В результаті матимемо три таких рівняння, проте для визначення прямої достатньо двох з них. Зупинимось на цьому докладніше.

Оскільки площини (1) перетинаються, то за умовою **1º** хоча б один з визначників (2) не дорівнює нулю. Нехай таким визначником є

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0 . \tag{3}$$

Геометрично це означає, що пряма (1) не паралельна координатній площині xOy. За умови (3) систему рівнянь (1) можна розв'язати відносно x і y:

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y = -(C_1 z + D_1) \\ A_2 x + B_2 y = -(C_2 z + D_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\begin{vmatrix} -(C_1 z + D_1) & B_1 \\ -(C_2 z + D_2) & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} \\ y = \dfrac{\begin{vmatrix} A_1 & -(C_1 z + D_1) \\ A_2 & -(C_2 z + D_2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\begin{vmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} z + \dfrac{\begin{vmatrix} -D_1 & B_1 \\ -D_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} \\ y = \dfrac{\begin{vmatrix} A_1 & -C_1 \\ A_2 & -C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} z + \dfrac{\begin{vmatrix} A_1 & -D_1 \\ A_2 & -D_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = az + p \\ y = bz + q, \end{cases} \tag{4}$$

де $a = \dfrac{\begin{vmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$; $p = \dfrac{\begin{vmatrix} -D_1 & B_1 \\ -D_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$; $b = \dfrac{\begin{vmatrix} A_1 & -C_1 \\ A_2 & -C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$; $q = \dfrac{\begin{vmatrix} A_1 & -D_1 \\ A_2 & -D_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$.

Означення 2. Система рівнянь (4) називається зведеною системою рівнянь прямої.

Оскільки перше рівняння системи (4) не містить y, а друге – x, то перша площина паралельна осі Oy і проектує задану пряму на координатну площину xOz, а друга площина паралельна осі Ox і проектує задану пряму на площину yOz.

Отже, перше з рівнянь (4), тобто рівняння $x = az + p$, є одночасно рівнянням проекції даної прямої на площину xOz, а друге рівняння $y = bz + q$ – рівнянням проекції цієї прямої на площину yOz. Тому поряд з терміном зведені рівняння прямої використовується також термін рівняння прямої у проекціях на координатні площини.

Параметри p і q мають простий геометричний зміст. Якщо ми покладемо в рівняннях (4) $z = 0$, тобто будемо знаходити точку перетину прямої з площиною xOy, то ми отримаємо $x = p$, $y = q$. Тому пряма (4) перетинається з площиною xOy у точці $(p; q; 0)$. Цю точку назвемо слідом прямої на площині xOy. Отже, параметри p і q в рівняннях (4) є координатами сліду даної прямої на площині xOy.

Приклад 1. Дано пряму

$$\begin{cases} 6x + 4y + z - 26 = 0 \\ 2x + 4y - 3z - 2 = 0. \end{cases} \qquad (5)$$

Знайти зведені рівняння цієї прямої і рівняння її проекцій на координатні площини xOz і yOz. Визначити координати сліду даної прямої на площині xOy.

Розв'язання. Розв'яжемо рівняння прямої (5) відносно x і y. Це можна зробити, оскільки

$$\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 16 \neq 0.$$

Маємо

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 26 - z & 4 \\ 2 + 3z & 4 \end{vmatrix}}{16} = \frac{\begin{vmatrix} 26 & 4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{16} = 6 - z;$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 26 - z \\ 2 & 2 + 3z \end{vmatrix}}{16} = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 26 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{16} = -\frac{5}{2} + \frac{5}{4}z.$$

Отже, зведеними рівняннями прямої (5) є рівняння

$$\begin{cases} x = 6 - z \\ y = -\dfrac{5}{2} + \dfrac{5}{4}z. \end{cases} \qquad (6)$$

Проекціями прямої (5) на координатні площини xOz і yOz будуть прямі, рівняння яких відповідно

$$\begin{cases} x = 6 - z \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} y = -\dfrac{5}{2} + \dfrac{5}{4}z \\ x = 0. \end{cases}$$

Точка $\left(6; -\dfrac{5}{2}; 0\right)$ є слідом прямої (5) на площині xOy.

Зауваження 1. Якщо $a = 0$, то пряма

$$\begin{cases} x = p \\ y = bz + q \end{cases}$$

лежить у площині $x = p$ і тому паралельна площині yOz.

Якщо $b = 0$, то пряма

$$\begin{cases} x = az + p \\ y = q \end{cases}$$

лежить у площині $y = q$ і тому паралельна площині xOz.

Якщо $a = 0$, $b = 0$, то пряма

$$\begin{cases} x = p \\ y = q \end{cases}$$

паралельна осі Oz.

Зауваження 2. Виведення рівнянь (4) ґрунтується на припущенні, що виконується умова (3). Якщо ця умова не виконується, то, принаймні, один з двох інших визначників (2) не дорівнює нулю. Тоді слід взяти той визначник, який не дорівнює нулю, і провести аналогічні викладки.

§2. Канонічні і параметричні рівняння прямої

2.1. Канонічні рівняння прямої у просторі можна отримати шляхом тих самих міркувань, що й при розв’язуванні задачі 1 §8 гл. XIII.

Пряма l у просторі однозначно визначається довільною своєю точкою $M_0(x_0; y_0; z_0)$ і деяким ненульовим вектором $\vec{a}(m; n; p)$, паралельним до l.

<u>Означення 1</u>. Ненульовий вектор $\vec{a}(m; n; p)$, паралельний до прямої l, називається напрямним вектором цієї прямої.

Однією з основних задач теорії прямої є така задача: маючи аналітичне задання образів, які визначають положення прямої у просторі, написати рівняння цієї прямої. Знайдемо рівняння прямої l, якщо відома точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$, через яку вона проходить, і задано напрямний вектор $\vec{a}(m; n; p)$ цієї прямої (рис. 1).

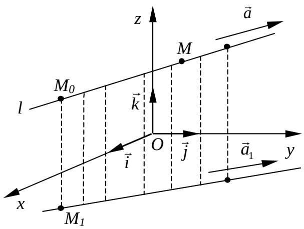


Рис. 1

Для того щоб точка $M(x;\, y;\, z)$ лежала на прямій l, яка проходить через точку $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$ паралельно вектору $\vec{a}(m;\, n;\, p)$, необхідно і достатньо, щоб вектор

$$\overrightarrow{M_0M}\left(x-x_0;\, y-y_0;\, z-z_0\right)$$

був колінеарним вектору $\vec{a}(m;\, n;\, p)$, тобто необхідно і достатньо, щоб одночасно виконувались три рівності

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ m & n \end{vmatrix}=0; \quad \begin{vmatrix} y-y_0 & z-z_0 \\ n & p \end{vmatrix}=0; \quad \begin{vmatrix} x-x_0 & z-z_0 \\ m & p \end{vmatrix}=0. \qquad (1)$$

Кожна з цих рівностей є рівнянням першого степеня, тобто рівнянням площини. Отже, координати довільної точки M прямої l задовольняють рівнянню кожної з площин (1), а тому пряма l належить одночасно до всіх цих площин. Іншими словами, три площини (1) є площинами одного і того ж пучка з віссю l.

Вияснимо геометричний зміст кожного з рівнянь (1). Нехай, наприклад, у першому з цих рівнянь m і n одночасно не дорівнюють нулю. Тоді це рівняння приймає вигляд

$$n(x-x_0)-m(y-y_0)=0. \qquad (2)$$

Оскільки в рівнянні (2) відсутня змінна z, то цим рівнянням визначається площина, паралельна осі Oz або така, що містить цю вісь. Пряма l лежить у площині (2), тому остання проектує пряму l на координатну площину xOy. Проекція прямої l на площину xOy має рівняння

$$\begin{cases} n(x-x_0)-m(y-y_0)=0 \\ z=0 \end{cases}$$

і проходить через точку $M_1(x_0;\, y_0;\, 0)$ паралельно вектору $\vec{a}_1(m;\, n;\, 0)$ (рис. 1).

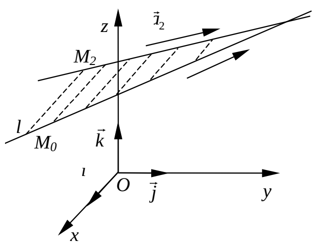


Рис. 2

Друга з площин (1)

$$\begin{vmatrix} y-y_0 & z-z_0 \\ n & p \end{vmatrix}=0$$

паралельна осі Ox і перетинає площину yOz по прямій, що проходить через точку $M_2(0;\, y_0;\, z_0)$ паралельно вектору $\vec{a}_2(0;\, n;\, p)$ (рис. 2).

І нарешті, третя площина

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & z-z_0 \\ m & p \end{vmatrix} = 0$$

паралельна осі Oy і перетинає площину xOz по прямій, що проходить через точку $M_3\left(x_0;\, 0;\, z_0\right)$ паралельно вектору $\vec{a}_3\left(m;\, 0;\, p\right)$.

Розглянемо спочатку випадок, коли жодне з чисел m, n, p не дорівнює нулю. Тоді рівняння (1) можна записати у вигляді

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n}\,; \quad \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}\,; \quad \frac{x-x_0}{m} = \frac{z-z_0}{p}\,. \tag{3}$$

Із системи рівнянь (3) випливає, що будь-яке з цих рівнянь є наслідком двох інших. Тому два з трьох рівнянь (1) або (3) повністю визначають пряму l, що проходить через точку $M_0\left(x_0;\, y_0;\, z_0\right)$ паралельно вектору $\vec{a}\left(m;\, n;\, p\right)$.

У випадку $m \neq 0$, $n \neq 0$, $p \neq 0$ рівняння (1) або (3) можна подати ще так:

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}\,. \tag{4}$$

<u>Означення 2</u>. Рівняння (4) називаються канонічними рівняннями прямої, що проходить через точку $M_0\left(x_0;\, y_0;\, z_0\right)$ паралельно вектору $\vec{a}\left(m;\, n;\, p\right)$.

Розглянемо тепер випадок, коли одне з чисел m, n, p дорівнює нулю, тобто пряма l паралельна одній з координатних площин. Нехай для визначеності $m = 0$, а $n \neq 0$ і $p \neq 0$. Тоді рівняння (1) перепишуться у вигляді

$$x - x_0 = 0\,; \ \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}\,; \ x - x_0 = 0\,.$$

Отже, для двох рівнянь, що визначають пряму l, маємо

$$x = x_0\,; \quad \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}\,. \tag{5}$$

Домовимось у цьому випадку канонічні рівняння записувати у вигляді

$$\frac{x-x_0}{0} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}\,, \tag{6}$$

вважаючи чисельник першого дробу рівним нулю, тобто домовляємось розглядати систему рівнянь (6) як систему двох рівнянь (5).

Якщо одночасно дорівнюють нулю два числа з чисел m, n, p, то пряма l паралельна одній з координатних осей. Нехай для визначеності $m=0$, $n=0$. У цьому випадку система рівнянь (1) набуває вигляду

$$0=0\,; \quad y-y_0=0\,; \quad x-x_0=0\,.$$

Ця система визначає дві площини

$$x=x_0\,; \quad y=y_0\,, \tag{7}$$

перетином яких є пряма l, паралельна координатній осі Oz.

Домовляємось канонічні рівняння прямої l і в цьому випадку записувати у вигляді

$$\frac{x-x_0}{0}=\frac{y-y_0}{0}=\frac{z-z_0}{p}\,, \tag{8}$$

де чисельники першого та другого дробів вважаються рівними нулю. Систему рівнянь (8) будемо розглядати як систему рівнянь (7).

Отже, канонічні рівняння (4) слід розуміти так:

1°. Якщо жодне з чисел m, n, p не дорівнює нулю, то рівняння (4) потрібно розуміти як систему будь-яких двох рівнянь з трьох рівнянь системи (1).

2°. Якщо яке-небудь з чисел m, n, p дорівнює нулю, то чисельник відповідного дробу в (4) потрібно покласти рівним нулю. Так, якщо $p=0$, то систему (4) слід розуміти як систему двох рівнянь

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}\,; \quad z=z_0\,.$$

3°. Якщо які-небудь два числа з чисел m, n, p дорівнюють нулю, то чисельники двох відповідних дробів потрібно покласти рівними нулю. Якщо, наприклад, $n=0$ і $p=0$, то систему (4) слід розуміти як систему двох рівнянь

$$y-y_0=0\,; \quad z-z_0=0\,.$$

Не дивлячись на небажаний запис нуля у знаменнику і необхідність обмовок з цього приводу, зображення прямої у вигляді канонічних рівнянь (4), (6), (8) тощо є досить поширеним. Причиною цього є те, що канонічні рівняння відразу ж вказують на напрямний вектор прямої і точку, через яку вона проходить.

Зауваження 1. Якщо вектор $\vec{a}(m;\,n;\,p)$ – напрямний вектор прямої (1), то і вектор $\lambda\vec{a}$, де λ - будь-яке ненульове дійсне число, також є напрямним вектором цієї прямої. Пронормуємо вектор $\vec{a}$, тобто покладемо $\lambda=\dfrac{1}{|\vec{a}|}$. Тоді напрямним вектором прямої (1) буде одиничний вектор $\vec{a}_0$, координатами якого є напрямні косинуси вектора $\vec{a}$, тобто

$$\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}, \quad \vec{a}_0\left(\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\right),$$

де

$$\cos\alpha = \frac{m}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}, \ \cos\beta = \frac{n}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}, \ \cos\gamma = \frac{p}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}. \qquad (9)$$

і

$$\alpha = \left(\vec{i}\,\hat{,}\,\vec{a}\right), \ \beta = \left(\vec{j}\,\hat{,}\,\vec{a}\right), \ \gamma = \left(\vec{k}\,\hat{,}\,\vec{a}\right).$$

Канонічні рівняння прямої у цьому випадку приймають вигляд

$$\frac{x-x_0}{\cos\alpha} = \frac{y-y_0}{\cos\beta} = \frac{z-z_0}{\cos\gamma}. \qquad (10)$$

Формули (9) дають можливість знайти кути прямої (1) з осями координат.

2.2. Нехай задано дві різні точки $M_1\left(x_1; y_1; z_1\right)$ і $M_2\left(x_2; y_2; z_2\right)$. Складемо рівняння прямої M_1M_2.

Вектор $\overrightarrow{M_1M_2}\left(x_2-x_1; y_2-y_1; z_2-z_1\right)$ є напрямним вектором цієї прямої. Підставимо у рівняння (4) замість координат точки $M_0\left(x_0; y_0; z_0\right)$ координати точки $M_1\left(x_1; y_1; z_1\right)$, а замість координат вектора $\vec{a}\left(m; n; p\right)$ координати вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$. В результаті матимемо канонічні рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $M_1\left(x_1; y_1; z_1\right)$ і $M_2\left(x_2; y_2; z_2\right)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (11)$$

2.3. Перейдемо до параметричного задання прямої у просторі, тобто зображення координат змінної точки прямої як функцій довільного параметра.

Нехай пряму l задано точкою $M_0\left(x_0; y_0; z_0\right)$ і напрямним вектором $\vec{a}\left(m; n; p\right)$ (рис. 3).

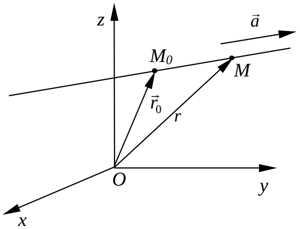


Рис. 3

Позначимо через $M(x;\, y;\, z)$ довільну точку простору. Точка $M(x;\, y;\, z)$ лежить на прямій l тоді і тільки тоді, коли вектори $\overrightarrow{M_0M}$ і $\vec{a}$ колінеарні. Отже, для будь-якої точки M прямої l має місце векторна рівність

$$\overrightarrow{M_0M_1} = \vec{a}t\ . \tag{12}$$

Запишемо її у координатній формі:

$$\begin{cases} x - x_0 = mt \\ y - y_0 = nt \\ z - z_0 = pt \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt, \quad -\infty < t < \infty. \end{cases} \tag{13}$$

Рівняння (13) є параметричними рівняннями прямої. Якщо параметр t пробігає всю множину дійсних чисел, точка $M(x;\, y;\, z)$ пробігає всю пряму.

Нехай пряма проходить через дві різні точки $M_1(x_1;\, y_1;\, z_1)$ і $M_2(x_2;\, y_2;\, z_2)$. Тоді параметричними рівняннями цієї прямої будуть рівняння

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \\ z = z_1 + (z_2 - z_1)t. \end{cases} \tag{14}$$

Параметру $t = 0$ відповідає точка $M_1(x_1;\, y_1;\, z_1)$, а параметру $t = 1$ – точка $M_2(x_2;\, y_2;\, z_2)$. Якщо параметр t змінюється у проміжку $0 \le t \le 1$, то цим значенням параметра відповідають точки відрізка M_1M_2 даної прямої.

2.4. Запишемо векторне рівняння прямої l, що проходить через точку $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$ паралельно вектору $\vec{a}(m;\, n;\, p)$. Для цього позначимо через $\vec{r}$ і $\vec{r}_0$ радіуси-вектори відповідно точок M і M_0 прямої l (рис. 3). Тоді рівність (12) у векторній формі набуває вигляду

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{a}t \Leftrightarrow \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}t\ . \tag{15}$$

Рівняння (15) і є шуканим рівнянням прямої l у векторній формі. Відмітимо, що записуючи рівняння (15) у координатній формі, прийдемо до параметричних рівнянь прямої (13).

При виведенні рівнянь прямої ми записували умову колінеарності векторів $\overrightarrow{M_0M}$ і $\vec{a}$ у вигляді рівності (12). Проте цю умову можна було б записати і в іншій формі, а саме, прирівняти до нуля векторний добуток векторів $\overrightarrow{M_0M}$ і $\vec{a}$:

$$(\vec{r}-\vec{r}_0)\times\vec{a}=\vec{0}. \tag{16}$$

Рівняння (16) слід також розглядати як векторне рівняння прямої, яке, на відміну від рівняння (15), не є параметричним. Рівняння (16) можна отримати безпосередньо з рівняння (15), помноживши його векторно на $\vec{a}$:

$$\vec{r}-\vec{r}_0=\vec{a}t \Leftrightarrow (\vec{r}-\vec{r}_0)\times\vec{a}=(\vec{a}t)\times\vec{a} \Leftrightarrow (\vec{r}-\vec{r}_0)\times\vec{a}=\vec{0}.$$

Щоб записати рівняння (16) у координатній формі, виразимо векторний добуток у вигляді визначника

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ m & n & p \end{vmatrix}=\vec{0}$$

і розкладемо цей визначник за елементами першого рядка, врахувавши, що вектор дорівнює нульовому вектору тоді і тільки тоді, коли всі його координати дорівнюють нулю:

$$\begin{aligned} p(y-y_0)&=n(z-z_0),\\ m(z-z_0)&=p(x-x_0),\\ n(x-x_0)&=m(y-y_0). \end{aligned} \tag{17}$$

Поділивши перше з рівнянь (17) на pn, друге – на mp і третє – на mn, зведемо їх до вигляду

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

Отже, у векторній формі канонічні рівняння прямої мають вигляд(16).

§3. Зведення загальних рівнянь прямої до канонічних рівнянь

3.1. Нехай пряму l задано загальними рівняннями

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases} \tag{1}$$

Позначимо площини, які визначаються рівняннями (1), через α_1 і α_2, а нормальні вектори цих площин – через

$$\vec{N}_1(A_1;B_1;C_1) \text{ і } \vec{N}_2(A_2;B_2;C_2).$$

Теорема 1. Вектор $\vec{a} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2$, тобто вектор з координатами

$$\vec{a}\left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\right) \tag{2}$$

є напрямним вектором прямої (1).

<u>Доведення</u>. Вектор $\vec{N}_1$ перпендикулярний до площини α_1, тому деякий вектор $\vec{a}$, перпендикулярний до вектора $\vec{N}_1$, буде паралельним до площини α_1 (рис. 1). Аналогічно, вектор, перпендикулярний до нормального вектора $\vec{N}_2$ площини α_2, буде паралельним до цієї площини. Отже, вектор, який одночасно перпендикулярний до нормальних векторів $\vec{N}_1$ і $\vec{N}_2$, є паралельним як до площини α_1, так і до площини α_2, а тому і до лінії перетину цих площин, тобто прямої (1).

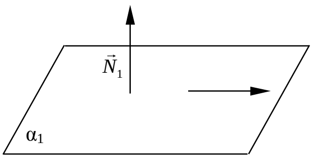


Рис. 1

Ми показали, що за напрямний вектор прямої (1) можна взяти будь-який вектор, який одночасно перпендикулярний до нормальних векторів $\vec{N}_1$ і $\vec{N}_2$. Зокрема, таким вектором є векторний добуток $\vec{a} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2$. Координати цього векторного добутку визначаються згідно з (2) (див. §2 гл. VII).

Теорему доведено.

Щоб перейти від загальних рівнянь прямої (1) до канонічних рівнянь цієї прямої, потрібно знайти:

1) хоча б одну точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ прямої (1);

2) деякий напрямний вектор $\vec{a}$ прямої (1).

Покажемо, як знайти координати точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$, через яку проходить пряма (1). Оскільки вектори $\vec{N}_1$ і $\vec{N}_2$ неколінеарні, то вектор $\vec{a} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2$ відмінний від нульового вектора. Тому хоча б одна з координат вектора $\vec{a}$ не дорівнює нулю. Нехай для визначеності

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0 \cdot$$

Систему (1) перепишемо у вигляді

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = -C_1z - D_1 \\ A_2x + B_2y = -C_2z - D_2. \end{cases} \tag{3}$$

Поклавши z рівним якому-небудь числу, наприклад, нулю, знаходимо з системи (3) значення x і y:

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} -D_1 & B_1 \\ -D_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} = \frac{B_1 D_2 - B_2 D_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1},$$

$$y_0 = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & -D_1 \\ A_2 & -D_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} = \frac{A_2 D_1 - A_1 D_2}{A_1 B_2 - A_2 B_1}. \qquad (4)$$

Знаючи точку $M_0\left(x_0;\, y_0;\, 0\right)$ і напрямний вектор (2) $\vec{a}$, запишемо канонічні рівняння прямої у вигляді

$$\frac{x - \dfrac{B_1 D_2 - B_2 D_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1}}{B_1 C_2 - B_2 C_1} = \frac{y - \dfrac{A_2 D_1 - A_1 D_2}{A_1 B_2 - A_2 B_1}}{C_1 A_2 - C_2 A_1} = \frac{z}{A_1 B_2 - A_2 B_1}. \qquad (5)$$

3.2. У §1 даної глави було показано, як із загальних рівнянь (1) прямої l отримати її зведені рівняння

$$\begin{cases} x = az + p \\ y = bz + q. \end{cases} \qquad (6)$$

Нехай тепер пряму l задано канонічними рівняннями

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}. \qquad (7)$$

Ця пряма визначається як лінія перетину площин

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_0}{a_1} = \dfrac{z - z_0}{a_3} \\[2ex] \dfrac{y - y_0}{a_2} = \dfrac{z - z_0}{a_3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a_1}{a_3} z + x_0 - \dfrac{a_1}{a_3} z_0 \\[2ex] y = \dfrac{a_2}{a_3} z + y_0 - \dfrac{a_2}{a_3} z_0. \end{cases} \qquad (8)$$

Ввівши позначення

$$a = \frac{a_1}{a_3}; \quad b = \frac{a_2}{a_3}; \quad p = x_0 - \frac{a_1}{a_3} z_0; \quad q = y_0 - \frac{a_2}{a_3} z_0,$$

ми від системи (8) перейдемо до системи (6), тобто до зведених рівнянь прямої l.

Оскільки напрямний вектор $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ прямої l можна замінити будь-яким іншим вектором, йому паралельним, то з цього випливає, що за умови $a_3 \neq 0$ вектор з координатами

$$\left(a = \frac{a_1}{a_3};\ b = \frac{a_2}{a_3};\ 1\right)$$

є напрямним вектором прямої l. Крім цього, з (6) випливає, що пряма l проходить через точку $M_0(p; q; 0)$. Тому, якщо пряму l задано зведеними рівняннями (6), то з цих рівнянь легко отримати її канонічні рівняння

$$\frac{x-p}{a} = \frac{y-q}{b} = \frac{z}{1}. \tag{9}$$

Канонічні рівняння (9) прямої l розкривають геометричний зміст коефіцієнтів a і b, які фігурують у зведених рівняннях (6) цієї прямої.

Приклад 1. Пряму задано загальними рівняннями

$$\begin{cases} x - y + 2z - 3 = 0 \\ 2x + y - z + 6 = 0. \end{cases}$$

Записати канонічні рівняння цієї прямої.

Розв'язання. Знайдемо координати точки M_0 прямої. Оскільки

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0,$$

то поклавши $z = 0$, з системи (4) знаходимо $x_0 = -1$, $y_0 = -4$. Шуканою точкою є точка $M_0(-1; -4; 0)$.

Координати напрямного вектора $\vec{a}$ обчислюємо згідно з (2):

$$\vec{a}\left(\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right) \Leftrightarrow \vec{a}(-1; 5; 3).$$

Отже, канонічні рівняння заданої прямої мають вигляд

$$\frac{x+1}{-1} = \frac{y+4}{5} = \frac{z}{3}.$$

§4. Взаємне розміщення двох прямих у просторі

Нехай дві прямі l_1 і l_2 задано канонічними рівняннями

$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}, \tag{1}$$

$$\frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}. \tag{2}$$

Пряма l_1 проходить через точку $M_1(x_1;\, y_1;\, z_1)$ паралельно вектору $\vec{a}_1(m_1;\, n_1;\, p_1)$, а пряма l_2 – через точку $M_2(x_2;\, y_2;\, z_2)$ паралельно вектору $\vec{a}_2(m_2;\, n_2;\, p_2)$.

Можливі чотири різних випадки взаємного розміщення прямих l_1 і l_2 у просторі:

1º. Прямі мимобіжні, тобто такі, через які не можна провести площину.

2º. Прямі перетинаються.

3º. Прямі паралельні.

4º. Прямі співпадають.

Взаємне розміщення заданих прямих l_1 і l_2 можна визначити за векторами $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2-x_1;\, y_2-y_1;\, z_2-z_1)$, $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$. Для цього з координат цих векторів складемо матриці

$$A=\begin{pmatrix} m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad B=\begin{pmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{pmatrix}$$

і позначимо ранги матриць A і B відповідно r_1 і r_2.

Дослідимо всі можливі випадки взаємного розміщення прямих l_1 і l_2.

Теорема 1. Для того щоб прямі l_1 і l_2 були мимобіжними, необхідно і достатньо, щоб $r_2=3$, тобто $\det B\neq 0$.

Доведення. *Необхідність*. Покажемо, що для мимобіжних прямих l_1 і l_2 справедлива рівність $r_2=3$. Дійсно, за умови мимобіжності прямих вектори $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ – некомпланарні, тобто не паралельні одній площині. Умовою некомпланарності векторів $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ є відмінність від нуля їх мішаного добутку:

$$\overrightarrow{M_1M_2}\,\vec{a}_1\,\vec{a}_2\neq 0 .$$

Тому визначник, складений з координат цих векторів, не дорівнює нулю, тобто $\det B\neq 0$.

Достатність. Покажемо тепер, що за умови $r_2=3$, тобто $\det B\neq 0$ прямі l_1 і l_2 мимобіжні. Дійсно, якщо $\det B\neq 0$, то мішаний добуток векторів $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ не дорівнює нулю. Це рівносильно тому, що вектори $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$ не паралельні одній площині. Тому прямі l_1 і l_2 мимобіжні.

Теорему доведено.

Теорема 2. Для того щоб прямі l_1 і l_2 перетинались, необхідно і достатньо, щоб $r_1 = 2$ і $r_2 = 2$.

Доведення. *Необхідність.* Якщо прямі l_1 і l_2 перетинаються, то $r_1 = 2$ і $r_2 = 2$. Дійсно, у випадку перетину прямих l_1 і l_2 вони лежать в одній площині. Тому вектори $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ – компланарні і, отже, $\det B = 0$. Це означає, що $r_2 < 3$. З перетину прямих l_1 і l_2 випливає також неколінеарність векторів $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$, тому $r_1 = 2$. Оскільки матриця B отримується з матриці A добавлянням рядка, то і ранг матриці B дорівнює 2.

Достатність. Якщо $r_2 = 2$, то $\det B = 0$ і вектори $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ – компланарні. Тому прямі l_1 і l_2 лежать в одній площині.

Якщо, крім цього, $r_1 = 2$, то вектори $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$ не колінеарні. Отже, прямі l_1 і l_2 перетинаються.

Теорему доведено.

Теорема 3. Для того щоб прямі l_1 і l_2 були паралельними, необхідно і достатньо, щоб $r_1 = 1$ і $r_2 = 2$.

Доведення. *Необхідність.* Потрібно показати, що для паралельних прямих l_1 і l_2 справедливі рівності $r_1 = 1$, $r_2 = 2$. Дійсно, за умови паралельності прямі l_1 і l_2 лежать в одній площині. Тому вектори $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ компланарні і $\det B = 0$. Звідси випливає, що $r_2 < 3$. З іншого боку, із умови паралельності прямих l_1 і l_2 випливає, що вектори $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$ колінеарні і тому $r_1 = 1$. Ранг r_2 матриці B дорівнює 2, оскільки вектори $\overrightarrow{M_1M_2}$ і $\vec{a}_1$ не колінеарні.

Достатність. Нехай $r_1 = 1$, $r_2 = 2$. Тоді прямі l_1 і l_2 паралельні, оскільки вектори $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$ колінеарні, і не співпадають, бо вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ не колінеарний вектору $\vec{a}_1$ або $\vec{a}_2$.

Теорему доведено.

Теорема 4. Для того щоб прямі l_1 і l_2 співпадали, необхідно і достатньо, щоб $r_1 = 1$, $r_2 = 1$.

Доведення теореми 4 аналогічне доведенню теореми 3. У цьому випадку вектори $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ колінеарні і рівняння (1) і (2) є рівняннями однієї прямої.

Приклад 1. Дослідити взаємне розміщення двох прямих

$$\frac{x}{10} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z-3}{-6} \quad \text{і} \quad \begin{cases} 3x + 6y + z - 8 = 0 \\ 2x + 5y = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Позначимо задані прямі відповідно l_1 і l_2. Пряма l_1 проходить через точку $M_1(0;-1;3)$ паралельно вектору $\vec{a}_1(10;-4;-6)$. Поклавши $x=0$, $y=0$, з рівнянь прямої l_2 знаходимо $z=8$. Тому пряма l_2 проходить через точку $M_2(0;0;8)$. Знайдемо напрямний вектор $\vec{a}_2$ прямої l_2 згідно з (2) §3:

$$\vec{a}_2\left(\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}\right) \Leftrightarrow \vec{a}_2(-5;2;3).$$

Для заданих прямих вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ має координати $\overrightarrow{M_1M_2}(0;1;5)$. Координати векторів $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$ пропорційні, тому вектори $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$ колінеарні, тобто $r_1=1$. Координати вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ не пропорційні координатам векторів $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$, тому вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ не колінеарний векторам $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$, тобто $r_2=2$. Отже, $r_1=1$, $r_2=2$ і прямі l_1 і l_2 паралельні.

§5. Взаємне розміщення прямої і площини у просторі

Розглянемо у просторі площину α, задану загальним рівнянням

$$Ax+By+Cz+D=0, \tag{1}$$

і пряму l, задану параметричними рівняннями

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt. \end{cases} \tag{2}$$

Пряма l проходить через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ паралельно вектору $\vec{a}(m;n;p)$.

Можливі три різних випадки взаємного розміщення прямої l і площини α:

1°. Пряма і площина перетинаються в єдиній точці – це загальний тип розміщення прямої і площини у просторі.

2°. Пряма і площина не мають жодної спільної точки, тобто пряма l паралельна площині α, але не лежить у ній.

3°. Пряма і площина мають нескінченну множину спільних точок, тобто пряма l лежить у площині α.

Дослідимо всі можливі випадки взаємного розміщення прямої l і площини α. Ця задача з алгебраїчної точки зору зводиться до дослідження системи, що складається з рівнянь (1) і (2). Для знаходження спільних точок прямої l і площини α підставимо в рівняння (1) значення x, y, z з рівнянь (2). Після перетворень отримаємо рівняння відносно параметра t:

$$A\left(x_0+mt\right)+B\left(y_0+nt\right)+C\left(z_0+pt\right)+D=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow t\left(Am+Bn+Cp\right)+\left(Ax_0+By_0+Cz_0+D\right)=0. \quad (3)$$

З рівняння (3) випливає, що:

а) якщо

$$Am+Bn+Cp\neq 0, \quad (4)$$

то воно має єдиний розв’язок

$$t_0=-\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Am+Bn+Cp}.$$

Підставивши цей розв’язок у формули (2), отримаємо єдину точку

$$M_1\left(x_0+mt_0;\ y_0+nt_0;\ z_0+pt_0\right)$$

перетину прямої l і площини α. Тому умова (4) є достатньою умовою перетину площини α і прямої l в єдиній точці M_1.

б) Якщо

$$Am+Bn+Cp=0 \text{ і } Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0, \quad (5)$$

то рівняння (3) набуває вигляду

$$0\cdot t+\left(Ax_0+By_0+Cz_0+D\right)=0,$$

тобто не має розв’язків. Геометрично це означає, що пряма l і площина α паралельні. Отже, умова (5) є достатньою умовою паралельності прямої l і площини α.

в) Якщо

$$Am+Bn+Cp=0 \text{ і } Ax_0+By_0+Cz_0+D=0, \quad (6)$$

то рівняння (3) приймає вигляд

$$0\cdot t+0=0$$

і тому виконується для довільного t. Це означає, що пряма l лежить у площині α. Умова (6) є достатньою умовою того, що пряма l лежить у площині α.

Доведені нами достатні умови того чи іншого взаємного розміщення прямої l і площини α є одночасно і необхідними умовами. Це доводиться відразу ж методом від противного. Як приклад, наведемо доведення необхідної умови перетину прямої l і площини α.

Теорема 1. Якщо пряма l і площина α перетинаються в єдиній точці, то виконується умова (4).

Доведення. Припустимо протилежне, тобто

$$Am+Bn+Cp=0.$$

Тоді згідно з (5) або (6) площина α і пряма l або паралельні, або пряма l лежить у площині α. Одержане протиріччя доводить необхідність умови (4).

Наведені вище результати щодо взаємного розміщення прямої l і площини α сформулюємо у вигляді наступних теорем.

Теорема 2. Для того щоб пряма l і площина α перетинались у єдиній точці, необхідно і достатньо виконання умови

$$Am + Bn + Cp \neq 0.$$

Теорема 3. Для того щоб пряма l і площина α були паралельними, необхідно і достатньо, щоб одночасно виконувались умови

$$Am + Bn + Cp = 0 \text{ і } Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0.$$

Теорема 4. Для того щоб пряма l лежала у площині α, необхідно і достатньо, щоб виконувались умови

$$Am + Bn + Cp = 0 \text{ і } Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0.$$

Приклад 1. Дослідити взаємне розміщення прямої l

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{2}$$

і площини α

$$x + 2y + z - 2 = 0.$$

Розв'язання. Пряма l проходить через $M_0(-1; 2; -3)$ паралельно вектору $\vec{a}(1; -1; 2)$. Тому параметричними рівняннями прямої l будуть рівняння

$$x = -1 + t,\ y = 2 - t,\ z = -3 + 2t.$$

Підставляємо ці значення змінних у рівняння площини α:

$$(-1 + t) + 2(2 - t) + (-3 + 2t) - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 2.$$

Оскільки знайдене значення параметра $t = 2$ є єдиним, робимо висновок, що пряма l і площина α перетинаються в єдиній точці:

$$M_1(-1 + 2;\ 2 - 2;\ -3 + 4) \Leftrightarrow M_1(1; 0; 1).$$

Зауваження 1. Розглянемо питання про взаємне розміщення площини α (1) і прямої l, коли останню задано її загальними рівнянням

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

У цьому випадку можна було б перейти від загальних рівнянь прямої l до її канонічних рівнянь і скористатись наведеними вище результатами про взаємне розміщення прямої l і площини α.

Розглянемо інший підхід до розв'язання цієї задачі, який вже використовувався нами в §12 гл. XVII при дослідженні взаємного розміщення трьох площин.

Нехай ранги матриць

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}$$

відповідно дорівнюють r_1 і r_2.

Згідно з результатами §12 гл. XVII маємо:

а) Пряма l і площина α перетинаються в єдиній точці тоді і тільки тоді, коли $r_1 = 3$, $r_2 = 3$. Ця точка є точкою перетину трьох площин. Для знаходження координат цієї точки потрібно знайти розв'язок відповідної системи рівнянь.

б) Пряма l і площина α паралельні, але пряма l не лежить у площині α, тоді і тільки тоді, коли $r_1 = 2$, $r_2 = 3$.

У цьому випадку три площини утворюють нескінченну призму.

в) Пряма l лежить у площині α тоді і тільки тоді, коли $r_1 = 2$, $r_2 = 2$. У цьому випадку площина α належить до пучка площин, віссю якого є пряма l.

§6. Кут між прямою і площиною. Умова перпендикулярності прямої і площини

6.1. Розглянемо площину α, яку задано загальним рівнянням

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{1}$$

і пряму l з канонічними рівняннями

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \tag{2}$$

<u>Означення 1</u>. Якщо пряма l не перпендикулярна до площини α, то кутом між прямою l і площиною α називається менший з двох кутів між цієї прямою та її ортогональною проекцією на площину α. Якщо ж пряма і площина перпендикулярні, то кут між ними вважається рівним $\frac{\pi}{2}$.

Обчислення кута між прямою l і площиною α зведемо до обчислення кута між напрямним вектором $\vec{a}(m; n; p)$ прямої l та нормальним вектором $\vec{N}(A; B; C)$ площини α (рис. 1, 2).

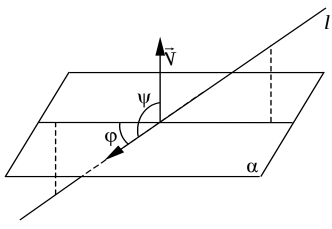


Рис. 2

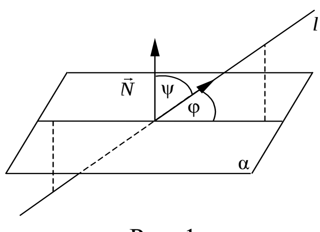


Рис. 1

Нехай φ – кут між прямою l і площиною α, а $\psi = \left(\vec{a}, \hat{\ } \vec{N}\right)$. Якщо $\psi \le \frac{\pi}{2}$, то $\varphi = \frac{\pi}{2} - \psi$ і $\sin\varphi = \cos\psi$ (рис. 1). Якщо ж $\psi > \frac{\pi}{2}$, то $\varphi = \psi - \frac{\pi}{2}$ і $\sin\varphi = -\cos\psi$ (рис. 2). Оскільки $\sin\varphi \ge 0$, то для кожного φ маємо

$$\sin\varphi = \left|\cos\psi\right|.$$

З означення скалярного добутку випливає, що

$$\cos\psi = \frac{\vec{N}\cdot\vec{a}}{\left|\vec{N}\right|\left|\vec{a}\right|}.$$

Тому

$$\sin\varphi = \frac{\left|Am + Bn + Cp\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \tag{3}$$

Якщо пряму l задано загальними рівняннями, то для того щоб скористатись формулою (3), попередньо потрібно визначити координати напрямного вектора $\vec{a}$ прямої l (див. (2) §3).

6.2. Якщо пряма l, яку задано рівняннями (2), перпендикулярна до площини α з рівнянням (1), то напрямний вектор $\vec{a}(m; n; p)$ прямої l колінеарний нормальному вектору $\vec{N}(A; B; C)$ площини α. Тому координати цих векторів пропорційні, тобто існує таке відмінне від нуля число λ, що

$$A = \lambda m,\ B = \lambda n,\ C = \lambda p$$

або

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}. \tag{4}$$

Навпаки, якщо рівності (4) виконуються, то вектори $\vec{a}(m; n; p)$ і $\vec{N}(A; B; C)$ колінеарні, тобто напрямний вектор заданої прямої l паралельний до нормального вектора заданої площини α. З цього випливає, що пряма l і площина α взаємно перпендикулярні. Цим самим доведено наступну теорему.

Теорема 1. Для того щоб пряма l і площина α були перпендикулярними, необхідно і достатньо, щоб координати напрямного вектора прямої l були пропорційні коефіцієнтам при x, y, z в рівнянні (1) площини α.

Приклад 1. Знайти кут між прямою l

$$\begin{cases} 6x-2y-z-20=0 \\ 15x-2y-4z-8=0 \end{cases}$$

і площиною α

$$6x+15y-10z+31=0.$$

Розв'язання. Знайдемо спочатку напрямний вектор $\vec{a}$ прямої l. Згідно з (2) §3

$$\vec{a}\left(\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix};\ -\begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 15 & -4 \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 15 & -2 \end{vmatrix}\right) \Leftrightarrow \vec{a}(6;\,9;18).$$

Для спрощення подальших обчислень зручно розділити всі координати вектора $\vec{a}$ на 3, тобто перейти до напрямного вектора $\vec{a}(2;\,3;\,6)$. За формулою (3) знаходимо

$$\sin\varphi = \frac{|6\cdot 2+15\cdot 3-10\cdot 6|}{\sqrt{6^2+15^2+(-10)^2}\sqrt{2^2+3^2+6^2}} = \frac{3}{19\cdot 7} = \frac{3}{133} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varphi = \arcsin\frac{3}{133} \Rightarrow \varphi \approx 1^0 18'.$$

§7. Обчислення відстані від точки до прямої у просторі

Нехай у просторі задано точку $M_1(x_1;\,y_1;\,z_1)$ і пряму l

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}. \qquad (1)$$

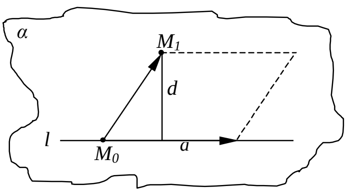


Рис. 1

Пряма l проходить через точку $M_0(x_0;\,y_0;\,z_0)$ паралельно вектору $\vec{a}(m;\,n;\,p)$. Відстань d від точки M_1 до прямої l дорівнює довжині перпендикуляра, опущеного з цієї точки на цю пряму (рис. 1). З іншого боку, відстань d – це висота паралелограма, сторонами якого є вектор $\overrightarrow{M_0M_1}$ і напрямний вектор $\vec{a}$ прямої l, відкладений від точки M_0 цієї прямої.

Якщо S – площа цього паралелограма, то

$$d = \frac{S}{|\vec{a}|}. \qquad (2)$$

Площу S можна обчислити як модуль векторного добутку векторів $\overrightarrow{M_0M_1}$ і $\vec{a}$ (див. §3 гл. VII):

$$S = \left|\overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{a}\right|.$$

Оскільки $\overrightarrow{M_0M_1}\left(x_1 - x_0;\ y_1 - y_0;\ z_1 - z_0\right)$, $\vec{a}\left(m;\ n;\ p\right)$, то вектор $\overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{a}$ має координати

$$\left(\begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ n & p \end{vmatrix};\ -\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & z_1 - z_0 \\ m & p \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ m & n \end{vmatrix}\right).$$

Тому

$$\left|\overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{a}\right| = \sqrt{\begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ n & p \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & z_1 - z_0 \\ m & p \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ m & n \end{vmatrix}^2}.$$

Формулу (2) запишемо у координатній формі:

$$d = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ n & p \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & z_1 - z_0 \\ m & p \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ m & n \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Приклад 1. Знайти відстань від точки $M_1(1;\ 1;\ 3)$ до прямої l

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1}.$$

Розв'язання. Пряма l проходить через точку $M_0(-1;\ -1;\ 0)$ паралельно вектору $\vec{a}(1;\ 2;\ -1)$. Знайдемо модуль векторного добутку векторів $\overrightarrow{M_0M_1}(2;\ 2;\ 3)$ і $\vec{a}(1;\ 2;\ -1)$. Оскільки вектор $\overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{a}$ має координати

$$\left(\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix};\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right) \Leftrightarrow \left(-8;\ 5;\ 2\right),$$

то

$$\left|\overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{a}\right| = \sqrt{64 + 25 + 4} = \sqrt{93}.$$

Отже, $d = \dfrac{\sqrt{93}}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{31}}{\sqrt{2}}$ (лін. од.).

§8. Обчислення відстані між двома мимобіжними прямими. Рівняння спільного перпендикуляра до двох прямих

8.1. Розглянемо дві мимобіжні прямі l_1 і l_2, які задано канонічними рівняннями

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}, \qquad (1)$$

$$\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}. \qquad (2)$$

Пряма l_1 проходить через точку $M_1(x_1; y_1; z_1)$ паралельно вектору $\vec{a}_1(m_1; n_1; p_1)$, а пряма l_2 – через точку $M_2(x_2; y_2; z_2)$ паралельно вектору $\vec{a}_2(m_2; n_2; p_2)$.

З курсу елементарної геометрії відомо, що існує одна і тільки одна пряма P_1P_2, перпендикулярна до прямих l_1 і l_2 і така, що перетинає ці прямі відповідно у точках P_1 і P_2. Відстань d між мимобіжними прямими l_1 і l_2 дорівнює довжині відрізка спільного перпендикуляра P_1P_2. Для обчислення відстані d немає потреби знаходити рівняння спільного перпендикуляра до прямих l_1 і l_2. Достатньо обчислити відстань між паралельними площинами α_1 і α_2, у яких лежать відповідно прямі l_1 і l_2.

Перенесемо вектори $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$ у точку M_1 і на векторах $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ побудуємо паралелепіпед (рис. 1). Якщо $M_1R_1Q_1H_1M_2R_2Q_2H_2$ – побудований паралелепіпед і позначення введені так, що вектор $\vec{a}_1$ направлено вздовж ребра M_1H_1, а вектор $\vec{a}_2$ – вздовж ребра M_1R_1, то пряма l_1 співпадає з прямою M_1H_1, а пряма l_2 – з прямою M_2R_2 (рис. 1). Якщо α_1 – площина грані $M_1R_1Q_1H_1$, а α_2 – площина паралельної до неї грані $M_2R_2Q_2H_2$, то шукана відстань d між прямими l_1 і l_2 дорівнює відстані між паралельними площинами α_1 і α_2, яка, в свою чергу, дорівнює висоті побудованого паралелепіпеда. Позначимо через V – об'єм побудованого паралелепіпеда, а через S – площу грані $M_1R_1Q_1H_1$.

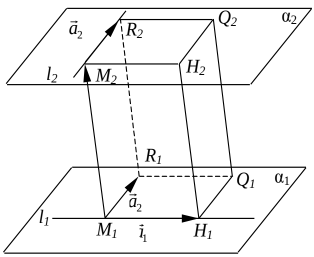


Рис. 1

Тоді

$$d=\frac{V}{S}. \qquad (3)$$

З властивостей мішаного і векторного добутків маємо:

$$V=\left|\overrightarrow{M_1M_2}\vec{a}_1\,\vec{a}_2\right|,\ S=\left|\vec{a}_1\times\vec{a}_2\right|.$$

Тому формула (3) набуває вигляду

$$d=\frac{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\,\vec{a}_1\vec{a}_2\right|}{\left|\vec{a}_1\times\vec{a}_2\right|}.$$

Залишається виразити модулі мішаного і векторного добутків через координати векторів. Оскільки вектори $\overrightarrow{M_1M_2}$ і $\vec{a}_1\times\vec{a}_2$ мають координати відповідно

$$\left(x_2-x_1;\,y_2-y_1;\,z_2-z_1\right)\ \text{ і }\ \left(\begin{vmatrix}n_1 & p_1\\ n_2 & p_2\end{vmatrix};-\begin{vmatrix}m_1 & p_1\\ m_2 & p_2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}m_1 & n_1\\ m_2 & n_2\end{vmatrix}\right),$$

то, скориставшись записом мішаного добутку як визначника з координат векторів-множників, отримуємо формулу для обчислення відстані між мимобіжними прямими

$$d=\frac{\left|\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ m_1 & n_1 & p_1\\ m_2 & n_2 & p_2\end{vmatrix}\right|}{\sqrt{\begin{vmatrix}n_1 & p_1\\ n_2 & p_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}m_1 & p_1\\ m_2 & p_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}m_1 & n_1\\ m_2 & n_2\end{vmatrix}^2}}. \qquad (4)$$

Приклад 1. Знайти відстань d між мимобіжними прямими l_1 і l_2, які задано рівняннями

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{2}\quad\text{і}\quad\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{0}.$$

Розв'язання. Пряма l_1 проходить через точку $M_1(2;-1;0)$ паралельно вектору $\vec{a}_1(3;-2;2)$, а пряма l_2 – через точку $M_2(-1;2;1)$ паралельно вектору $\vec{a}_2(3;2;0)$. Підставляємо ці дані у формулу (4):

$$d=\frac{\left|\begin{vmatrix}-3 & 3 & 1\\ 3 & -2 & 2\\ 3 & 2 & 0\end{vmatrix}\right|}{\sqrt{\begin{vmatrix}-2 & 2\\ 2 & 0\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}3 & 2\\ 3 & 0\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}3 & -2\\ 3 & 2\end{vmatrix}^2}}=\frac{\left|\begin{vmatrix}-3 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 5 & 1\end{vmatrix}\right|}{\sqrt{16+36+144}}=\frac{\left|-3(1-15)\right|}{14}=\frac{3\cdot 14}{14}=3\ \text{(лін. од.)}.$$

8.2. Перейдемо до знаходження рівняння спільного перпендикуляра до прямих l_1 і l_2, які задано канонічними рівняннями (1) і (2). Вважаємо напрямні вектори цих прямих $\vec{a}_1(m_1; n_1; p_1)$ і $\vec{a}_2(m_2; n_2; p_2)$ неколінеарними, тобто прямі або мимобіжні, або перетинаються. Нехай пряма P_1P_2 є спільним перпендикуляром прямих l_1 і l_2. Тоді за напрямний вектор прямої P_1P_2 можна взяти векторний добуток $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2$ напрямних векторів заданих прямих, координати якого

$$\left(\begin{vmatrix} n_1 & p_1 \\ n_2 & p_2 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} m_1 & p_1 \\ m_2 & p_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix} \right).$$

Пряму P_1P_2 можна знайти так. Проведемо через прямі l_1 і l_2 площини відповідно α_1 і α_2, паралельні вектору $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2$ (рис. 2). Перетином площин α_1, α_2 і є спільний перпендикуляр P_1P_2.

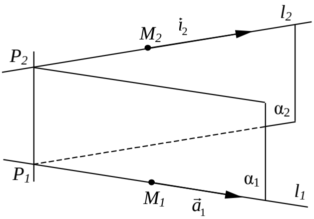


Рис. 2

Оскільки площина α_1 проходить через точку $M_1(x_1; y_1; z_1)$ і паралельна двом неколінеарним векторам $\vec{a}_1(m_1; n_1; p_1)$ і $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2$, то згідно з формулою (6) §5 гл. XVII рівняння цієї площини можна записати у вигляді

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ \begin{vmatrix} n_1 & p_1 \\ n_2 & p_2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} m_1 & p_1 \\ m_2 & p_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = 0 . \tag{5}$$

Аналогічно, складаємо рівняння площини α_2:

$$\begin{vmatrix} x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ m_2 & n_2 & p_2 \\ \begin{vmatrix} n_1 & p_1 \\ n_2 & p_2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} m_1 & p_1 \\ m_2 & p_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = 0 . \tag{6}$$

Спільний перпендикуляр до заданих прямих (1) і (2) визначається системою рівнянь (5) і (6).

Приклад 2. Знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих l_1 і l_2 з прикладу 1.

Розв'язання. Шуканий спільний перпендикуляр згідно з формулами (5), (6) є лінією перетину площин α_1 і α_2:

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z \\ 3 & -2 & 2 \\ \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-1 \\ 3 & 2 & 0 \\ \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z \\ 3 & -2 & 2 \\ -4 & 6 & 12 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -4 & 6 & 12 \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z \\ 3 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(-18)-(y+1)22+5z=0 \\ (x+1)12-(y-2)18+(z-1)13=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -18x-22y+5z+14=0 \\ 12x-18y+13z+11=0. \end{cases}$$

§9. Приклади розв'язування задач аналітичної геометрії на пряму і площину

Щоб навчитися розв'язувати задачі на пряму і площину, слід у першу чергу засвоїти матеріал XVII і XVIII глав. Переважну більшість таких задач можна розв'язувати різними способами. Тому потрібно намагатися знайти найраціональніший з них. Для цього корисно пам'ятати, що розв'язування багатьох задач значно спрощується вмілим застосуванням апарату векторної алгебри; розв'язування багатьох задач на площину зручно проводити з використанням поняття пучка площин та рівнянь площин у вигляді визначника; розв'язок багатьох задач на пряму можна отримати відразу ж, якщо скористатись рівняннями прямої як лінії перетину двох площин тощо.

Розв'яжемо декілька типових задач на пряму і площину у просторі.

Задача 1. Знайти проекцію точки $C(3;-4;-2)$ на площину α, що проходить через паралельні прямі

$$\frac{x-2}{13}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+3}{-4}, \qquad (1)$$

$$\frac{x-5}{13}=\frac{y-6}{1}=\frac{z+3}{-4}. \qquad (2)$$

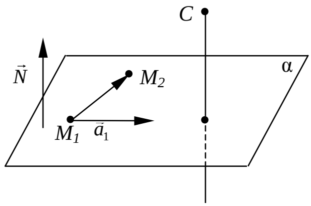


Рис. 1

Розв'язання. Пряма (1) проходить через точку $M_1(2;3;-3)$, а пряма (2) – через точку $M_2(5;6;-3)$. Обидві прямі паралельні вектору $\vec{a}_1(13;1;-4)$. Тому площина α проходить через точку $M_1(2;3;-3)$ і паралельна векторам $\vec{a}_1(13;1;-4)$ і $\overrightarrow{M_1M_2}\ (3;3;0)$ (рис. 1).

Замість вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ візьмемо вектор $\vec{a}_2(1;1;0)$ і скористаємось формулою (6) §5 гл. XVII, згідно з якою рівнянням площини α є рівняння

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z+3 \\ 13 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x-2)4-(y-3)4+(z+3)12=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-2-y+3+3z+9=0 \Leftrightarrow x-y+3z+10=0\,. \tag{3}$$

За напрямний вектор прямої l, що проходить через точку C перпендикулярно площині (3), візьмемо нормальний вектор $N(1;-1;3)$ цієї площини. Тому параметричними рівняннями прямої l є рівняння

$$x=3+t\,,\ y=-4-t\,,\ z=-2+3t\,. \tag{4}$$

Підставимо (4) в (3) і знайдемо параметр t, який відповідає точці перетину прямої l з площиною (3):

$$3+t+4+t-6+9t+10=0 \Leftrightarrow t=-1\,.$$

Отже, проекцією точки C на площину α є точка з координатами $(2;-3;-5)$.

Задача 2. Знайти точку, симетричну точці $P(1;2;3)$ відносно прямої l

$$\frac{x-8}{1}=\frac{y-11}{3}=\frac{z-4}{-1}\,. \tag{5}$$

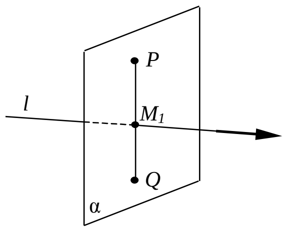


Рис. 2

Розв'язання. Знайдемо спочатку координати точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, яка є ортогональною проекцією точки P на пряму l. Для цього складемо рівняння площини α, що проходить через точку P перпендикулярно прямій l (рис. 2), взявши за нормальний вектор $\vec{N}$ цієї площини напрямний вектор $\vec{a}(1;3;-1)$ прямої l:

$$1\cdot(x-1)+3\cdot(y-2)-1\cdot(z-3)=0 \Leftrightarrow x+3y-z-4=0\,. \tag{6}$$

Знайдемо точку M_1 перетину прямої l з площиною α. Для цього запишемо параметричні рівняння прямої (5):

$$x=8+t\,,\ y=11+3t\,,\ z=4-t\,. \tag{7}$$

Підставивши (7) у (6), будемо мати

$$8+t+33+9t-4+t-4=0 \Leftrightarrow t=-3.$$

Отже, координатами точки M_1 є числа

$$x_1=8-3=5,\ y_1=11-9=2,\ z_1=4+3=7.$$

Якщо точка $Q(x_2;\, y_2;\, z_2)$ симетрична точці $P(1;\,2;\,3)$ відносно прямої l, то

$$5=\frac{1+x_2}{2},\quad 2=\frac{2+y_2}{2},\quad 7=\frac{3+z_2}{2} \Leftrightarrow x_2=9,\quad y_2=2,\quad z_2=11.$$

Задача 3. Знати рівняння проекції прямої l

$$\begin{cases} 2x-y+z-3=0 \\ x+y+2z+1=0 \end{cases} \tag{8}$$

на площину α

$$3x-y+z-6=0. \tag{9}$$

Розв'язання. Знайдемо спочатку рівняння площини, що проектує пряму (8) на площину (9), скориставшись рівнянням пучка площин, віссю якого є пряма (8)

$$(2x-y+z-3)+\lambda(x+y+2z+1)=0. \tag{10}$$

Виберемо λ так, щоб площина (10) була перпендикулярною до площини (9). Для цього необхідно і достатньо, щоб нормальні вектори цих площин $\vec{N}_1(2+\lambda;\,-1+\lambda;\,1+2\lambda)$ і $\vec{N}_2(3;\,-1;\,1)$ були ортогональними, тобто

$$\vec{N}_1\cdot\vec{N}_2=0 \Leftrightarrow (2+\lambda)3-(-1+\lambda)\cdot 1+(1+2\lambda)\cdot 1=0 \Leftrightarrow \lambda=-2.$$

Підставивши знайдене значення λ у рівняння (10), отримуємо рівняння проектуючої площини

$$3y+3z+5=0. \tag{11}$$

Проекція заданої прямої (8) на площину (9) є лінією перетину площин (11) і (9). Тому рівняннями цієї проекції є

$$\begin{cases} 3y+3z+5=0 \\ 3x-y+z-6=0. \end{cases}$$

Задача 4. Знайти рівняння прямої l, яка проходить через точку $M_0(1;\,2;\,-2)$ і перетинає дві мимобіжні прямі

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{-1} \quad \text{і} \quad \frac{x+1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-2}{1}. \tag{12}$$

Розв'язання. Шукану пряму l будемо розглядати як пряму перетину двох площин, кожна з яких проходить через задану точку M_0 і одну із заданих прямих (12). Рівняння площини, що проходить через точку M_0 і першу пряму (12), знаходимо з умови: пряма проходить через точку $M_0(1;\ 2;\ -2)$ і паралельна векторам $\vec{a}_1(1;\ 2;\ -1)$ і $\overrightarrow{M_0M_1}(1;\ -2;\ 1)$, де $M_1(2;\ 0;\ -1)$ – точка першої прямої (12). Маємо

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x-1)\cdot 0-(y-2)\cdot 2+(z+2)(-4)=0 \Leftrightarrow y+2z+2=0\,.$$

Аналогічно, знаходимо рівняння другої площини, яка проходить через точку M_0 і другу пряму (12). Ця пряма паралельна векторам $\vec{a}_2(2;\ 3;\ 1)$ і $\overrightarrow{M_0M_2}(-2;\ -2;\ 4)$, де $M_2(-1;\ 0;\ 2)$ – точка другої прямої (12). Тому

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\cdot 7-(y-2)\cdot 5+(z+2)\cdot 1=0 \Leftrightarrow 7x-5y+z+5=0\,.$$

Отже, шукана пряма має рівняння

$$\begin{cases} y+2z+2=0 \\ 7x-5y+z+5=0. \end{cases}$$

Задача 5. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(1;\ 5;\ -1)$ перпендикулярно прямим

$$\frac{x+1}{-1}=\frac{y}{3}=\frac{z+2}{-1} \quad \text{і} \quad \begin{cases} x=2-3t \\ y=-1+t \\ z=-2t. \end{cases}$$

Розв'язання. Напрямний вектор шуканої прямої за умовою перпендикулярний до напрямних векторів $\vec{a}_1(-1;\ 3;\ -1)$ і $\vec{a}_2(-3;\ 1;\ -2)$ заданих прямих. Тому за такий вектор можна взяти векторний добуток $\vec{a}=\vec{a}_1\times\vec{a}_2$:

$$\vec{a}\left(\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix};-\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}\right) \Leftrightarrow \vec{a}(-5;1;8)\,.$$

Отже, шукана пряма має канонічні рівняння

$$\frac{x-1}{-5}=\frac{y-5}{1}=\frac{z+1}{8}\,.$$

Задача 6. Задано пряму

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4} \tag{13}$$

і площину

$$x+2y-z=0\,. \tag{14}$$

Через точку, в якій ці пряма і площина перетинаються, проведено пряму l так, що вона лежить у заданій площині (14) і перпендикулярна заданій прямій (13). Скласти рівняння прямої l.

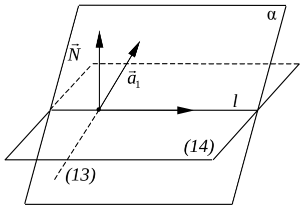


Рис. 3

Розв'язання. Шукана пряма l є лінією перетину заданої площини (14) і площини α, що проходить через пряму (13) і шукану пряму l (рис. 3).

Площина α проходить через точку $M_1(1;\,0;\,0)$ паралельно напрямному вектору $\vec{a}_1(2;\,3;\,4)$ прямої (13) і напрямному вектору $\vec{a}$ шуканої прямої l. Щоб записати рівняння площини α, знайдемо координати вектора $\vec{a}$. З умови задачі випливає, що вектор $\vec{a}$ перпендикулярний вектору $\vec{a}_1$. Оскільки пряма l лежить у площині (14), то вектор $\vec{a}$ перпендикулярний також нормальному вектору $\vec{N}(1;\,2;\,-1)$ цієї площини. Отже, напрямний вектор $\vec{a}$ прямої l одночасно перпендикулярний векторам $\vec{a}_1$ і $\vec{N}$. Тому він паралельний векторному добутку

$$\vec{b}=\vec{a}_1\times\vec{N}\Leftrightarrow\vec{b}\left(\begin{vmatrix}3 & 4\\ 2 & -1\end{vmatrix};-\begin{vmatrix}2 & 4\\ 1 & -1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix}\right)\Leftrightarrow\ \vec{b}(-11;\,6;\,1).$$

Рівнянням площини α буде рівняння

$$\begin{vmatrix}x-1 & y & z\\ 2 & 3 & 4\\ -11 & 6 & 1\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow(x-1)(-21)-y\cdot 46+z\cdot 45=0\Leftrightarrow\ 21x+46y-45z-21=0,$$

а рівняннями прямої l – рівняння

$$\begin{cases}x+2y-z=0\\ 21x+46y-45z-21=0.\end{cases}$$

§10. Застосування теорії прямої і площини до розв'язання задач елементарної геометрії

У цьому параграфі наводяться приклади застосувань теорії прямої і площини до розв'язання стереометричних задач елементарної геометрії.

Задача 1. Нехай у тетраедрі $OABC$ ребра OA, OB і OC взаємно перпендикулярні. Показати, що у цьому випадку виконують рівність

$$\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}=\frac{1}{OH^2}, \qquad (1)$$

де OH – висота, опущена з вершини O на грань ABC.

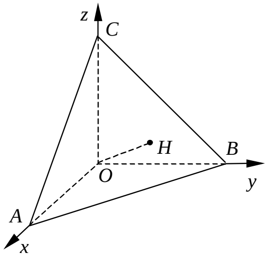


Рис. 1

Розв'язання. Точку O виберемо за початок, а напрямлені прямі OA, OB, OC – за осі координат декартової прямокутної системи координат (рис. 1). Нехай $OA=a$, $OB=b$, $OC=c$, $OH=h$. Тоді у вибраній системі координат площина ABC має таке рівняння у відрізках:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \Leftrightarrow \tag{2}$$

$$\Leftrightarrow bc\cdot x+ac\cdot y+ab\cdot z-abc=0.$$

Скористаємось формулою для знаходження відстані від точки $O(0;0;0)$ до площини (2):

$$h=\frac{|-abc|}{\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}}\Leftrightarrow h^2=\frac{a^2b^2c^2}{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{h^2}=\frac{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}{a^2b^2c^2}\Leftrightarrow \frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

Означення 1. Тетраедр, у якого ребра OA, OB, OC взаємно перпендикулярні, називається прямокутним.

Задача 2. Довести, що протилежні ребра прямокутного тетраедра ортогональні.

Розв'язання. Доведення проведемо, наприклад, для ребер OA і BC (рис. 1). Спочатку відмітимо, що ці ребра не лежать в одній площині. Дійсно, введемо вектори

$$\overrightarrow{OA}(a;0;0),\quad \overrightarrow{AC}(-a;0;c),\quad \overrightarrow{BC}(0;-b;c).$$

Оскільки мішаний добуток

$$\overrightarrow{OA}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{BC}=\begin{vmatrix} a & 0 & 0\\ -a & 0 & c\\ 0 & -b & c\end{vmatrix}=a\begin{vmatrix} 0 & c\\ -b & c\end{vmatrix}=abc\neq 0,$$

то вектори $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{BC}$ некомпланарні. Це означає, що ребра OA і BC не лежать в одній площині, тобто є мимобіжними.

Для перпендикулярності цих ребер необхідно і достатньо, щоб скалярний добуток ненульових векторів $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{BC}$ дорівнював нулю:

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}=a\cdot 0+0\cdot(-b)+0\cdot c=0.$$

Доведення для інших пар ребер проводиться аналогічно.

Задача 3. Довести теорему Піфагора для прямокутного тетраедра, тобто:

а) якщо S_1, S_2, S_3 – площі бічних граней прямокутного тетраедра, а S – площа його основи, то

$$S_1^2+S_2^2+S_3^2=S^2; \tag{3}$$

б) площа бічної грані прямокутного тетраедра є середнім геометричним площі основи і площі проекції цієї бічної грані на площину основи (рис. 2).

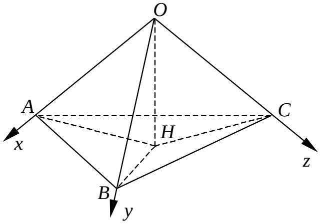


Рис. 2

Розв'язання. а) Введемо декартову прямокутну систему координат так, як і в задачі 1. Оскільки вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ мають координати $\overrightarrow{AB}(-a;\, b;\, 0)$, $\overrightarrow{AC}(-a;\, 0;\, c)$, то площа S основи ABC дорівнює

$$S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} b & 0\\ 0 & c\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} -a & 0\\ -a & c\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} -a & b\\ -a & 0\end{vmatrix}^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}\ \Leftrightarrow\ S^2=\frac{1}{4}\left(b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2\right). \qquad (4)$$

Позначимо через S_1, S_2, S_3 площі бічних граней відповідно OAB, OBC і OAC.

Тоді (рис. 1)

$$S_1=\frac{1}{2}ab,\ S_2=\frac{1}{2}bc,\ S_3=\frac{1}{2}ac \quad \text{і} \quad S_1^2+S_2^2+S_3^2=\frac{1}{4}\left(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2\right). \qquad (5)$$

Порівнюючи рівності (4) і (5), отримуємо формулу (3).

б) Якщо OH – висота тетраедра $OABC$, опущена на грань ABC, то проекцією грані OAB на площину ABC є трикутник ABH (рис. 2). Позначимо його площу через $S(ABH)$. Потрібно довести, що

$$S^2(OAB)=S(ABC)S(ABH), \qquad (6)$$

де $S(OAB)$ і $S(ABC)$ – площі граней відповідно OAB і ABC.

Можна знайти координати точки перетину площини ABC з прямою OH (координати точки H) і обчислити площу $S(ABH)$ за формулою

$$S(ABH)=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{HA}\times\overrightarrow{HB}\right|.$$

Проте ці обчислення є досить громіздкими. Щоб їх уникнути, знайдемо площу $S(ABH)$ як площу проекції грані OAB на грань ABC. Для цього обчислимо косинус кута між цими гранями, який дорівнює косинусу кута між нормальним вектором $\vec{N}_1\left(\frac{1}{a};\frac{1}{b};\frac{1}{c}\right)$ грані ABC (див. (2)) і нормальним вектором $\vec{N}_2(0;\,0;\,1)$ грані OAB (рис. 1):

$$\cos\varphi=\cos\left(\vec N_1,\hat{\ }\vec N_2\right)=\frac{\vec N_1\cdot\vec N_2}{\left|\vec N_1\right|\left|\vec N_2\right|}=\frac{1}{c\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}}}=$$

$$=\frac{abc}{c\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}}=\frac{ab}{\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}}\ .$$

Тоді

$$S\left(ABH\right)=S\left(OAB\right)\cos\varphi=\frac{ab}{2}\frac{ab}{\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}}=\frac{a^2b^2}{2\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}}\ .$$

Отже (див. (4)),

$$S\left(ABC\right)S\left(ABH\right)=\frac{\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}}{2}\frac{a^2b^2}{2\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}}=\frac{a^2b^2}{4}=S^2\left(OAB\right).$$

Задача 4. Задано куб з ребром a. Знайти: 1) відстань між діагоналлю куба і мимобіжною до неї діагоналлю грані; 2) рівняння спільного перпендикуляра цих діагоналей.

Розв'язання. Виберемо декартову прямокутну систему координат так, як показано на рис. 3. Тоді $O\left(0;\,0;\,0\right)$, $A_1\left(a;\,0;\,a\right)$, $O_1\left(0;\,0;\,a\right)$, $C(a;a;0)$ і $\overrightarrow{OA_1}\left(a;\,0;\,a\right)\parallel\vec a_1\left(1;\,0;\,1\right)$, $\overrightarrow{O_1C}\left(a;\,a;\,-a\right)\parallel\vec a_2\left(1;\,1;\,-1\right)$.

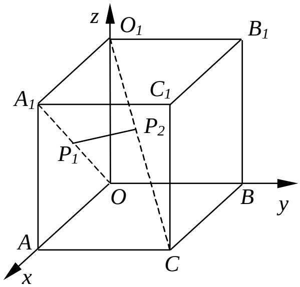


Рис. 3

Прямі OA_1 і O_1C мимобіжні тоді і тільки тоді, коли вектори $\overrightarrow{OO_1}$, $\overrightarrow{OA_1}$ і $\overrightarrow{O_1C}$ некомпланарні, тобто їх мішаний добуток не дорівнює нулю. У нашому випадку

$$\overrightarrow{OO_1}\,\overrightarrow{OA_1}\,\overrightarrow{O_1C}=\begin{vmatrix}0&0&a\\a&0&a\\a&a&-a\end{vmatrix}=a\begin{vmatrix}a&0\\a&a\end{vmatrix}=a^3\neq0\,.$$

Знайдемо канонічні рівняння прямих OA_1 і O_1C. Пряма OA_1 проходить через точку $O\left(0;\,0;\,0\right)$ паралельно вектору $\vec a_1\left(1;\,0;\,1\right)$. Тому її канонічними рівняннями є рівняння

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z}{1}\,. \tag{7}$$

Пряма O_1C проходить через точку $O_1\left(0;\,0;\,a\right)$ паралельно вектору $\vec a_2\left(1;\,1;\,-1\right)$ і тому має канонічні рівняння

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-a}{-1}\,. \tag{8}$$

Оскільки кінці вектора $\overrightarrow{OO_1}$ лежать на прямих OA_1 і O_1C, то згідно з формулою (4) §8 відстань d між цими прямими дорівнює

$$d=\frac{\left|\overrightarrow{OO_1}\vec{a}_1\,\vec{a}_2\right|}{\left|\vec{a}_1\times\vec{a}_2\right|}=\frac{\left|\begin{vmatrix}0&0&a\\1&0&1\\1&1&-1\end{vmatrix}\right|}{\sqrt{\begin{vmatrix}0&1\\1&-1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}1&1\\1&-1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}^2}}=\frac{\left|a\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}\right|}{\sqrt{1+4+1}}=\frac{a}{\sqrt{6}}\ \text{(лін од.).}$$

Рівняння спільного перпендикуляра P_1P_2 прямих OA_1 і O_1C згідно з формулами (5), (6) §8 знаходимо як лінію перетину площин:

$$\begin{cases}\begin{vmatrix}x&y&z\\1&0&1\\-1&2&1\end{vmatrix}=0\\ \begin{vmatrix}x&y&z-a\\1&1&-1\\-1&2&1\end{vmatrix}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x(-2)-y\cdot2+z\cdot2=0\\x\cdot3-y\cdot0+(z-a)\cdot3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y-z=0\\x+z-a=0.\end{cases}\qquad(9)$$

Знайдемо координати точок P_1 і P_2, що лежать на прямих OA_1 і O_1C, розв'язавши відповідні системи рівнянь:

$$\begin{cases}x+y-z=0\\x+z-a=0\\\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z}{1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y-z=0\\x+z-a=0\\y=0\\x=z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{a}{2}\\y=0\\z=\dfrac{a}{2}\end{cases}\Leftrightarrow P_1\left(\frac{a}{2};0;\frac{a}{2}\right);$$

$$\begin{cases}x+y-z=0\\x+z-a=0\\\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-a}{-1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y-z=0\\x+z-a=0\\x=y\\y=a-z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{a}{3}\\y=\dfrac{a}{3}\\z=\dfrac{2}{3}a\end{cases}\Leftrightarrow P_2\left(\frac{a}{3};\frac{a}{3};\frac{2a}{3}\right).$$

Задача 5. Основою піраміди $SABC$ є рівносторонній трикутник ABC з довжиною сторони $4\sqrt{2}$. Бічне ребро SC перпендикулярне до площини основи і має довжину 2. Знайти величину кута і відстань між мимобіжними прямими, одна з яких проходить через точку S і середину ребра BC, а друга – через точку C і середину ребра AB.

Розв'язання. Нехай $SABC$ (рис. 4) – піраміда, яку задано в умові задачі. Точки E і F – середини ребер BC і AB відповідно. Виберемо декартову прямокутну систему координат, як показано на рис. 4, і знайдемо в ній координати вершин

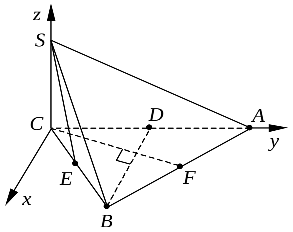


Рис. 4

піраміди і точок E і F. Відмітимо спочатку, що BD є висотою h рівностороннього трикутника ABC, тому $h=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, тобто $h=\dfrac{4\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{6}$. Отже, $C(0;0;0)$, $A\left(0;4\sqrt{2};0\right)$, $B\left(2\sqrt{6};2\sqrt{2};0\right)$, $S(0;0;2)$,

$$E\left(\frac{0+2\sqrt{6}}{2};\frac{0+2\sqrt{2}}{2};0\right)\Leftrightarrow E\left(\sqrt{6};\sqrt{2};0\right),$$

$$F\left(\frac{0+2\sqrt{6}}{2};\ \frac{4\sqrt{2}+2\sqrt{2}}{2};0\right)\Leftrightarrow F\left(\sqrt{6};\ 3\sqrt{2};0\right).$$

Перевіримо, що прямі SE і CF мимобіжні, тобто вектори $\overrightarrow{CS}(0;0;2)$, $\overrightarrow{SE}\left(\sqrt{6};\sqrt{2};-2\right)$, $\overrightarrow{CF}\left(\sqrt{6};3\sqrt{2};0\right)$ некомпланарні.

Дійсно,

$$\overrightarrow{CS}\,\overrightarrow{SE}\,\overrightarrow{CF}=\begin{vmatrix}0&0&2\\\sqrt{6}&\sqrt{2}&-2\\\sqrt{6}&3\sqrt{2}&0\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}\sqrt{6}&\sqrt{2}\\\sqrt{6}&3\sqrt{2}\end{vmatrix}=2\left(3\sqrt{12}-\sqrt{12}\right)=4\sqrt{12}\neq0.$$

Кут між мимобіжними прямими SE і CF знайдемо за допомогою скалярного добутку векторів $\overrightarrow{SE}$ і $\overrightarrow{CF}$. Маємо

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{SE},\overrightarrow{CF}}\right)=\frac{\overrightarrow{SE}\cdot\overrightarrow{CF}}{\left|\overrightarrow{SE}\right|\left|\overrightarrow{CF}\right|}=\frac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}+3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}-2\cdot0}{\sqrt{6+2+4}\sqrt{6+18+0}}=$$

$$=\frac{12}{\sqrt{12}\cdot\sqrt{2}\sqrt{12}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\left(\widehat{\overrightarrow{SE},\overrightarrow{CF}}\right)=\frac{\pi}{4}.$$

Для обчислення відстані між прямии SE і CF знову, як і в задачі 4, скористаємось формулою (4) §8. Для цього потрібні напрямні вектори прямих SE і CF і вектор $\overrightarrow{CS}$, кінці якого лежать на цих прямих. Вектор $\vec{a}_1\left(\sqrt{3};1;-\sqrt{2}\right)\parallel\overrightarrow{SE}$, тобто є напрямним вектором прямої SE. Аналогічно, вектор $\vec{a}_2\left(1;\sqrt{3};0\right)\parallel\overrightarrow{CF}$ є напрямним вектором прямої CF. Знайдемо векторний добуток $\vec{a}=\vec{a}_1\times\vec{a}_2$:

$$\vec{a}\left(\begin{vmatrix}1&-\sqrt{2}\\\sqrt{3}&0\end{vmatrix};-\begin{vmatrix}\sqrt{3}&-\sqrt{2}\\1&0\end{vmatrix};\begin{vmatrix}\sqrt{3}&1\\1&\sqrt{3}\end{vmatrix}\right)\Leftrightarrow\vec{a}\left(\sqrt{6};-\sqrt{2};2\right).$$

Тоді для відстані між прямими SE і CF отримуємо

$$d=\frac{\left|\begin{vmatrix}0&0&2\\ \sqrt{3}&1&-\sqrt{2}\\ 1&\sqrt{3}&0\end{vmatrix}\right|}{\sqrt{6+2+4}}=\frac{\left|2\begin{vmatrix}\sqrt{3}&1\\ 1&\sqrt{3}\end{vmatrix}\right|}{\sqrt{12}}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\text{ (лін. од.).}$$

Задача 6. У правильній чотирикутній піраміді $SABCD$ бічна грань нахилена до основи під кутом α. Знайти кут φ між площинами AKC і SAB, якщо K – середина ребра SB.

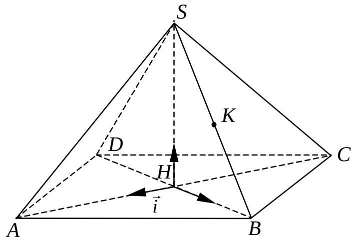


Рис. 5

Розв'язання. Виберемо за початок прямокутної декартової системи координат основу H висоти SH піраміди, опущеної з вершини S на площину $ABCD$ (рис. 5), а за координатні осі – діагоналі AC, BD і висоту SH. Додатні напрямки осей показано на рис. 5. Якщо $AC=BD=2a$, $SH=h$, то вершини піраміди і точка K мають координати: $A(a;0;0)$, $B(0;a;0)$, $C(-a;0;0)$, $D(0;-a;0)$, $S(0;0;h)$ і $\overrightarrow{HK}=\dfrac{\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HS}}{2}\Leftrightarrow K\left(0;\dfrac{a}{2};\dfrac{h}{2}\right)$.

Запишемо рівняння площин ABC і SAB. Площина ABC є координатною площиною

$$z=0. \tag{10}$$

Площина SAB відтинає на координатних осях відрізки $a,\ a,\ h$ і тому має рівняння у відрізках

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{a}+\frac{z}{h}=1. \tag{11}$$

Нормальними векторами площин (10) і (11) є відповідно вектори

$$\vec{N}_1(0;0;1)\quad\text{і}\quad\vec{N}_2\left(\frac{1}{a};\frac{1}{a};\frac{1}{h}\right).$$

Тому

$$\cos\alpha=\cos\left(\vec{N}_1,\hat{}\ \vec{N}_2\right)=\frac{\vec{N}_1\cdot\vec{N}_2}{\left|\vec{N}_1\right|\left|\vec{N}_2\right|}=\frac{\frac{1}{h}}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{h^2}}}=\frac{\frac{1}{h}}{\frac{\sqrt{2h^2+a^2}}{ha}}=\frac{a}{\sqrt{2h^2+a^2}}. \tag{12}$$

Знайдемо рівняння площини AKC. Оскільки ця площина проходить через вісь абсцис, то її рівняння має вигляд

$$By+Cz=0. \tag{13}$$

Точка $K\left(0;\dfrac{a}{2};\dfrac{h}{2}\right)$ лежить у площині (13), тому

$$\frac{Ba}{2}+\frac{Ch}{2}=0 \Leftrightarrow B=-\frac{Ch}{a}. \qquad (14)$$

Підставивши (14) у (13), отримуємо рівняння площини AKC :

$$-\frac{Ch}{a}y+Cz=0 \Leftrightarrow -hy+az=0. \qquad (15)$$

Нормальним вектором цієї площини є вектор $\vec{N}_3\left(0;-h;a\right)$. Тому

$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{N_2}\cdot\overrightarrow{N_3}}{\left|\overrightarrow{N_2}\right|\left|\overrightarrow{N_3}\right|}=\frac{-\frac{h}{a}+\frac{a}{h}}{\sqrt{\frac{2}{a^2}+\frac{1}{h^2}}\sqrt{h^2+a^2}}=\frac{a^2-h^2}{\sqrt{2h^2+a^2}\sqrt{a^2+h^2}}. \qquad (16)$$

Введемо позначення $k=\frac{h}{a}$ і перепишемо рівності (12) і (16) у вигляді

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2k^2+1}}, \qquad (17)$$

$$\cos\varphi=\frac{1-k^2}{\sqrt{2k^2+1}\sqrt{1+k^2}}=\frac{1-k^2}{\sqrt{1+k^2}}\cos\alpha. \qquad (18)$$

Рівність (17) можна записати ще так:

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{2k^2+1} \Leftrightarrow 2k^2\cos^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k^2=\frac{1-\cos^2\alpha}{2\cos^2\alpha}. \qquad (19)$$

Якщо тепер підставити вираз для k^2 з (19) у формулу (18), то отримаємо остаточний результат:

$$\cos\varphi=\frac{\left(1-\frac{1-\cos^2\alpha}{2\cos^2\alpha}\right)\cos\alpha}{\sqrt{1+\frac{1-\cos^2\alpha}{2\cos^2\alpha}}}=\frac{3\cos^2\alpha-1}{\sqrt{2\left(1+\cos^2\alpha\right)}}. \qquad (20)$$

Поверхні другого порядку та їх канонічні рівняння

§1. Поверхні обертання. Поверхні обертання другого порядку

1.1. У шкільному курсі геометрії вивчались такі поверхні, як циліндр, конус, сфера. Всіх їх об’єднує одна спільна властивість, а саме, всі ці поверхні можна отримати обертанням деякої лінії навколо осі.

Дамо означення поверхні обертання у загальному випадку. Нехай у просторі задано пряму l і точку M поза нею (рис. 1). Проведемо через точку M площину α перпендикулярно до прямої l. Точку перетину площини α і прямої l позначимо P. У площині α розглянемо коло w з центром у точці P і радіусом $R = PM$.

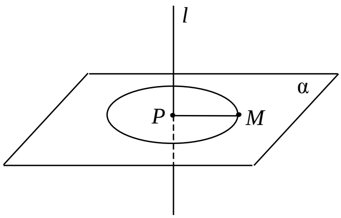


Рис. 1

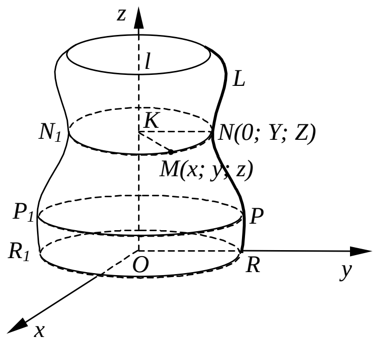


Рис. 2

<u>Означення 1</u>. Коло w називається колом обертання точки M навколо прямої l, а сама пряма l – віссю обертання.

Розглянемо деяку плоску лінію L, що лежить у одній площині з прямою l (рис. 2). Приймемо l за вісь обертання і розглянемо множину всіх кіл обертання для всіх можливих точок N лінії L (рис. 2).

<u>Означення 2</u>. Множина всіх кіл обертання точок лінії L навколо осі l називається поверхнею обертання. Ще кажуть, що поверхня обертання отримується обертанням плоскої лінії L навколо осі l, яка лежить у площині цієї лінії.

Знайдемо рівняння поверхні обертання. Для цього приймемо за вісь обертання вісь Oz, криву L розмістимо у тій півплощині yOz, де $y > 0$. Рівняння кривої L запишемо у вигляді

$$\begin{cases} f(y, z) = 0 \\ x = 0. \end{cases} \tag{1}$$

На рис. 2 крива L, обертаючись навколо осі Oz, утворює поверхню $NPRN_1P_1R_1$.

Візьмемо на кривій L довільну точку $N(O; Y; Z)$. Ця точка при обертанні навколо осі Oz описує коло NMN_1, що лежить у площині $z = Z$, перпендикулярній осі Oz. Радіус цього кола $R = Y\ (Y > 0)$, а центр знаходиться на осі Oz у точці K (рис. 2).

Ще раз звертаємо увагу на те, що координати точки N лінії L ми позначаємо великими буквами Y, Z, а координати точки M поверхні – малими буквами x, y, z.

Рівняннями кола, що проходить через точку $M(x; y; z)$ поверхні (рис. 2), є рівняння

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = Y^2 \\ z = Z. \end{cases} \tag{2}$$

Зі свого боку, координати точки N лінії L задовольняють рівнянню

$$f(Y, Z) = 0\,. \tag{3}$$

Якщо в рівняння (3) замість координат Y і Z точки N лінії L підставити згідно з (2) їх вирази через координати x, y, z змінної точки M поверхні обертання, то отримаємо рівняння

$$f\left(\sqrt{x^2 + y^2},\ z\right) = 0\,. \tag{4}$$

Це рівняння і буде шуканим рівнянням поверхні обертання, оскільки йому задовольняють координати будь-якої точки M цієї поверхні.

Отже, якщо точка лежить на поверхні обертання, то координати цієї точки задовольняють рівнянню (4).

Навпаки, нехай $M\left(x^*; y^*; z^*\right)$ – довільна точка простору, координати якої задовольняють рівнянню (4). Покажемо, що точка M лежить на поверхні обертання. Для цього розглянемо коло з центром у точці K, яке описує точка M, обертаючись навколо осі Oz. Радіус цього кола дорівнює

$$R = \sqrt{\left(x^* - 0\right)^2 + \left(y^* - 0\right)^2 + \left(z^* - z^*\right)^2} = \sqrt{x^{*2} + y^{*2}}\,,$$

оскільки точка K має координати $K\left(0; 0; z^*\right)$. Нехай N – точка перетину цього кола з півплощиною yOz, якій відповідає додатна ордината. Ця точка має координати $\left(0; \sqrt{x^{*2} + y^{*2}}; z^*\right)$. З (4) випливає, що координати точки N задовольняють рівнянню (1). Тому ця точка лежить на кривій L, а отже, точка M лежить на поверхні обертання.

Відмітимо, що зв'язок між рівняннями (1) лінії L і рівнянням (4) поверхні, що утворюється обертанням цієї лінії навколо осі Oz, дуже простий: щоб отримати рівняння поверхні обертання (4), потрібно у рівнянні лінії (1) координату z, тобто координату вздовж осі обертання, залишити без змін, а іншу координату (координату y) замінити на $\sqrt{x^2+y^2}$.

Це правило носить загальний характер. Так, якщо задано криву, що лежить у площині xOy, тобто має рівняння

$$\begin{cases} f\left(x,\, y\right)=0 \\ z=0, \end{cases} \tag{5}$$

і потрібно знайти рівняння поверхні, яка утворюється обертаннями цієї кривої навколо осі Oy, то у першому рівнянні (5) змінну x слід замінити на $\sqrt{x^2+z^2}$, а змінну y залишити без змін. Рівняння поверхні обертання у цьому випадку буде таким

$$f\left(\sqrt{x^2+z^2},\, y\right)=0 .$$

З викладеного вище випливає наступна ***ознака***, яка дозволяє відрізнити за рівнянням будь-яку поверхню обертання з віссю, що співпадає з однією із координатних осей: дві з трьох координат входять до рівняння поверхні тільки у вигляді суми їх квадратів; віссю обертання є та вісь, координата якої входять до рівняння окремо. Наприклад, рівняння $y^2+z^2=2x$ є рівняннями поверхні обертання, вісь якої співпадає з координатною віссю Ox.

1.2. Знайдемо для прикладу рівняння поверхонь, що утворюються обертаннями кривих другого порядку навколо їх осей симетрії.

Вісь обертання приймемо за вісь Oz; криві будемо розміщувати у площині yOz. Рівняння поверхонь знайдемо за рівнянням (4).

1°. ***Еліпсоїд обертання***. Розглянемо еліпс

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ x=0. \end{cases}$$

Обертаючи його навколо осі Oz, отримаємо поверхню обертання, рівняння якої

$$\frac{x^2+y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 . \tag{6}$$

Означення 3. Поверхня, яка визначається рівнянням (6), називається еліпсоїдом обертання.

Якщо еліпс обертається навколо малої осі $(c < b)$, то еліпсоїд обертання називають стиснутим (рис. 3). Якщо ж віссю обертання є більша вісь $(c > b)$, то еліпсоїд обертання називають видовженим або витягнутим (рис. 4).

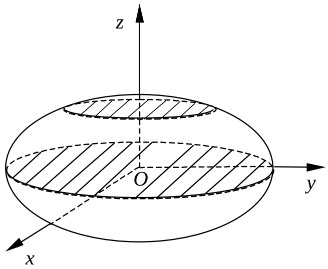


Рис. 3

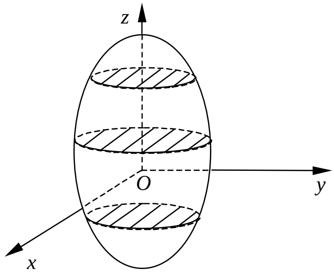


Рис. 4

2º. ***Гіперболоїд обертання***. Розглянемо у площині yOz дві спряжені гіперболи

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1 \\ x = 0. \end{cases}$$

Обертаючи ці гіперболи навколо осі Oz, отримаємо дві наступні поверхні обертання:

$$\frac{x^2 + y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{7}$$

$$\frac{x^2 + y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1. \tag{8}$$

__**Означення 4**__. Поверхня, яку задано рівнянням (7), називається однопорожнинним гіперболоїдом обертання (рис. 5).

__**Означення 5**__. Поверхня, яку задано рівнянням (8), називається двопорожнинним гіперболоїдом обертання (рис. 6).

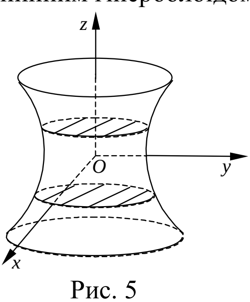


Рис. 5

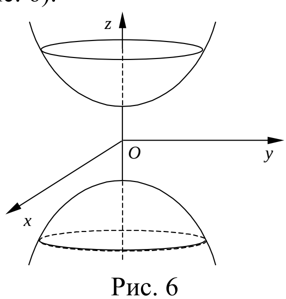


Рис. 6

Розглянемо рівняння асимптот гіперболи

$$y = \pm \frac{b}{c} z . \tag{9}$$

Оскільки рівнянням пари асимптот є рівняння

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 ,$$

то обертаючи навколо осі Oz ці асимптоти, отримаємо поверхню обертання з рівнянням

$$\frac{x^2 + y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 . \tag{10}$$

<u>Означення 6</u>. Поверхня, яку задано рівнянням (10), називається конусом обертання (рис. 7).

Оскільки прямі (9), які утворюють при обертанні конус, є асимптотами гіпербол, що у свою чергу при обертанні утворюють гіперболоїди, порожнини останніх, віддаляючись від площини xOy, необмежено наближаються до порожнин конуса, намагаючись з ними злитися.

<u>Означення 7</u>. Конус (10) називається асимптотичним конусом гіперболоїдів (7) і (8).

3°. ***Параболоїд обертання***. Розглянемо рівняння параболи, яка лежить у площині yOz і віссю якої є вісь Oz:

$$y^2 = 2pz .$$

Обертаючи цю параболу навколо осі Oz, отримаємо поверхню

$$x^2 + y^2 = 2pz . \tag{11}$$

<u>Означення 8</u>. Поверхня, яка визначається рівнянням (11), називається параболоїдом обертання (рис. 8).

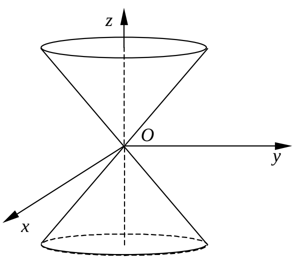


Рис. 7

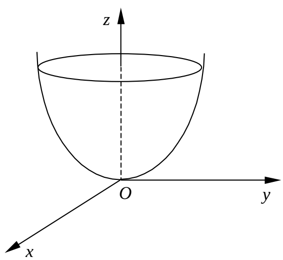


Рис. 8

§2. Поверхні другого порядку. Еліпсоїд

2.1. **Означення 1**. Поверхнею другого порядку називається множина всіх точок простору, координати яких у деякій декартовій прямокутній системі координат задовольняють рівнянню

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Kz + L = 0\,, \tag{1}$$

де $A, B, \ldots, L$ – дійсні числа, причому хоча б один з коефіцієнтів A, B, C, D, E, F відмінний від нуля (див. §5 гл. XII).

Домовляємось не розглядати випадок циліндричних поверхонь другого порядку, тобто випадок, коли ліва частина рівняння (1) залежить лише від двох змінних, наприклад, залежить від x і y і не залежить від z. Циліндричні поверхні розглядались нами у §2 гл. XVI.

Для інших випадків рівняння поверхні (1) у відповідним чином вибраній системі координат (див. §5 гл. XII) зводиться до одного з двох типів

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + L = 0\,, \quad \text{де} \quad A \neq 0\,,\ B \neq 0\,,\ C \neq 0\,; \tag{2}$$

$$Ax^2 + By^2 + Kz = 0\,, \quad \text{де} \quad A \neq 0\,,\ B \neq 0\,,\ K \neq 0\,. \tag{3}$$

З поверхонь, що визначаються рівняннями типу (2), найбільш цікавими є еліпсоїди і гіперболоїди. Рівняння типу (3) описують параболоїди.

При вивченні кривих другого порядку спочатку давалось геометричне означення кривої, а потім виводилось її рівняння. Поверхні другого порядку досить складно означити як геометричне місце точок. Тому за вихідні будемо брати різні рівняння типу (2) або (3) і досліджувати поверхні, що їм відповідають. Для цього будемо керуватись аналогіями з рівняннями кривих другого порядку. Так, рівняння типу (2) за умови, що $L \neq 0$, розглянемо у вигляді

$$\pm\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1\,, \tag{4}$$

де a^2, b^2, c^2 – додатні числа, геометричний зміст яких поки що не визначений. Вигляд поверхні залежить від комбінації знаків у лівій частині рівняння (4). Будемо розглядати всі можливі комбінації.

2.2. **Означення 2**. Еліпсоїдом називається множина всіх точок простору, координати яких у деякій прямокутній декартовій системі координат задовольняють рівнянню

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\,. \tag{5}$$

Означення 3. Система координат, в якій еліпсоїд задано рівнянням (5), називається канонічною системою, а саме рівняння – канонічним рівнянням еліпсоїда.

Визначати форму і вивчати геометричні властивості еліпсоїда будемо за схемою, аналогічною тій, якою ми керувались при дослідженні еліпса (див. §2 гл. XIV).

Змінна z входить до рівняння (5) з квадратом. Тому, якщо точка $M_1(x_1;\, y_1;\, z_1)$ лежить на еліпсоїді, то на ньому буде лежати і точка $M_2(x_1;\, y_1;\, -z_1)$. Серединою відрізка M_1M_2 є точка $N_1(x_1;\, y_1;\, 0)$ (рис. 1). Це означає, що координатна площина xOy є площиною симетрії еліпсоїда. Аналогічні міркування справедливі для змінних x і y. Можна розглянути всі інші можливі комбінації знаків змінних, наприклад, якщо одна з точок $P(x_2;\, y_2;\, z_2)$ або $Q(-x_2;\, -y_2;\, -z_2)$ лежить на еліпсоїді, то на ньому буде лежати і друга точка. Отже, оскільки змінні $x,\, y,\, z$ входять до рівняння (5) тільки з квадратом, то еліпсоїд симетричний відносно координатних площин, координатних осей і початку координат.

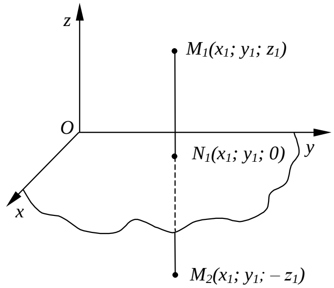


Рис. 1

<u>Означення 4</u>. Центр симетрії еліпсоїда називається центром еліпсоїда.

Покажемо, що будь-яка пряма, яка проходить через центр еліпсоїда, перетинає його у двох точках, симетричних відносно центра.

Нехай параметричні рівняння прямої l, що проходить через початок координат, мають вигляд

$$x = mt,\ y = nt,\ z = pt .$$

Знайдемо параметри точок перетину прямої l з еліпсоїдом (5), розв’язавши рівняння

$$\frac{m^2t^2}{a^2} + \frac{n^2t^2}{b^2} + \frac{p^2t^2}{c^2} = 1 \Leftrightarrow t^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{c^2}\right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = \pm\frac{abc}{\sqrt{m^2b^2c^2 + n^2a^2c^2 + p^2a^2b^2}} = \pm q ,$$

де $q = \dfrac{abc}{\sqrt{b^2c^2m^2 + a^2c^2n^2 + a^2b^2p^2}}$.

Отже, пряма l перетинає еліпсоїд у двох точках

$$M_1(qm;\, qn;\, qp) \quad \text{і} \quad M_2(-qm;\, -qn;\, -qp), \tag{6}$$

симетричних відносно початку координат.

Визначимо межі змінювання координат точок еліпсоїда. З рівняння (5) маємо:

$$\frac{x^2}{a^2} \le 1 \Leftrightarrow x^2 \le a^2 \Leftrightarrow -a \le x \le a,$$

$$\frac{y^2}{b^2} \le 1 \Leftrightarrow y^2 \le b^2 \Leftrightarrow -b \le y \le b,$$

$$\frac{z^2}{c^2} \le 1 \Leftrightarrow z^2 \le c^2 \Leftrightarrow -c \le z \le c.$$

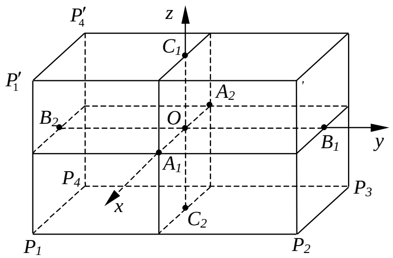


Рис. 2

Звідси випливає, що точки еліпсоїда розміщуються всередині паралелепіпеда $P_1P_2P_3P_4P_1'P_2'P_3'P_4'$, зображеного на рис. 2

Знайдемо точки перетину еліпсоїда (5) з осями координат. Звичайно, ці точки можна отримати безпосередньо з (6). Проте зручніше отримати координати точок перетину, наприклад, з віссю Ox, розв'язавши спільно рівняння еліпсоїда і осі Ox:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \; y = 0, \; z = 0.$$

В результаті отримуємо точки перетину $A_1(a;\, 0;\, 0)$ і $A_2(-a;\, 0;\, 0)$. Аналогічно, приходимо до точок перетину еліпсоїда з віссю Oy: $B_1(0;\, b;\, 0)$, $B_2(0;\, -b;\, 0)$ і віссю Oz: $C_1(0;\, 0;\, c)$, $C_2(0;\, 0;\, -c)$ (рис. 2).

Отже, еліпсоїд з кожною віссю координат перетинається у двох точках, які симетричні відносно його центра.

Означення 5. Точки $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ називаються вершинами еліпсоїда, а відрізки A_1A_2, B_1B_2 і C_1C_2 – його осями. Числа a, b, c називаються півосями еліпсоїда. Якщо всі ці числа попарно різні, то еліпсоїд називається тривісним. Якщо дві півосі дорівнюють одна одній, то еліпсоїд називається двовісним або еліпсоїдом обертання (див. формулу (6) §1).

Нижче будемо досліджувати форму еліпсоїда ***методом перерізів***. Перетнемо еліпсоїд площиною, паралельною площині xOy. У перерізі отримуємо криву, рівняннями якої є

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ z = h, \end{cases} \tag{7}$$

оскільки для всіх точок площини, паралельної площині xOy, координата z має постійне значення. Це значення ми позначили через h.

Перетворимо рівняння (7) до вигляду

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{h^2}{c^2} \\ z=h. \end{cases} \tag{8}$$

Можливі три випадки:

1º. $|h|<c \Leftrightarrow -c<h<c$. У цьому випадку у перерізах маємо еліпси, центри яких лежать на осі Oz. Дійсно, рівняння (8) можна звести до вигляду

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2\left(1-\dfrac{h^2}{c^2}\right)}+\dfrac{y^2}{b^2\left(1-\dfrac{h^2}{c^2}\right)}=1 \\ z=h. \end{cases} \tag{9}$$

Оскільки $1-\dfrac{h^2}{c^2}>0$, то рівняння (9) у площині $z=h$ визначають еліпс з півосями

$$\lambda=a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}, \quad \mu=b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}} \tag{9$'$}$$

і центром у точці $(0;\ 0;\ h)$. Осі симетрії цього еліпса паралельні осям Ox і Oy.

Зі зменшенням $|h|$ півосі еліпса зростають і при $h=0$ отримуємо $\lambda=a$, $\mu=b$. Отже, найбільший еліпс маємо у перерізі еліпсоїда (5) площиною xOy. Рівняннями цього еліпса є

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ z=0. \end{cases} \tag{10}$$

2º. $|h|=c \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} h=c \\ h=-c. \end{array}\right.$ У цьому випадку рівняння (8) набувають вигляду

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=0 \\ z=\pm c. \end{cases} \tag{11}$$

Рівнянням (11) задовольняють дві дійсні точки $C_1(0;\ 0;\ c)$ і $C_2(0;\ 0;\ -c)$. Отже, площини $z=\pm c$ перетинають еліпсоїд у його вершинах відповідно $C_1(0;\ 0;\ c)$ і $C_2(0;\ 0;\ -c)$.

3º. $|h| > c \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} h < -c \\ h > c. \end{array}\right.$ З рівнянь (8) випливає, що

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} < 0 \\ z = h. \end{cases} \qquad (12)$$

Першій умові (12) не задовольняє жодна дійсна точка. Тому площини, які паралельні площині xOy і для яких $|z| > c$, не перетинають еліпсоїд.

Всі еліпси, які отримуються у перерізах еліпсоїда площинами, паралельними площині xOy, подібні між собою. Дійсно, з формул (9′) випливає, що

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{a}{b},$$

тобто відношення півосей не залежить від h.

Аналогічно, перетинаючи еліпсоїд площинами, паралельними площині yOz, будемо також отримувати еліпси, подібні між собою Найбільший еліпс лежить у перерізі еліпсоїда площиною yOz:

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0. \end{cases} \qquad (13)$$

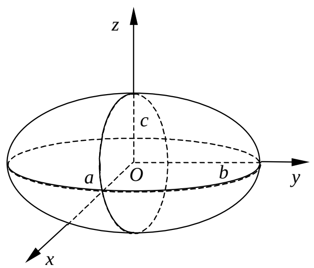


Рис. 3

Те ж саме відноситься і до перерізів еліпсоїда площинами, паралельними площині xOz.

Проведені дослідження дають повну уяву про геометричну форму еліпсоїда (рис. 3).

§3. Конус другого порядку

__**Означення 1**__. Конусом другого порядку називається множина всіх точок простору, координати яких у деякій декартовій прямокутній системі координат задовольняють рівнянню

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0\,. \qquad (1)$$

Означення 2. Система координат, відносно якої конус другого порядку має рівняння (1), називається канонічною системою координат, а саме рівняння (1) – канонічним рівнянням конуса другого порядку.

Змінні x, y і z входять до рівняння (1) з квадратом. Тому, якщо точка $M_1(x_1;\, y_1;\, z_1)$ належить конусу другого порядку, то йому буде належати і точка $M_2(\pm x_1;\, \pm y_1;\, \pm z_1)$. Геометрично це означає, що початок координат є центром симетрії, осі координат – осями симетрії, а координатні площини – площинами симетрії конуса другого порядку.

Покажемо, що рівняння (1) визначає конічну поверхню з вершиною у початку координат, тобто поверхню, яка складається з прямих, що проходять через початок координат. Нехай $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$ – довільна, відмінна від початку координат, точка, координати якої задовольняють рівнянню (1), тобто

$$\frac{x_0^{\ 2}}{a^2}+\frac{y_0^{\ 2}}{b^2}-\frac{z_0^{\ 2}}{c^2}=0.$$

Тоді точка $M(tx_0;\, ty_0;\, tz_0)$, де t – довільне число, також задовольняє рівнянню (1):

$$\frac{(tx_0)^2}{a^2}+\frac{(ty_0)^2}{b^2}-\frac{(tz_0)^2}{c^2}=t^2\left(\frac{x_0^{\ 2}}{a^2}+\frac{y_0^{\ 2}}{b^2}-\frac{z_0^{\ 2}}{c^2}\right)=t^2\cdot 0=0.$$

Точки $M(tx_0;\, ty_0;\, tz_0)$ повністю заповнюють пряму і ця пряма належить конусу.

Зі сказаного випливає, що для уявлення про вигляд поверхні (1) достатньо розглянути її переріз якою-небудь площиною $z=h$, паралельною площині xOy. Таким перерізом є еліпс з рівнянням

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{h^2}{c^2}\\ z=h\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x^2}{\left(\dfrac{ah}{c}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(\dfrac{bh}{c}\right)^2}=1\\ z=h.\end{cases}\qquad(2)$$

Центр цього еліпса лежить на осі Oz у точці $(0;\, 0;\, h)$, а півосі дорівнюють $\lambda=\dfrac{a|h|}{c}$, $\mu=\dfrac{b|h|}{c}$.

Якщо $h = 0$, то рівнянням

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

задовольняє лише точка $O(0;\,0;\,0)$. Саме у цій єдиній точці конус (1) перетинається з площиною xOy.

Означення 3. Точка $O(0;\,0;\,0)$ називається вершиною конуса (1), а вісь Oz – його віссю.

Означення 4. Пряма, всі точки якої лежать на поверхні другого порядку, називається твірною цієї поверхні.

Отже, конус (1) можна розглядати як множину всіх його твірних, що проходять через вершину $O(0;\,0;\,0)$ і точки еліпса (2).

Якщо $a = b$, то рівняння (1) визначає конус обертання (див. (10) §1).

Всі еліпси, які отримуються у перерізах конуса (1) площинами, паралельними площині xOy, подібні між собою, оскільки з формул (2) випливає, що

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{a}{b},$$

тобто відношення півосей не залежить від h.

Загальний вигляд конуса другого порядку зображено на рис. 1. Конус складається з двох порожнин, розміщених по обидва боки від вершини, і необмежено простягається вздовж осі Oz.

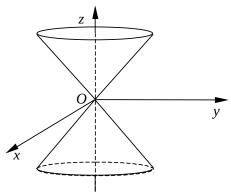


Рис. 1

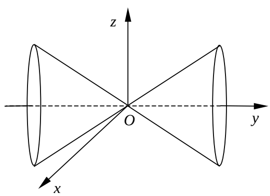


Рис. 2

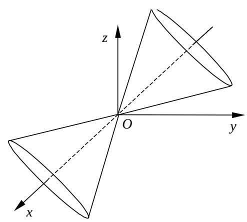


Рис. 3

Рівняння конуса другого порядку досліджено нами для випадку, коли від'ємним у правій частині цього рівняння є член, що містить координату z (рівняння (1)). Якщо від'ємним буде який-небудь інший член цього рівняння, то це призведе лише до зміни розміщення конуса відносно координатних осей.

Розміщення конусів другого порядку, які описуються рівняннями

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0, \tag{3}$$

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \tag{4}$$

показано відповідно на рис. 2, 3.

§4. Однопорожнинний гіперболоїд

Означення 1. Однопорожнинним гіперболоїдом називається множина всіх точок простору, координати яких у деякій декартовій прямокутній системі координат задовольняють рівнянню

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{1}$$

Означення 2. Система координат, в якій однопорожнинний гіперболоїд має рівняння (1), називається канонічною системою координат, а саме рівняння (1) – канонічним рівнянням однопорожнинного гіперболоїда.

Отримати уявлення про форму поверхні (1) можна за тією ж схемою, що й у випадку еліпсоїда. При цьому ряд властивостей однопорожнинного гіперболоїда залишаються аналогічними відповідним властивостям еліпсоїда.

Як і у випадку еліпсоїда, змінні x, y, z входять до рівняння (1) з квадратом. Тому однопорожнинний гіперболоїд симетричний відносно всіх координатних площин, координатних осей і початку координат.

Аналогічно еліпсоїду знаходяться точки перетину однопорожнинного гіперболоїда з осями Ox і Oy. З віссю Ox однопорожнинний гіперболоїд перетинається у точках $A_1(a;0;0)$ і $A_2(-a;0;0)$, а з віссю Oy – у точках $B_1(0;b;0)$ і $B_2(0;-b;0)$. Щоб знайти точки перетину однопорожнинного гіперболоїда з віссю Oz, потрібно розв'язати систему

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \pm ci \\ x = 0 \\ y = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Тут i – уявна одиниця, тобто $i^2 = -1$. Отже, з віссю Oz однопорожнинний гіперболоїд не перетинається в жодній точці простору.

<u>Означення 3</u>. Точки A_1, A_2, B_1, B_2 називаються вершинами, відрізки A_1A_2 і B_1B_2 – дійсними осями, а вісь Oz – уявною віссю однопорожнинного гіперболоїда. Числа a, b, c називаються його півосями.

Дослідимо перетин однопорожнинного гіперболоїда і прямої, що проходить через початок координат. Нехай через початок координат $O(0;\,0;\,0)$ проведено пряму l паралельно вектору $\vec{a}(m; n; p)$. Довільна точка на цій прямій має координати

$$x = mt,\;\; y = nt,\;\; z = pt\,, \tag{3}$$

де t – відповідне дійсне число. Для знаходження точок перетину прямої (3) з поверхнею (1) підставимо співвідношення (3) у формулу (1):

$$\frac{m^2t^2}{a^2} + \frac{n^2t^2}{b^2} - \frac{p^2t^2}{c^2} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} - \frac{p^2}{c^2}\right)t^2 = 1 \Leftrightarrow Qt^2 - 1 = 0, \tag{4}$$

де

$$Q = \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} - \frac{p^2}{c^2}\,. \tag{5}$$

Можливі три випадки:

1$^{\mathbf{o}}$. $Q = \dfrac{m^2}{a^2} + \dfrac{n^2}{b^2} - \dfrac{p^2}{c^2} > 0$. У цьому випадку квадратне рівняння (4) відносно t має два дійсних корені $t_1 = \dfrac{1}{\sqrt{Q}}$ і $t_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{Q}}$, а тому пряма l перетинає однопорожнинний гіперболоїд у двох точках

$$M_1\left(\frac{m}{\sqrt{Q}}; \frac{n}{\sqrt{Q}}; \frac{p}{\sqrt{Q}}\right) \text{ і } M_2\left(-\frac{m}{\sqrt{Q}}; -\frac{n}{\sqrt{Q}}; -\frac{p}{\sqrt{Q}}\right),$$

симетричних відносно початку координат.

2$^{\mathbf{o}}$. $Q = 0$. У цьому випадку пряма l не перетинає однопорожнинний гіперболоїд.

3$^{\mathbf{o}}$. $Q < 0$. Розв’язками рівняння (4) у цьому випадку є комплексно-спряжені числа $t = \pm\sqrt{\dfrac{1}{|Q|}}i$. Тому дійсних точок перетину прямої l і однопорожнинного гіперболоїда не існує.

Вияснимо геометричний зміст отриманих результатів. Для цього складемо рівняння конуса другого порядку

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \tag{6}$$

з тими ж величинами a, b, c, що й в (1).

Нехай для прямої l з напрямним вектором $\vec{a}_0(m_0; n_0; p_0)$ виконується умова **2°**.

$$Q = 0 \Leftrightarrow \frac{m_0^{\ 2}}{a^2} + \frac{n_0^{\ 2}}{b^2} - \frac{p_0^{\ 2}}{c^2} = 0. \qquad (7)$$

Тоді точка $M_0\left(m_0; n_0; p_0\right)$ є точкою конуса (6) і цьому конусу належить вся пряма (див. §3)

$$x = m_0 t,\ \ y = n_0 t,\ \ z = p_0 t \cdot$$

Отже, пряма, яка проходить через початок координат паралельно вектору $\vec{a}_0(m_0; n_0; p_0)$, за умови **2°** є твірною конуса (6).

<u>**Означення 4**</u>. Конус другого порядку (6) називається асимптотичним конусом однопорожнинного гіперболоїда (1). Твірні цього конуса називаються асимптотами однопорожнинного гіперболоїда.

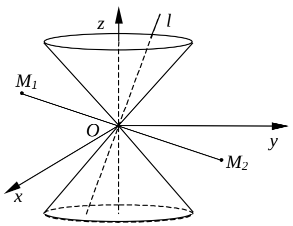


Рис. 1

Якщо пряма l, яка проходить через початок координат, знаходиться всередині асимптотичного конуса (рис. 1), то для неї $Q < 0$ (рекомендується показати це самостійно) і згідно з пунктом **3°** вона не має з поверхнею однопорожнинного гіперболоїда спільних дійсних точок.

Якщо ж пряма l проходить зовні асимптотичного конуса, то $Q > 0$ і ми маємо випадок **1°**, тобто пряма l перетинає поверхню (1) у двох точках M_1 і M_2, симетричних відносно початку координат (рис. 1).

У випадку **2°** пряма l є твірною асимптотичного конуса і не перетинає однопорожнинний гіперболоїд.

Перейдемо до визначення області розміщення точок однопорожнинного гіперболоїда відносно канонічної системи координат. Ми вже вияснили, що ці точки знаходяться зовні асимптотичного конуса (6). Крім цього, з рівняння (1) випливає, що

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \geq 1 \,.$$

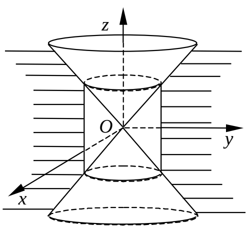


Рис. 2

Тому точки однопорожнинного гіперболоїда розміщуються одночасно зовні асимптотичного конуса (6) і зовні циліндричної поверхні, яку задано у канонічній системі координат рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \,.$$

На рис. 2 цю область заштриховано.

Дослідимо форму однопорожнинного гіперболоїда методом перерізів. Спочатку знайдемо лінію перерізу поверхні (1) площиною

$$z = h, \tag{8}$$

паралельною площині xOy.

Шляхом таких же перетворень, що й у випадку еліпсоїда, отримуємо у перерізі для довільного h еліпс

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2\left(1+\dfrac{h^2}{c^2}\right)} + \dfrac{y^2}{b^2\left(1+\dfrac{h^2}{c^2}\right)} = 1 \\ z = h \end{cases} \tag{9}$$

з півосями

$$\lambda = a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}, \quad \mu = b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}.$$

Всі еліпси (9) подібні між собою, оскільки відношення

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{a}{b}$$

не залежить від h.

Якщо $h = 0$, тобто у перерізі однопорожнинного гіперболоїда площиною xOy, маємо еліпс

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0, \end{cases} \tag{10}$$

який є найменшим зі всіх можливих еліпсів (9).

<u>Означення 5</u>. Еліпс (10) називається горловим еліпсом однопорожнинного гіперболоїда.

Зі збільшенням $|h|$ півосі λ, μ і самі еліпси (9) необмежено збільшуються. Щоб отримати уяву про форму однопорожнинного гіперболоїда у віддалених точках, тобто при $|h| \to \infty$, розглянемо одночасно з ним асимптотичний конус (6), який перетинається з площиною (8) по еліпсу

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\dfrac{a^2h^2}{c^2}} + \dfrac{y^2}{\dfrac{b^2h^2}{c^2}} = 1 \\ z = h \end{cases} \tag{11}$$

з півосями

$$\lambda_1 = \frac{a|h|}{c}, \quad \mu_1 = \frac{b|h|}{c}.$$

Оскільки $\lambda_1 < \lambda,\ \mu_1 < \mu$, то цей еліпс повністю лежить всередині еліпса (9). Отже, ми ще раз довели, що асимптотичний конус (6) повністю міститься всередині однопорожнинного гіперболоїда (1).

Доведемо тепер, що при $|h| \to \infty$ різниці $\lambda - \lambda_1$ і $\mu - \mu_1$ прямують до нуля. Дійсно,

$$\lambda - \lambda_1 = \left(a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}} - \frac{a|h|}{c} \right) \frac{a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}} + \frac{a|h|}{c}}{a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}} + \frac{a|h|}{c}} = \frac{a}{\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}} + \frac{|h|}{c}}.$$ Тому $\lim\limits_{|h|\to\infty}(\lambda - \lambda_1) = 0.$

Аналогічно доводиться, що $\lim\limits_{|h|\to\infty}(\mu - \mu_1) = 0$.

Отже, еліпси перерізів однопорожнинного гіперболоїда (1) і асимптотичного конуса (6) площиною (8) при необмеженому зростанні $|h|$ прагнуть злитися. При цьому гіперболоїд (1) як завгодно близько примикає до конуса (6), чим і пояснюється назва останнього як асимптотичного конуса.

Перетнемо поверхню (1) площиною yOz. У перерізі матимемо гіперболу

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0, \end{cases} \tag{12}$$

асимптотами

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c}\right)\left(\dfrac{y}{b} - \dfrac{z}{c}\right) = 0 \\ x = 0 \end{cases} \tag{13}$$

якої є прямі перетину асимптотичного конуса (6) і площини yOz, тобто твірні цього конуса, що лежать у площині yOz (рис. 3).

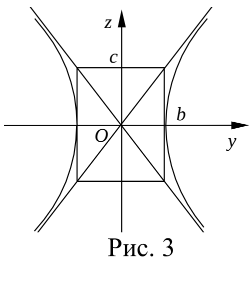


Рис. 3

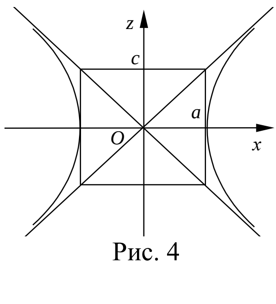


Рис. 4

Якщо поверхню (1) перетнути площиною xOz, то у перерізі будемо мати гіперболу

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Асимптоти цієї гіперболи

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c}\right)\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c}\right) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \tag{15}$$

отримуються в результаті перетину асимптотичного конуса (6) площиною xOz, тобто є твірними цього конуса, які лежать у площині xOz (рис. 4).

Проведені дослідження дозволяють зобразити поверхню (1) (рис. 5).

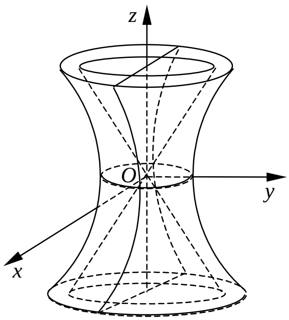


Рис. 5

Всередині однопорожнинного гіперболоїда на рис. 5 зображено його асимптотичний конус.

Ряд важливих властивостей однопорожнинного гіперболоїда (1) можна виявити шляхом дослідження його перерізів площинами, паралельними координатним площинам yOz та xOz. Проведемо ці дослідження.

У перерізі поверхні (1) площиною $x = h$ отримуємо криву

$$\begin{cases} \dfrac{h^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y^2}{\dfrac{b^2(a^2-h^2)}{a^2}} - \dfrac{z^2}{\dfrac{c^2(a^2-h^2)}{a^2}} = 1 \\ x = h. \end{cases} \tag{16}$$

Рівняння (16) визначають гіперболу. З'ясуємо в залежності від h питання про дійсну та уявну осі цієї гіперболи. Для цього нагадаємо, що у канонічному рівнянні гіперболи додатний член відповідає дійсній осі, а від'ємний – уявній осі (див. §7 гл. XIV).

Знак обох членів першого рівняння системи (16) залежить від величини h. Нехай

$$a^2 - h^2 > 0 \Leftrightarrow |h| < a \Leftrightarrow -a < h < a. \tag{17}$$

Тоді у першому рівнянні (16) перший член додатний, а другий від'ємний. Маємо гіперболу, у якої дійсна вісь паралельна осі Oy, а уявна – осі Oz (рис. 6).

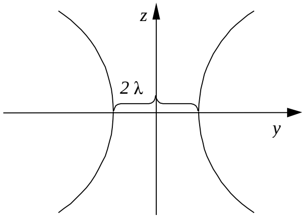


Рис. 6

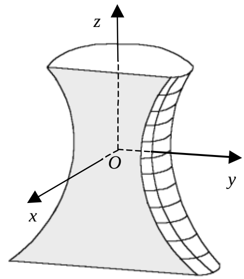


Рис. 7

На рис. 7 зображено переріз поверхні (1) площиною $x = h$, де $0 < h < a$.

Дійсна піввісь гіперболи (16) за умови (17) дорівнює

$$\lambda = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - h^2}\,, \tag{18}$$

а відстань між вершинами цієї гіперболи – 2λ. Вершини гіперболи мають координати $\left(h;\pm\frac{b\sqrt{a^2-h^2}}{a};\,0\right)$. Підставимо ці координати у ліву частину рівняння горлового еліпса (10):

$$\begin{cases} \dfrac{h^2}{a^2} + \dfrac{b^2(a^2 - h^2)}{a^2b^2} = \dfrac{h^2}{a^2} + 1 - \dfrac{h^2}{a^2} = 1 \\ z = 0. \end{cases}$$

Отже, вершини гіперболи (16) за умови (17) лежать на горловому еліпсі (10). Дослідимо, як змінюється переріз гіперболоїда площиною $x = h$ при віддаленні цієї площини від площини yOz, тобто при збільшенні $|h|$. Дійсна вісь (18) гіперболи буде зменшуватись, прямуючи до нуля, тобто вершини гіперболи будуть стягуватись до однієї точки. Це відбуватиметься до тих пір, поки h не досягне величини a. При $h = a$ переріз перестає бути гіперболою, оскільки вершини співпадають. Рівняння перерізу не можна записати у вигляді (16), оскільки при $h = a$ ми не маємо права ділити на $a^2 - h^2$. Тому слід звернутись до рівняння (1), яке при $x = a$ дає нам

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0 \\ x = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c}\right)\left(\dfrac{y}{b} - \dfrac{z}{c}\right) = 0 \\ x = a. \end{cases} \tag{19}$$

Отже, площина $x = a$ перетинає поверхню (1) по парі прямих, що мають рівняння

$$\begin{cases} \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 0 \\ x = a \end{cases} \quad \text{та} \quad \begin{cases} \dfrac{y}{b} - \dfrac{z}{c} = 0 \\ x = a. \end{cases}$$

Ці прямі зображено на рис. 8, а переріз однопорожнинного гіперболоїда площиною $x = a$ – на рис. 9.

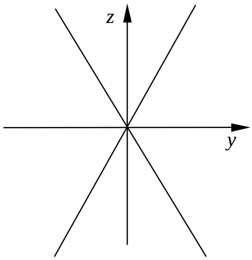


Рис. 8

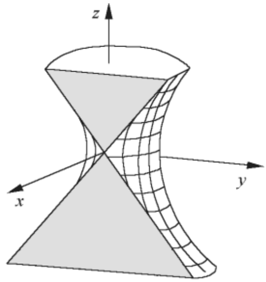


Рис. 9

Таким чином, виявляється, що існують прямі лінії, які повністю лежать на однопорожнинному гіперболоїді, тобто є його твірними, причому через точку однопорожнинного гіперболоїда проходять дві різні прямі, що лежать на ньому.

Нехай тепер

$$a^2 - h^2 < 0 \Leftrightarrow h^2 > a^2 \Leftrightarrow |h| > a.$$

Тоді у першому рівнянні системи (16) перший член від'ємний, а другий додатний. Отже, рівняння (16) є рівняннями гіперболи, дійсна вісь якої паралельна осі Oz, а уявна – осі Oy (рис. 10). Дійсна піввісь цієї гіперболи дорівнює

$$\mu = \frac{c}{a}\sqrt{h^2 - a^2}\,, \tag{20}$$

а відстань між вершинами гіперболи – 2μ. З (20) випливає, що зі збільшенням $|h|$ вершини гіперболи віддаляються одна від одної.

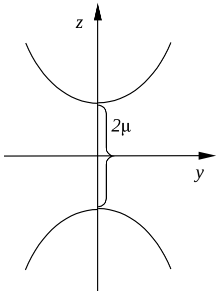


Рис. 10

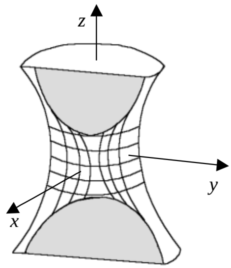


Рис. 11

На рис. 11 зображено переріз однопорожнинного гіперболоїда (1) площиною $x = h$, де $h > a$.

Аналогічні дослідження можна провести щодо перерізів однопорожнинного гіперболоїда (1) площинами, паралельними координатній площині xOz.

Рівняння однопорожнинного гіперболоїда досліджено нами для випадку, коли від'ємним у правій частині цього рівняння є член, що містить координату z. Якщо від'ємним є який-небудь інший член цього рівняння, то це призведе лише до зміни розміщення однопорожнинного гіперболоїда відносно координатних осей.

Однопорожнинний гіперболоїд з канонічним рівнянням

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{21}$$

зображено на рис. 12, а однопорожнинний гіперболоїд з канонічним рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{22}$$

– на рис. 13.

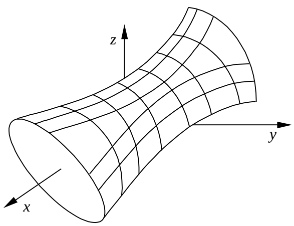


Рис. 12

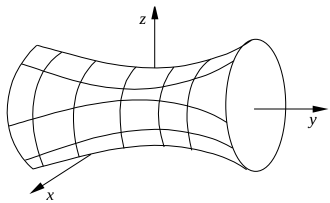


Рис. 13

Якщо у рівнянні (1) $a = b$, то отримаємо однопорожнинний гіперболоїд обертання (див. формулу (7) §1).

§5. Двопорожнинний гіперболоїд

<u>Означення 1</u>. Двопорожнинним гіперболоїдом називається множина всіх точок простору, координати яких у деякій декартовій прямокутній системі координат задовольняють рівнянню

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1. \qquad (1)$$

<u>Означення 2</u>. Система координат, в якій рівняння двопорожнинного гіперболоїда має вигляд (1), називається канонічною, а саме рівняння (1) – канонічним рівнянням двопорожнинного гіперболоїда.

Метод дослідження форми та геометричних властивостей поверхні (1) нічим не відрізняється від методу дослідження форми та властивостей однопорожнинного гіперболоїда. Тому у деяких випадках просто наведемо огляд цих властивостей.

Двопорожнинний гіперболоїд симетричний відносно всіх координатних площин, координатних осей і початку координат.

Вісь Oz перетинає двопорожнинний гіперболоїд у двох точках $C_1(0;0;c)$ і $C_2(0;0;-c)$, а осі Ox та Oy не перетинають його у дійсних точках.

<u>Означення 3</u>. Точки $C_1(0;0;c)$ і $C_2(0;0;-c)$ називаються вершинами двопорожнинного гіперболоїда, відрізок C_1C_2 – його дійсною віссю, а числа a,b,c – півосями двопорожнинного гіперболоїда.

Якщо коефіцієнти у канонічних рівняннях однопорожнинного (1) §4 та двопорожнинного (1) гіперболоїдів одні і ті ж, то ці рівняння визначають один і той же асимптотичний конус

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0\cdot \qquad (2)$$

В обох випадках поняття асимптотичного конуса дозволяє з’ясувати геометричний зміст питання про перетин прямої l, що проходить через початок координат, з поверхнею гіперболоїда.

Нехай пряма l проходить через початок координат і має параметричні рівняння

$$x=mt,\ \ y=nt,\ \ z=pt, \qquad (3)$$

де $\vec{a}(m;n;p)$ – напрямний вектор цієї прямої. Тоді значення параметра t, які визначають точки перетину поверхні (1) з прямою (3), знаходяться з рівняння

$$Qt^2=-1, \qquad (4)$$

де

$$Q=\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}-\frac{p^2}{c^2}. \qquad (5)$$

Можливі три випадки:

1°. $Q<0$. У цьому випадку квадратне рівняння (4) має два розв'язки $t_1=\dfrac{1}{\sqrt{|Q|}}$, $t_2=-\dfrac{1}{\sqrt{|Q|}}$. Звідси випливає, що пряма (3) перетинає двопорожнинний гіперболоїд у двох точках

$$M_1\left(\frac{m}{\sqrt{|Q|}};\frac{n}{\sqrt{|Q|}};\frac{p}{\sqrt{|Q|}}\right) \text{ і } M_2\left(-\frac{m}{\sqrt{|Q|}};-\frac{n}{\sqrt{|Q|}};-\frac{p}{\sqrt{|Q|}}\right),$$

симетричних відносно початку координат.

2°. $Q=0$. У цьому випадку пряма (3) не перетинає поверхню (1). Вона є асимптотою цієї поверхні.

3°. $Q>0$. Рівняння (4) має лише комплексно-спряжені корені. Тому дійсних точок перетину прямої (3) з поверхнею (1) не існує.

Порівнюючи проведені дослідження з відповідними дослідженнями для однопорожнинного гіперболоїда, бачимо, що випадки **1°** та **3°** помінялися ролями. Це дозволяє перенести отримані раніше результати для однопорожнинного гіперболоїда на випадок двопорожнинного гіперболоїда: прямі, які проходять через початок координат і знаходяться всередині асимптотичного конуса (2), перетинають поверхню (1) у двох точках, симетричних відносно початку координат, а прямі, розміщені поза конусом (2), не мають з поверхнею (1) спільних дійсних точок. Твірні конуса (2) не перетинають поверхню (1). Вони є асимптотами цієї поверхні.

Визначимо область розміщення точок двопорожнинного гіперболоїда відносно канонічної системи координат.

З рівняння (1) випливає

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \Leftrightarrow \frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow \frac{z^2}{c^2}\ge 1 \Leftrightarrow |z|\ge c \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow z\ge c \text{ і } z\le -c. \tag{6}$$

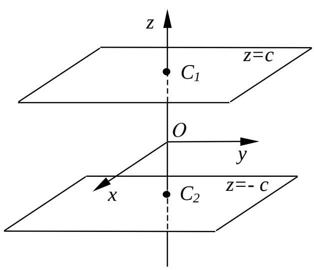


Рис. 1

Геометрично це означає, що всі точки двопорожнинного гіперболоїда лежать зовні смуги, обмеженої двома паралельними площинами $z=c$ і $z=-c$ (рис. 1).

Як і раніше, досліджувати форму поверхні (1) будемо методом перерізів.

Переріз двопорожнинного гіперболоїда площиною $z = h$ визначається рівняннями

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{h^2}{c^2} - 1 \\ z = h. \end{cases} \tag{7}$$

Якщо $|h| < c$, то перше з рівнянь (7) не має дійсних розв'язків, тобто площина $z = h$ не перетинає поверхню. Це випливає також із (6).

Якщо $h = \pm c$, то у перерізі отримуємо

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0 \\ z = \pm c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \pm c, \end{cases}$$

тобто дві точки $C_1(0;0;c)$ і $C_2(0;0;-c)$.

Якщо $|h| > c$, то рівняння (7) можна записати у вигляді

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\dfrac{a^2(h^2 - c^2)}{c^2}} + \dfrac{y^2}{\dfrac{b^2(h^2 - c^2)}{c^2}} = 1 \\ z = h. \end{cases} \tag{8}$$

Рівняння (8) визначають еліпс з півосями

$$\lambda = \frac{a}{c}\sqrt{h^2 - c^2}, \quad \mu = \frac{b}{c}\sqrt{h^2 - c^2}. \tag{9}$$

З формул (9) випливає, що зі збільшенням $|h|$ півосі λ і μ збільшуються, причому всі еліпси (8), які при цьому отримуються, подібні між собою, оскільки відношення

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{a}{b}$$

не залежить від h.

Дослідимо поведінку поверхні (1) при $|h| \to \infty$. Для цього розглянемо конус (2). Площина $z = h$ перетинає цей конус по еліпсу

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\dfrac{a^2 h^2}{c^2}} + \dfrac{y^2}{\dfrac{b^2 h^2}{c^2}} = 1 \\ z = h \end{cases} \tag{10}$$

з півосями

$$\lambda_1 = \frac{a\,|\,h\,|}{c} \quad \text{і} \quad \mu_1 = \frac{b\,|\,h\,|}{c}\,. \tag{11}$$

Із порівняння (9) і (11) випливає, що

$$\lambda < \lambda_1 \quad \text{і} \quad \mu < \mu_1\,.$$

Геометрично це означає, що еліпс (8) лежить всередині еліпса (10), а двопорожнинний гіперболоїд (1) – всередині конуса (2). Доведемо тепер, що

$$\lim_{|h|\to\infty}(\lambda_1 - \lambda) = 0 \quad \text{і} \quad \lim_{|h|\to\infty}(\mu_1 - \mu) = 0\,. \tag{12}$$

Дійсно, $\lim\limits_{|h|\to\infty}(\lambda_1 - \lambda) = \lim\limits_{|h|\to\infty}\left(\left(\frac{a\,|\,h\,|}{c} - \frac{a\sqrt{h^2 - c^2}}{c}\right)\frac{a\,|\,h\,| + a\sqrt{h^2 - c^2}}{a\,|\,h\,| + a\sqrt{h^2 - c^2}}\right) =$

$$= \lim_{|h|\to\infty}\frac{ac}{|\,h\,| + \sqrt{h^2 - c^2}} = 0.$$

Аналогічно доводиться друга рівність (12).

Отже, гіперболоїд (1) необмежено наближається до поверхні конуса (2).

Перейдемо до перерізів двопорожнинного гіперболоїда площинами $x = h$:

$$\begin{cases} \frac{h^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \\ x = h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} - = 1 + \frac{h^2}{a^2} \\ x = h \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{z^2}{\dfrac{c^2(a^2 + h^2)}{a^2}} - \dfrac{y^2}{\dfrac{b^2(a^2 + h^2)}{a^2}} = 1 \\ x = h. \end{cases} \tag{13}$$

Отже, для довільного h перерізом двопорожнинного гіперболоїда (1) площиною $x = h$ є гіпербола з півосями

$$\lambda = \frac{c}{a}\sqrt{a^2 + h^2}, \quad \mu = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 + h^2} \tag{14}$$

і центром у точці $(h; 0; 0)$. Дійсна вісь цієї гіперболи паралельна осі Oz, а уявна – осі Oy. З (14) випливає, що зі збільшенням $|\,h\,|$ півосі гіперболи збільшуються і її вершини віддаляються одна від одної.

Якщо $h = 0$, тобто у перерізі гіперболоїда (1) координатною площиною yOz, маємо гіперболу

$$\begin{cases} \dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ x = 0, \end{cases} \tag{15}$$

асимптоти якої

$$\begin{cases} \dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{z}{c} + \dfrac{y}{b}\right)\left(\dfrac{z}{c} - \dfrac{y}{b}\right) = 0 \\ x = 0 \end{cases} \tag{16}$$

є твірними асимптотичного конуса (2), що лежать у площині $x = 0$.

Проведені дослідження дозволяють скласти уявлення про вигляд двопорожнинного гіперболоїда (1). Цей гіперболоїд зображено на рис. 2.

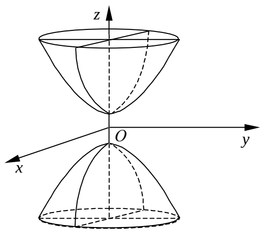


Рис. 2

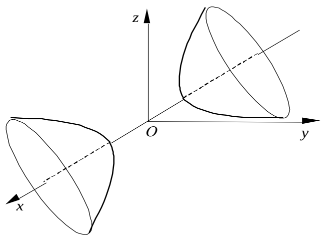


Рис. 3

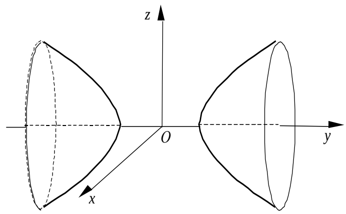


Рис. 4

При $a = b$ отримуємо двопорожнинний гіперболоїд обертання (див. формулу (8) §1).

Рівняння

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1 \tag{17}$$

визначає двопорожнинний гіперболоїд, зображений на рис. 3, а рівняння

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1 \tag{18}$$

– двопорожнинний гіперболоїд, зображений на рис. 4.

Досліджуючи рівняння (4) §2, ми розглянули наступні комбінації знаків лівої частини цього рівняння:

1. Всі три члени додатні (еліпсоїд).
2. Один член від'ємний (однопорожнинний гіперболоїд).
3. Два члени від'ємні (двопорожнинний гіперболоїд). Дійсно,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \Leftrightarrow -\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

і ми маємо два від'ємні члени.

4. Якщо всі три члени у рівнянні (4) §2 від'ємні, то у просторі немає жодної точки, координати якої задовольняють цьому рівнянню. Кажуть, що рівняння

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$$

визначає уявний еліпсоїд.

<u>Означення 4</u>. Два гіперболоїди, рівняння яких відповідно

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (19)$$

і

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1, \qquad (20)$$

називаються спряженими.

Спряжені гіперболоїди мають один і той же асимптотичний конус

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0\,. \qquad (21)$$

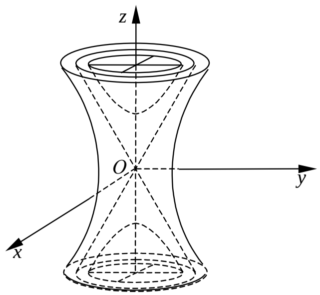


Рис. 5

Відносно цього конуса гіперболоїди (19), (20) розміщуються так: однопорожнинний гіперболоїд (19) знаходиться зовні асимптотичного конуса (21), а двопорожнинний гіперболоїд – всередині цього конуса (рис. 5).

§6. Еліптичний параболоїд

<u>Означення 1</u>. Еліптичним параболоїдом називається множина всіх точок простору, координати яких у деякій декартовій прямокутній системі координат задовольняють рівнянню

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z \quad (p>0,\ q>0). \tag{1}$$

<u>Означення 2</u>. Система координат, у якій еліптичний параболоїд має рівняння (1), називається канонічною, а саме рівняння (1) – канонічним рівнянням еліптичного параболоїда. Додатні числа p і q називаються параметрами еліптичного параболоїда.

Оскільки змінні x та y входять до рівняння (1) з квадратом, то еліптичний параболоїд симетричний відносно координатних площин yOz і xOz, а тому і відносно лінії їх перетину – осі Oz. Разом з тим, поверхня (1) не є симетричною відносно координатних осей Ox та Oy.

<u>Означення 3</u>. Точка перетину еліптичного параболоїда з його віссю симетрії називається вершиною еліптичного параболоїда.

Розглянемо пряму l, яка проходить через початок канонічної системи координат, не лежить у площині xOy і не співпадає з віссю Oz. Нехай $\vec{a}(a_1;\,a_2;\,a_3)$ – напрямний вектор цієї прямої. Тоді за умовою

$$a_3\neq 0,\ \ a_1^2+a_2^2\neq 0\,.$$

Параметричні рівняння прямої l мають вигляд

$$x=a_1t,\ \ y=a_2t,\ \ z=a_3t\,. \tag{2}$$

Параметри точок перетину прямої (2) і поверхні (1) знаходимо з рівняння

$$\frac{a_1^2t^2}{p}+\frac{a_2^2t^2}{q}=2a_3t \Leftrightarrow t\left(\left(\frac{a_1^2}{p}+\frac{a_2^2}{q}\right)t-2a_3\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1=0 \\ t_2=\dfrac{2a_3}{\dfrac{a_1^2}{p}+\dfrac{a_2^2}{q}}\neq 0. \end{array}\right.$$

Отже, пряма l перетинає поверхню (1) у двох точках : точці $O(0;\,0;\,0)$ та точці $M_2(a_1t_2;\,a_2t_2;\,a_3t_2)$.

Зауваження 1. Якщо пряма l лежить у площині xOy, то можна говорити, що вона перетинає поверхню (1) у двох точках, які співпадають з точкою $O(0;\,0;\,0)$. Якщо пряма l співпадає з віссю Oz, то вона перетинає поверхню (1) лише в одній точці $O(0;\,0;\,0)$.

Визначимо область розміщення точок еліптичного параболоїда відносно канонічної системи координат. З рівняння (1) випливає, що для всіх точок поверхні (1) $z \geq 0$ і що рівність $z = 0$ виконується тоді і тільки тоді, коли одночасно $x = 0$ і $y = 0$. Геометрично це означає, що всі точки еліптичного параболоїда, за виключенням початку координат, знаходяться з одного і того ж боку від координатної площини xOy.

Дослідимо форму еліптичного параболоїда методом перерізів і почнемо з перерізів площинами $z = h$, тобто площинами, паралельними площині xOy.

З попереднього дослідження випливає, що є сенс розглядати лише перерізи, для яких $h > 0$. Для довільного $h > 0$ у перерізі отримуємо еліпс

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{2hp} + \dfrac{y^2}{2hq} = 1 \\ z = h \end{cases} \tag{3}$$

з півосями

$$\lambda = \sqrt{2hp}, \quad \mu = \sqrt{2hq}$$

і з вершиною у точці $(0;\, 0;\, h)$.

Якщо $h = 0$, то рівнянню (1) задовольняє тільки одна точка $O(0;\, 0;\, 0)$ площини xOy. У цій точці площина xOy дотикається до поверхні (1).

Якщо h збільшується від нуля до нескінченності, то розміри еліпса (3) необмежено зростають. Всі еліпси (3) подібні, оскільки відношення

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$$

не залежить від h.

Якщо h прямує до нуля, то еліпси (3) зменшуються в розмірах, прагнучи стиснутись у точку $O(0;\, 0;\, 0)$, яка є вершиною еліптичного параболоїда.

Перерізами еліптичного параболоїда (1) площинами $y = 0$ і $x = 0$ є відповідно параболи

$$\begin{cases} x^2 = 2pz \\ y = 0, \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} y^2 = 2qz \\ x = 0 \end{cases} \tag{5}$$

з віссю симетрії Oz. Вітки цих парабол напрямлені “доверху” відносно осі Oz.

Вся поверхня еліптичного параболоїда (1) має вигляд чаши, що лежить у півпросторі $z \geq 0$, дотикається у точці O площини $z = 0$ і сягає нескінченності (рис. 1).

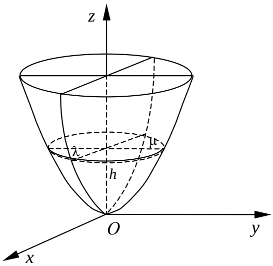


Рис. 1

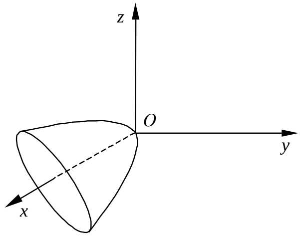


Рис. 2

На рис. 2 і рис. 3 зображено еліптичні параболоїди, рівняннями яких є відповідно рівняння

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 2x \quad \text{і} \quad \frac{x^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 2y \qquad (p > 0, \quad q > 0).$$

Випадок, коли у лівій частині рівняння (1) обидва члени від'ємні

$$-\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \quad (p > 0, \quad q > 0), \tag{6}$$

не виражає собою нічого нового. Рівняння (6) також визначає еліптичний параболоїд, але розміщений так, як показано на рис. 4.

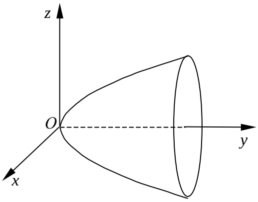


Рис. 3

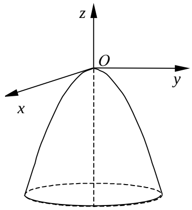


Рис. 4

Якщо в рівнянні (1) $p = q$, то еліптичний параболоїд (1) – є параболоїдом обертання (див. формулу (11) §1).

На закінчення даного параграфа розглянемо питання про побудову еліптичного параболоїда шляхом ковзання однієї параболи вздовж іншої.

Для цього розглянемо перерізи еліптичного параболоїда (1) площинами $y = y_0$, паралельними площині xOz. У цих перерізах маємо криву, рівняннями якої є

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{p} = 2z - \dfrac{y_0^2}{q} \\ y = y_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2p\left(z - \dfrac{y_0^2}{2q}\right) \\ y = y_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2p\left(z - z_0\right) \\ y = y_0, \end{cases} \qquad (7)$$

де $z_0 = \dfrac{y_0^2}{2q}$.

Рівняння (7) визначають параболу з вершиною

$$\left(0,\ y_0,\ \frac{y_0^2}{2q}\right). \qquad (8)$$

Вісь цієї параболи має рівняння

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = y_0 \end{cases}$$

і однаково напрямлена з віссю Oz.

Параметр p параболи (7) дорівнює параметру параболи (4), яка є перерізом еліптичного параболоїда (1) площиною xOz. Отже, у всіх перерізах еліптичного параболоїда (1) площинами $y = y_0$ маємо параболи однакового розміру з одним і тим же параметром p. Оскільки координати (8) зв'язані рівнянням

$$y_0^2 = 2qz_0,$$

то вершини всіх цих парабол лежать на параболі (5).

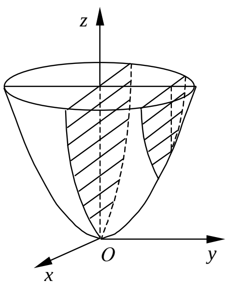


Рис. 5

Таким чином, еліптичний параболоїд (1) можна отримати, рухаючи одну (рухому) параболу (4) вздовж іншої (нерухомої) параболи (5) так, що вершина рухомої параболи ковзає по нерухомій параболі, а вісь і площина рухомої параболи залишаються весь час паралельними самим собі, причому площини рухомої і нерухомої парабол взаємно перпендикулярні (рис. 5).

Аналогічна картина отримується і для перерізів еліптичного параболоїда (1) площинами, паралельними кооординатній площині yOz.

§7. Гіперболічний параболоїд

Означення 1. Гіперболічним параболоїдом називається множина всіх точок простору, координати яких у деякій декартовій прямокутній системі координат задовольняють рівнянню

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z \quad (p>0,\ q>0). \tag{1}$$

Означення 2. Система координат, відносно якої гіперболічний параболоїд має рівняння (1), називається канонічною, а саме рівняння (1) – канонічним рівнянням гіперболічного параболоїда. Додатні числа p і q називаються параметрами гіперболічного параболоїда.

Аналогічно випадку еліптичного параболоїда, з'ясовується, що гіперболічний параболоїд симетричний відносно координатних площин xOz, yOz і осі Oz, але не симетричний відносно координатної площини xOy і осей Ox і Oy. Гіперболічний параболоїд перетинається з осями канонічної системи координат в єдиній точці – початку координат.

Означення 3. Точка перетину гіперболічного параболоїда з його віссю симетрії називається вершиною гіперболічного параболоїда.

Дослідимо перетин поверхні (1) з прямими, що проходять через початок координат.

Нехай пряму l задано параметричними рівняннями

$$x=a_1t,\ \ y=a_2t,\ \ z=a_3t\,, \tag{2}$$

де $\vec{a}(a_1;\,a_2;\,a_3)$ – напрямний вектор цієї прямої. Параметр t точок перетину поверхні (1) з прямою (2) знайдемо з рівняння

$$\left(\frac{a_1^2}{p}-\frac{a_2^2}{q}\right)t^2-2a_3t=0\,. \tag{3}$$

Розглянемо такі випадки:

1°. $\frac{a_1^2}{p}-\frac{a_2^2}{q}\neq 0,\quad a_3\neq 0$. У цьому випадку рівняння (3) має два розв'язки

$$t_1=0,\quad t_2=\frac{2a_3}{\frac{a_1^2}{p}-\frac{a_2^2}{q}}\neq 0$$

і пряма l перетинає поверхню (1) у двох точках $O(0;\,0;\,0)$ та $M_2(a_1t_2;\,a_2t_2;\,a_3t_2)$.

2°. $\frac{a_1^2}{p}-\frac{a_2^2}{q}\neq 0,\ \ a_3=0$. Рівняння (3) має два корені, що співпадають: $t_1=t_2=0$. Пряма l дотикається до поверхні (1) у її вершині $O(0;\,0;\,0)$.

3°. $\frac{a_1^2}{p}-\frac{a_2^2}{q}=0,\ \ a_3\neq 0$. У цьому випадку рівняння (3) має єдиний розв'язок $t=0$. Пряма l перетинає поверхню (1) лише у точці $O(0;\,0;\,0)$, але на відміну від випадку 2, не дотикається до неї. Про таку пряму кажуть, що вона має асимптотичний напрямок.

4°. $\frac{a_1^2}{p}-\frac{a_2^2}{q}=0,\ \ a_3=0$. У цьому випадку всі точки прямої l лежать на поверхні (1), тобто пряма l є прямолінійною твірною гіперболічного параболоїда. Кажуть, що ця пряма також має асимптотичний напрямок.

З'ясуємо геометричний зміст розглянутих випадків. З цією метою запишемо рівняння

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=0. \tag{4}$$

Легко перевірити, що у випадках **3°**, **4°** рівнянню (4) задовольняють всі точки прямої (2).

<u>Означення 4</u>. Рівняння (4) називається рівнянням асимптотичного конуса гіперболічного параболоїда (1).

Рівняння (4) визначає пару площин

$$\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}=0, \tag{5}$$

$$\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}=0, \tag{6}$$

які перетинаються по осі Oz. Отже, асимптотичний конус (4) – це пара площин, що перетинаються. Позначимо площини (5) і (6) відповідно через α_1 та α_2 (рис. 1).

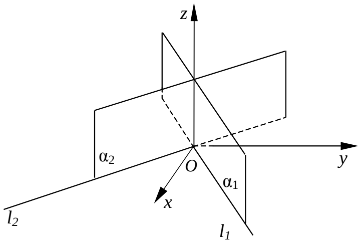


Рис. 1

Тоді розглянуті вище випадки **1°** – **4°** мають наступний геометричний зміст:

1°. Всі прямі, що проходять через початок координат O і не лежать у площинах α_1, α_2 і xOy, перетинають поверхню (1) у двох точках, однією з яких є вершина цієї поверхні – точка $O(0;\,0;\,0)$.

Позначимо через l_1 пряму перетину площини α_1 (5) з площиною xOy (рис. 1)

$$l_1 : \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{p}} - \dfrac{y}{\sqrt{q}} = 0 \\ z = 0, \end{cases} \tag{7}$$

а через l_2 – пряму перетину площини α_2 (6) з площиною xOy

$$l_2 : \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{p}} + \dfrac{y}{\sqrt{q}} = 0 \\ z = 0. \end{cases} \tag{8}$$

2$^{\mathbf{o}}$. Всі прямі, що проходять через початок координат і лежать у площині xOy, крім прямих l_1 і l_2, дотикаються до поверхні (1) у точці O.

3$^{\mathbf{o}}$. Всі прямі, що проходять через початок координат O і лежать у площинах α_1 або α_2, крім прямих l_1 і l_2, перетинають поверхню (1) лише у точці O, але не дотикаються до цієї поверхні.

4$^{\mathbf{o}}$. Прямі l_1 і l_2 є прямолінійними твірними поверхні (1).

Отже, площина xOy дотикається до поверхні (1) у її вершині $O(0;\,0;\,0)$.

Уявити собі область розміщення точок поверхні (1) відносно канонічної системи координат, а також форму цієї поверхні безпосередньо за рівнянням (1) досить складно. Найпростіше зробити це методом перерізів.

Площина xOy перетинає поверхню (1) по лінії

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{x}{\sqrt{p}} - \dfrac{y}{\sqrt{q}}\right)\left(\dfrac{x}{\sqrt{p}} + \dfrac{y}{\sqrt{q}}\right) = 0. \\ z = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Рівняння (9) визначають пару прямих (7) і (8), які перетинаються в точці $O(0;\,0;\,0)$ і є прямолінійними твірними l_1 і l_2 поверхні (1).

Паралельна до площини xOy площина $z = h$ при $h > 0$ перетинає гіперболічний параболоїд (1) по лінії

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2h \\ z = h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{2hp} - \dfrac{y^2}{2hq} = 1 \\ z = h \end{cases} \quad (p > 0,\ q > 0,\ h > 0)\,. \tag{10}$$

Рівняння (10) визначають гіперболу, яка лежить у площині $z = h$ і центр якої знаходиться у точці $(0;\,0;\,h)$. Дійсна вісь цієї гіперболи паралельна осі Ox, а уявна – осі Oy. Рівняння асимптот гіперболи (10) мають вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{2hp} - \dfrac{y^2}{2hq} = 0 \\ z = h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 0 \\ z = h. \end{cases} \qquad (11)$$

Перше з рівнянь (11) співпадає з рівнянням асимптотичного конуса (4). Це означає, що прямі (11) належать асимптотичному конусу (4). Отже, асимптоти гіперболи (10) є прямими перетину площин α_1 і α_2 (рис. 1) з площиною $z = h$.

Півосі гіперболи (10) дорівнюють

$$\lambda = \sqrt{2hp} \quad \text{і} \quad \mu = \sqrt{2hq}\,.$$

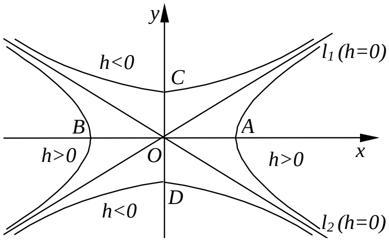


Рис. 2

Зі збільшенням h ці півосі, а також відстань $2\lambda = 2\sqrt{2hp}$ між вершинами гіперболи (10) необмежено зростають, тобто вітки гіперболи необмежено розширюються. При зменшенні h відстань між вершинами гіперболи (10) прямує до нуля і в граничному випадку ці вершини співпадають. Рівняння гіперболи (10) перетворюються у рівняння (9), а сама гіпербола – у пару прямих (7) і (8) на площині xOy (рис. 1).

Тепер проведемо площину $z = h,\ h < 0$.

У перерізі з поверхнею (1) ця площина визначає лінію

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{2hp} - \dfrac{y^2}{2hq} = 1 \\ z = h \end{cases} \quad (p > 0,\ q > 0,\ h < 0)\,. \qquad (12)$$

Рівняння (12) є рівняннями гіперболи, що лежить у площині $z = h$. Центр цієї гіперболи знаходиться в точці $(0;\ 0;\ h)$, а дійсна вісь паралельна осі Oy, оскільки $h < 0$ і другий член першого рівняння (12) додатний. Уявна вісь гіперболи (12) паралельна осі Ox. Гіпербола (12) є спряженою до гіперболи (10) (рис. 2), якщо значення $|h|$ одне і те ж.

Асимптоти всіх гіпербол (10) і (12), що отримуються при перетині гіперболічного параболоїда (1) площинами $z = h$ (при $h > 0$ і $h < 0$), паралельні прямим (7) і (8), по яких цей параболоїд перетинається площиною $z = 0$.

Перерізами гіперболічного параболоїда (1) координатними площинами $y=0$ і $x=0$ є параболи відповідно

$$\begin{cases} x^2 = 2pz \\ y = 0, \end{cases} \tag{13}$$

$$\begin{cases} y^2 = -2qz \\ x = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Підставимо координати вершин $A\left(\sqrt{2ph}; 0; h\right)$ і $B\left(-\sqrt{2ph}; 0; h\right)$ гіперболи (10) у рівняння (13). В обох випадках отримуємо тотожність

$$2ph = 2ph.$$

Отже, вершини A і B гіперболи (10) лежать на параболі (13). Аналогічно показується, що вершини $C\left(0; \sqrt{2q|h|}; h\right)$ і $D\left(0; -\sqrt{2q|h|}; h\right)$ гіперболи (12) лежать на параболі (14).

На рис. 3 у системі просторових координат одночасно зображено параболу (13) і гіперболу (10). Вершини гіперболи (точки A і B) лежать на параболі. Коли січна площина $z=h$ піднімається доверху (h зростає), вершини гіперболи (10) “розбігаються”, рухаючись по параболі (13).

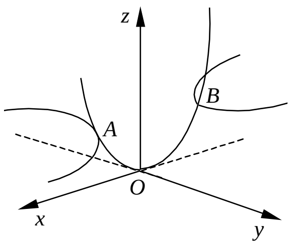


Рис. 3

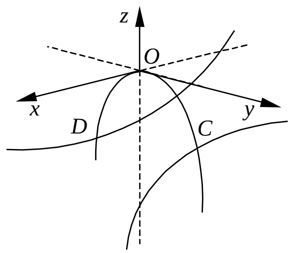


Рис. 4

На рис 4 зображено параболу (14) і гіперболу (12) у системі просторових координат. При опусканні січної площини $z=h$ ($h<0$) вершини гіперболи (12) “розбігаються”, рухаючись по параболі (14).

Проведені дослідження дозволяють зобразити гіперболічний параболоїд. Для цього, насамперед, нанесемо на рисунок дві параболи (рис. 3 і рис. 4). Потім накреслимо ряд гіпербол таких, як на рис. 3. Їх вершини лежать на верхній параболі. Далі креслимо ряд гіпербол таких, як на рис. 4. Вершини цих гіпербол лежать на нижній параболі. Накреслені перерізи дають уявлення про загальний вигляд гіперболічного параболоїда (рис. 5). Гіперболічний параболоїд схожий на сідло, що простягається до нескінченності. На рис. 5 зображено лише частину гіперболічного параболоїда.

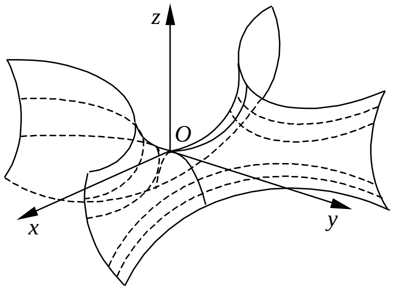


Рис. 5

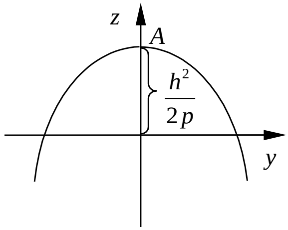


Рис. 6

Наведемо ще один спосіб, який дозволяє накреслити гіперболічний параболоїд і який ґрунтується на дослідженні перерізів площинами, паралельними площині yOz, тобто площинами $x = h$.

Рівняння лінії перерізу мають вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{h^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2z \\ x = h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = -2q\left(z - \dfrac{h^2}{2p}\right) \\ x = h \end{cases} \quad (p > 0, q > 0). \qquad (15)$$

Ці рівняння визначають параболу (рис. 6) з вершиною у точці $A\left(h; 0; \dfrac{h^2}{2p}\right)$, вісь якої має рівняння

$$\begin{cases} x = h \\ y = 0. \end{cases} \qquad (16)$$

Якщо h змінюється, тобто січна площина $x = h$ рухається, розміри параболи (15) не змінюються, оскільки ці розміри визначаються величиною коефіцієнта q в рівнянні (15). Отже, розміри параболи (15) точно такі ж, як і розміри параболи (14). Вершина A параболи (15) лежить на параболі (13). Дійсно, підставляючи координати точки $A\left(h; 0; \dfrac{h^2}{2p}\right)$ в рівняння (13), отримуємо тотожність

$$h^2 = 2p\frac{h^2}{2p} \Leftrightarrow h^2 = h^2.$$

Звідси випливає така побудова. Креслимо параболу (13). Потім креслимо ряд однакових парабол (15), вершини яких лежать на параболі (13) і площини

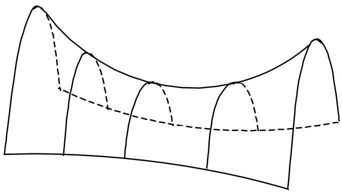


Рис. 7

яких перпендикулярні площині параболи (13). Параболи (15) “розкриваються” у протилежну сторону по відношенню до параболи (13). Можна говорити про сім’ю парабол, які навішені на одну і ту ж параболу (рис. 7).

Гіперболічний параболоїд не є поверхнею обертання, оскільки всі його перерізи є незамкненими лініями і тому не можуть бути колами. Якщо $p = q$, то рівняння (1) набуває вигляду

$$x^2 - y^2 = 2pz. \tag{17}$$

У цьому випадку гіперболи (10) і (12) (рис. 2) є рівносторонніми.

Рівняння (17) можна спростити поворотом системи координат навколо осі Oz на 135°. При цьому координата z не зміниться, а координати x і y перетворяться за відомими нам формулами повороту осей на площині (див §7 гл. VI):

$$\begin{cases} x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(x' + y'\right) \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(x' - y'\right) \\ z = z'. \end{cases}$$

Тоді рівняння (17) перепишеться так:

$$\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x' + y'\right)\right]^2 - \left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x' - y'\right)\right]^2 = 2pz \quad \Leftrightarrow \quad x'y' = pz'.$$

Відкинувши штрихи, приходимо до висновку, що рівняння

$$xy = pz$$

є рівнянням гіперболічного параболоїда.

§8. Прямолінійні твірні однопорожнинного гіперболоїда

Нагадаємо, що пряма, всі точки якої лежать на поверхні другого порядку, називається твірною цієї поверхні.

Відомо, що конічні і циліндричні поверхні другого порядку мають прямолінійні твірні, причому кожну з цих поверхонь можна утворити рухом прямої у просторі.

На еліпсоїді прямолінійних твірних немає, оскільки він є обмеженою поверхнею, тобто розміщений всередині деякого паралелепіпеда.

Немає прямолінійних твірних і на еліптичному параболоїді

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z \quad \left(p>0, q>0\right).$$

Дійсно, пряма l, яка паралельна площині xOy, лежить у деякій площині $z=h$. Якщо $h<0$, то пряма l не має спільних точок з еліптичним параболоїдом. Якщо $h=0$, то така точка може бути тільки одною і то лише у випадку, коли пряма l проходить через початок координат. Якщо $h>0$, то всі точки перетину прямої l з еліптичним параболоїдом лежать на еліпсі, по якому площина $z=h$ перетинає цей параболоїд. Тому у прямої l не більше двох спільних точок з еліптичним параболоїдом.

Якщо ж пряма l перетинає площину xOy, то вся її півпряма лежить у півпросторі $z<0$, який не містить жодної точки еліптичного параболоїда.

Немає прямолінійних твірних і на двопорожнинному гіперболоїді

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

Дійсно, в §5 було показано, що площина $z=h$ перетинає двопрожнинний гіперболоїд по еліпсу, а при $|z|<c$ точок перетину не існує. Тому твірних, паралельних площині xOy, немає. Якщо ж пряма l перетинає площину xOy, то координата z точок цієї прямої може приймати всі дійсні значення, тоді як для точок двопорожнинного гіперболоїда координата z обмежена нерівністю $|z|\geq c$. Отже, пряма l не може бути прямолінійною твірною двопорожнинного гіперболоїда.

Досліджуючи форму однопорожнинного гіперболоїда, ми показали, що існують прямі, які повністю лежать на його поверхні (див. §4, формули (19)).

У даному параграфі ми розглянемо більш докладно питання про прямолінійні твірні однопорожнинного гіперболоїда, які можна знайти наступним чином.

Нехай,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{1}$$

– канонічне рівняння поверхні однопорожнинного гіперболоїда. Рівняння (1) рівносильне рівнянню

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y^2}{b^2} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right). \tag{2}$$

Це наводить на думку розглянути два рівняння першого степеня

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=k\left(1-\dfrac{y}{b}\right) \\ k\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=1+\dfrac{y}{b}, \end{cases} \tag{3}$$

де k – довільне дійсне число. Ранг матриці

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{a} & \dfrac{k}{b} & \dfrac{1}{c} \\ \dfrac{k}{a} & -\dfrac{1}{b} & -\dfrac{k}{c} \end{pmatrix}$$

коефіцієнтів при змінних системи (3) дорівнює двом. Дійсно, наприклад

$$\begin{vmatrix} \dfrac{1}{a} & \dfrac{k}{b} \\ \dfrac{k}{a} & -\dfrac{1}{b} \end{vmatrix} = -\frac{1}{ab}\left(1+k^2\right) \neq 0 .$$

Тому система (3) визначає пряму.

Для фіксованого k система (3) визначає фіксовану пряму. Різним значенням k відповідають різні прямі. Зокрема, при $k=0$ отримуємо пряму l_0

$$l_0: \begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=0 \\ 1+\dfrac{y}{b}=0. \end{cases} \tag{4}$$

Пряма l_∞

$$l_\infty: \begin{cases} \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=0 \\ 1-\dfrac{y}{b}=0 \end{cases} \tag{5}$$

відповідає рівнянням (3) при $k=\infty$.

Якщо координати деякої точки $M(x; y; z)$ задовольняють системі (4), то вони задовольняють і рівнянню (2), тобто кожна точка прямої (4) лежить на поверхні (1). Те ж саме стосується і прямої (5).

Нехай тепер координати точки $M(x; y; z)$ задовольняють системі (3), де k – довільне дійсне число, відмінне від нуля. Тоді ці координати будуть задовольняти і рівнянню (2). Дійсно, помноживши рівняння системи (3), отримуємо рівняння (2).

Отже, ми показали, що пряма (3) для будь-якого значення k повністю лежить на поверхні однопорожнинного гіперболоїда (1).

Доведемо тепер, що через кожну точку однопорожнинного гіперболоїда (1) проходить одна і тільки одна пряма з сім'ї прямих (3).

Нехай $M_0(x_0; y_0; z_0)$ – довільна точка однопорожнинного гіперболоїда, тобто

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}=1. \tag{6}$$

Точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ буде лежати на деякій прямій (3) тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{cases} \dfrac{x_0}{a}+\dfrac{z_0}{c}=k\left(1-\dfrac{y_0}{b}\right) \\ k\left(\dfrac{x_0}{a}-\dfrac{z_0}{c}\right)=1+\dfrac{y_0}{b}. \end{cases} \tag{7}$$

Якщо точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ лежить на прямій (4), то вона не лежить на прямій (5), оскільки, принаймні, другому з рівнянь (5) координати цієї точки не задовольняють. Тоді з першого рівняння (7) випливає, що такій точці відповідає єдине значення $k=0$.

Навпаки, якщо точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ лежить на прямій (5), то вона не лежить на прямій (4), оскільки координати цієї точки не задовольняють, принаймні, другому з рівнянь (4). Тоді з другого рівняння (7) для такої точки отримуємо єдине значення $k=\infty$.

Отже, якщо точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ лежить на прямій (4) або (5), то така пряма єдина, тобто інших прямих (3), які проходять через цю точку, не існує.

Розглянемо випадок, коли точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ не лежить на жодній з прямих (4), (5). Тоді, принаймні, по одному рівнянню кожної з систем (4), (5) координати цієї точки не задовольняють. Нехай $1-\dfrac{y_0}{b}\neq 0$. З першого рівняння (7) отримаємо

$$k = \frac{\frac{x_0}{a} + \frac{z_0}{c}}{1 - \frac{y_0}{b}}. \tag{8}$$

Це значення k відмінне від нуля, оскільки протилежне суперечить припущенню, що точка M_0 не лежить на прямій (4). Підставивши (8) у друге рівняння (7), отримуємо тотожність (6), тобто друге рівняння (7) задовольняється автоматично.

Якщо $1 - \frac{y_0}{b} = 0$, то $\frac{x_0}{a} - \frac{z_0}{c} \neq 0$, оскільки точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ не лежить на прямій (5). Крім цього, $1 + \frac{y_0}{b} \neq 0$. Тоді точці M_0 відповідає відмінне від нуля значення k

$$k = \frac{1 + \frac{y_0}{b}}{\frac{x_0}{a} - \frac{z_0}{c}}, \tag{9}$$

яке знаходиться з другого рівняння системи (7). Перше рівняння системи (7) перетворюється у цьому випадку в тотожність $0 = 0$. Дійсно, з того що $1 - \frac{y_0}{b} = 0$, $\frac{x_0}{a} - \frac{z_0}{c} \neq 0$ і $1 + \frac{y_0}{b} \neq 0$ випливає, що $\frac{x_0}{a} + \frac{z_0}{c} = 0$, оскільки у противному разі не буде виконуватись тотожність (6).

Система (3) однозначно визначається значенням k. Число k в свою чергу однозначно визначається заданням точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$, що лежить на поверхні однопорожнинного гіперболоїда. Тому маємо повністю визначену систему (3), якій відповідає єдина пряма, що проходить через точку M_0.

Отже, нами доведено, що при довільних значеннях k рівняння (3) визначають нескінченну множину прямолінійних твірних поверхні однопорожнинного гіперболоїда (1), причому через кожну точку поверхні проходить одна і тільки одна з цих твірних.

Поряд із системою (3), складемо за рівнянням (2) ще таку систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = k\left(1 + \frac{y}{b}\right) \\ k\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = 1 - \frac{y}{b}. \end{cases} \tag{10}$$

Ранг матриці

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{a} & -\dfrac{k}{b} & \dfrac{1}{c} \\ \dfrac{k}{a} & \dfrac{1}{b} & -\dfrac{k}{c} \end{pmatrix},$$

що містить коефіцієнти при змінних системи (10), дорівнює двом.

Дійсно, визначник

$$\begin{vmatrix} \dfrac{1}{a} & -\dfrac{k}{b} \\ \dfrac{k}{a} & \dfrac{1}{b} \end{vmatrix} = -\frac{1}{ab}\left(1+k^2\right) \neq 0 .$$

Тому система (10) визначає пряму.

Запишемо системи рівнянь (3) і (10) у вигляді відповідно

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a}x + \dfrac{k_1}{b}y + \dfrac{1}{c}z = k_1 \\ \dfrac{k_1}{a}x - \dfrac{1}{b}y - \dfrac{k_1}{c}z = 1, \end{cases} \qquad (11)$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a}x - \dfrac{k_2}{b}y + \dfrac{1}{c}z = k_2 \\ \dfrac{k_2}{a}x + \dfrac{1}{b}y - \dfrac{k_2}{c}z = 1 \end{cases} \qquad (12)$$

і доведемо, що прямі l_1 і l_2, які визначаються цими системами, різні. Доведення проведемо від супротивного, припустивши, що прямі l_1 і l_2 співпадають. У цьому випадку кожне з рівнянь системи (12) повинно бути наслідком рівнянь системи (11). Враховуючи те, що рівняння (11) лінійно незалежні, а друге з рівнянь (12) є їх наслідком, робимо висновок про існування таких чисел u і v, не рівних одночасно нулю, для яких рівність

$$\frac{k_2}{a}x + \frac{1}{b}y - \frac{k_2}{c}z = 1$$

тотожно співпадає з рівністю

$$u\left(\frac{1}{a}x + \frac{k_1}{b}y + \frac{1}{c}z - k_1\right) + v\left(\frac{k_1}{a}x - \frac{1}{b}y - \frac{k_1}{c}z - 1\right) = 0 . \qquad (13)$$

Тому

$$u\frac{1}{a} + v\frac{k_1}{a} = \frac{k_2}{a} \quad \Leftrightarrow \quad u + vk_1 = k_2 ; \qquad (14)$$

$$u\frac{k_1}{b}-v\frac{1}{b}=\frac{1}{b} \quad \Leftrightarrow \quad uk_1-v=1; \tag{15}$$

$$u\frac{1}{c}-v\frac{k_1}{c}=-\frac{k_2}{c} \quad \Leftrightarrow \quad -u+vk_1=k_2; \tag{16}$$

$$-uk_1-v=-1 \quad \Leftrightarrow \quad uk_1+v=1. \tag{17}$$

Порівнюючи (14) і (16), отримуємо

$$u+vk_1=-u+vk_1 \quad \Leftrightarrow \quad u=0. \tag{18}$$

Аналогічно, порівнюючи (15) і (17), отримуємо

$$uk_1-v=uk_1+v \quad \Leftrightarrow \quad v=0. \tag{19}$$

Отже, з припущення про співпадання прямих l_1 і l_2 отримуємо $u=0$ і $v=0$, тоді як хоча б одне з цих чисел за припущенням відмінне від нуля. Це протиріччя і доводить, що прямі l_1 і l_2 різні.

Якщо над системою рівнянь (10) провести ті ж міркування, що й над системою (3), то можна показати, що ця система також визначає нескінченну множину твірних поверхні однопорожнинного гіперболоїда (1), причому через кожну точку поверхні проходить одна і тільки одна твірна з цієї множини твірних.

Якщо $k=0$, то з системи (10) отримуємо пряму

$$\begin{cases} \frac{x}{a}+\frac{z}{c}=0 \\ 1-\frac{y}{b}=0. \end{cases} \tag{20}$$

Пряма

$$\begin{cases} \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=0 \\ 1+\frac{y}{b}=0 \end{cases} \tag{21}$$

відповідає рівнянням (10) при $k=\infty$.

Розіб'ємо множину твірних однопорожнинного гіперболоїда (1) на два класи.

Означення 1. Твірні однопорожнинного гіперболоїда (1) належать до першого класу, якщо вони визначаються рівняннями (3), і до другого класу, якщо – рівняннями (10).

Одержані вище результати сформулюємо у вигляді наступної теореми.

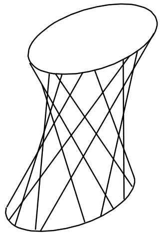


Рис. 1

Теорема 1. Через кожну точку однопорожнинного гіперболоїда проходить дві і тільки дві його твірні, одна з яких належить до першого класу, а інша – до другого класу.

Розміщення прямолінійних твірних однопорожнинного гіперболоїда показано на рис. 1.

Зауваження 1. Твірні (3) однопорожнинного гіперболоїда першого класу іноді зручно записувати у вигляді

$$\begin{cases} \lambda_1\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right)=\mu_1\left(1-\dfrac{y}{b}\right) \\ \mu_1\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=\lambda_1\left(1+\dfrac{y}{b}\right), \end{cases} \tag{22}$$

де λ_1 і μ_1 – деякі числа, що не дорівнюють одночасно нулю.

Тоді пряма (4) отримується з системи (22) при $\lambda_1 \neq 0$ і $\mu_1 = 0$, а пряма (5) – при $\lambda_1 = 0$ і $\mu_1 \neq 0$.

Аналогічно, для твірних (10) однопорожнинного гіперболоїда другого класу можна записати

$$\begin{cases} \lambda_2\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right)=\mu_2\left(1+\dfrac{y}{b}\right) \\ \mu_2\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=\lambda_2\left(1-\dfrac{y}{b}\right), \end{cases} \tag{23}$$

При $\lambda_2 \neq 0$ і $\mu_2 = 0$ отримуємо пряму (20), а при $\lambda_2 = 0$ і $\mu_2 \neq 0$ – пряму (21).

Приклад 1. Знайти прямолінійні твірні однопорожнинного гіперболоїда

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{16}=1, \tag{24}$$

які проходять через точку $M_0(6;2;8)$

Розв'язання. Рівняння (24) рівносильне рівнянню

$$\frac{x^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1-\frac{y^2}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{x}{3}+\frac{z}{4}\right)\left(\frac{x}{3}-\frac{z}{4}\right)=\left(1+\frac{y}{2}\right)\left(1-\frac{y}{2}\right). \tag{25}$$

Звідси отримуємо рівняння прямолінійних твірних

$$\begin{cases} \lambda_1\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{z}{4}\right)=\mu_1\left(1-\dfrac{y}{2}\right) \\ \mu_1\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{z}{4}\right)=\lambda_1\left(1+\dfrac{y}{2}\right), \end{cases} \tag{26}$$

$$\begin{cases} \lambda_2\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{z}{4}\right)=\mu_2\left(1+\dfrac{y}{2}\right) \\ \mu_2\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{z}{4}\right)=\lambda_2\left(1-\dfrac{y}{2}\right). \end{cases} \tag{27}$$

Твірна (26) проходить через точку $M_0(6;2;8)$. Тому

$$\lambda_1(2+2)=\mu_1\cdot 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda_1=0 \quad \text{і} \quad \mu_1\neq 0\,. \tag{28}$$

Підставивши (28) у (26), отримуємо рівняння твірної першого класу

$$\begin{cases} 4x-3z=0 \\ 2-y=0. \end{cases} \tag{29}$$

З першого рівняння системи (27) знаходимо:

$$\lambda_2(2+2)=\mu_2(1+1) \;\Leftrightarrow\; \mu_2=2\lambda_2\,. \tag{30}$$

Підставивши (30) у рівняння (27) і врахувавши, що $\lambda_2\neq 0$, отримуємо рівняння твірної другого класу:

$$\begin{cases} \lambda_2\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{z}{4}\right)=2\lambda_2\left(1+\dfrac{y}{2}\right) \\ 2\lambda_2\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{z}{4}\right)=\lambda_2\left(1-\dfrac{y}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-12y+3z-24=0 \\ 4x+3y-3z-6=0. \end{cases}$$

§9. Властивості прямолінійних твірних однопорожнинного гіперболоїда

У цьому параграфі розглянемо властивості прямолінійних твірних поверхні однопорожнинного гіперболоїда, заданого канонічним рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{1}$$

9.1. Розглянемо множину твірних першого класу, яку задано системою рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=k\left(1-\dfrac{y}{b}\right) \\ k\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=1+\dfrac{y}{b} \end{cases} \qquad (k\neq 0) \tag{2}$$

і доповнено двома прямими

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=0 \\ 1+\dfrac{y}{b}=0 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=0 \\ 1-\dfrac{y}{b}=0 \end{cases} \tag{2$'$}$$

(див. (3), (4), (5) §8).

Нехай точка $M_0\left(x_0;y_0;0\right)$ – точка горлового еліпса поверхні (1), тобто

$$\begin{cases} \dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}=1 \\ z_0=0. \end{cases} \tag{3}$$

Через точку горлового еліпса з координатами $\left(0;-b;0\right)$ проходить перша твірна (2′), а через точку з координатами $\left(0;b;0\right)$ – друга пряма (2′). Всім іншим точкам горлового еліпса відповідає твірна (2) з відмінним від нуля значенням k. Число k у системі (2) знайдемо за формулою (8) §8, в якій покладемо $z_0=0$:

$$k=\frac{\dfrac{x_0}{a}}{1-\dfrac{y_0}{b}}; \quad \frac{1}{k}=\frac{\left(1-\dfrac{y_0}{b}\right)\left(1+\dfrac{y_0}{b}\right)}{\dfrac{x_0}{a}\left(1+\dfrac{y_0}{b}\right)}=\frac{1-\dfrac{y_0^2}{b^2}}{\dfrac{x_0}{a}\left(1+\dfrac{y_0}{b}\right)}=\frac{\dfrac{x_0^2}{a^2}}{\dfrac{x_0}{a}\left(1+\dfrac{y_0}{b}\right)}=\frac{\dfrac{x_0}{a}}{1+\dfrac{y_0}{b}}. \tag{4}$$

Далі будемо шукати параметричні рівняння прямолінійної твірної l_1 поверхні (1), яка проходить через точку $M_0\left(x_0;y_0;0\right)$ горловго еліпса (3). Для цього підставимо (4) у систему (2):

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=k\left(1-\dfrac{y}{b}\right) \\ \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{k}\left(1+\dfrac{y}{b}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(1-\dfrac{y_0}{b}\right)\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right)=\dfrac{x_0}{a}\left(1-\dfrac{y}{b}\right) \\ \left(1+\dfrac{y_0}{b}\right)\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=\dfrac{x_0}{a}\left(1+\dfrac{y}{b}\right) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(1-\dfrac{y_0}{b}\right)\dfrac{x}{a}+\dfrac{x_0}{ab}y+\left(1-\dfrac{y_0}{b}\right)\dfrac{z}{c}=\dfrac{x_0}{a} \\ \left(1+\dfrac{y_0}{b}\right)\dfrac{x}{a}-\dfrac{x_0}{ab}y-\left(1+\dfrac{y_0}{b}\right)\dfrac{z}{c}=\dfrac{x_0}{a}. \end{cases} \tag{5}$$

Маємо рівняння твірної l_1 як лінії перетину площин (5). З рівнянь (5) знайдемо координати напрямного вектора прямої l_1 (див. (2) §3 гл. XVIII), провівши обчислення відповідних визначників:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} \dfrac{x_0}{ab} & \left(1-\dfrac{y_0}{b}\right)\dfrac{1}{c} \\ -\dfrac{x_0}{ab} & -\left(1+\dfrac{y_0}{b}\right)\dfrac{1}{c} \end{vmatrix}=\frac{x_0}{abc}\begin{vmatrix} 1 & 1-\dfrac{y_0}{b} \\ -1 & -\left(1+\dfrac{y_0}{b}\right) \end{vmatrix}=\frac{x_0}{abc}\left(-1-\frac{y_0}{b}+1-\frac{y_0}{b}\right)=-\frac{2x_0y_0}{ab^2c};$$

$$\Delta_2=-\begin{vmatrix} \left(1-\dfrac{y_0}{b}\right)\dfrac{1}{a} & \left(1-\dfrac{y_0}{b}\right)\dfrac{1}{c} \\ \left(1+\dfrac{y_0}{b}\right)\dfrac{1}{a} & -\left(1+\dfrac{y_0}{b}\right)\dfrac{1}{c} \end{vmatrix}=-\frac{\left(1-\dfrac{y_0^2}{b^2}\right)}{ac}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=\frac{2\dfrac{x_0^2}{a^2}}{ac}=\frac{2x_0^2}{a^3c};$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} \left(1-\dfrac{y_0}{b}\right)\dfrac{1}{a} & \dfrac{x_0}{ab} \\ \left(1+\dfrac{y_0}{b}\right)\dfrac{1}{a} & -\dfrac{x_0}{ab} \end{vmatrix}=\frac{x_0}{a^2b}\begin{vmatrix} 1-\dfrac{y_0}{b} & 1 \\ 1+\dfrac{y_0}{b} & -1 \end{vmatrix}=\frac{x_0}{a^2b}\left(-1+\frac{y_0}{b}-1-\frac{y_0}{b}\right)=-\frac{2x_0}{a^2b}.$$

Напрямним вектором прямої l_1 є вектор

$$\vec{a}\left(-\frac{2x_0y_0}{ab^2c},\frac{2x_0^2}{a^3c},-\frac{2x_0}{a^2b}\right)=-\frac{2x_0}{a^2b^2c}\vec{a}_1\left(\frac{ay_0}{b};-\frac{bx_0}{a};c\right),$$

паралельний вектору

$$\vec{a}_1\left(\frac{ay_0}{b};-\frac{bx_0}{a};c\right). \tag{6}$$

Оскільки твірна l_1 першого класу проходить через точку $M_0(x_0;y_0;0)$ горлового еліпса (3) паралельно вектору $\vec{a}_1$, то її параметричні рівняння мають вигляд

$$x = x_0 + \frac{ay_0}{b}t, \quad y = y_0 - \frac{bx_0}{a}t, \quad z = ct \quad (-\infty < t < \infty). \tag{7}$$

Зокрема, параметричними рівняннями твірних (2′) будуть рівняння відповідно

$$x = -at, \quad y = -b, \quad z = ct \quad (-\infty < t < \infty)$$

і

$$x = at, \quad y = b, \quad z = ct \quad (-\infty < t < \infty).$$

Перейдемо до множини твірних другого класу, яка визначається системою рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} = k\left(1 + \dfrac{y}{b}\right) \\ k\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c}\right) = 1 - \dfrac{y}{b} \end{cases} \quad (k \neq 0) \tag{8}$$

і яку доповнено двома прямими

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} = 0 \\ 1 - \dfrac{y}{b} = 0 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c} = 0 \\ 1 + \dfrac{y}{b} = 0 \end{cases} \tag{8′}$$

(див. (10), (20), (21) §8).

Для твірної l_2 другого класу, що проходить через точку $M_0(x_0;y_0;0)$ горлового еліпса (3) отримуємо наступну систему рівнянь

$$\begin{cases} \left(1 + \dfrac{y_0}{b}\right)\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c}\right) = \dfrac{x_0}{a}\left(1 + \dfrac{y}{b}\right) \\ \left(1 - \dfrac{y_0}{b}\right)\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c}\right) = \dfrac{x_0}{a}\left(1 - \dfrac{y}{b}\right), \end{cases} \tag{9}$$

з якої знаходимо напрямний вектор твірної l_2

$$\vec{a}_2\left(-\frac{ay_0}{b}; \frac{bx_0}{a}; c\right). \tag{10}$$

Тоді параметричні рівняння твірної l_2 поверхні (1) запишуться так:

$$x = x_0 - \frac{ay_0}{b}t, \quad y = y_0 + \frac{bx_0}{a}t, \quad z = ct \quad (-\infty < t < \infty). \tag{11}$$

9.2. **Теорема 1**. Будь-які дві прямолінійні твірні однопорожнинного гіперболоїда, що належать до різних класів, завжди лежать в одній площині. Зокрема, ці твірні паралельні тоді і тільки тоді, коли вони проходять через діаметрально протилежні точки горлового еліпса.

Доведення. Нехай твірна l_1 першого класу проходить через точку $M_1(x_1; y_1; 0)$ горлового еліпса, а твірна l_2 другого класу – через точку $M_2(x_2; y_2; 0)$. Тоді напрямними векторами цих твірних будуть відповідно вектори (6) і (10): $\vec{a}_1\left(\frac{ay_1}{b}; -\frac{bx_1}{a}; c\right)$ і $\vec{a}_2\left(-\frac{ay_2}{b}; \frac{bx_2}{a}; c\right)$.

Відомо (див. §4 гл. XVIII), що прямі l_1 і l_2, які мають напрямні вектори відповідно $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$ і проходять через точки відповідно $M_1(x_1; y_1; 0)$ і $M_2(x_2; y_2; 0)$, лежать в одній площині тоді і тільки тоді, коли визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ \frac{ay_1}{b} & -\frac{bx_1}{a} & c \\ -\frac{ay_2}{b} & \frac{bx_2}{a} & c \end{vmatrix} = 0. \tag{12}$$

Отже, доведення першого твердження теореми 1 зводиться до перевірки рівності (12). Дійсно,

$$\Delta = (x_2 - x_1)\begin{vmatrix} -\frac{bx_1}{a} & c \\ \frac{bx_2}{a} & c \end{vmatrix} - (y_2 - y_1)\begin{vmatrix} \frac{ay_1}{b} & c \\ -\frac{ay_2}{b} & c \end{vmatrix} = c\left(\frac{b}{a}\left(x_1^2 - x_2^2\right) + \frac{a}{b}\left(y_1^2 - y_2^2\right)\right) =$$

$$= cab\left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - \left(\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2}\right)\right) = abc(1-1) = 0.$$

Твірні l_1 і l_2 паралельні тоді і тільки тоді, коли паралельні їх напрямні вектори, тобто

$$\frac{\frac{ay_1}{b}}{-\frac{ay_2}{b}} = \frac{-\frac{bx_1}{a}}{\frac{bx_2}{a}} = \frac{c}{c}. \tag{13}$$

З рівностей (13) випливає, що

$$\begin{aligned} &\frac{y_1}{-y_2}=1 \;\Leftrightarrow\; y_2=-y_1, \\ &\frac{-x_1}{x_2}=1 \;\Leftrightarrow\; x_2=-x_1. \end{aligned} \tag{14}$$

Отже, для точок M_1 і M_2 маємо

$$M_1\left(x_1;y_1;0\right), \quad M_2\left(-x_1;-y_1;0\right),$$

тобто ці точки симетричні відносно початку координат.

Теорему доведено.

Теорема 2. Будь-які дві твірні однопорожнинного гіперболоїда, які належать до одного класу – мимобіжні.

Доведення. Нехай $M_1\left(x_1;y_1;0\right)$ і $M_2\left(x_2;y_2;0\right)$ – точки горлового еліпса, через які проходять дані твірні. Ці точки різні, оскільки через довільну точку горлового еліпса проходить одна і тільки одна твірна кожного класу. Нехай для визначеності твірні належать до першого класу. Тоді їх напрямними векторами є вектори вигляду (6):

$$\vec{a}_1\left(\frac{ay_1}{b};-\frac{bx_1}{a};c\right) \text{ і } \vec{a}_2\left(\frac{ay_2}{b};-\frac{bx_2}{a};c\right).$$

Перевіримо, що твірні мимобіжні. Для цього необхідно і достатньо, щоб не дорівнював нулю визначник

$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & 0 \\ \dfrac{ay_1}{b} & -\dfrac{bx_1}{a} & c \\ \dfrac{ay_2}{b} & -\dfrac{bx_2}{a} & c \end{vmatrix}=\Delta$. Дійсно,

$$\Delta=\left(x_2-x_1\right)\begin{vmatrix} -\dfrac{bx_1}{a} & c \\ -\dfrac{bx_2}{a} & c \end{vmatrix}-\left(y_2-y_1\right)\begin{vmatrix} \dfrac{ay_1}{b} & c \\ \dfrac{ay_2}{b} & c \end{vmatrix}=c\left(\frac{b}{a}\left(x_2-x_1\right)^2+\frac{a}{b}\left(y_2-y_1\right)^2\right)\neq 0.$$

Для прямолінійних твірних другого класу доведення аналогічне.

Теорему доведено.

Теорема 3. Жодні три прямолінійні твірні одного класу не паралельні одній площині.

Доведення. Нехай $M_1\left(x_1;y_1;0\right)$, $M_2\left(x_2;y_2;0\right)$, $M_3\left(x_3;y_3;0\right)$ – точки горлового еліпса, через які проходять три твірні одного класу, наприклад, першого. Оскільки через довільну точку горлового еліпса проходить тільки одна твірна одного класу, то всі ці три точки попарно різні. Напрямними векторами трьох вибраних твірних будуть вектори

$$\vec{a}_1\left(\frac{ay_1}{b}; -\frac{bx_1}{a}; c\right),\ \vec{a}_2\left(\frac{ay_2}{b}; -\frac{bx_2}{a}; c\right),\ \vec{a}_3\left(\frac{ay_3}{b}; -\frac{bx_3}{a}; c\right).$$

Три прямі паралельні одній площині тоді і тільки тоді, коли їх напрямні вектори компланарні. Тому доведення теореми 3 зводиться до перевірки умови некомпланарності трьох векторів, тобто до перевірки того, що визначник, складений з координат цих векторів, не дорівнює нулю. Дійсно,

$$\begin{vmatrix} \frac{ay_1}{b} & -\frac{bx_1}{a} & c \\ \frac{ay_2}{b} & -\frac{bx_2}{a} & c \\ \frac{ay_3}{b} & -\frac{bx_3}{a} & c \end{vmatrix} = \frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}\cdot c \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

оскільки точки $M_1(x_1; y_1; 0)$, $M_2(x_2; y_2; 0)$, $M_3(x_3; y_3; 0)$ не лежать на одній прямій. У справедливості останнього висновку рекомендується переконатися самостійно.

Аналогічно доводиться твердження теореми для трьох твірних другого класу.

Теорему доведено.

9.3. Доведені властивості прямолінійних твірних однопорожнинного гіперболоїда дозволяють описати його поверхню як поверхню, що утворюється рухом прямої.

Для цього розглянемо спочатку три довільні прямі l_1, l_2, l_3, кожні дві з яких є мимобіжними прямими (рис. 1).

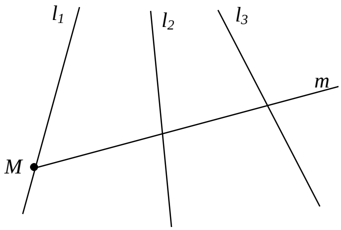


Рис. 1

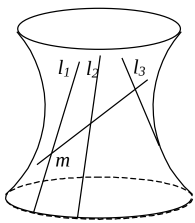


Рис. 2

Через кожну точку M прямої l_1 можна провести одну і тільки одну пряму m, яка лежить в одній площині як з прямою l_2, так і з прямою l_3. Ця пряма m є прямою перетину двох площин, одна з яких визначається прямою l_2 і точкою M, а друга – прямою l_3 і точкою M. Дійсно, ці площини не можуть бути паралельними, оскільки мають спільну точку M. Вони також не співпадають, бо тоді прямі l_2 і l_3 лежали б в одній площині. Тому пряма m перетину цих двох площин завжди існує і є єдиною прямою, яка лежить в одній площині як з прямою l_2, так і з прямою l_3.

Зауваження 1. За умови, що пряма m лежить в одних площинах з двома мимобіжними прямими l_2 і l_3, не виключаються такі випадки взаємного розміщення цих прямих: 1) пряма m перетинає кожну з прямих l_2 і l_3; 2) пряма m перетинає одну з прямих l_2 або l_3 і паралельна іншій.

Виключається лише випадок, коли пряма m паралельна кожній з прямих l_2 і l_3, оскільки це суперечить умові мимобіжності останніх.

Якщо точку M рухати вздовж прямої l_1, то пряма m, рухаючись у просторі і залишаючись у кожному своєму положенні такою, що лежить в одних площинах з прямими l_1, l_2, l_3, буде утворювати поверхню.

Візьмемо три довільні твірні l_1, l_2, l_3 однопорожнинного гіперболоїда (рис. 2), що належать до одного класу, наприклад, першого. Згідно з теоремою 2 прямі l_1, l_2, l_3 попарно мимобіжні. Тому через кожну точку M однієї з цих прямих проходить одна і тільки одна пряма m, яка лежить в одних площинах з двома іншими прямими. З іншого боку, через цю точку проходить одна і тільки одна твірна другого класу і ця твірна за теоремою 1 також лежить в одних площинах з твірними l_1, l_2, l_3 першого класу. Тому пряма m співпадає з твірною другого класу.

Якщо рухати точку M по одній із твірних l_1, l_2, l_3 одного класу, то пряма m, яка проходить через точку M і лежить в одних площинах з двома іншими твірними, буде описувати всю множину твірних другого класу, а тому і всю поверхню однопорожнинного гіперболоїда.

Отже, однопорожнинний гіперболоїд можна розглядати як геометричне місце точок, що належать прямим, які лежать в одних площинах з кожною із трьох фіксованих твірних однопорожнинного гіперболоїда одного класу.

Оскільки три твірні l_1, l_2, l_3 можна взяти довільно як з першого, так і з другого класу твірних, то існує два способи отримати поверхню однопорожнинного гіперболоїда шляхом неперервного руху прямої.

Зауваження 2. Якщо обмежитись умовою, що пряма m, рухаючись у просторі, перетинає у кожному своєму положенні всі три задані твірні l_1, l_2, l_3 одного класу, наприклад, першого, то ми не зможемо отримати ті твірні другого класу, які проходять через точки горлового еліпса, діаметрально протилежні точкам проходження заданих твірних першого класу (див. теорему 1).

Однак з практичної точки зору саме ця умова є найбільш прийнятною.

Приклад 1. Нехай l_1, l_2, l_3 – довільні попарно мимобіжні прямі, які не паралельні одній площині. Показати, що геометричне місце точок всіх можливих прямих, які одночасно лежать в одних площинах з кожною із трьох заданих прямих l_1, l_2, l_3, є однопорожнинним гіперболоїдом.

Розв'язання. Твердження прикладу 1 доведено нами вище для випадку трьох твірних однопорожнинного гіперболоїда. Проведемо алгебраїчне доведення у загальному випадку.

Розглянемо три точки

$$A(a;0;0), \quad B(-a;0;0), \quad C(0;b;0),$$

де a, b – довільні числа, відмінні від нуля. Точки A, B і C не лежать на одній прямій.

Скористаємось тим фактом, що у спеціально вибраній декартовій прямокутній системі координат довільні три прямі l_1, l_2, l_3, які задовольняють умовам прикладу, можна описати параметричними рівняннями

$$l_1: \begin{cases} x = a \\ y = bt, \\ z = ct \end{cases} \quad l_2: \begin{cases} x = -a \\ y = -bt, \\ z = ct \end{cases} \quad l_3: \begin{cases} x = -at \\ y = b \\ z = ct, \end{cases} \tag{15}$$

де $c \neq 0$. Доведення цього факту через громіздкі викладки ми опускаємо. Перевіримо лише, що три прямі l_1, l_2, l_3 з (15) дійсно задовольняють умовам прикладу 1. Вектори $\vec{a}_1(0;b;c)$, $\vec{a}_2(0;-b;c)$, $\vec{a}_3(-a;0;c)$ – напрямні вектори відповідно прямих l_1, l_2, l_3. Тоді (див. доведення теореми 3)

$$\begin{vmatrix} 0 & b & c \\ 0 & -b & c \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = -a\begin{vmatrix} b & c \\ -b & c \end{vmatrix} = -2abc \neq 0 .$$

Те, що прямі l_1, l_2 і l_3 попарно мимобіжні, видно з (15).

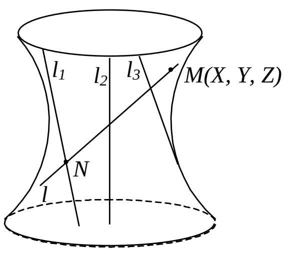


Рис. 3

Через точку N прямої l_1 проведемо пряму l так, щоб вона лежала в одних площинах з прямими l_2 і l_3 (рис. 3). Вище ми показали, що така пряма існує і єдина. Якщо точку N рухати вздовж прямої l_1, то пряма l, яка у кожному своєму положенні лежить в одних площинах з прямими l_1, l_2, l_3, буде описувати у просторі деяку поверхню.

Позначимо через $M(X;Y;Z)$ довільну точку цієї поверхні, а через $\vec{b}(p_1;p_2;p_3)$ – напрямний вектор прямої l, яка проходить через точку $M(X;Y;Z)$. Тоді параметричні рівняння прямої l матимуть вигляд

$$x = X + p_1 t, \quad y = Y + p_2 t, \quad z = Z + p_3 t . \tag{16}$$

Відмітимо, що малими буквами x, y, z позначаються координати точки прямої l, а великими буквами X, Y, Z – координати змінної точки поверхні. Нашою задачею є знаходження залежності між змінними X, Y, Z .

Запишемо умови розміщення прямої (16) в одних площинах з кожною із прямих (15) (див. §4 гл. XVIII):

$$\begin{vmatrix} X-a & Y & Z \\ 0 & b & c \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} X+a & Y & Z \\ 0 & -b & c \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} X & Y-b & Z \\ -a & 0 & c \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{vmatrix} = 0$$

або

$$\begin{cases} (cY-bZ)p_1 - (cX-ac)p_2 + (bX-ab)p_3 = 0 \\ (cY+bZ)p_1 - (cX+ac)p_2 - (bX+ab)p_3 = 0 \\ (cY-bc)p_1 - (cX+aZ)p_2 + (aY-ab)p_3 = 0. \end{cases} \tag{17}$$

Оскільки пряма l, яка проходить через точку $M(X;Y;Z)$ і лежить в одних площинах з прямими (15), існує, то система лінійних рівнянь (17) відносно невідомих p_1, p_2, p_3 повинна бути сумісною. Для цього необхідно і достатньо, щоб визначник системи (17) дорівнював нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} cY-bZ & -cX+ac & bX-ab \\ cY+bZ & -cX-ac & -bX-ab \\ cY-bc & -cX-aZ & aY-ab \end{vmatrix} = 0 . \tag{18}$$

Зведемо рівняння поверхні (18) до канонічного вигляду. Для цього розкладемо визначник Δ за елементами третього рядка. Спочатку обчислимо алгебраїчні доповнення елементів третього рядка:

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -cX+ac & bX-ab \\ -cX-ac & -bX-ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -c(X-a) & b(X-a) \\ -c(X+a) & -b(X+a) \end{vmatrix} = 2bc\left(X^2-a^2\right);$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} cY-bZ & b(X-a) \\ cY+bZ & -b(X+a) \end{vmatrix} = -b\big(-cXY+bXZ-acY+abZ-$$

$$-cXY+acY-bXZ+abZ\big) = -2b(abZ-cXY);$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} cY-bZ & -c(X-a) \\ cY+bZ & -c(X+a) \end{vmatrix} = -c\big(cXY-bXZ+acY-abZ-$$

$$-cXY-bXZ+acY+abZ\big) = -2c(acY-bXZ).$$

Тоді

$$\Delta = 2bc^2\left(X^2-a^2\right)(Y-b) + 2b(cX+aZ)(abZ-cXY) + 2ac(Y-b)(bXZ-acY) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow bc^2X^2Y - bc^2a^2Y - b^2c^2X^2 + a^2b^2c^2 + b^2acXZ + b^2a^2Z^2 - bc^2YX^2 -$$

$$-abcXYZ + abcXYZ - acb^2XZ - a^2c^2Y^2 + a^2c^2bY = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad -b^2c^2X^2 - a^2c^2Y^2 + b^2a^2Z^2 = -a^2b^2c^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 1 .$$

Отже, шукане геометричне місце точок є однопорожнинним гіперболоїдом, а вибрана вище система координат виявилась канонічною.

9.4. У §1 нами одержано рівняння однопорожнинного гіперболоїда обертання (див. формулу (7) §1), який утворюється обертанням гіперболи

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

навколо осі Oz, тобто навколо її уявної осі. Покажемо, що поверхню однопорожнинного гіперболоїда обертання можна отримати, обертаючи одну з двох мимобіжних прямих навколо іншої.

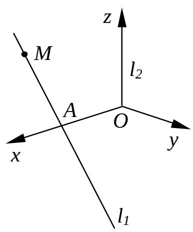


Рис. 4

Нехай дано дві мимобіжні прямі l_1 і l_2 (рис. 4). Виберемо одну з цих прямих за вісь Oz, а спільний перпендикуляр до прямих l_1 і l_2 – за вісь Ox. Нехай пряма l_1 проходить через точку $A(a;0;0)$ і має напрямний вектор

$$\vec{a} = n\vec{j} + p\vec{k}\,,$$

оскільки є перпендикулярною до осі Ox. Тоді канонічні рівняння прямої l_1 будуть такими

$$\frac{x-a}{0} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = a \\ y = \dfrac{n}{p} z. \end{cases} \tag{19}$$

Нехай $M(x;y;z)$ – довільна точка прямої l. При обертанні навколо осі Oz точка M описує коло; координати x і y точки M змінюються так, що сума їх квадратів, тобто $x^2 + y^2$, залишається постійною і дорівнює квадрату відстані від точки M до осі обертання Oz. Координата z точки M при обертанні не змінюється.

З (19) випливає, що

$$x^2 + y^2 = a^2 + \frac{n^2}{p^2} z^2\,. \tag{20}$$

Рівняння (20) виконується тільки для точок кола обертання точки M і не залежить від розміщення точки M на прямій l_1, тобто виконується для всіх точок поверхні, що утворюється обертанням прямої l_1 навколо прямої l_2, і тільки для цих точок.

Отже, рівняння (20) є рівнянням поверхні обертання прямої l_1 навколо прямої l_2. Рівняння (20) рівносильне рівнянню

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{\left(\frac{ap}{n}\right)^2}=1, \tag{21}$$

яке є рівнянням однопорожнинного гіперболоїда.

Пряма

$$\frac{x-a}{0}=\frac{y}{-n}=\frac{z}{p} \tag{22}$$

при обертанні навколо осі Oz опише той же гіперболоїд, що і пряма (19), оскільки знак n не впливає на рівняння (21).

Цим підтверджується, що через кожну точку однопорожнинного гіперболоїда проходять дві різні твірні. Всі можливі положення прямої (19) при обертанні навколо осі Oz визначають один клас твірних однопорожнинного гіперболоїда. Другий клас твірних визначається різними положеннями, які займає при обертанні пряма (22). Прямі (19) і (22) симетричні одна одній відносно площин xOy і xOz.

§10. Прямолінійні твірні гіперболічного параболоїда

Нехай гіперболічний параболоїд задано канонічним рівнянням

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z \qquad (p>0,\ \ q>0). \tag{1}$$

Площина xOy перетинає поверхню (1) по парі прямих (див. §7)

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{p}-\dfrac{y^2}{q}=0\\ z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left(\dfrac{x}{\sqrt{p}}-\dfrac{y}{\sqrt{q}}\right)\left(\dfrac{x}{\sqrt{p}}+\dfrac{y}{\sqrt{q}}\right)=0\\ z=0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\dfrac{x}{\sqrt{p}}-\dfrac{y}{\sqrt{q}}=0\\ z=0,\end{cases} \qquad (2)\\ \begin{cases}\dfrac{x}{\sqrt{p}}+\dfrac{y}{\sqrt{q}}=0\\ z=0.\end{cases} \qquad (3)\end{array}\right.$$

Прямі (2) і (3) перетинаються у точці $O(0;0;0)$ і є прямолінійними твірними гіперболічного параболоїда. Більше того, доведемо наступну теорему.

Теорема 1. Через кожну точку гіперболічного параболоїда (1) проходять дві і тільки дві його прямолінійні твірні.

Доведення. Нехай $M_0\left(x_0;y_0;z_0\right)$ – довільна точка поверхні (1). Тоді

$$\frac{x_0^2}{p}-\frac{y_0^2}{q}=2z_0\,. \tag{4}$$

Розглянемо довільну пряму l, яка проходить через точку $M_0\left(x_0;y_0;z_0\right)$ і має напрямний вектор $\vec{a}\left(a_1;a_2;a_3\right)$. Підставивши параметричні рівняння прямої l

$$x=x_0+a_1t,\quad y=y_0+a_2t,\quad z=z_0+a_3t \tag{5}$$

у рівняння поверхні (1), отримаємо квадратне рівняння відносно параметра t, яке дозволяє визначити спільні точки поверхні (1) і прямої (5). Це рівняння має вигляд

$$\frac{\left(x_0+a_1t\right)^2}{p}-\frac{\left(y_0+a_2t\right)^2}{q}=2\left(z_0+a_3t\right)\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad t^2\left(\frac{a_1^2}{p}-\frac{a_2^2}{q}\right)+2t\left(\frac{x_0a_1}{p}-\frac{y_0a_2}{q}-a_3\right)+\left(\frac{x_0^2}{p}-\frac{y_0^2}{q}-2z_0\right)=0\,.$$

З врахуванням тотожності (4) останнє рівняння рівносильне рівнянню

$$\left(\frac{a_1^2}{p}-\frac{a_2^2}{q}\right)t^2+2t\left(\frac{x_0a_1}{p}-\frac{y_0a_2}{q}-a_3\right)=0\,. \tag{6}$$

Для того щоб пряма (5) була прямолінійною твірною поверхні (1), необхідно і достатньо, щоб рівняння (6) виконувалось для всіх t. Це можливо тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{cases}\dfrac{a_1^2}{p}-\dfrac{a_2^2}{q}=0\\[2mm]\dfrac{x_0a_1}{p}-\dfrac{y_0a_2}{q}-a_3=0.\end{cases} \tag{7}$$

З системи (7) випливає, що $a_1\neq 0,\ a_2\neq 0$. Якщо, наприклад, $a_1=0$, то з першого рівняння системи (7) отримуємо $a_2=0$, а з другого – $a_3=0$, що неможливо.

З першого рівняння системи (7) знаходимо

$$a_2 = \pm\sqrt{\frac{q}{p}}a_1 .$$

Підставимо цю рівність у друге рівняння системи (7):

$$a_3 = \frac{x_0}{p}a_1 \mp \frac{y_0\sqrt{q}}{q\sqrt{p}}a_1 \;\Leftrightarrow\; a_3 = \left(\frac{x_0}{p} \mp \frac{y_0}{\sqrt{q}\sqrt{p}}\right)a_1 \;\Leftrightarrow\; a_3 = \left(\frac{x_0}{\sqrt{p}} \mp \frac{y_0}{\sqrt{q}}\right)\frac{a_1}{\sqrt{p}} .$$

Вектори

$$\left(a_1; \pm\sqrt{q}\,\frac{a_1}{\sqrt{p}}; \left(\frac{x_0}{\sqrt{p}} \mp \frac{y_0}{\sqrt{q}}\right)\frac{a_1}{\sqrt{p}}\right)$$

паралельні векторам

$$\left(\sqrt{p};\ \pm\sqrt{q}; \frac{x_0}{\sqrt{p}} \mp \frac{y_0}{\sqrt{q}}\right).$$

Отже, для координат напрямного вектора прямолінійної твірної l отримуємо дві системи значень:

$$\vec{n}_1\left(\sqrt{p}; \sqrt{q}; \frac{x_0}{\sqrt{p}} - \frac{y_0}{\sqrt{q}}\right), \tag{8}$$

$$\vec{n}_2\left(\sqrt{p}; -\sqrt{q}; \frac{x_0}{\sqrt{p}} + \frac{y_0}{\sqrt{q}}\right). \tag{9}$$

Це означає, що через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ гіперболічного параболоїда проходить дві його прямолінійні твірні

$$\frac{x - x_0}{\sqrt{p}} = \frac{y - y_0}{\sqrt{q}} = \frac{z - z_0}{\dfrac{x_0}{\sqrt{p}} - \dfrac{y_0}{\sqrt{q}}}, \tag{10}$$

$$\frac{x - x_0}{\sqrt{p}} = \frac{y - y_0}{-\sqrt{q}} = \frac{z - z_0}{\dfrac{x_0}{\sqrt{p}} + \dfrac{y_0}{\sqrt{q}}}. \tag{11}$$

Теорему доведено.

Відмітимо, що всі прямолінійні твірні (10) паралельні площині

$$\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = 0 . \tag{12}$$

Дійсно, нормальний вектор $\vec{N}\left(\frac{1}{\sqrt{p}};-\frac{1}{\sqrt{q}};0\right)$ цієї площини перпендикулярний напрямному вектору $\vec{n}_1$, оскільки їх скалярний добуток дорівнює нулю:

$$\vec{N}\cdot\vec{n}_1=\frac{1}{\sqrt{p}}\sqrt{p}-\frac{1}{\sqrt{q}}\sqrt{q}=0\,.$$

Аналогічно доводиться, що прямолінійні твірні (11) паралельні площині

$$\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}=0\,. \qquad (13)$$

Розіб'ємо множину всіх прямолінійних твірних гіперболічного параболоїда на два класи.

Означення 1. Прямолінійні твірні гіперболічного параболоїда належать до першого класу, якщо вони паралельні площині (12), і до другого класу, якщо вони паралельні площині (13).

Площина xOy перетинає поверхню (1) по прямих (2) і (3). Пряма (2) належить до першого класу, оскільки повністю лежить у площині (12) і тому паралельна останній. Аналогічно, пряма (3) належить до другого класу. Напрямними векторами прямих (2) і (3) є відповідно вектори

$$\left(\sqrt{p};\sqrt{q};0\right)\quad \text{і}\quad \left(\sqrt{p};-\sqrt{q};0\right),$$

що випливає з (8) і (9).

Зауваження 1. Напрямні вектори прямих (2) і (3) можна знайти безпосередньо, склавши матриці з коефіцієнтів при змінних в (2) і (3). Так, для прямої (2) ця матриця має вигляд

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{p}} & -\frac{1}{\sqrt{q}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Звідси знаходимо координати напрямного вектора прямої (2):

$$\left(\begin{vmatrix}-\frac{1}{\sqrt{q}} & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix};-\begin{vmatrix}\frac{1}{\sqrt{p}} & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}\frac{1}{\sqrt{p}} & -\frac{1}{\sqrt{q}}\\ 0 & 0\end{vmatrix}\right)\Leftrightarrow\left(-\frac{1}{\sqrt{q}};-\frac{1}{\sqrt{p}};0\right)\ \text{Р}$$

$$\text{Р}\left(\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}\sqrt{p}};\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}\sqrt{q}};0\right)\ \text{Р}\left(\sqrt{p};\sqrt{q};0\right).$$

Аналогічно, для прямої (3).

З теореми (1) випливає, що через кожну точку прямої (2) проходить тільки одна твірна другого класу, а через кожну точку прямої (3) – тільки одна твірна першого класу.

Прямолінійних твірних поверхні (1) у площинах, які паралельні площині xOy, немає, оскільки ці площини перетинають поверхню (1) по гіперболі. Тому твірні поверхні (1), що перетинають прямі (2) і (3), визначають всю множину прямолінійних твірних гіперболічного параболоїда.

Зі сказаного вище випливає, що прямолінійні твірні першого класу поверхні (1) – це множина всіх твірних цієї поверхні, які перетинають пряму (3), а прямолінійні твірні другого класу поверхні (1) – це множина всіх твірних цієї поверхні, які перетинають пряму (2). Тоді поверхню гіперболічного параболоїда можна розглядати як геометричне місце точок, що належать всім прямолінійним твірним одного класу (рис. 1).

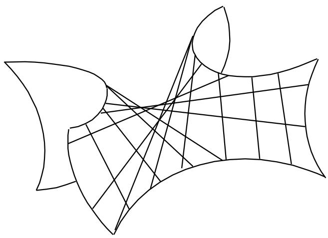


Рис. 1

Теорема 2. Дві прямолінійні твірні гіперболічного параболоїда з різних класів перетинаються.

Доведення. Нехай

$$\frac{x-x_1}{\sqrt{p}}=\frac{y-y_1}{\sqrt{q}}=\frac{z-z_1}{\dfrac{x_1}{\sqrt{p}}-\dfrac{y_1}{\sqrt{q}}}, \tag{14}$$

$$\frac{x-x_2}{\sqrt{p}}=\frac{y-y_2}{-\sqrt{q}}=\frac{z-z_2}{\dfrac{x_2}{\sqrt{p}}+\dfrac{y_2}{\sqrt{q}}} - \tag{15}$$

дві прямолінійні твірні з різних класів, які проходять відповідно через точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ і $M_2(x_2;y_2;z_2)$.

Оскільки напрямні вектори цих прямих неколінеарні, наприклад,

$$\begin{vmatrix}\sqrt{p} & \sqrt{q}\\ \sqrt{p} & -\sqrt{q}\end{vmatrix}=-2\sqrt{p}\sqrt{q}\neq 0,$$

то прямі (14) і (15) не паралельні. Доведемо, що ці прямі лежать в одній площині. Згідно з §4 гл. XVIII для цього необхідно і достатньо, щоб

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \sqrt{p} & \sqrt{q} & \dfrac{x_1}{\sqrt{p}} - \dfrac{y_1}{\sqrt{q}} \\ \sqrt{p} & -\sqrt{q} & \dfrac{x_2}{\sqrt{p}} + \dfrac{y_2}{\sqrt{q}} \end{vmatrix} = 0 .$$

Розкладемо визначник Δ за елементами першого рядка:

$$\Delta = \left(x_2 - x_1\right)\left(x_2\sqrt{\frac{q}{p}} + y_2 + x_1\sqrt{\frac{q}{p}} - y_1\right) - \left(y_2 - y_1\right)\left(x_2 + y_2\sqrt{\frac{p}{q}} - x_1 + y_1\sqrt{\frac{p}{q}}\right) +$$

$$+\left(z_2 - z_1\right)\left(-2\sqrt{pq}\right) = \left(x_2^2 - x_1^2\right)\sqrt{\frac{q}{p}} + \left(x_2 - x_1\right)\left(y_2 - y_1\right) - \left(y_2^2 - y_1^2\right)\sqrt{\frac{p}{q}} -$$

$$-\left(y_2 - y_1\right)\left(x_2 - x_1\right) - 2\sqrt{pq}\left(z_2 - z_1\right) = \sqrt{pq}\left(\frac{x_2^2 - x_1^2}{p} - \frac{y_2^2 - y_1^2}{q} - 2z_2 + 2z_1\right) =$$

$$= \sqrt{pq}\left(\frac{x_2^2}{p} - \frac{y_2^2}{q} - 2z_2 - \left(\frac{x_1^2}{p} - \frac{y_1^2}{q} - 2z_1\right)\right) = \sqrt{pq}\left(0 - 0\right) = 0.$$

Прямі (14) і (15) лежать в одній площині і непаралельні. Тому вони перетинаються.

Теорему доведено.

Теорема 3. Будь-які дві прямолінійні твірні гіперболічного параболоїда з одного класу мимобіжні.

Доведення. Нехай l_1 і l_2 – прямолінійні твірні гіперболічного параболоїда (1) одного класу. Прямі l_1 і l_2 не перетинаються, оскільки у противному разі через їх точку перетину проходило б дві твірні одного класу, що суперечить теоремі 1.

Доведемо, що прямі l_1 і l_2 не паралельні. Якщо припустити, що l_1 і l_2 паралельні, то вони визначатимуть площину α. Тоді довільна прямолінійна твірна іншого класу, перетинаючи як пряму l_1, так і пряму l_2 (див. теорему 2), буде лежати у площині α. Гіперболічний параболоїд є геометричним місцем точок, які належать всім цим твірним, тобто поверхня (1) лежить у площині α, що неможливо.

Отже, прямі l_1 і l_2 не паралельні і не перетинаються, а тому є мимобіжними.

Теорему доведено.

Як і в попередньому параграфі, причому повністю аналогічно, доводиться, що пряма, яка перетинає одночасно три які-небудь твірні одного класу, є твірною іншого класу і при своєму русі описує всю поверхню гіперболічного параболоїда.

Зауваження 2. Нагадаємо, що у випадку гіперболічного параболоїда ситуація з твірними є більш визначеною, а саме, через кожну точку однієї з твірних l_1, l_2, l_3 одного класу, наприклад, твірної l_1, проходить одна і тільки одна твірна іншого класу (теорема 1), яка перетинає дві інші твірні l_2 і l_3 (теорема 2). Зрозуміло, що на хід міркувань попереднього параграфа це ніяк не впливає.

У зв'язку з цим рекомендуємо довести самостійно таке твердження: якщо l_1, l_2, l_3 – довільні попарно мимобіжні прямі, які паралельні одній площині, то через кожну точку однієї з цих прямих проходить одна і тільки одна пряма, яка перетинає дві інші прямі.

Зауваження 3. Прямолінійні твірні гіперболічного параболоїда можна знайти аналогічно прямолінійним твірним однопорожнинного гіперболоїда. Рівняння (1) рівносильне рівнянню

$$\left(\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}\right)=2z\ . \tag{16}$$

За рівнянням (16) можна скласти дві системи рівнянь першого степеня

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{p}}-\dfrac{y}{\sqrt{q}}=2k_1 \\ k_1\left(\dfrac{x}{\sqrt{p}}+\dfrac{y}{\sqrt{q}}\right)=z \end{cases} \qquad (-\infty<k_1<\infty)\,, \tag{17}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{p}}+\dfrac{y}{\sqrt{q}}=2k_2 \\ k_2\left(\dfrac{x}{\sqrt{p}}-\dfrac{y}{\sqrt{q}}\right)=z \end{cases} \qquad (-\infty<k_2<\infty)\,. \tag{18}$$

Система (17) визначає прямолінійні твірні гіперболічного параболоїда першого класу, а система (18) – другого класу. Доведення аналогічне доведенню, яке проводилось для прямолінійних твірних однопорожнинного гіперболоїда, заданих як лінії перетину площин. Прямі (2) і (3) отримуються з системи (17) і (18) відповідно при $k_1=0$ і $k_2=0$.

Зауваження 4. Прямолінійні твірні гіперболічного параболоїда можна шукати також у вигляді (див. зауваження 1 §8) систем

$$\begin{cases} \lambda_1\left(\dfrac{x}{\sqrt{p}}+\dfrac{y}{\sqrt{q}}\right)=\mu_1 z \\ \mu_1\left(\dfrac{x}{\sqrt{p}}-\dfrac{y}{\sqrt{q}}\right)=2\lambda_1 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} \lambda_2\left(\dfrac{x}{\sqrt{p}}+\dfrac{y}{\sqrt{q}}\right)=2\mu_2 \\ \mu_2\left(\dfrac{x}{\sqrt{p}}-\dfrac{y}{\sqrt{q}}\right)=\lambda_2 z, \end{cases} \tag{19}$$

де λ_1, λ_2 і μ_1, μ_2 – деякі числа, причому в першій системі (19) $\mu_1 \neq 0$, а в другій – $\lambda_2 \neq 0$. Перша система (19) описує прямолінійні твірні першого класу, а друга – другого класу.

На закінчення відмітимо, що конструювання однопорожнинного гіперболоїда і гіперболічного параболоїда за допомогою їх прямолінійних твірних широко застосовується в техніці. У свій час В.Г. Шаховим запропоновано конструкції з металічних балок, розміщених так, як розміщуються прямолінійні твірні однопорожнинного гіперболоїда. Такі конструкції виявились легкими і міцними. Вони часто застосовуються для побудови водонапірних башт, високих антен телевізійних станцій і радіотелескопів (рис. 2).

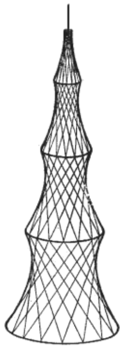


Рис. 2

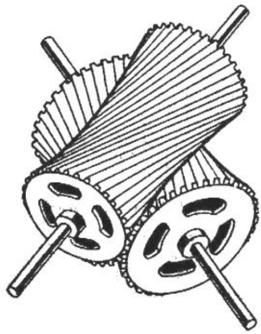


Рис. 3

У техніці широко поширений спосіб зубчастої передачі обертання навколо осей, що не перетинаються. Якщо осі обертання є мимобіжними прямими, то відповідна конструкція базується на ковзанні одного однопорожнинного гіперболоїда обертання по іншому (рис. 3).