

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.01/152.00.1/М/ОК8-2022
	Екземпляр № 1	Арк 59/ 1

ЗАТВЕРДЖЕНО

Науково-методичною радою
Державного університету
«Житомирська політехніка»

протокол від _____ 20__ р. №__

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ з навчальної дисципліни «СИСТЕМИ ЦИФРОВОЇ ОБРОБКИ СИГНАЛІВ З ВИМІРЮВАЛЬНОЮ ІНФОРМАЦІЄЮ»

спеціальності 152 «Метрологія та інформаційно-вимірювальна техніка»
освітньо-професійна програма «Комп'ютеризовані інформаційно-вимірювальні
системи»

факультет комп'ютерно-інтегрованих технологій, мехатроніки і робототехніки

кафедра метрології та інформаційно-вимірювальної техніки

Схвалено на засіданні кафедри
метрології та інформаційно-
вимірювальної техніки
31 серпня 2022 р., протокол № 8

Завідувач кафедри
_____Юрій ПОДЧАШИНСЬКИЙ

Розробник: к.т.н., доц. кафедри метрології
та інформаційно-вимірювальної техніки ЧЕПЮК Ларіна

Житомир
2022 р

ЗМІСТ

ТЕМА 1.1. Вступ в дисципліну. Засоби цифрової обробки сигналів. Принципи розробки та реалізації систем цифрової обробки сигналів.

ЛЕКЦІЯ 1. Вступ в дисципліну.

1. Вступ в дисципліну. Задачі дисципліни.
2. Використання цифрової обробки в сучасній техніці.
- 3.

ЛЕКЦІЯ 2. Засоби цифрової обробки сигналів. Принципи розробки та реалізації систем цифрової обробки сигналів:

1. ЦАП/АЦП.
2. Типи архітектур ЦАП/АЦП.
3. Принципи розробки та реалізації систем цифрової обробки сигналів.

ТЕМА 1.2. Дискретні сигнали. Принципи формування цифрового сигналу та відтворення аналогового сигналу.

ЛЕКЦІЯ 3. Особливості формування цифрового сигналу. Дискретні сигнали.

1. Особливості ЦАП/АЦП. Формування цифрового сигналу. Види представлення цифрових даних.
2. Дискретні сигнали як послідовності. Спектральне зображення дискретних сигналів. Дискретне перетворення Фур'є (ДПФ).

ЛЕКЦІЯ 4. Принципи формування цифрового сигналу та відтворення аналогового сигналу.

1. Теорема відліків (Котельникова). Дискретизація сигналу з фінітним спектром. Дискретизація сигналу з нескінченним спектром.
2. Критерій Найквіста. Накладання відображень спектру сигналу. Фільтр захисту від накладання спектрів (антиалайзінговий).
3. Дискретизація/відтворення вузько смугових сигналів
4. Надлишкова дискретизація і інтерполяція. Субдискретизація и децимація. Відтворення радіосигналу за відліками відеосигналу (сигналу ПЧ)

ТЕМА 1.3. Дискретні системи та цифрові фільтри.

ЛЕКЦІЯ 5. Дискретні системи.

1. Дискретні лінійні системи (ЛДС) з постійними параметрами.
2. Цифровий фільтр (ЦФ) як дискретна лінійна система.
3. Різницеві рівняння дискретних лінійних систем.
4. Нерекурсивні (НЦФ) та рекурсивні (РЦФ) цифрові фільтри

ЛЕКЦІЯ 6. Z-перетворення

1. Перетворення Лапласа (s-перетворення).
2. Z-перетворення.
3. Перехід від перетворення Лапласа до Z-перетворення.
4. Пряме Z-перетворення. Властивості Z-перетворення.
5. Зворотне Z-перетворення.

ЛЕКЦІЯ 7. Цифрові фільтри.

1. Розв'язок різницевих рівнянь. Передавальні функції ЛДС/ЦФ.
2. Структурні схеми фільтрів. З'єднання фільтрів. Схеми НЦФ. Схеми РЦФ.
3. Часові характеристики ЦФ. Імпульсна характеристика. Зв'язок імпульсної характеристики з передавальною функцією.

ЛЕКЦІЯ 8. СІХ, НІХ фільтри.

1. СІХ, НІХ фільтри.
2. Критерій стійкості.
3. Критерій реалізуємості.
4. Частотні характеристики ЦФ.
5. Вимоги до АЧХ та ФЧХ ЦФ.

ТЕМА 1.1. Вступ в дисципліну. Засоби цифрової обробки сигналів . Принципи розробки та реалізації систем цифрової обробки сигналів.

§1.1 ЛЕКЦІЯ 1. Вступ в дисципліну.

1. Вступ в дисципліну. Задачі дисципліни.
2. Використання цифрової обробки в сучасній техніці. Приклади реалізації цифрових систем.
3. Узагальнена гіпотетична (на основі GSM, xCDMA, OFDMA тощо) схема передавача и приймача сучасної системи передачі даних.

Література: [1 §1.1; 2 §1; 3 §1].

1. Вступ в дисципліну. Задачі дисципліни

Цифрова обробка сигналу (ЦОС) – предмет, що вивчає процеси аналого-цифрового (АЦП) та цифрово-аналогового перетворення (ЦАП) сигналів, а також обробки інформації про характеристики аналогового сигналу в цифровій формі (цифрового сигналу).

Цифровий сигнал – будь-яка пронумерована послідовність чисел (цифрових кодів), наприклад, 3, 7, 11, 9, ..., в тому числі значень оцифрованого аналогового сигналу, що є функцією деякого еквідистантно дискретного аргументу (наприклад, порядкового номера, відстані або часу), і відображає лише інформацію про певний процес чи його характеристику.

Задача дисципліни – вивчення процесів та принципів виділення та перетворення інформації про характеристики реальних сигналів, а також відтворення даних сигналів за наявності інформації про них у цифровій формі.

Методи ЦОС - математичні співвідношення або алгоритми, відповідно до яких виконуються обчислювальні операції над цифровими сигналами. Алгоритми ЦОС , на відміну від інших обчислень на ЕОМ, виконуються в реальному масштабі часу. На відміну від методів аналогової обробки математичні співвідношення в ЦОС можуть реалізувати будь-яку функцію не прив'язуючись до природи пристрою обробки і його пропускнуої характеристики.

Засоби ЦОС – цифрові логічні схеми, програмовані логічні інтегральні схеми (ПЛІС), мікропроцесори, мікроконтролери, цифрові сигнальні процесори. Їх сукупність – процесор ЦОС.

Задачі, що вирішує ЦОС:

- Виділення інформації про сигнал (амплітуда, фаза, частота, спектральні складові, часові співвідношення)
- Перетворення формату сигналу (передача даних з поділом каналів FDMA, TDMA, CDMA)
- Стиснення даних (модеми, мобільні телефони, телебачення HDTV, MPEG)
- Формування сигналів зворотного зв'язку (управління промисловими процесами)
- Виділення сигналу з шуму (фільтрація, автокореляція, згортка)
- Виділення та збереження сигналу в цифровому вигляді для наступної обробки

2. Використання цифрової обробки в сучасній техніці.

Приклади реалізації цифрових систем.

Взагалі, використання цифрової обробки сигналів в різних галузях людського господарювання можна звести до наступної схеми (рис. 1.1)

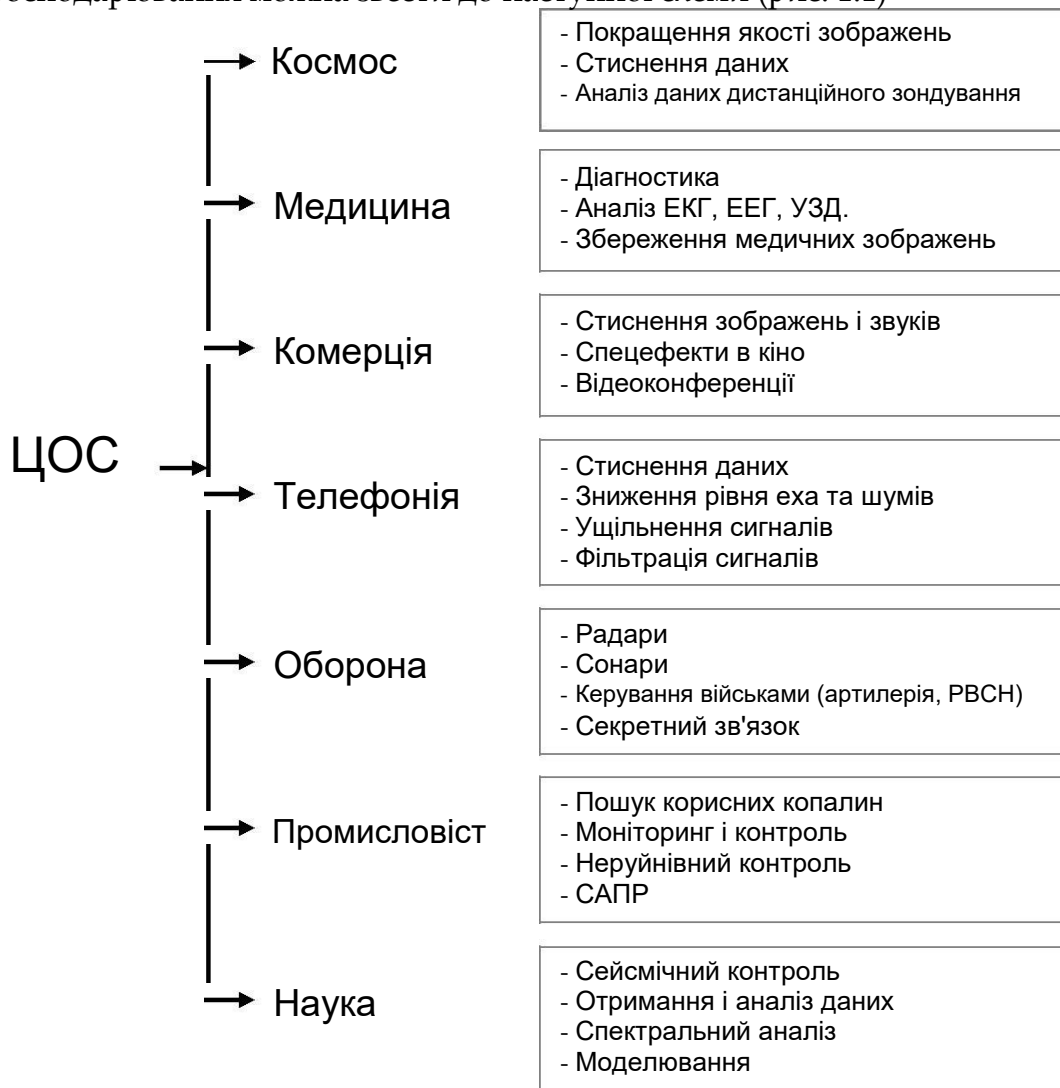


Рисунок 1.1. Галузі використання ЦОС

Найбільш поширеними споживацькими напрямками ЦОС є такі:

1. Обробка зображень:

- Розпізнавання образів;
- Машинний зір;
- Покращення якості зображень;
- Супутникові мапи, картографія;
- Анімація.

2. Інструментальні засоби, контроль:

- Контроль параметрів і характеристик процесу
- Спектральний аналіз
- Фільтрація від шуму
- Стиснення інформації

3. Мова/ Аудіо:

- Розпізнавання мови;
- Синтез мови;
- Озвучування текстів;
- Цифрові аудіо системи (еквалайзери)

Використання ЦОС в техніці зв'язку виходить далі за межі наявних споживацьких потреб, оскільки охоплює області техніки, що призначені передавати сигнал в просторі за допомогою радіохвиль. Виходячи з стандартизованої моделі OSI, методи ЦОС, що використовуються на кожному з її рівнів визначаються наступним чином (таблиця 1.1):

Таблиця 1.1

Модель OSI			
Тип даних	Рівень (layer)	Функції	Засоби ЦОС
Дані	7. Прикладний (application)	Доступ до мережевих служб	Перетворення даних.
	6. Представницький (presentation)	Подання та шифрування даних	Стиснення даних. Інтерфейс машина-користувач
	5. Сеансовий (session)	Управління сеансом зв'язку	Синтез і аналіз сервісної, адресної та синхронізаційної інформації
Сегменти	4. Транспортний (transport)	Забезпечення прямого зв'язку між кінцевими пунктами та надійності	необхідної при передачі даних
Пакети	3. Мережевий (network)	Визначення маршруту і логічна адресація	
Кадри	2. Канальний (data link)	Каналоутворення та фізична адресація	
Біти	1. Фізичний (physical)	Робота із середовищем передачі, сигналами та двійковими даними	Модуляція. Мультиплексування. Завадостійке кодування. Фільтрація.

Зазвичай, обробка цифрового сигналу потрібна для усунення сигналу перешкоди чи шуму, отримання спектру даних або перетворення сигналу в більш зручну форму. Зараз, ЦОС використовується в багатьох областях, де раніше застосовувалися аналогові методи, крім того, з'явилися абсолютно нові області застосування, де було складно або неможливо користуватися аналоговими пристроями (стиснення звуку та зображень, адаптивна обробка). Привабливість ЦОС обумовлена такими основними перевагами.

Переваги ЦОС:

- *Гарантована точність.* Точність визначається тільки числом задіяних бітів.
- *Досконала відтворюваність.* Можна ідентично відтворити кожен сигнал, оскільки відсутні відхилення, обумовлені стійкістю окремих складових засобів обробки і збереження сигналів. Наприклад, використовуючи методи ЦОС, цифрові записи можна копіювати або відтворювати багаторазово без погіршення якості сигналу.
- *Відсутність спотворення характеристик сигналу при обробці під дією зовнішніх факторів* (температури, вологи або старіння складових).
- *Напівпровідникові технології дозволяють підвищити надійність, зменшити розміри, знизити вартість, знизити енергоспоживання і збільшити швидкість роботи.*
- *Більша гнучкість.* Системи ЦОС можна запрограмувати і перепрограмувати на виконання різних функцій без зміни обладнання. Це, мабуть, одна з найважливіших переваг ЦОС.
- *Чудова продуктивність.* ЦОС можна використовувати для виконання функцій, які неможливі при аналоговій обробки сигналів. Наприклад, можна отримати лінійну фазову характеристику і реалізувати складні алгоритми адаптивної фільтрації.
- У деяких випадках інформація вже може бути записана у цифровому вигляді, і

обробляти її можна тільки методами ЦОС.

У ЦОС є і свої недоліки. Однак завдяки новим технологіям значення цих недоліків постійно зменшується.

Недоліки ЦОС:

- *Швидкодія і затратність.* Проекти ЦОС можуть бути дорогими, особливо при великій ширині смуги сигналу, що оброблюється, через високу ціну сучасних і швидкісних АЦП/ЦАП та ЦСП. Необхідність високої швидкодії ЦСП викликана обробкою сигналу в реальному часі, тобто всі операції обробки повинні бути виконані за час інтервалу дискретизації.
- *Довготривалість і затратність розробки систем ЦОС,* що зв'язана з збільшенням кількості етапів розробки і фахівців, що їх виконуватимуть у порівнянні з системами аналогової обробки.
- *Проблеми скінченної розрядності та частотної смуги.* Сучасні АЦП/ЦАП, що володіють гарною роздільною здатністю і широкою смугою пропускання дорогі. З економічної точки зору доцільніше використовувати дані пристрої з меншими показниками, що погіршує якість обробки і перекладає частину функцій на вхідні/вихідні каскади ЦАП/АЦП, що здійснюють аналогову обробку.
- *Проблеми динамічного діапазону.* Оскільки характеристика перетворення АЦП/ЦАП дискретна, то деякі зміни слабкого аналогового сигналу не будуть сприйняті і поглинуться шумом квантування, тому амплітуду сигналу треба узгоджувати спеціальними вхідними/вихідними аналоговими каскадами АЦП/ЦАП, що складаються з підсилювачів та трансформаторів хвильового опору.

У наш час інженер стоїть перед вибором належної комбінації аналогових та цифрових методів для вирішення задачі обробки сигналів. Неможливо обробити фізичні аналогові сигнали, використовуючи тільки цифрові методи, так як всі датчики (мікрофони, термopари, тензорезистори, п'єзоелектричні кристали, головки накопичувача на магнітних дисках і т.д.) є аналоговими пристроями. Тому деякі види сигналів вимагають наявності ланцюгів узгодження для подальшої обробки сигналів аналоговим або цифровим методом.

В дійсності, ланцюги узгодження сигналу - це аналогові схеми, що виконують такі функції, як посилення, накопичення (у вимірювальних і попередніх (буферних) підсилювачах), виявлення сигналу на фоні шуму (високоточними підсилювачами синфазного сигналу, вирівнювача і лінійними приймачами), динамічне стиснення діапазону (логарифмічними підсилювачами, логарифмічними ЦАП і підсилювачами з програмованим коефіцієнтом посилення) і фільтрація (пасивна та активна).

Кілька методів реалізації процесу обробки сигналів показано на рис. 1.2. Перша схема відображає чисто аналоговий підхід. Інші три схеми відображають реалізацію ЦОС. Великий вплив на обсяг і якість реалізації ЦОС завдає місцеположення АЦП в тракці обробки сигналу. Друга схема відображає реалізацію ЦОС з ланками попереднього узгодження. В схемах три та чотири АЦП переміщений ближче до датчика, тому велика частина обробки аналогового сигналу тепер проводиться за допомогою АЦП, що вимагає збільшення його можливостей. Збільшення можливостей АЦП може виражатися у збільшенні частоти дискретизації, розширенні динамічного діапазону, підвищенні роздільної здатності, відсіканні вхідного шуму, використанні вхідної фільтрації і програмованих підсилювачів (PGA), наявності джерел опорної напруги на кристалі і т.д. Всі згадані доповнення підвищують функціональний рівень і спрощують систему. При наявності сучасних технологій виробництва ЦАП і АЦП з високими частотами дискретизації і роздільними здатностями істотний прогрес досягнутий в інтеграції все більшого числа ланцюгів безпосередньо в АЦП / ЦАП. У сфері вимірювань, наприклад,

компанією Analog Devices випущено 24-бітові АЦП з вбудованими програмованими підсилювачами (PGA), які дозволяють оцифровувати повномасштабні мостові сигнали 10 mV безпосередньо, без попереднього узгодження (наприклад, серія AD773x). Щоб керувати голосовими та звуковими сигналами є комплексні пристрої кодування-декодування - кодеки (Analog Front End, AFE), що відображені на схемі чотири, які мають вбудовану в чіп аналогову схему, що дає змогу вимагати мінімум вимог до зовнішніх компонентів узгодження (AD1819B і AD73322). Існують також відеокодеки (AFE) для таких завдань, як обробка зображення за допомогою ПЗЗ (CCD), та інші (наприклад, серії AD9814, AD9816, і AD984X, все продукція Analog Devices).

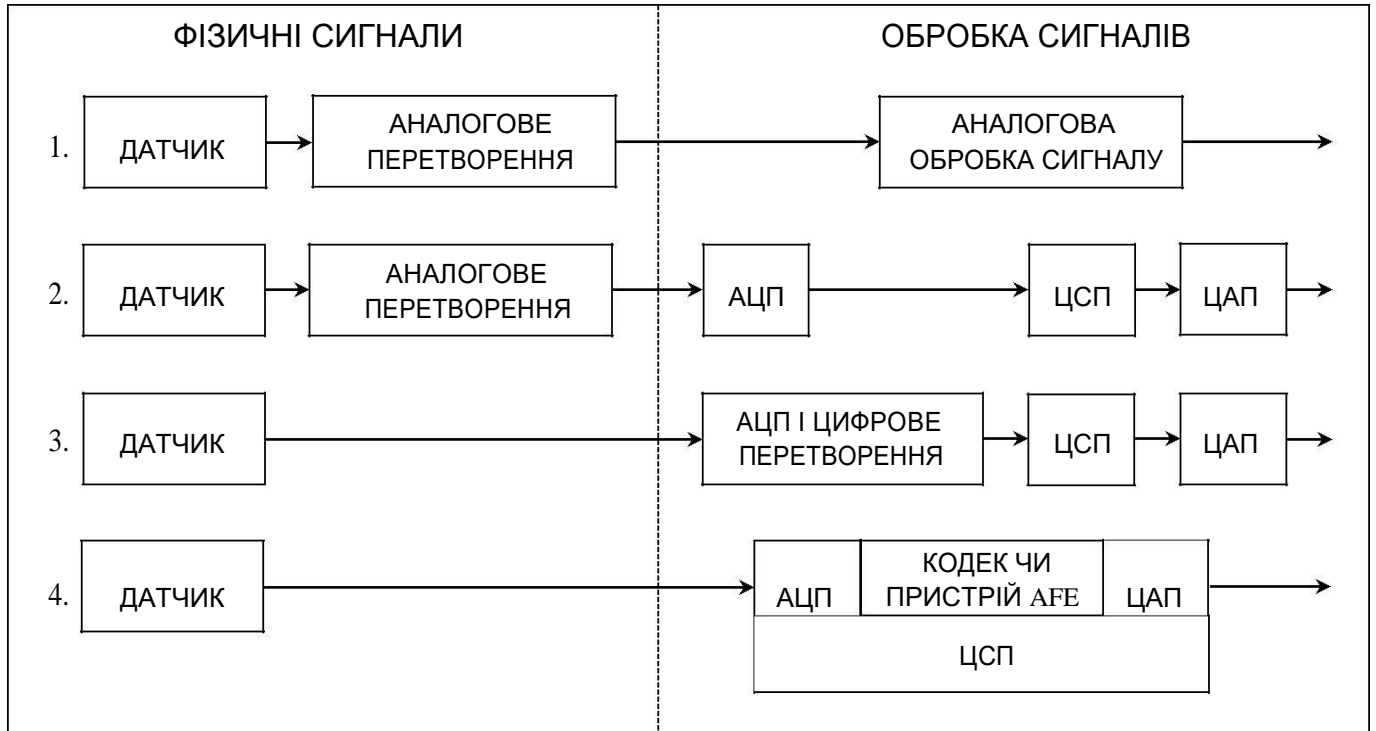


Рисунок 1.2. Схеми обробки аналогових та цифрових сигналів

В якості практичного прикладу використання ЦОС порівняємо аналоговий і цифровий фільтри низької частоти (ФНЧ), кожен з частотою зрізу 1 кГц, що мають однакові габарити в реалізації. Цифровий фільтр реалізований у вигляді типової дискретної системи, показаної на рис. 1.3.

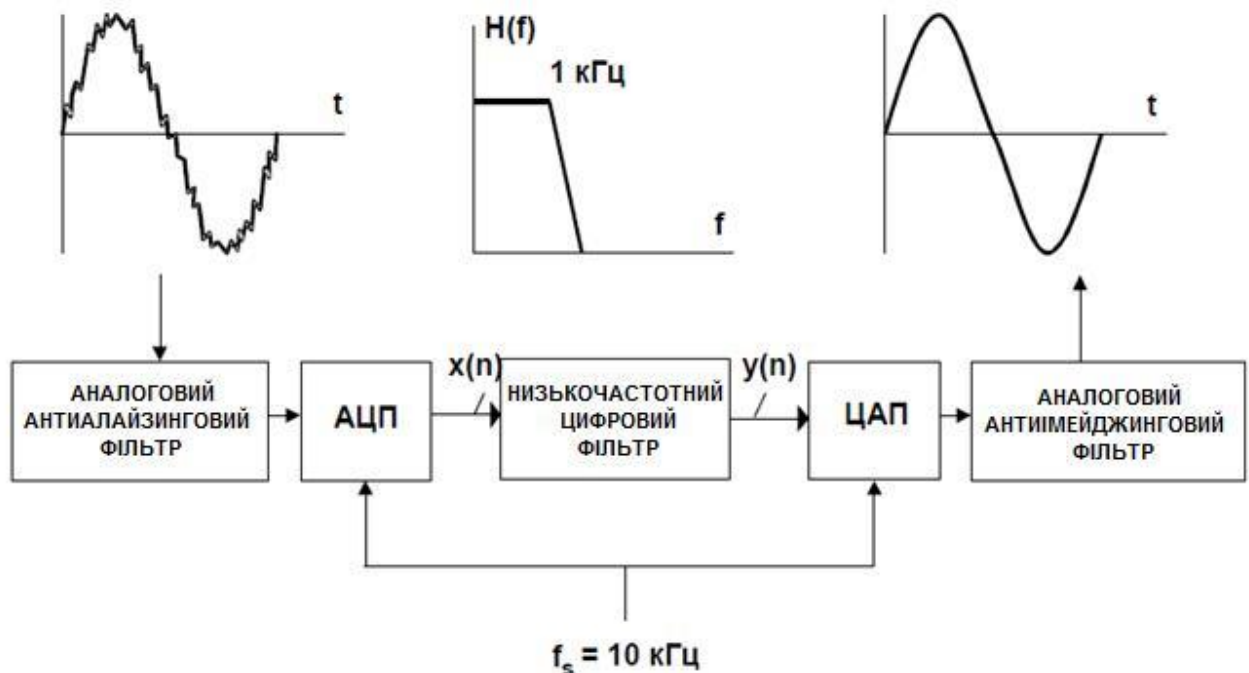


Рисунок 1.3. Схема типової дискретної системи

При побудові системи прийнято кілька неявних припущень. По-перше, щоб точно обробити сигнал, приймається, що тракт АЦП / ЦАП володіє достатніми значеннями частоти дискретизації, роздільної здатності та динамічного діапазону. По-друге, для того, щоб закінчити всі свої обчислення в межах інтервалу дискретизації ($1/f$), пристрій ЦОС повинен мати достатню швидкодію. По-третє, на вході АЦП і виході ЦАП зберігається потреба в аналогових фільтрах низької частоти (anti-aliasing filter і anti-imaging filter), хоча вимоги до їх продуктивності невеликі.

Аналогове перетворення реалізується фільтром Чебишева першого роду шостого порядку (характеризується наявністю пульсацій коефіцієнта передачі в смузі пропускання і відсутністю пульсацій поза смугою пропускання). Його характеристики представлені на рис. 1.4.

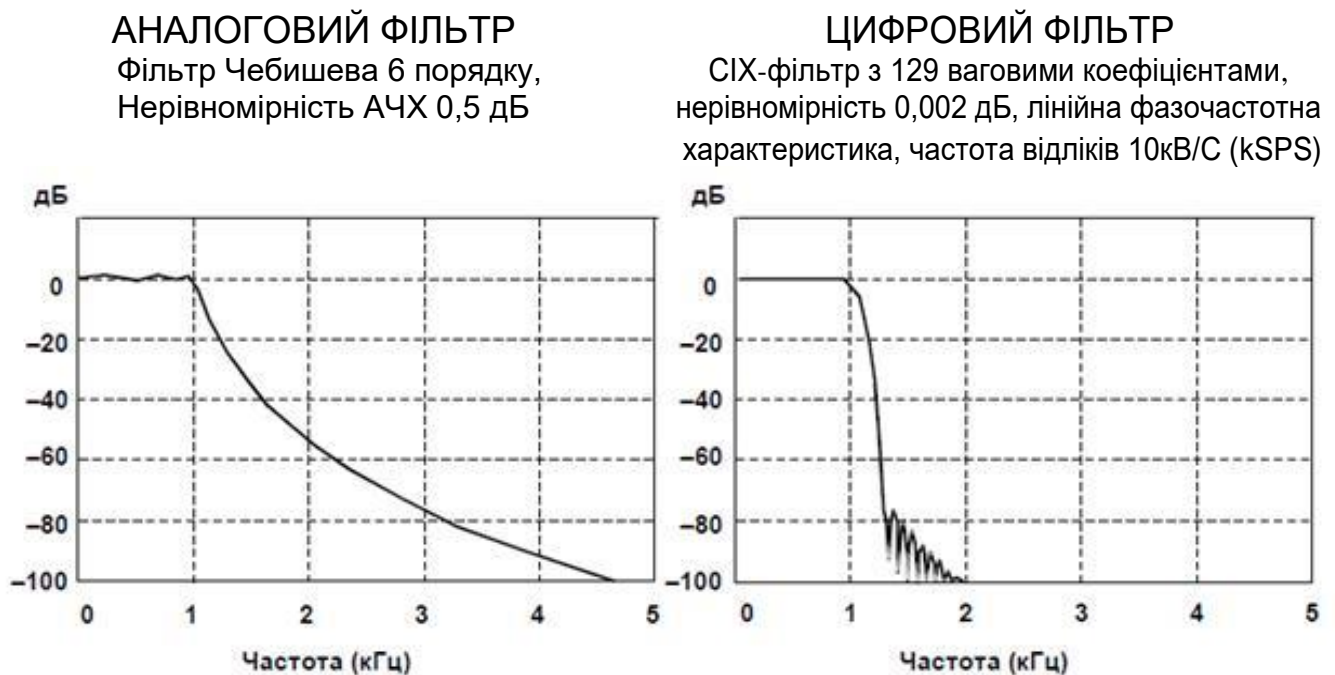


Рисунок 1.4. Порівняння амплітудно-частотних характеристик аналогового та цифрового фільтрів

Представлений на рис. 1.3 цифровий СІХ-фільтр з 129 ваговими коефіцієнтами має нерівномірність характеристики всього 0,002 дБ в смузі пропускання, лінійну фазову характеристику і набагато більш крутий спад. На практиці такі характеристики неможливо реалізувати з використанням одних тільки аналогових методів. Інша очевидна перевага схеми полягає в тому, що цифровий фільтр не вимагає чіткого підбору компонентів і не чутливий до дрейфу частоти, так як вона стабілізована на кристалі. Фільтр з 129 коефіцієнтами вимагає 129 операцій множення з накопиченням (МАС) для обчислення кожного вихідного відліку. Ця обробка повинна бути закінчена в межах інтервалу дискретизації $1/f$, щоб забезпечити роботу в реальному масштабі часу. У цьому прикладі частота дискретизації дорівнює 10 кГц, тому для обробки достатньо 100 мкс. Тоді такий фільтр вимагає швидкодії більше $129/100$ мкс = 1,3 мільйона операцій в секунду (MIPS). Існуючі ЦСП мають набагато більшу швидкодію, тобто така реалізація не обмежується ніяким фактором.

§1.2 ЛЕКЦІЯ 2. Засоби цифрової обробки сигналів. Принципи розробки та реалізації систем цифрової обробки сигналів.

1. ЦАП/АЦП.
2. Типи архітектур ЦАП/АЦП.
3. Принципи розробки та реалізації систем цифрової обробки сигналів.

Література: [1 §1.2; 3 §3-4,7; 4 §2,9; 5 §1; 6 §15-17; 7 §10, 12].

1. ЦАП/АЦП. Типи архітектур ЦАП/АЦП

АНАЛОГОВО-ЦИФРОВІ ПЕРЕТВОРЮВАЧІ

Аналогово-цифровими перетворювачами (АЦП) є пристрої, що виділяють інформацію про огинаючу реального аналогового сигналу і перетворюють її у форму цифрового сигналу з заданими інтервалом дискретизації і точністю квантування.

Найбільш популярні АЦП базуються на п'яти основних архітектурах: АЦП послідовного наближення, сигма-дельта АЦП, АЦП паралельної обробки (flash), АЦП конвеєрної обробки (pipelined) і АЦП послідовного рахунку (bit-per-stage).

Відношення роздільної здатності до швидкодії сучасних АЦП можна відобразити на наступному рисунку (рис. 2.1)

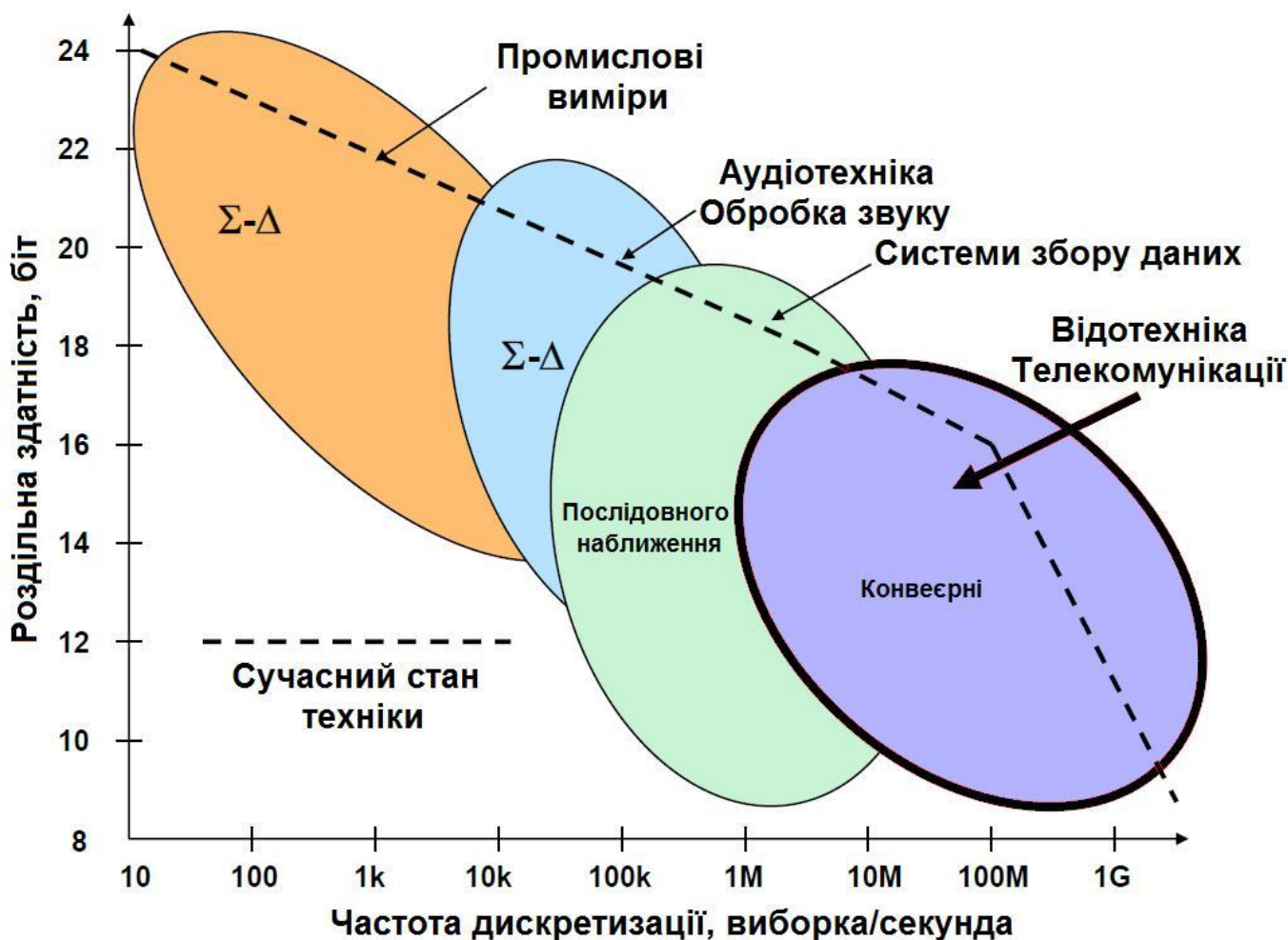


Рисунок 2.1. Відношення роздільної здатності до швидкодії сучасних АЦП

Параметрами АЦП є:

- частота дискретизації f_d , виборок/секунда - визначає смугу пропускання сигналу, що обробляється $f_d = 0,5\Delta f$;
- роздільна здатність N , біт - визначає точність аналізу і крок квантування огинаючої реального сигналу $\Delta U = U/2^N$, де U - динамічний діапазон АЦП;
- напруга живлення $U_{ж}$, В, для стандартної логіки +5, +3,3 В
- динамічний діапазон U , В, повністю рівний амплітуді живлення проте відраховується біполярно від опорної напруги $U_{оп}$, що рівна половині напруги живлення, для +5В - $\pm 2,5$ В; існують АЦП з динамічним діапазоном ± 1 В не залежно від $U_{ж}$.
- опорна напруга $U_{оп}$, В - напруга відносно якої визначається амплітуда біполярного сигналу, зазвичай у АЦП з диференціальним входом.
- Потужність споживання P , Вт.

Статичними характеристиками АЦП є:

- Нелінійність характеристики квантування, визначає похибку квантування;
- Фазовий шум дискретизатора, визначає похибку дискретизації.
- Шум квантування $= \Delta U / \sqrt{12}$, визначає наближеність реальних значень сигналу до квантованих.

Динамічними характеристиками АЦП є:

- Спотворення гармоніками, дБ - рівень побічних гармонік сигналу, що виникають через нелінійність характеристик АЦП на частотах $|\pm K \cdot f_d \pm n \cdot f_c|$, де f_c - частота гармоніки корисного сигналу, n - порядок гармоніки, $K \in \mathbb{N}$.
- Найгірші гармоніки, дБ - побічні гармоніки з найбільшою амплітудою, зазвичай другого, третього порядку.
- Загальні спотворення гармоніками (THD), дБ - відношення суми потужностей всіх

побічних гармонік P_n ($n = 2 \dots 5$) до потужності корисного сигналу P_1 $THD = \frac{\sum_{n=2}^5 P_n}{P_1}$.

- Загальні спотворення гармоніками і шум (THD + N), дБ - відношення суми потужностей всіх побічних гармонік P_n ($n = 2 \dots 5$) та потужності шуму $P_{ш}$ до

потужності корисного сигналу P_1 $THD = \frac{\sum_{n=2}^5 P_n + P_{ш}}{P_1}$. Еквівалентно SINAD.

- Відношення сигнал-шум і спотворення (SINAD, або $S/(N + D)$), дБ - відношення потужності корисного сигналу до суми потужностей всіх побічних гармонік P_n та потужності шуму в смузі корисного сигналу.
- Ефективна кількість розрядів (ENOB), біт - кількість біт, що представляють необхідну роздільну здатність для виділення точної інформації про огинаючу сигналу під впливом нелінійних спотворень і шуму. $ENOB = (SINAD - 1,76 \text{ дБ}) / 6,02 \text{ дБ}$
- Відношення сигнал-шум (SNR), дБ - відношення потужності сигналу до потужності шуму квантування в смузі корисного сигналу АЦП без нелінійних спотворень. $SNR = 6,02N + 1,76 \text{ дБ} + 10 \lg(f_d / 2\Delta f)$.
- Аналогова смуга пропускання, Гц - смуга поза якою втрати потужності сигналу при обробці в АЦП складають більше 3 дБ.
- Динамічний діапазон, вільний від гармонік (SFDR), дБ - відношення потужності корисного сигналу до потужності найгіршої гармоніки в основній смузі частот (першій зоні Найквіста).
- двотональні інтермодуляційні спотворення, дБ - рівень побічних гармонік при двотональному корисному сигналі
- багатотональні Інтермодуляційні спотворення, дБ - рівень побічних гармонік при багатотональному корисному сигналі.

Сигма дельта (Σ - Δ) АЦП - АЦП, що знімає інформацію про зміну амплітуди аналогового сигналу і складається з компаратора, джерела опорної напруги, комутатора, інтегратора і аналогового суматора та вихідного цифрового фільтра низьких частот і дециматора. Схема даного однорозрядного АЦП зображена на рис. 2.2.

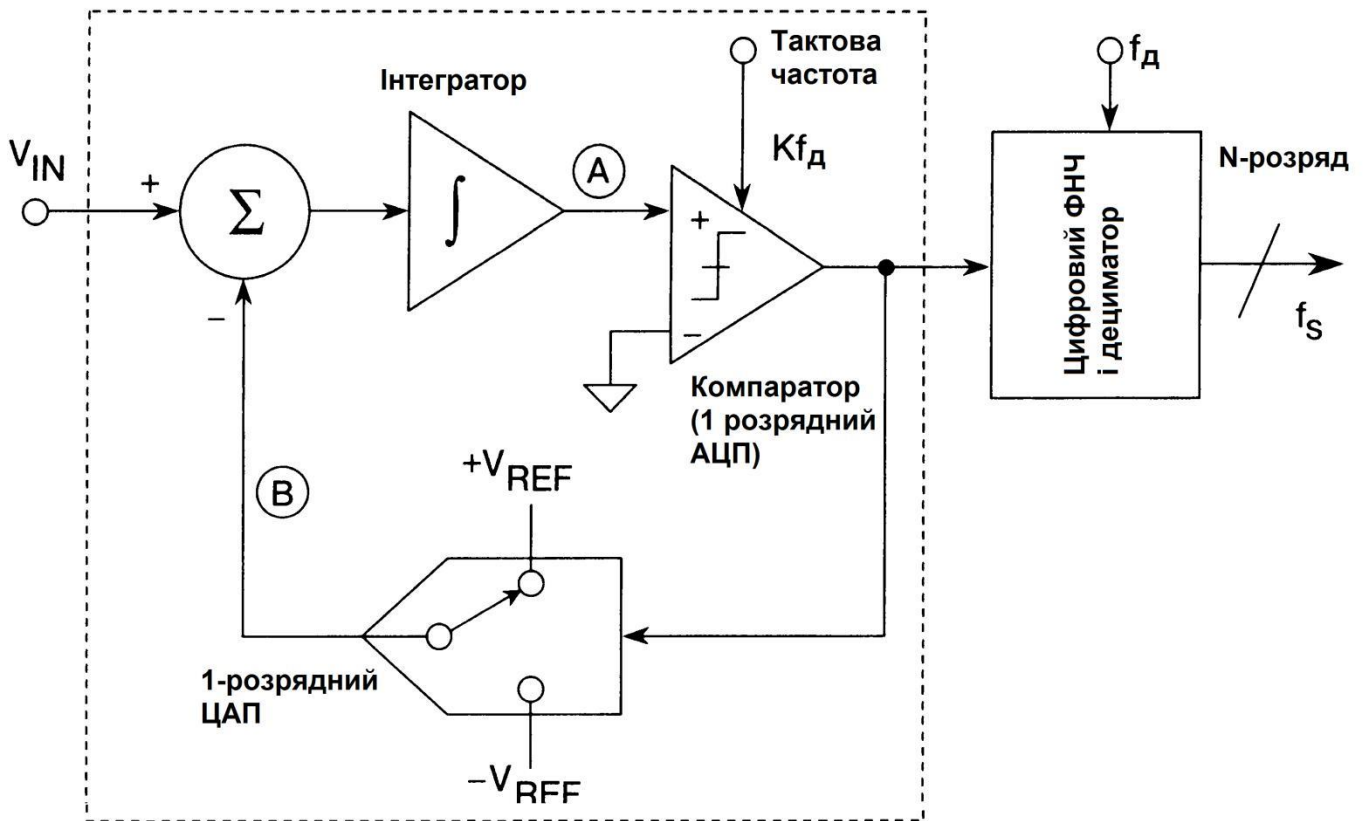


Рисунок 2.2. Схема однорозрядного сигма-дельта (Σ - Δ) АЦП

Для представлення Σ - АЦП більшої розрядності в схемі на рис. 2.2 необхідно компаратор та 1-розрядний ЦАП замінити на багаторозрядні АЦП та ЦАП відповідно.

Даний АЦП працює в режимі надлишкової дискретизації. У цьому режимі прості аналогові фільтри (інтегратор) Σ -модулятора (1-розр. ЦАП) формують криву розподілу шуму квантування таким чином, що відношення сигнал/шум (SNR) в заданій смузі пропускання набагато більше, ніж в інших випадках. Завдяки використанню високоякісних цифрових фільтрів і дециматора проводиться придушення шуму за межами необхідної смуги пропускання. Надлишкова дискретизація має додатковий плюс, знижуючи вимоги до вхідного до АЦП ФНЧ. Оскільки основою АЦП є однорозрядний компаратор, то застосована методика є принципово лінійною.

Сигма дельта (Σ - Δ) АЦП має такі особливості:

- Чудова лінійність перетворення;
- Надлишкова дискретизація знижує вимоги до вхідного аналогового ФНЧ;
- Ідеальні для мікросхем зі змішаними сигналами, не вимагають підгонки параметрів;
- Не потребують пристроїв вибірки-зберігання;
- Додаткові можливості: вбудовані підсилювачі з програмованим підсиленням, аналогові фільтри, автокалібровка;
- Вбудовані програмовані цифрові фільтри;
- В даний час обмеження щодо частоти дискретизації дозволяють використовувати дані АЦП для вимірювань, в голосових та звукових додатках, але технологія смугових сигма-дельта АЦП може змінити ситуацію

Паралельні АЦП (Flash АЦП) є найшвидшим типом АЦП, які використовують велику кількість компараторів, що працюють паралельно. N-розрядний паралельний АЦП складається з 2 резисторів і 2^N-1 компараторів, розміщених, як зображено на рис. 2.3.

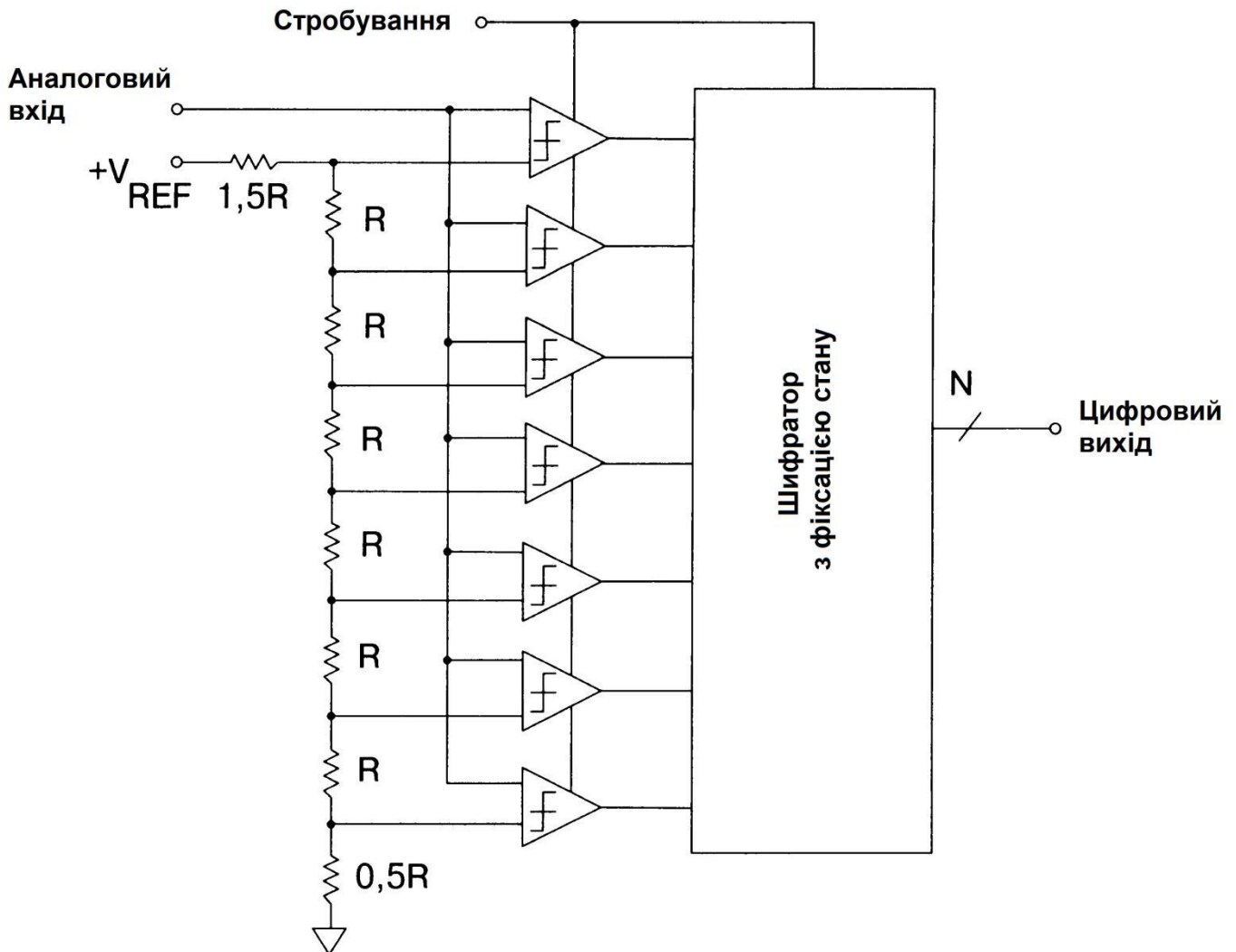


Рисунок 2.2. Схема паралельного АЦП

На кожен компаратор подається опорна напруга, значення якої для сусідніх точок відрізняється на величину, відповідну кроку квантування. При фіксованій вхідній напрузі всі компаратори, розміщені на схемі нижче деякої точки, мають вхідну напругу вище опорної напруги. На їх логічному виході присутній «1». У всіх же компараторів вище цієї точки опорна напруга більше вхідної, і їх логічний вихід встановлений в «0». Далі шифратор перетворює значення з 2^N-1 компараторів в двійковий код. Оскільки така архітектура припускає використання великого числа резисторів і компараторів, то вона обмежена в максимальній роздільній здатності і має досить високий рівень споживання енергії.

На практиці реалізуються перетворювачі до 10 розрядів, але зазвичай паралельні АЦП мають роздільну здатність, відповідну 8 розрядам. Їх максимальна частота дискретизації може досягати 1 ГГц при ширині смуги пропускання за рівнем повної потужності більше 300 МГц.

Оскільки синхронізуючий строб подається на всі компаратори одночасно, то паралельний перетворювач автоматично реалізує схему вибірки-зберігання на своєму вході. На практиці існують відмінності в затримках компараторів та інші неузгодженості по змінному струму, які викликають зменшення ефективного числа розрядів (ENOB) на високих вхідних частотах.

Конвеєрні (Subranging, Pipelined) АЦП – АЦП, що проводять високорозрядне високошвидкісне перетворення конвеєрним способом на декількох паралельних АЦП, які виступають його підсистемами. Блок-схема 8-розрядного конвеєрного АЦП на основі двох паралельних 4-розрядних АЦП показана на рис. 2.3.

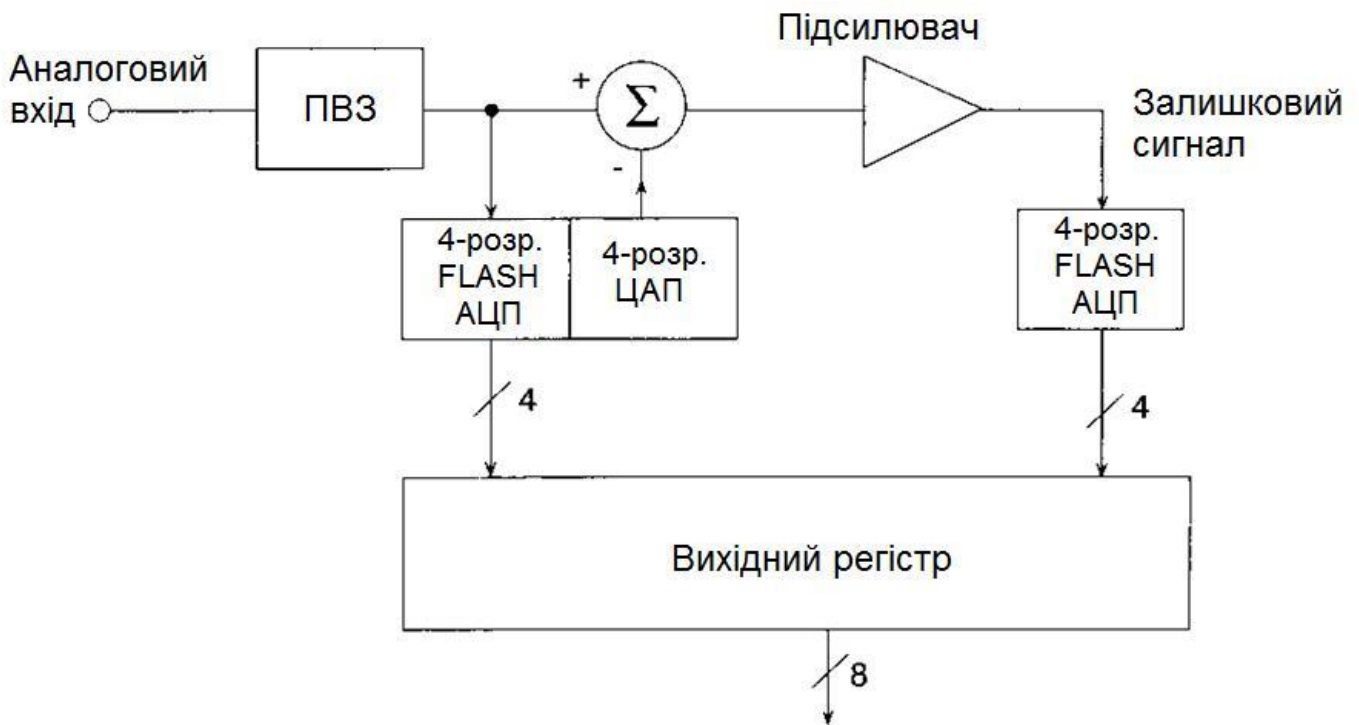


Рисунок 2.3. Блок-схема 8-розрядного конвеєрного АЦП

Процес перетворення здійснюється в два етапи. Перші чотири старших розряди (MSB) оцифровуються першим паралельним АЦП (володіє точністю вище 8 розрядів), і двійковий вихідний 4-розрядний код подається на 4-розрядний ЦАП (також володіє точністю вище 8 розрядів). Вихідний сигнал з ЦАП віднімається із збереженого в пристрої вибірки-збереження (ПВЗ) аналогового вхідного сигналу, і результат віднімання (залишок) підсилюється і подається на другий паралельний АЦП, аналогічний першому. Потім вихідні сигнали двох 4-розрядних паралельних перетворювачів об'єднуються в один 8-розрядний вихідний код. Якщо динамічний діапазон залишкового сигналу не точно заповнює динамічний діапазон другого паралельного перетворювача через погану налаштованість підсилювача, тоді, виникає не лінійність і можлива втрата коду.

Через багатоступеневість перетворення такий метод називається конвеєрною обробкою. Вихідний регістр, підключений послідовно з цифровими виходами АЦП першого і другого ступеня гарантує об'єднання їх результатів перетворення, тобто результат перетворення першого АЦП виявляються синхронізованими у часі з результатами перетворення другого АЦП. Тому конвеєрний АЦП має специфічне число тактових циклів очікування результату, або конвеєрну затримку, пов'язану з вихідними даними.

Схеми конвеєрних АЦП можуть мати і більше ступенів перетворення. Завдяки цьому покращується лінійність характеристики перетворення і точність самого АЦП. Проте з збільшенням ступенів зростає кількість тактів необхідних для отримання одного відліку дискретного сигналу, що зменшує частоту дискретизації АЦП.

АЦП послідовного наближення – АЦП з одним компаратором, в яких аналогово-цифрове перетворення з N -розрядною точністю відбувається за N тактів з послідовною зміною опорної напруги на ньому в кожен такт. Основні елементи АЦП послідовного наближення представлені на рис. 2.4.

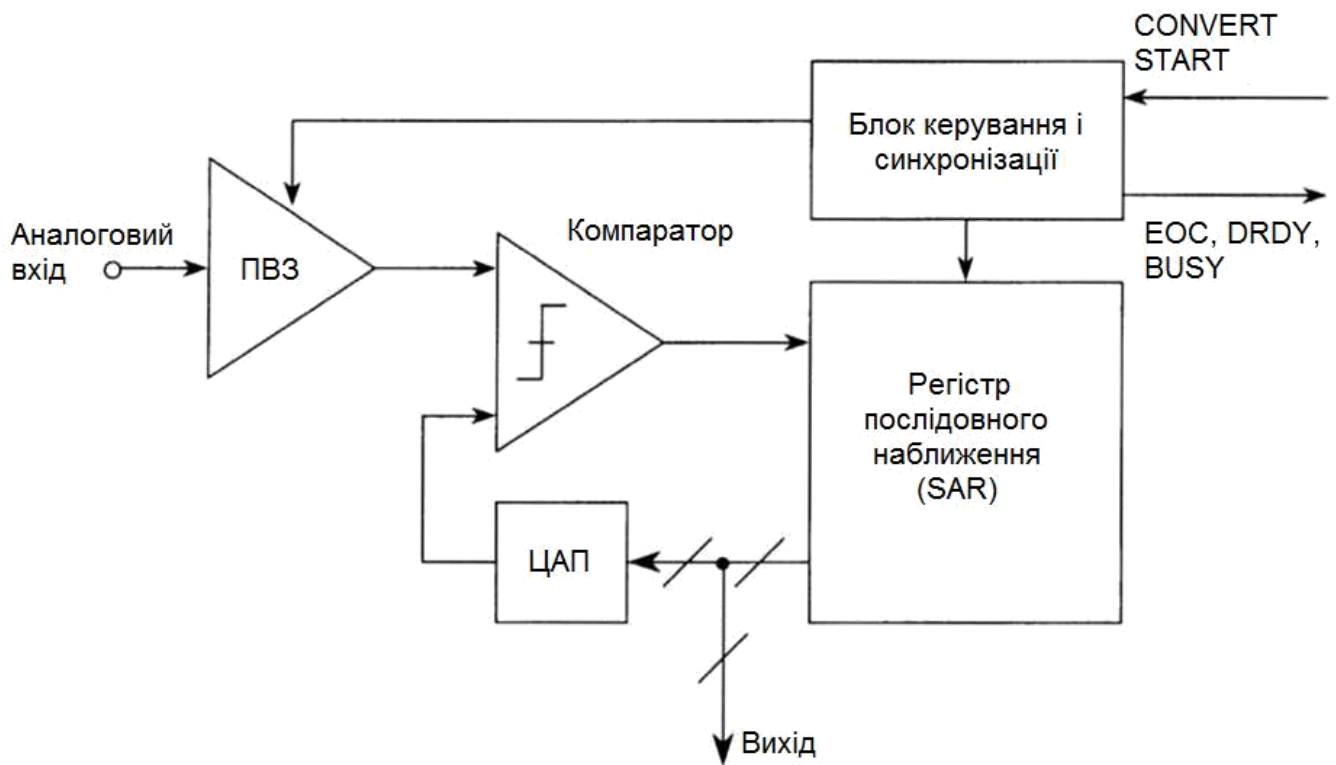


Рисунок 2.4. Блок-схема АЦП послідовного наближення

В даному АЦП перетворення виконується в командному режимі. Після подачі команди CONVERT START пристрій вибірки-зберігання (ПВЗ) встановлюється в режим зберігання, і всі розряди регістра послідовного наближення РПН (SAR) скидаються в «0», крім старшого значущого розряду (MSB), який встановлюється в «1». Вихідний сигнал РПН подається на внутрішній ЦАП. Якщо вихідний сигнал ЦАП більше, ніж аналоговий вхідний сигнал, то старший розряд РПН скидається, в іншому випадку він залишається встановленим. Потім наступний старший значущий розряд встановлюється в «1». Якщо сигнал на виході ЦАП більше, ніж аналоговий вхідний сигнал, то старший розряд РПН скидається, в іншому випадку біт залишається встановленим. Описаний процес по черзі повторюється для кожного розряду. Коли всі розряди, у відповідності з вхідним сигналом, будуть встановлені в «0» або «1», вміст РПН прийде у відповідність із значенням аналогового вхідного сигналу, і перетворення завершиться. Закінчення перетворення визначається сигналами end-of-convert (EOC), data-ready (DRDY) або BUSY (фактично, відсутність сигналу BUSY визначає закінчення перетворення).

Загальна точність і лінійність АЦП послідовного наближення визначається насамперед внутрішнім ЦАП.

ЦИФРО-АНАЛОГОВІ ПЕРЕТВОРЮВАЧІ

Цифро-аналоговими перетворювачами (ЦАП) є пристрої, що синтезують (відновлюють) реальний аналоговий сигнал відповідно до інформації про його амплітуду з заданою точністю та частотою оновлення, що надходить у вигляді цифрового коду. Розрядність та частота оновлення інформації про огинаючу сигналу ЦАП мають таку ж функціональну вагу як розрядність та частота дискретизації АЦП.

Всі параметри і характеристики АЦП притаманні і ЦАП, тільки стосуються процесів синтезу (відтворення) сигналів. Однак процеси синтезу в ЦАП вимагають дотримання додаткових вимог за певними параметрами похибки в статичному і динамічному режимі функціонування.

Абсолютна точність ЦАП в статичному режимі визначається через три основні типи похибок: *похибка зміщення*, *похибка підсилення (коефіцієнта передачі)*, *біполярна похибка нуля* і *інтегральна та диференціальна нелінійності*. Графічно вплив перших трьох похибок на характеристику перетворення відображені на рис. 2.5.

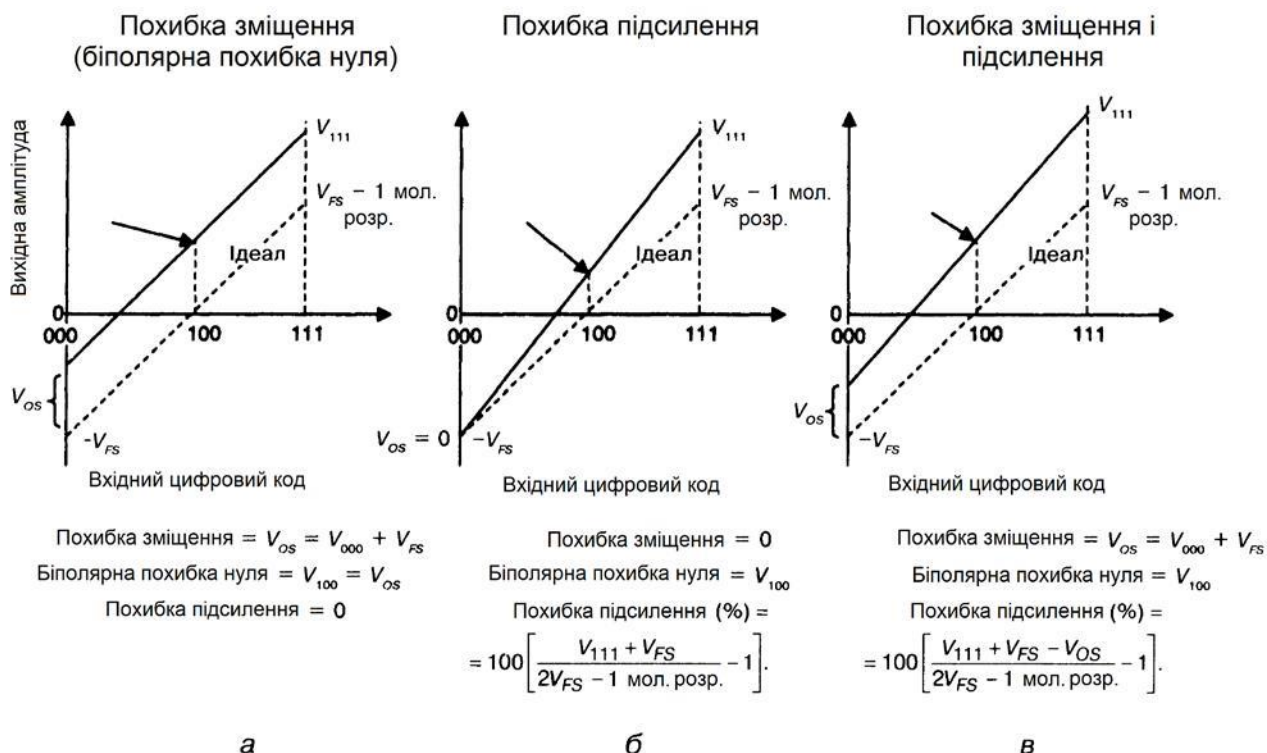


Рисунок 2.5. Вплив похибок ЦАП в статичному режимі функціонування

Похибкою зміщення називається розлагодженість ЦАП, що призводить до рівномірного (лінійного) зміщення всіх точок його характеристики перетворення вздовж осі вихідних амплітуд відносно ідеального випадку.

Біполярна похибка нуля еквівалентна похибці зміщення в біполярних АЦП.

Похибкою підсилення називається розлагодженість ЦАП, що призводить до нерівномірно змінного (постійно зростаючого/спадаючого) зміщення всіх точок його характеристики перетворення вздовж осі вихідних амплітуд з ростом їх значень відносно ідеального випадку.

Останніми двома узагальненими показниками є:

Інтегральна нелінійність - це максимальне відхилення в будь-якій точці характеристики перетворення рівня вихідної напруги від його ідеального значення, що визначається прямою лінією, проведеною через дійсні значення нуля і повної шкали ЦАП.

Диференціальна нелінійність - це максимальне відхилення кроку між сусідніми значеннями вхідного коду в реальному вихідному аналоговому сигналі від ідеальної величини кроку в +1 молодший розряд (LSB), отриманого шляхом калібрування по посиленню окремо взятого ЦАП.

Абсолютна точність ЦАП в динамічному режимі додатково визначається:

Час встановлення вихідної амплітуди ЦАП - час за який стабілізується рівень вихідного сигналу в межах кроку напруги що задається молодшим бітом після перехідного процесу, спричиненого зміною кодової комбінації на вході ЦАП і виміряний по відношенню до точки 50% від строба даних ЦАП (якщо він містить паралельний регістр, дані з якого подаються на ключі) або від часу зміни вхідних даних на ключах (якщо внутрішній регістр відсутній).

Площа імпульсного викиду – інтеграл по різниці амплітуд реального сигналу і визначеного кодовою комбінацією на виході ЦАП за час встановлення його вихідної амплітуди.

Основними типами ЦАП за архітектурою є: повнокодуючі (рядкові) ЦАП з виходом напруги та виходом струму, сегментні ЦАП.

Повнокодуючий (рядковий) ЦАП з виходом напруги – ЦАП, що базується на дільнику напруги, який складається з 2^N рівних за величиною послідовно з'єднаних резисторів та 2^N ключових елементів під'єднаних в місцях з'єднання резисторів з одної сторони та спільного виводу вихідного сигналу з іншої. Вихідний сигнал знімається з виводу замиканням одного з 2^N комутаторів після декодування N-розрядних даних. Схема даного ЦАП зображена на рис.2.6.

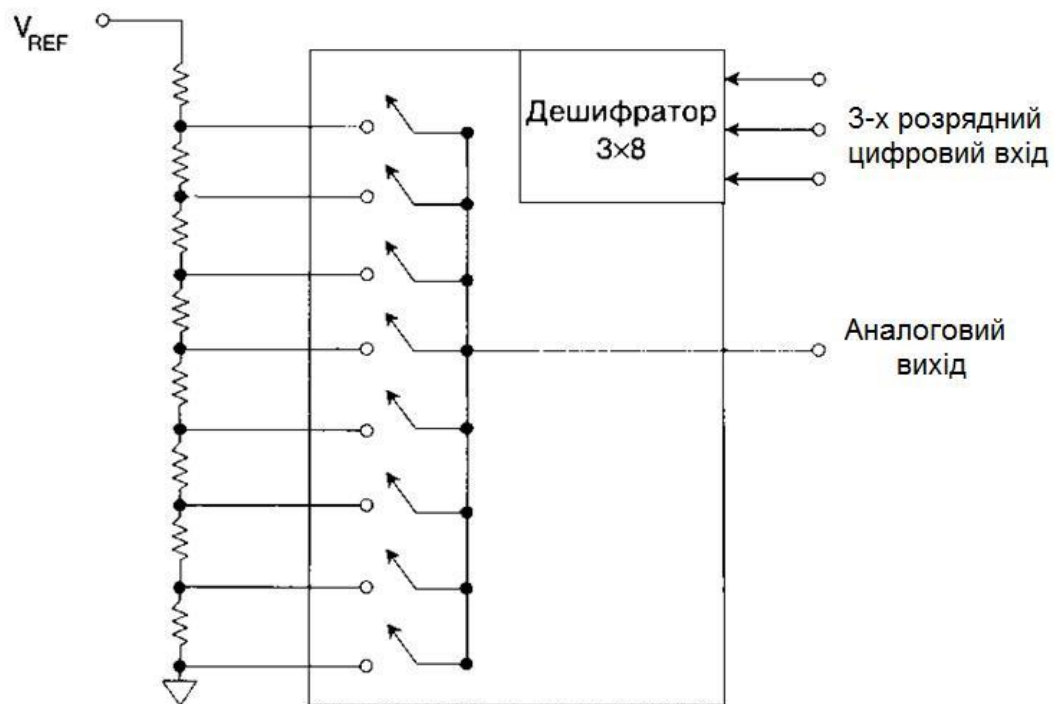


Рисунок 2.6. Схема повнокодуючого (рядкового) ЦАП з виходом напруги

Ця архітектура забезпечує монотонний сигнал і є лінійною, якщо всі резистори рівні за значенням, але може бути навмисно зроблена нелінійною, якщо потрібно нелінійний ЦАП. Так як в момент перемикавання працюють тільки два ключові елементи, то ця архітектура має низький рівень помилкового сигналу. Її головним недоліком є велика кількість резисторів, необхідних для забезпечення високої роздільної здатності.

Повнокодуючий (рядковий) ЦАП з виходом струму – ЦАП, що базується генераторі струму що складається з 2^N рівних за величиною паралельно з'єднаних резисторів та 2^N ключових елементів під'єднаних до кожного з резисторів з одної сторони та спільного виводу вихідного сигналу з іншої. Вихідний сигнал знімається з виводу замиканням декількох з 2^N комутаторів після декодування N-розрядних даних. Схема даного ЦАП зображена на рис.2.7. Має всі переваги і недоліки попереднього ЦАП.

Сегментний ЦАП – N розрядний ЦАП, що містять $K \cdot 2^N / K$ резисторів і ключів та за структурою утворюється з K послідовно увімкнених сегментів з повнокодуючих ЦАП. Схеми даного ЦАП каскадним включенням двох ЦАП з виходом напруги та ЦАП з виходом напруги і ЦАП з схемою дільника R-2R зображені на рис.2.8. а) і б) відповідно.

Має перевагу перед попередниками в значно меншій кількості складових елементів, але потребує більш складних схем декодування.

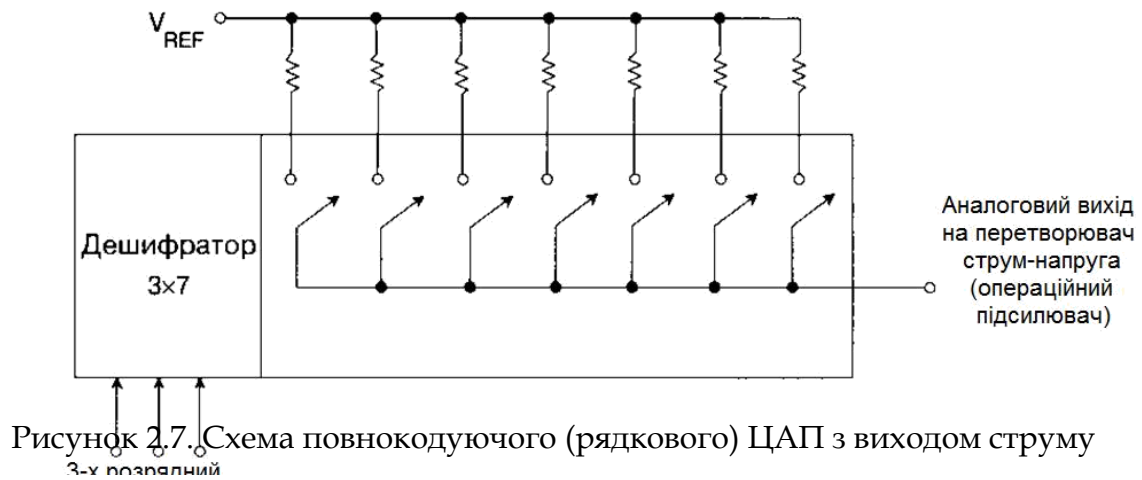


Рисунок 2.7. Схема повнокодуючого (рядкового) ЦАП з виходом струму
3-х позитивний

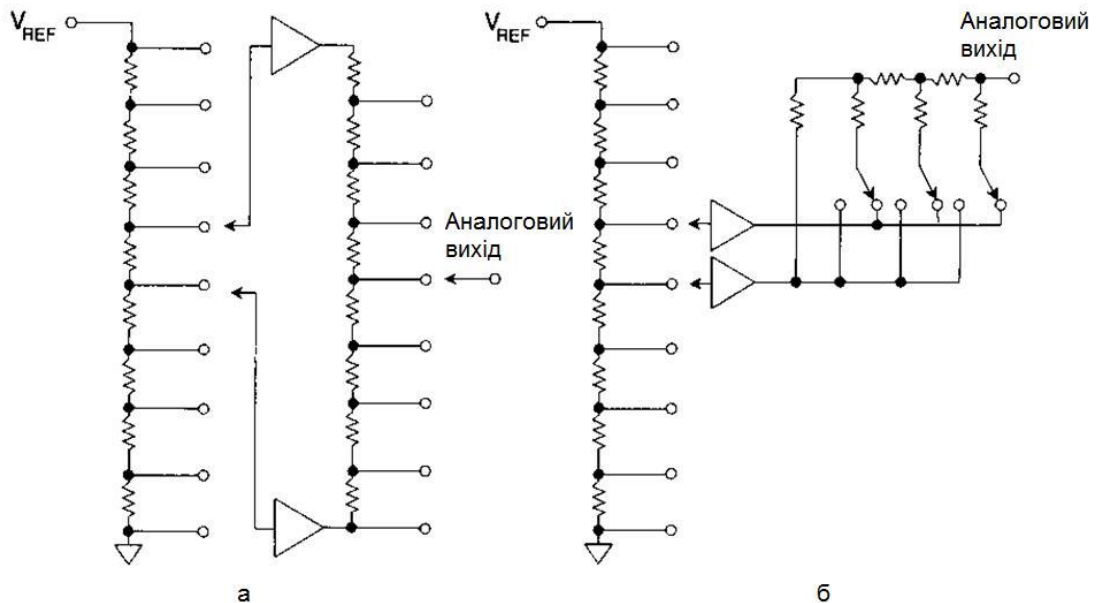


Рисунок 2.8. Схеми сегментних ЦАП з виходом напруги

3. Принципи розробки та реалізації систем цифрової обробки сигналів.

Дані принципи поступово розкриваються на всіх етапах створення засобів ЦОС, які проходять в такому порядку:

Етап 1. Розробка алгоритму та математичної моделі цифрової обробки сигналів. Симуляція алгоритму цифрової обробки сигналу в спеціалізованому програмному пакеті MATLAB/Simulink, VisualDSP++ чи подібних.

Етап 2. Визначення складності алгоритму ЦОС кількості логічних елементів чи операцій множення-додавання в секунду (MACs) для його реалізації. Основним чинником є факт, що всі операції ЦОС повинні бути виконані за час рівний інтервалу дискретизації АЦП чи частоти оновлення сигналу в ЦАП. Вибір компонентної бази реалізації проекту базується на таких варіантах:

- Вибір ПЛІС CPLD проводиться у випадку простих схем цифрової обробки сигналів що не обмежуються у часі обробки та базуються на простих математичних функціях (додавання-множення) над словами розрядності не більше 8 біт з фіксованою точкою та кількості операцій, що рівна їх кількості макрокомірок – 32...288, а саме прості схеми цифрових фільтрів, низько розрядного перетворення Фур'є, лінійного (неадаптивного) стискання низько швидкісних аудіо потоків, низько розрядного блочного завадостійкого кодування, а також у випадку розробки схем цифрової логіки середнього рівня інтеграції: мультиплексорів, комутаторів, контролерів, транскодерів.
- Вибір ЦСП проводиться у випадку будь-яких складних алгоритмів цифрової

обробки сигналів, що реалізують складні математичні функції, та потребують доступу до оперативної пам'яті чи буферизації даних і маніпуляції ними в часі, де обробка відбувається над даними словами до 32 біт з плаваючою точкою, а кількість операцій обмежена продуктивністю процесора за інтервал часу між двома відліками цифрового сигналу (до 4800 ММАС/фд).

- Вибір ПЛІС FPGA обирають у всіх інших випадках, коли продуктивності ЦСП не достатньо, так як всі операції ЦОС ПЛІС відбуваються на послідовно з'єднаних макрокомірках, а не в одному ядрі ЦСП, то вони не мають обмеження по кількості операцій за інтервал слідування відліків цифрового сигналу, тобто можлива реалізація телекомунікаційних систем найвищої пропускної здатності з найширшою смугою пропускання. Також ПЛІС FPGA обирають коли на одному кристалі доцільніше створити систему, що поєднує властивості пристроїв реалізації ЦСП та ПЛІС CPLD, так звану «систему на кристалі», що швидко репрограмується.

Етап 3. Трансформація алгоритму ЦОС в відповідний програмний код мов програмування високого рівня, що відповідає обраній компонентній базі за допомогою спеціалізованих програмних пакетів, наприклад, VisualDSP++, CrossCore® Embedded (Analog Devices), IAR Embedded (універсальна платформа), Xilinx ISE Design Suite (Xilinx).

Етап 4. Проектування схеми електричної принципової засобу ЦОС.

Етап 5. Проектування плати засобу ЦОС.

Етап 6. Виготовлення засобу ЦОС та програмування ПЛІС чи ЦСП.

Етап 7. Тестування продуктивності розробленого засобу, коригування недоліків, оптимізація коду, виробу в цілому.

Етап 8. Реалізація засобу ЦОС у вигляді модему, мобільного пристрою, базової станції чи інше.

ТЕМА 1.2. Дискретні сигнали. Принципи формування цифрового сигналу та відтворення аналогового сигналу.

§1.3 ЛЕКЦІЯ 3. Особливості формування цифрового сигналу. Дискретні сигнали.

1. Особливості ЦАП/АЦП. Формування цифрового сигналу. Види представлення цифрових даних.
2. Дискретні сигнали як послідовності. Спектральне зображення дискретних сигналів. Дискретне перетворення Фур'є (ДПФ).

Література: [1 §1.3; 3 §2; 6 §1,2,7; 7 §2,6; 8 §1.8,1.9,2.1,2.2,3.2-3.4; 9 §1.1-1.3].

1. Особливості ЦАП/АЦП. Формування цифрового сигналу. Види представлення цифрових даних.

Порядок перетворення сигналів в АЦП і ЦАП є взаємно оберненими і складаються з процесів дискретизації та відновлення сигналу в часі, квантування та відновлення значення сигналу за рівнем, цифрового кодування та декодування реального значення амплітуди сигналу в цифрову двійкову форму.

Порядок формування цифрового сигналу можна відобразити в наступній схемі

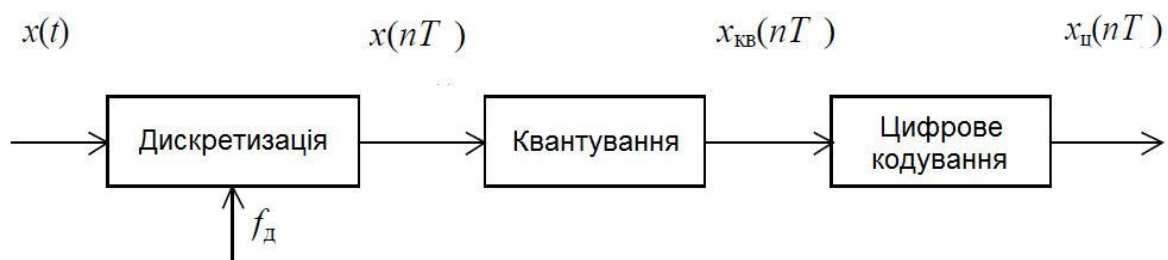


Рисунок 3.1. Порядок формування цифрового сигналу

Дискретизація – процес визначення значень неперервного аналогового сигналу в певні дискретні моменти часу з сталим інтервалом між ними, що називається *кроком дискретизації* t_d та постійною частотою дискретизації $f_d = 1/t_d$, результатом якого є послідовність відліків, що називається *дискретним сигналом*, який зазвичай відображається у вигляді *аналітичного запису послідовності*.

Схема дискретизатора виглядає наступним чином.

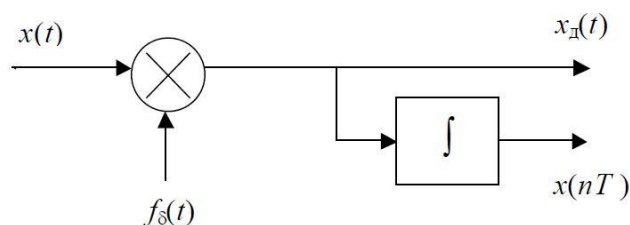


Рисунок 3.2. Схема дискретизатора

Дискретизатором є пристрій вибірки-зберігання, що складається з ключового елемента – транзистора (по суті змішувача), що проводить процес вибірки та інтегратора (по суті фільтра нижніх частот), що зберігає значення амплітуди вибірки на час кроку дискретизації t_d .

Квантування – процес перетворення амплітуд відліків в певному діапазоні U_{max} в числову двійкову форму, що може приймати ряд конкретних значень – *рівнів*

квантування, обмежених точністю чи розрядністю в n біт АЦП, крок між даними значеннями називається кроком квантування $h = U_{max}/2^n$. При постійному кроці квантування таке перетворення називається однорідним чи лінійним квантуванням, при змінному (за логарифмічною залежністю чи інше) – нелінійним квантуванням.

Процес квантування можна відобразити на наступному рисунку.

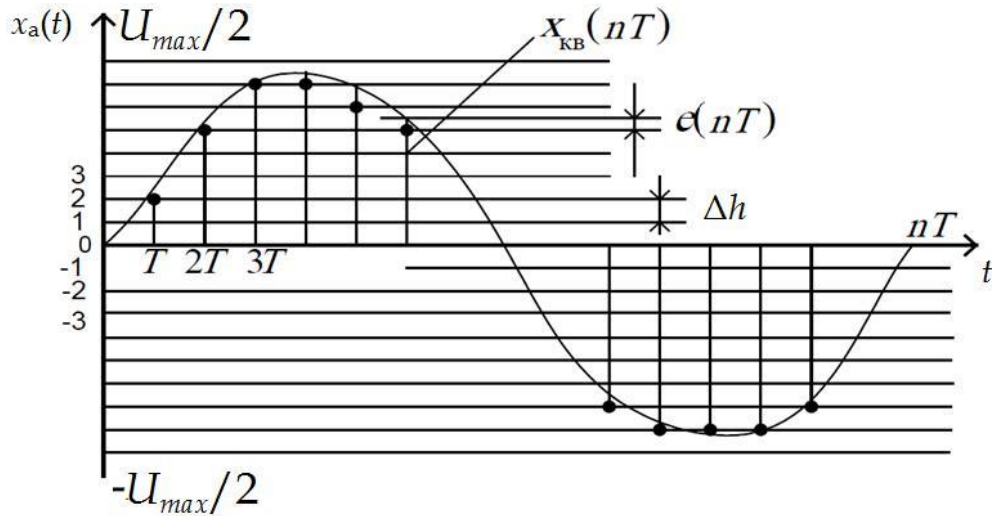


Рисунок 3.3. Процес квантування

Способи квантування:

- з відсіченням (рис. 3.4):

$$x_{кв}(nT) = [x(nT)/\Delta h]\Delta h = h_i, \text{ де } [\cdot] - \text{оператор зведення до цілого (меншого) числа}$$

- з округленням (рис. 3.5):

$$x_{кв}(nT) = [x(nT)/\Delta h + 0,5]\Delta h = h_i,$$

Похибкою квантування чи шумом квантування $e(nT)$ називається різниця амплітуд реального значення відліку і найближчого значення рівня квантування.

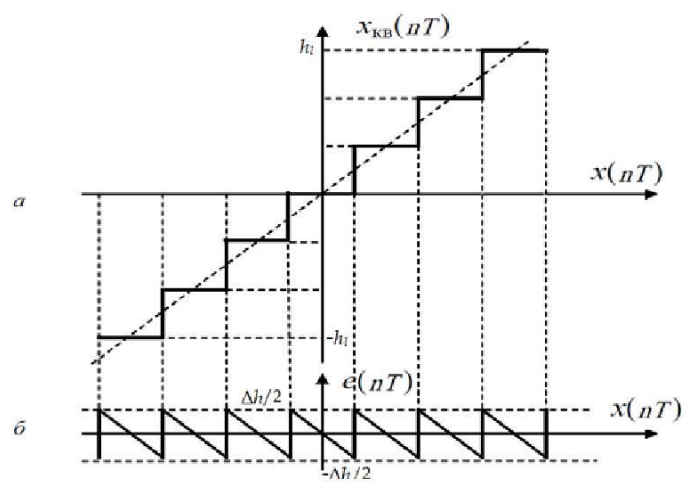
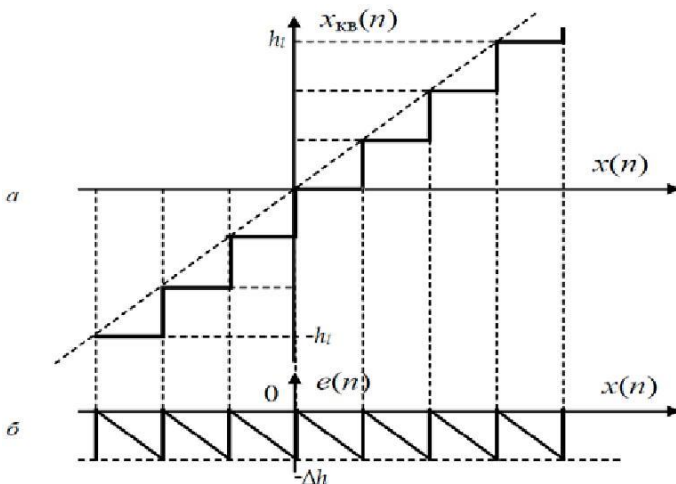


Рисунок 3.4. Амплітудна характеристика (а) і похибка квантування (б) квантування з відсіченням

Рисунок 3.5. Амплітудна характеристика (а) і похибка квантування (б) квантування з округленням

Похибка квантування характеризується:

- математичним сподіванням:

$M(e) = -h/2$ - квантування відсіченням

$M(e) = 0$ - квантування округленням

- дисперсією (визначає потужність шуму квантування): $D(e) = h^2/12$
- середньоквадратичним значенням:
 $\sigma = \Delta h / \sqrt{12}$

Цифровим кодуванням/декодуванням при АЦП/ЦАП називається процес перетворення квантованого числового значення відліку $x_{кв}(nT)$ в двійковий код $x_{ц}(nT)$, зручний для подальшої обробки засобами ЦОС.

При обробці засобами ЦОС розглядають прямий, обернений (1's complement - FSB), додатковий (2's complement - TSB) та зміщений (Offset Binary Code - OBC) коди. У даних кодів старший (зліва) біт визначає полярність, решта двійкове значення

амплітуди. Зв'язок даних кодів наведено в таблиці 3.1.

Таблиця 3.1				
Значення шкали АЦП/ЦАП	Амплітуда сигналу	Обернений (FSB)	Додатковий (TSB)	Зміщений (OBC)
+ 1 (повна шкала)	1111...1111	0111...1111	0111...1111	1111...1111
+0,75	1110...0000	0110...0000	0110...0000	1110...0000
+0,5	1100...0000	0100...0000	0100...0000	1100...0000
+0,25	1010...0000	0010...0000	0010...0000	1010...0000
+0	1000...0000	0000...0000	0000...0000	1000...0000
-0	0000...0000	1111...1111	-	-
-0,25	0010...0000	1101...1111	1110...0000	0110...0000
-0,5	0100...0000	1011...1111	1100...0000	0100...0000
-0,75	0110...0000	1001...1111	1010...0000	0010...0000
-1+1LSB	0111...1111	1000...0000	1000...0001	0000...0001
-1	-	-	1000...0000	0000...0000

Прямий код - відображає дійсне значення амплітуди відліку з оберненою полярністю.

Обернений код отримують з прямого інверсією двійкових чисел, що відображають всі значення відліків з негативною полярністю. Використовується для отримання різниці чисел використовуючи операцію додавання.

Додатковий код отримують додаванням одиниці біту до найменшого з розрядів оберненого коду, що відображають амплітуду сигналу.

Зміщений код отримують інверсією біту полярності додаткового коду.

В ЦОС використовують лише додатковий та зміщений коди, бо вони не мають колізії подвійного нуля +/-0 як в прямому чи оберненому кодах.

По суті зміщений код відображає абсолютну амплітуду сигналу відносно найменшого значення динамічного діапазону АЦП/ЦАП.

2. Дискретні сигнали як послідовності. Спектральне зображення дискретних сигналів. Дискретне перетворення Фур'є (ДПФ).

МАТЕМАТИЧНЕ ПРЕДСТАВЛЕННЯ СИГНАЛІВ

Сигналом є фізичний процес (наприклад, змінна в часі напруга), що відображає деяку інформацію або повідомлення. Математично сигнал описується функцією певного типу.

Одномірні сигнали описуються дійсною чи комплексною функцією $x_a(t)$, що визначена на інтервалі осі дійсних значень (зазвичай - осі часу) $t' \leq t \leq t''$.

Аналогові сигнали (АС) описуються неперервною або шматково-неперервною функцією $x_a(t)$, причому сама функція і аргумент t можуть приймати будь-які значення на деяких інтервалах $x_a' \leq x_a \leq x_a''$, $t' \leq t \leq t''$. Приклад АС: $x_a(t) = Ae^{-at}$, $A = 1$, $a > 0$, приймає дійсні значення при $0 \leq t$, наведена на рис. 3.6, а. Інший приклад АС показаний на рис.

3.7, а: $x_a(t) = U_m \sin(2\pi f t)$ при $U_m = 1$ В, $f = 2$ Гц.

Дискретні сигнали (ДС) описуються решітковими функціями - послідовностями - $x(nT)$, де $T = \text{const}$ - інтервал дискретизації, $n \in \mathbf{N}$; сама функція $x(nT)$ може в дискретні моменти nT приймати довільні значення на деякому інтервалі. Ці значення функції називаються вибірками або відліками функції. Іншим позначенням решіткової функції $x(nT) \in x(n)$, або x_n . На рис. 3.6, б наведено графічне зображення ДС $x(nT) = e^{anT}$, $a < 0$, приймає дійсні значення при $n = 0, 1, 2, \dots$. На рис. 3.7, б показана послідовність відліків функції $x(nT) = U_m \sin(2\pi f n T)$ при $U_m = 1$ В, $f = 2$ Гц, $T = 1/16$ с. Дані сигнали використовуються в системах з амплітудно-імпульсною модуляцією. Послідовність $x(nT)$ може бути скінченною, такою, що складається з певного скінченного числа відліків, наприклад з трьох відліків: $x(0) = 1$, $x(T) = -2$, $x(2T) = 3$; скінченну послідовність можна записати у формі $x(nT) = \{1, -2, 3\}$.

Цифрові сигнали (ЦФ) являють собою квантовані за рівнем дискретні сигнали та описуються квантова ними решітковими функціями (квантованими послідовностями) $x_u(nT)$, що приймають в дискретні моменти nT лише скінченний ряд дискретних значень - рівнів квантування h_1, h_2, \dots, h_N . Приклади квантованих дискретних сигналів наведено на рис. 3.6, в і 3.7, в. Зв'язок між решітковою функцією $x(nT)$ і квантованою решітковою функцією $x_u(nT)$ визначається нелінійною функцією квантування $x_u(nT) = F_k(x(nT))$. Існують різні способи вибору функцій квантування. У найпростішому випадку, коли використовується квантування з постійним кроком $h = h_n - h_{n-1} = \text{const}$, функція квантування має вигляд

$$x_u(nT) = F_k(x(nT)) = \begin{cases} h_1 & \text{при } x(nT) \leq (h_2 + h_1)/2, \\ h_l & \text{при } (h_l + h_{l-1})/2 < x(nT) \leq (h_{l+1} + h_l)/2, \\ h_N & \text{при } (h_N + h_{N-1})/2 < x(nT). \end{cases}$$

Кожен з рівнів квантування кодується певним числом, зазвичай двійковими символами 0 та 1, тоді квантовані відліки $x_u(nT)$ кодуються двійковими числами з m розрядами. Наприклад, $x_u(0) = 0001$, $x_u(T) = 0010$, $x_u(2T) = 0011$ і т. д.

Число рівнів квантування N і найменше число розрядів m двійкових чисел, що кодують ці рівні, пов'язані співвідношенням

$$m = \text{int}(\log_2 N). \quad (1.1)$$

Приклад 1.1. При $N = 4$ $m = 2$, при $N = 6$ $m = 3$; при $N = 9$ $m = 4$ і т.д.

Якщо кодована функція може приймати як позитивні, так і негативні значення, то знак функції кодується, як правило, за допомогою спеціального знакового розряду. Дані сигнали або сигнали з імпульсно-кодовою модуляцією (ІКМ), використовуються в системах зв'язку, обробки даних.

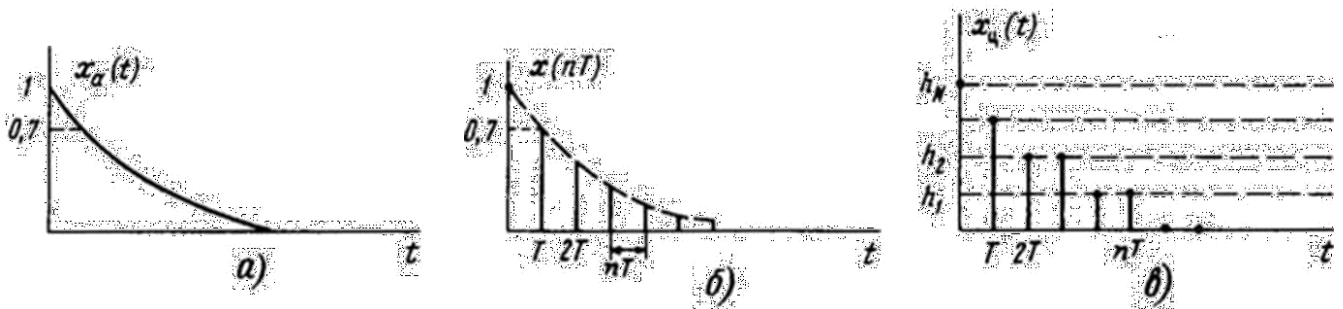


Рисунок 3.6

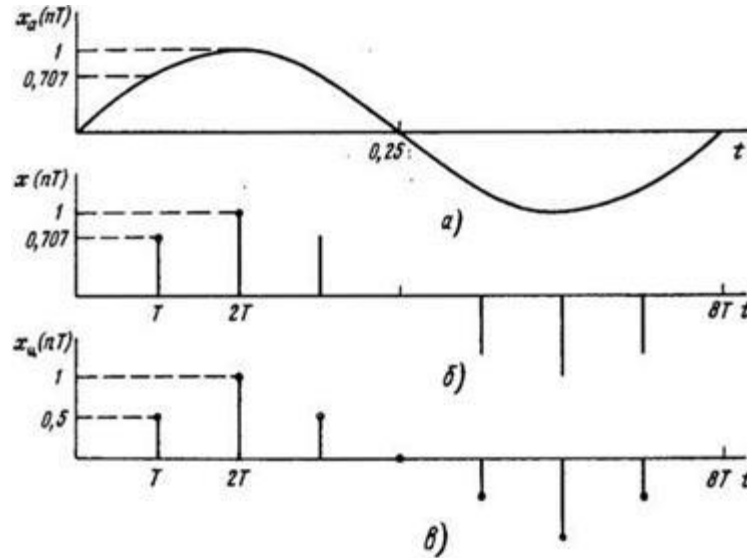


Рисунок 3.7

ДИСКРЕТНІ СИГНАЛИ

Розглянемо послідовності, що широко використовуються в теорії ЦОС.

Зсув послідовності $x(nT)$ по осі nT : послідовність $y(nT) = x(nT - kT)$ утворюється при зсуві послідовності $x(nT)$ на k відліків вправо (при $k > 0$) або вліво (при $k < 0$).

Приклад 1.2. На рис. 3.8, а зображена послідовність $x(nT) = \{3, 2, 1, 1, 1\}$, а на рис. 3.8, б, в показані відповідно послідовності $y_1(nT) = x(nT - 2T)$ і $y_2(nT) = x(nT + 2T)$.

Дискретна дельта-функція (одиничний імпульс) визначається співвідношенням

$$\delta(nT - kT) = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq k, \\ 1 & \text{при } n = k. \end{cases}$$

Ця функція (δ -функція) зображена на рис. 3.9, а.

Аналітичний запис послідовності. З визначення дискретної δ -функції випливає, що будь-яка послідовність $x(nT)$ може бути записана у вигляді

$$x(nT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \delta(nT - kT), \quad (1.2)$$

так як всі члени суми при $k \neq n$ рівні нулю.

Приклад 1.3. Послідовність зображена на рис. 3.8, а може бути представлена в виді $x(nT) = 3\delta(nT) + 2\delta(nT - T) + \delta(nT - 2T) + \delta(nT - 3T) + \delta(nT - 4T)$.

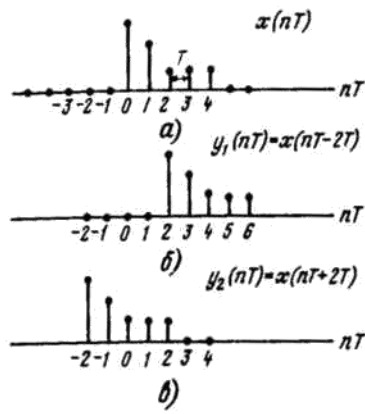


Рисунок 3.8

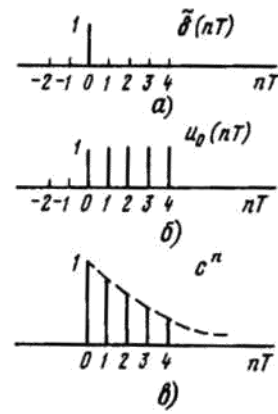


Рисунок 3.9

Одинична послідовність визначається виразом

$$u_0(nT - kT) = \begin{cases} 0 & \text{при } n < k, \\ 1 & \text{при } n \geq k. \end{cases}$$

На рис. 3.9, б показана послідовність $u_0(nT)$. Зауважимо, що одиничний імпульс $\delta(nT)$ пов'язаний з одиничною послідовністю $u(nT)$ очевидними співвідношеннями:

$$\begin{aligned} \delta(nT) &= u_0(nT) - u_0(nT - T), \\ u_0(nT) &= \sum_{k=0}^{\infty} \delta(nT - kT). \end{aligned}$$

Експоненційна послідовність визначається співвідношенням $x(nT) = e^{\alpha nT}$, де в загальному випадку $\alpha = \sigma + j\omega$ - комплексне число. При $\omega = 0$ $\alpha = \sigma$ - дійсне і $x(nT) = e^{\alpha nT} = c^n$ - дійсна статична послідовність. На рис. 3.9, в наведено зображення послідовності $x(nT) = c^n u_0(nT)$, де $c < 1$.

Періодичною називають послідовність $x(nT)$, що задовольняє умові $x(nT) = x(nT + mNT)$, де m і N - цілі числа, $m = 1, 2, \dots$; NT (або N) - період послідовності. Періодичну послідовність досить задати на інтервалі одного періоду, наприклад при $0 \leq n \leq N-1$.

Приклад 1.4. На рис. 3.10, а зображена періодична послідовність $x(nT) = \{1, 1, 0, 0\}$ з періодом $N = 4$. На рис. 3.10, б показана та ж періодична послідовність, але зсунута на два відліки вліво, тобто послідовність $x(nT - kT)$ при $k = -2$; $x(nT - 2T) = \{0, 0, 1, 1\}$.

З розгляду інтервалу одного періоду (наприклад, інтервалу $0, \dots, N-1$) легко помітити, що при виході в результаті зсуву з інтервалу якогось відліку точно такий же відлік входить в інтервал з іншого його кінця. Такий зсув називається *круговим*. Зауважимо, що зсув періодичної послідовності $x(nT)$ з періодом N на $k' > N$ відліків не можна відрізнити від зсуву на $(k') \bmod N = k < N$ відліків.

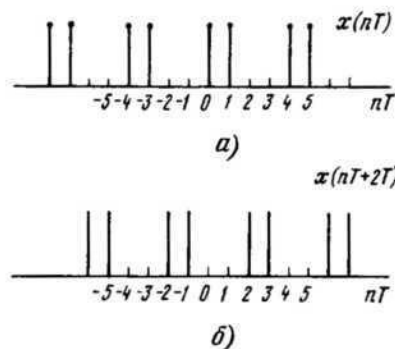


Рисунок 3.10

СПЕКТРИ АНАЛОГОВИХ І ДИСКРЕТНИХ СИГНАЛІВ

Для опису аналогових і дискретних сигналів в частотній області використовується апарат перетворення Фур'є. Спектром $X_a(j\omega)$ аналогового сигналу $x_a(t)$ називають пряме перетворення Фур'є

$$X_a(j\omega) = \int_0^{\infty} x_a(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (1.3)$$

У свою чергу, згідно зворотному перетворенню Фур'є

$$x_a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (1.4)$$

(Передбачається збіжність інтегралів (1.3), (1.4) $x_a(t) = 0$ при $t < 0$)

Пара перетворень Фур'є для решіткової функції (*дискретної послідовності*) має вигляд:

$$X(e^{j\omega T}) = \Phi \{x(nT)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) e^{-j\omega nT}; \quad (1.5)$$

$$x(nT) = \Phi^{-1} \{X(e^{j\omega T})\} = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} X(e^{j\omega nT}) d\omega; \quad (1.6)$$

$X(e^{j\omega T})$ називають *спектром дискретного сигналу*.

Виведення формул (1.5) і (1.6) з (1.3), (1.4) базується на використанні представлення дискретного сигналу у вигляді (1.2) і властивості періодичності спектру (див. нижче).

Також, спектр може бути знайдений і прямим перетворенням Фур'є дискретного сигналу, представленого функцією неперервного часу

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - nT) e^{-j\omega t} dt.$$

Використовуючи фільтруючі властивості δ -функції $\int s(t) \delta(t-t_0) dt = s(t_0)$ отримаємо

$$X(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) e^{-j\omega nT}$$

Таким чином можна говорити про те, що при дискретизації відбувається процес перемноження спектрів аналогового і дискретизуючого сигналів.

Відзначимо ряд властивостей спектрів дискретних сигналів.

1. З (1.5) випливає, що спектр $X(e^{j\omega T})$ дискретної послідовності є періодичною функцією по частоті ω з періодом, рівним частоті дискретизації: $\omega_d = 2\pi/T$; $X(e^{j\omega T}) = X(e^{j(\omega+k2\pi/T)T})$, $k = 1, 2, \dots$. Ясно, що також періодичним по частоті з періодом $\omega_d = 2\pi/T$ є модуль спектру $|X(e^{j\omega T})|$ та фаза - аргумент $\arg X(e^{j\omega T})$. Крім того, для послідовностей дійсних значень $x(nT)$, як випливає з (1.5),

$$|X(e^{j\omega T})| = |X(e^{-j\omega T})|,$$

$$\arg X(e^{j\omega T}) = -\arg X(e^{-j\omega T}),$$

тобто модуль спектру послідовності дійсних значень є парною функцією, а аргумент - непарною функцією частоти. На рис. 3.11 показано умовне зображення модуля спектра послідовності дійсних значень. Основним *прямим спектром* $X^+(e^{j\omega T})$ називають частину спектру $X(e^{j\omega T})$, розташовану в області нижніх частот від $\omega = 0$ до $\omega = \omega_d/2 = \pi/T$, а основним *інверсним спектром* $X^-(e^{j\omega T})$, що комплексно спряжений до прямого - частина спектру в області частот $-\pi/T \leq \omega \leq 0$.

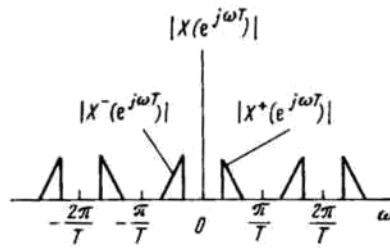


Рисунок 3.11

2. Лінійність перетворень Фур'є.

3. При зсуві спектру $X(e^{j\omega T})$ послідовності $x(nT)$ по осі частот вправо на величину ω_1 отримуємо спектр $Y(e^{j\omega T}) = X(e^{j(\omega - \omega_1)T})$. Цьому спектру згідно (1.6) відповідає послідовність

$$y(nT) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} Y(e^{j\omega T}) e^{j\omega nT} d\omega = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} X(e^{j(\omega - \omega_1)T}) e^{j\omega nT} d\omega = e^{j\omega_1 nT} \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} X(e^{j\omega T}) e^{j\omega nT} d\omega,$$

тобто $y(nT) = e^{j\omega_1 nT} x(nT)$, (1.7)

і, таким чином, зсув спектра по осі частот відповідає множенню послідовності $x(nT)$ на послідовність $e^{j\omega_1 nT}$. В окремому випадку, при $\omega_1 = \pi/T$, отримуємо, що послідовність

$$y(nT) = e^{j\pi n} x(nT) = (-1)^n x(nT) \text{ має спектр } Y(e^{j\omega T}) = X(e^{j(\omega - \pi/T)T}). \quad (1.8)$$

Такий спектр називається інверсним по відношенню до спектру $X(e^{j\omega T})$ послідовності $x(nT)$.

4. При зсуві дискретного сигналу $x(nT)$ вправо (тобто при затримці за часом сигналу) на m відліків одержуємо сигнал $y(nT) = x(nT - n_1T)$ і згідно (1.5) спектр затриманого сигналу

$$Y(e^{j\omega T}) = e^{-j\omega n_1 T} X(e^{j\omega T}). \quad (1.9)$$

5. Дискретний сигнал $x(nT)$ і модуль його спектру $|X(e^{j\omega T})|$ зв'язані наступною залежністю (теорема Парсеваля):

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x(nT)|^2 = \frac{T}{\pi} \int_0^{\pi/T} |X(e^{j\omega T})|^2 d\omega. \quad (1.10)$$

ДИСКРЕТНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є

Нехай $x(nT)$ - періодична послідовність з періодом NT (період - N відліків), тобто $x(nT) = x(nT + mNT)$, m - ціле. Дискретним перетворенням Фур'є (ДПФ) називають пару взаємно-однозначних перетворень:

$$X(k) = X(k\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-jkn\Omega T}, \quad k=0, 1 \dots N-1; \quad (1.15)$$

$$x(n) = x(nT) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k\Omega) e^{jkn\Omega T}, \quad n=0, 1 \dots N-1, \quad (1.16)$$

де $\Omega = 2\pi/NT$ - основна частота перетворення, причому (1.15) визначає пряме ДПФ, а (1.16) - зворотне (ЗДПФ). Вводячи позначення для так званого повертаючого множника

$$e^{-j\Omega T} = e^{-j2\pi/N} = W_N, \quad (1.17)$$

записують ДПФ і ЗДПФ у формі:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}, \quad k=0, 1 \dots N-1; \quad (1.18)$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn}, \quad n=0, 1 \dots N-1. \quad (1.19)$$

Дискретне перетворення Фур'є $X(k)$, як і сама послідовність $x(n)$, є періодичною функцією аргументу k з періодом N , так як $W_N^{kn} = W_N^{(k+mN)n}$, де $m \in \mathbf{Z}$. Дискретне перетворення Фур'є може бути використано і для представлення послідовності $x(nT)$ кінцевої довжини N , визначеної при $n = 0, 1, 2 \dots N-1$ і рівною нулю поза інтервалом $[0, N-1]$. Дійсно, таку послідовність можна розглядати як один період відповідної періодичної послідовності і використовувати перетворення (1.18), (1.19); слід тільки вважати, що поза інтервалом $[0, N-1]$ $X(k)$ і $x(n)$ дорівнюють нулю.

Зауважимо, що якщо порівняти спектр кінцевого дискретного сигналу, який визначається формулою (1.5) (з урахуванням того, що $x(nT) = 0$ при $n < 0$ і $n > N-1$), і ДПФ цього ж сигналу (1.18), то очевидно, що ДПФ являє собою N відліків спектру, взятих на періоді з інтервалом дискретизації по частоті, рівному $\Omega = 2\pi/NT$. Тому властивості ДПФ аналогічні властивостям спектрів. Розглянемо деякі з цих властивостей.

1. *Лінійність.* Нехай послідовності $x_1(nT)$ і $x_2(nT)$ мають довжину N ; a_1, a_2 - постійні і $x_3(nT) = a_1 x_1(nT) + a_2 x_2(nT)$. Тоді для послідовностей ДПФ можна записати $X_3(k) = a_1 X_1(k) + a_2 X_2(k)$, причому всі ДПФ $X_1(k), X_2(k), X_3(k)$ мають довжину N . Якщо $x_1(nT)$ має довжину N_1 , а $x_2(nT)$ - довжину N_2 , $N_1 \neq N_2$, то довжина N_3 лінійної комбінації $x_3(nT)$ дорівнює $N_3 = \max(N_1, N_2)$ і ДПФ всіх послідовностей $x_1(nT), x_2(nT), x_3(nT)$ повинні обчислюватися при $N = N_3$.

Якщо, наприклад, $N_1 > N_2$, то $X_1(k)$ обчислюється в N_1 точках: $X_1(k) = \sum_{n=0}^{N_1-1} x_1(n) W_N^{kn}$,

послідовність $x_2(nT)$ доповнюється $(N_1 - N_2)$ нулями і також обчислюється в N_1 точках:

$$X_1(k) = \sum_{n=0}^{N_1-1} x_2(n) W_N^{kn}, \quad k = 0, 1, 2 \dots N_1 - 1.$$

2. *Зсув послідовностей.* Нехай $x(nT)$ - періодична послідовність з періодом N - має ДПФ $X(k)$ і $y(nT) = x((n+m)T)$, $m < N \in \mathbf{Z}$, є зсунутою послідовністю. Тоді ДПФ зсунутої послідовності

$$Y(k) = \sum_{n=0}^{N-1} y(n) W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x((n+m)T) W_N^{kn}.$$

Якщо в останній сумі провести заміну змінних $n+m = n'$, то

$$Y(k) = W_N^{-km} X(k).$$

3. *Зсув послідовності ДПФ.* Вибірки періодичної послідовності $X(k+1)$ по суті коефіцієнти ДПФ послідовності $W_N^{nl} x(nT)$; ДПФ послідовності, як правило, комплексні функції, причому дійсні частини ДПФ - парні функції (симетричні послідовності) $\text{Re } X(k) = \text{Re } X(N-k)$, а уявні частини - непарні функції (антисиметричні послідовності) $\text{Im } X(k) = -\text{Im } X(N-k)$. ДПФ симетричної послідовності $x(nT) = x((N-n)T)$ є функцією дійсних значень.

§1.4 ЛЕКЦІЯ 4. Принципи формування цифрового сигналу та відтворення аналогового сигналу

1. Теорема відліків (Котельникова). Дискретизація сигналу з фінітним спектром. Дискретизація сигналу з нескінченним спектром.
2. Критерій Найквіста. Накладання відображень спектру сигналу. Фільтр захисту від накладання спектрів (антиалайзінговий).
3. Дискретизація/відтворення вузько смугових сигналів
4. Надлишкова дискретизація і інтерполяція. Субдискретизація і децимація. Відтворення радіосигналу за відліками відеосигналу (сигналу ПЧ)

Література: [1 §1.4; 3 §2; 6 §1; 8 §2.3-2.9; 10 §3].

1. Теорема відліків (Котельникова). Дискретизація сигналу з фінітним спектром. Дискретизація сигналу з нескінченним спектром.

ТЕОРЕМА ВІДЛІКІВ (КОТЕЛЬНИКОВА)

Будь-який аналоговий сигнал $x(t)$ з фінітним спектром $X(f)$ в межах $[-f_B; f_B]$ може бути представлений у вигляді функції відліків

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \frac{\sin 2\pi f_B (t - k\Delta t)}{2\pi f_B (t - k\Delta t)},$$

де

$$c_k = \frac{(x, \varphi_k)}{(\varphi_k, \varphi_k)} = \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{\sin 2\pi f_B (t - k\Delta t)}{2\pi f_B (t - k\Delta t)} dt$$

є коефіцієнтами Фур'є і $\Delta t = 1/2f_B$. Спектр функції відліків

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sum_k x(t) e^{-j2\pi f t} dt = \Pi_{2f_B}(f) \exp(-j2\pi f k \Delta t)$$

має фазовий множник через зсув у часі $k \Delta t$. Модуль цього спектру $\Pi_{2f_B}(f)$ є прямокутною функцією з одиничною площею (рис.4.1).

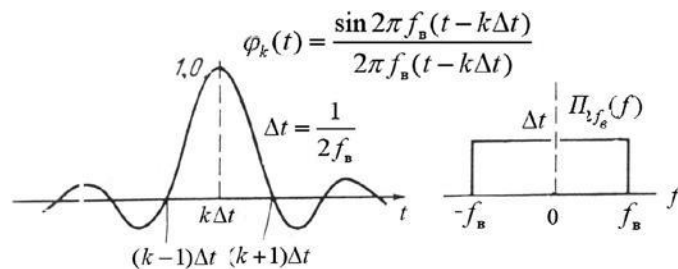


Рисунок 4.1. Функція відліків і її спектр

З урахуванням узагальненої рівності Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) Y^*(f) df$$

вираз для коефіцієнта c_k можемо записати у вигляді

$$c_k = \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \Pi_{2f_B}(f) e^{j2\pi f k \Delta t} df.$$

Тоді підінтегральний вираз рівний $X(f)\Pi_{2f_B}(f) = X(f)/2f_B = X(f)$ т. Тому $c_k = x(k \Delta t)$

Отже, якщо сигнал має спектр $X(f)$, обмежений на інтервалі $[-f_B; f_B]$ і крок дискретизації $\Delta t \leq 1/2f_B$ то коефіцієнти Фур'є c_k розкладання сигналу $x(t)$ по функціях

відліків $\varphi_k(t)$ є вибірками сигналу $x(k t)$, тоді $x(t)$ може бути представлений *рядом Котельнікова*:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k \Delta t) \frac{\sin 2\pi f_{\text{в}}(t - k \Delta t)}{2\pi f_{\text{в}}(t - k \Delta t)}$$

і відновлений з будь-якою точністю за значеннями своїх дискретних відліків $x(k t)$ у моменти часу $k t$ при пропусканні їх через ідеальний фільтр нижніх частот (ІФНЧ) з імпульсною характеристикою:

$$h(t) = \frac{1}{\Delta t} \phi_0(t) = 2 f_{\text{в}} \frac{\sin 2\pi f_{\text{в}} t}{2\pi f_{\text{в}} t}$$

Дане твердження називається *теоремою Котельнікова ДИСКРЕТИЗАЦІЯ СИГНАЛУ З ФІНІТНИМ СПЕКТРОМ*.

При дискретизації аналогового сигналу з фінітним спектром, обмеженого максимальною частотою $f_{\text{в}}$, що відповідає умові $f_{\text{в}} \leq f_{\text{д}}/2$ (Рис. 4.2), спектр дискретного сигналу $X(f)$ в основній смузі частот $\pm f_{\text{д}}/2$ точно збігається зі спектром аналогового сигналу: $X(f)/\Delta t = X_{\text{а}}(f)$.

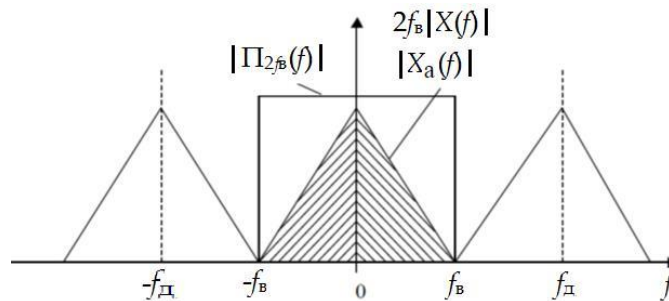


Рисунок 4.2. Спектральне відображення при дискретизації сигналу з фінітним спектром

У цьому випадку можливе точне відновлення аналогового сигналу $x(t)$ за його дискретним вибірками $x(k t)$ за допомогою ІФНЧ з прямокутною частотною характеристикою $\Pi_{2f_{\text{в}}}(f)$, рівною 1 при $|f| \leq f_{\text{в}}$ і рівною нулю при $|f| > f_{\text{в}}$.

Сигнал на виході ФНЧ відповідає зворотному перетворенню Фур'є деперіодизованного спектру дискретного сигналу $X(f)\Pi_{2f_{\text{в}}}(f)/\Delta t = 2f_{\text{в}}X(f)\Pi_{2f_{\text{в}}}(f)$, що має розмірність спектральної щільності.

ДИСКРЕТИЗАЦІЯ СИГНАЛУ З НЕСКІНЧЕННИМ СПЕКТРОМ.

Якщо сигнал $x(t)$ має скінченну тривалість T з необмеженим за частотою, але загасаючим спектром (рис. 4.3), то накладення сусідніх копій спектрів відбувається при будь-якому значенні частоти дискретизації, але рівні зміщених по частоті спектрів, що перекриваються в основній смузі частот, зменшуються з зростанням частоти дискретизації.

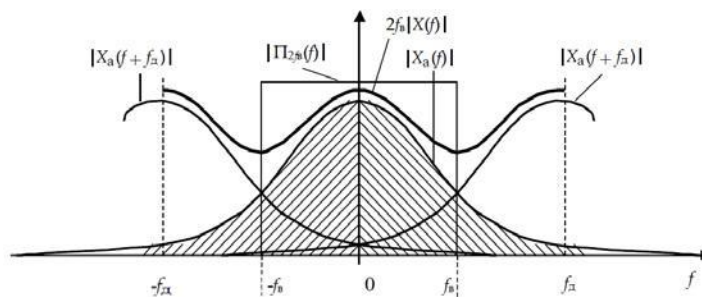


Рисунок 4.3. Спектральне відображення при дискретизації сигналу з необмеженим спектром

Відновлений за допомогою ІФНЧ або інтерполяційного ряду Котельникова сигнал $x'(t)$ має обмежений по частоті спектр, нескінченну тривалість і відрізняється за формою від сигналу $x(t)$. Частота дискретизації сигналу скінченної тривалості $f_d = 2f_b$, тоді мінімально необхідне число його відліків або вибірок $N = [2f_b T]$, називається *базою сигналу* $x(t)$, що зв'язується в даному випадку з деякою частотою його спектру f_b , умовно прийнятої за максимальну. Вона є граничною частотою фінітного спектру $X'(f)$ відновленого сигналу $x'(t)$, що збігається в смузі частот $\pm f_d/2$ з періодичним по частоті спектром $X(k)$ дискретного сигналу $x(k t)$.

2. Критерій Найквіста. Накладання відображень спектру сигналу. Фільтр захисту від накладання спектрів (антиалайзінговий).

Критерій Найквіста – смуговий сигнал може бути адекватно представлений дискретними відліками, якщо максимальна частота його спектру не перевищує половини частоти дискретизації, що називається *частотою Найквіста* $f_n = f_d/2$.

У залежності від співвідношення між максимальною частотою смуги дискретизованого сигналу і частотою Найквіста можливі три випадки. Розглянемо для гармонічного сигналу як на рис. 4.4.

1. Якщо частота гармонічного сигналу менше частоти Найквіста, дискретні відліки дозволяють правильно відновити аналоговий сигнал (рис. 4.4, а).

2. Якщо частота гармонічного сигналу дорівнює частоті Найквіста, то дискретні відліки дозволяють відновити аналоговий гармонійний сигнал з тією ж частотою, але амплітуда і фаза відновленого сигналу (він показаний пунктирною лінією) можуть бути спотворені (рис. 4.4, б). У гіршому випадку всі дискретні відліки синусоїди можуть виявитися рівними нулю.

3. Якщо частота гармонічного сигналу більше частоти Найквіста, відновлений по дискретним відлікам аналоговий сигнал (як і в попередньому випадку, він показаний пунктирною лінією) буде також гармонійним, але з іншою частотою (рис. 4.4, в). Даний ефект носить назву появи помилкових частот (aliasing) або ефект накладання спектрів основної і дзеркальної смуг частот.

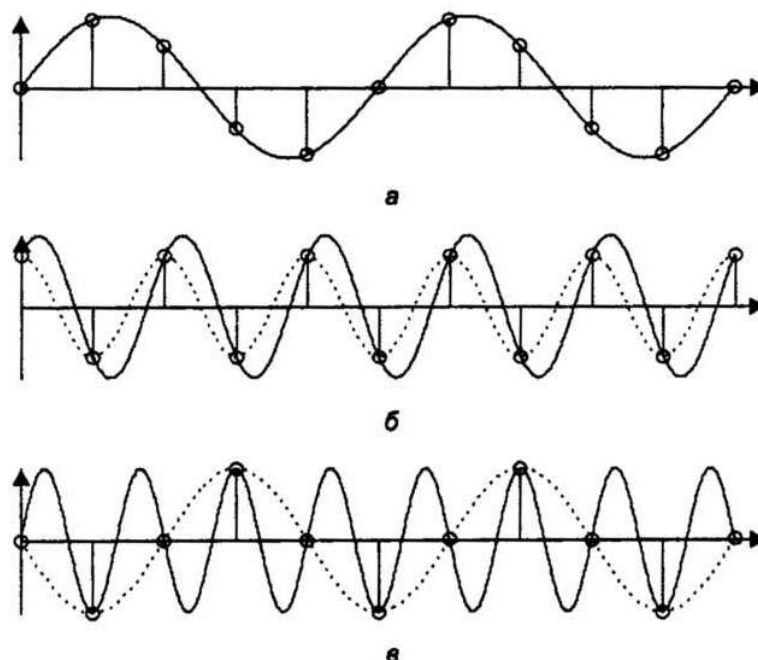


Рисунок 4.4. Дискретизація гармонічного сигналу з різною частотою

Даний ефект можна пояснити виходячи з спектрального представлення дискретних сигналів. Оскільки дискретизація по суті є процесом перемноження спектрів

аналогового і дискретизуючого сигналів, то на її виході спостерігається процес періодичного повторення основної смуги частот аналогового сигналу в так званих *зонах чи смугах Найквіста* $f_H \in [(k-1)f_H; kf_H]$, $k \in \mathbf{N}$ – номер зони найквіста. Спектри в парних зонах Найквіста утворюються повним дзеркальним відображенням періодично повторених з періодом $f_d = 2f_H$ спектрів в непарних зонах Найквіста відносно частот $2kf_d$ як на рис. 4.5. Спектр основної смуги частот знаходиться в першій зоні Найквіста.

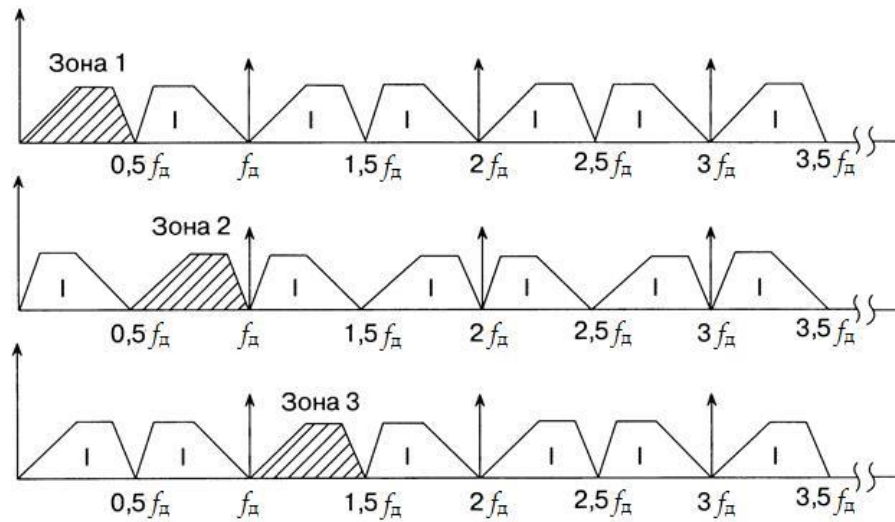


Рисунок 4.5. Відображення сигналу основного спектру частот в зонах Найквіста

Позитивним моментом названого ефекту є можливість дискретизації сигналу на частотах набагато менших ніж задано теоремою відліків в процесі субдискретизації. Тобто попередньо відфільтрований смугопропускаючим фільтром сигнал, що знаходиться в смузі $f_H \in [(k-1)f_H; kf_H]$, $k > 1$ може бути дискретизований на частоті $f_d = 2f_H$ і відновлений без спотворень, тому, що в даному випадку, виходячи з властивості згортки спектрів, відбувається перенос спектру сигналу з даної зони Найквіста з номером k в першу зону.

Негативним моментом для смугових сигналів з сугою $f \in [0; f_{max}]$ при $f_{max} < f_H$ є те, що частина смуги корисного сигналу $f_{z2} \in [f_H; f_{max}]$, що виходить за частоту Найквіста «згортається», тобто накладається на спектр сигналу в першій зоні Найквіста $f_{z1} \in [2f_H - f_{max}; f_H]$. Таким чином височастотна частина спектру шириною $f_{z2} = 2(f_{max} - f_H)$ стає спотвореною, а сам аналоговий сигнал не може бути відтворений в первозданному вигляді. Даний процес відображено на рис.4.6

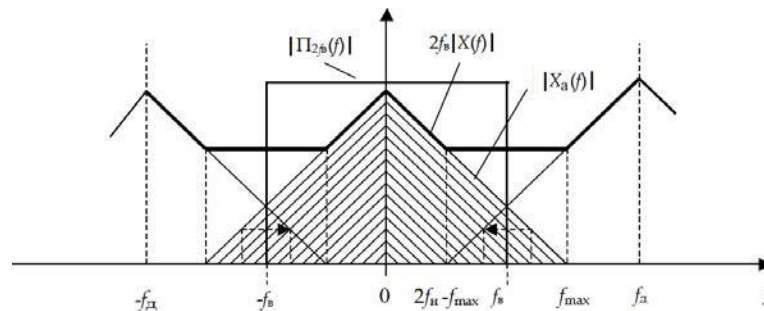


Рисунок 4.6. Процес спотворення сигналу при виборі неналежної частоти дискретизації

Для уникнення ефекту накладання спектрів сусідніх зон Найквіста та згортки сигналів з усіх зон Найквіста в першу використовують *антиалайзинговий (протизгортковий) фільтр* нижніх частот з смугою пропускання $f \in [0; f_H]$. При цьому на частоті f_H відбувається відсічка спектру, тобто $H(f > f_H) = 0$. Реальні фільтри з такою характеристикою виконати не можна, тому в них f_H рівна частоті загородження, а смуга пропускання рівна $0,8 \dots 0,9 f_H$.

3. Дискретизація/відтворення вузько смугових сигналів.

ДИСКРЕТИЗАЦІЯ В ЧАСТОТНІЙ ОБЛАСТІ

Реально всі сигнали спостерігаються протягом кінцевого інтервалу часу $[-T, T]$. Тому можна вважати, що $x(t)$ є фінітною функцією. Спектр такого сигналу має нескінченну протяжність і записується у вигляді

$$X(f) = \int_{-T}^T x(t) e^{-j2\pi ft} dt.$$

Для періодичного продовження з періодом $2T$ (без накладання) справедливо уявлення рядом Фур'є:

$$x_n(t) = \sum_n c_n e^{j2\pi n \Delta f t},$$

де $f = 1/2T$ і коефіцієнти Фур'є $c_n = (1/2T) \int_{-T}^T x(t) e^{-j2\pi n \Delta f t} dt = \Delta f X(n \Delta f)$.

Для спектральної функції можемо записати

$$X(f) = \int_{-T}^T \sum_n \Delta f X(n \Delta f) e^{j2\pi n \Delta f t} e^{-j2\pi ft} dt = \Delta f \sum_n X(n \Delta f) \int_{-T}^T e^{j2\pi(n \Delta f - f)t} dt.$$

Для $X(f)$ остаточно отримуємо

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n \Delta f) \frac{\sin 2\pi T(f - n \Delta f)}{2\pi T(f - n \Delta f)}; \Delta f = 1/2T. \quad (4.1)$$

Це інтерполяційна формула Котельникова (теорема відліків) в частотній області. Функція $X(f)$ на будь-якій частоті f однозначно представляється послідовністю своїх відліків, взятих через рівні інтервали $f = 1/2T$.

Дискретизація спектральної функції з кроком $f = 1/2T$ призводить до періодичного повторення сигналу по осі часу з періодом $2T$. При цьому ефекту накладення окремих періодів один на одного не буде, оскільки крок дискретизації по частоті обраний відповідно до теореми відліків в спектральній області. Виділивши один з періодів, наприклад, при $t \in [-T, T]$, можна точно відновити спектральну функцію $X(f)$.

ДИСКРЕТИЗАЦІЯ ЕНЕРГЕТИЧНОГО СПЕКТРУ

Всі фізичні сигнали володіють кінцевою енергією, яка може розглядатися як в часовій, так і в спектральній областях, при цьому справедливий рівність Парсеваля:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df.$$

Функція, що входить в правий інтеграл $|X(f)|^2$ має розмірність спектральної щільності енергії і називається *енергетичним спектром*. Нехай сигнал дорівнює нулю поза інтервалом $[-T, T]$. Відповідно до теореми відліків визначимо крок дискретизації функції $|X(f)|^2$. За теоремою про згортку перетворення Фур'є

$$|X(f)|^2 = X(f) \cdot X^*(f) \Leftrightarrow x(t) \otimes x(-t).$$

Оскільки сигнал $x(t)$ має тривалість $2T$, то згортка $x(t) \otimes x(-t)$ має тривалість $4T$. Тому крок дискретизації функції $|X(f)|^2$ повинен задовольняти нерівності $f \leq 1/4T$.

БАЗА СИГНАЛУ

Будемо вважати, що сигнал $x(t)$ тривалістю T дискретизованого у часі з кроком $t = T/N$. Крок дискретизації по частоті відповідно (4.1) повинен бути рівним

$$\Delta f = 1/T = 1/N \Delta t = f_d / N.$$

За теоремою відліків $f_d = 2f_b$, де f_b верхня межа спектру. Зрозуміло, що для сигналів кінцевої тривалості значення f_b досить умовне, при цьому часто припускається нехтування спектральними складовими вищого порядку. Тому число точок дискретизації спектру $X(f)$ рівне

$$2f_b / \Delta f = 2f_b \cdot N / f_d = N.$$

Таким чином, сигнал $x(t)$ має кінцеву тривалість T і спектральну функцію $X(f)$ наближено обмежену інтервалом $[-f_b; f_b]$, і за часом, і за частотою буде визначатися

$$N = T / \Delta t = 2f_b T$$

своїми миттєвими значеннями. Число $N = 2f_b T$ є розмірністю простору сигналів, обмежених за тривалістю і за частотою, і називається *базою сигналу*. Для T -періодичного сигналу має місце представлення рядом Фур'є:

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(t - mT) \approx \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} c_n e^{j2\pi n \Delta f t},$$

де коефіцієнти Фур'є

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi n \Delta f t} dt = \Delta f X(n \Delta f),$$

$\Delta f = 1/T$ - відстань між гармоніками в спектрі, рівне кроку дискретизації по частоті.

Ці відповідності можна виразити наступними словами: *дискретизація сигналу за часом призводить до періодичного повторення спектру, і, навпаки, дискретизація спектру призводить до періодичного повторення сигналу.*

ДИСКРЕТИЗАЦІЯ СМУГОВИХ РАДІОСИГНАЛІВ

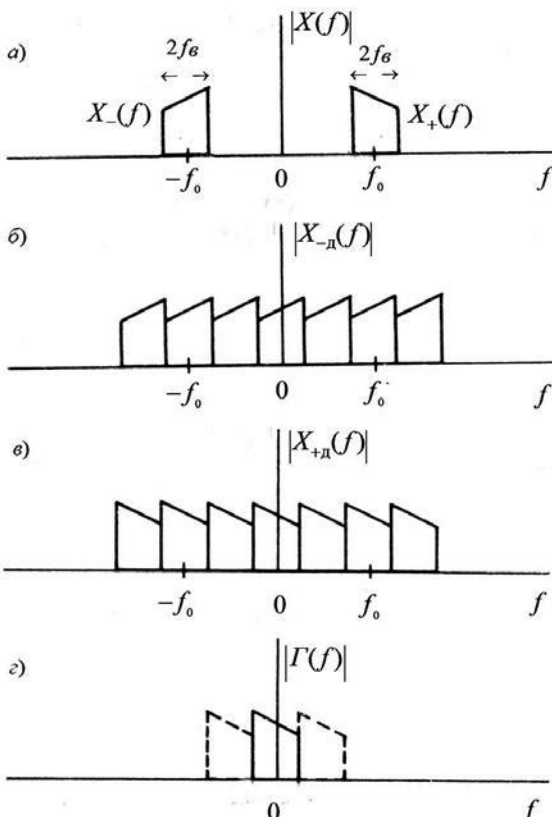


Рисунок. 4.7

Розглянемо вузькосмуговий сигнал, у якого спектр обмежений смугою частот $|f| \in [f_0 - f_b, f_0 + f_b]$, причому $f_0 \gg 2f_b$ (рис. 4.7 а). Прикладом є сигнал з амплітудною і фазовою модуляцією x

$$x(t) = A(t) \cos[2\pi f_0 t + \phi(t)],$$

Відповідно до теореми відліків для такого сигналу необхідна частота дискретизації $f_d = 2(f_0 + f_b)$ може виявитися дуже високою (за межами швидкодії АЦП). Рівномірна дискретизація з кроком $t = 1/2f_b$ виявляється недостатньою, оскільки складові $X_+(f)$ і $X_-(f)$ при періодичному продовженні з періодом $f_d = 2f_b$ будуть накладатися один на одного, в результаті часткові спектри будуть відрізнятися від вихідного і точне відновлення сигналу по його дискретним відлікам стає неможливим. Тим не менше, для смугових сигналів існують методи дискретизації з частотою $2f_b$ які дозволяють зберегти інформацію, необхідну для відновлення вхідного сигналу. Подальший виклад ґрунтується на комплексному поданні сигналів. Далі розглянемо методи дискретизації смугових сигналів.

ДИСКРЕТИЗАЦІЯ АНАЛІТИЧНОГО СИГНАЛУ

Природно застосувати метод виключення складових з негативними частотами $X_-(f)$. Це еквівалентно формування аналітичного сигналу $x_A(t) = x(t) + jx_I(t)$, де $x_I(t)$ - сигнал,

отриманий пропусканням $x(t)$ через перетворювач Гільберта (лінійний фільтр з передавальною функцією $H(f) = -j\text{sign}f$). Перетворення Гільберта може бути наближено виконано за допомогою фазообертача, працюючого у вузькій смузі частот $[f_0 - f_\epsilon, f_0 + f_\epsilon]$. Характерно, що спектр аналітичного сигналу $X_A(f) = 2 X_+(f)$ містить тільки складові з позитивними частотами.

При дискретизації аналітичного сигналу $x_A(t)$ з кроком $t = 1/2f_b$ його спектр перетвориться в періодичне продовження $2X_+(f)$ з періодом $f_d = 2 f_b$ (рис. 4.7 в). Так як часткові спектри $2X_+(f + n f_d)$ не перекриваються, можливо точне відновлення $x_A(t)$ по виборках $x_A(k t)$.

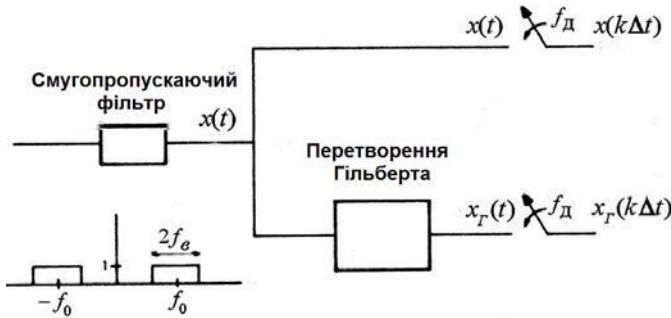


Рисунок. 4.8. Дискретизація аналітичного сигналу

На рис. 4.8 наведена схема дискретизації аналітичного сигналу. Як видно з цього малюнка, вихідний сигнал $x(t)$ попередньо фільтрується смуговим фільтром. Це необхідно для ослаблення ефекту накладення часткових спектрів при дискретизації. У схемі діють два синхронно працюючих дискретизатори (АЦП), обслуговуючих відповідно дійсний і уявний канали обробки.

Для відновлення $x_A(t)$ по виборках $x_A(k t)$ необхідний смуговий фільтр з передавальною характеристикою

$$h(f) = \begin{cases} 1, & \text{при } f_0 - f_\epsilon \leq f \leq f_0 + f_\epsilon, \\ 0, & \text{при других } f. \end{cases}$$

Комплексна імпульсна характеристика цього фільтра має вигляд

$$h(t) = \frac{\sin 2\pi f_\epsilon t}{\pi t} e^{j 2\pi f_0 t}.$$

Дійсна частина коливання, отриманого на виході фільтра, дає вихідний дійсний сигнал. Взяття дійсної частини еквівалентно формуванню частини спектра в області негативних частот.

Низькочастотна копія спектру $\Gamma(f)$ зображена на рис. 4.7 г суцільною лінією. При цьому передбачається, що $f_0/2f_b = m$, де m - ціле число. Цю умову можна виконати або вибором f_0 або додатковим зміщенням по частоті (гетеродинування сигналу). Низькочастотна копія спектру є спектром комплексної огибаючої $\gamma(t) = x_c(t) + jx_s(t) = A(t)e^{j\varphi(t)}$, яка містить всю обумовлену модуляцією інформацію.

Аналогічно, виключивши складові $X_+(f)$, можна сформувати спряжений аналітичний сигнал $x^*_A(t) = x(t) - jx(t)$. При дискретизації аналітичного сигналу $x^*_A(t)$ з кроком $t = 1/2f_b$ його спектр перетвориться в періодичне продовження $2X_-(f)$ з періодом $f_d = 2f_b$ (рис. 4.7 б). Для відновлення $x^*_A(t)$ по вибірках $x^*_A(k t)$ необхідний смуговий фільтр з імпульсною характеристикою

$$h^*(t) = \frac{\sin 2\pi f_\epsilon t}{\pi t} e^{-j 2\pi f_0 t}.$$

КВАДРАТУРНА ДИСКРЕТИЗАЦІЯ

Для смугового радіосигналу

$$x(t) = A(t) \cos[2\pi f_0 t + \varphi(t)] = x_c(t) \cos 2\pi f_0 t - x_s(t) \sin 2\pi f_0 t \quad (4.2)$$

квадратурні компоненти $x_c(t) = A(t) \cos \varphi(t)$ і $x_s(t) = A(t) \sin \varphi(t)$ являють собою низькочастотні сигнали зі спектром, обмеженим смугою $2f_b$, і повністю визначаються послідовностями

відліків $\{x_c(k t)\}$ і $\{x_s(k t)\}$, де $t = 1/2f_b$. Таким чином, в цьому методі спочатку здійснюється двоканальне синхронне детектування, а потім дискретизація квадратурних компонент з кроком $t = 1/2f_b$ (рис. 4.9).

Метод припускає перенесення спектру сигналу $x(t)$ з частоти f_0 на нульову частоту, що традиційно реалізується аналоговим способом, тобто із застосуванням аналогових помножувачів і ФНЧ. Принциповий недолік аналогових способів формування $x_c(t)$ і $x_s(t)$ - труднощі реалізації квадратурних каналів з ідентичними і стабільними характеристиками. Крім того, невеликий динамічний діапазон аналогових помножувачів знижує ефективність використання багаторозрядних АЦП для оцифровки відліків квадратур.

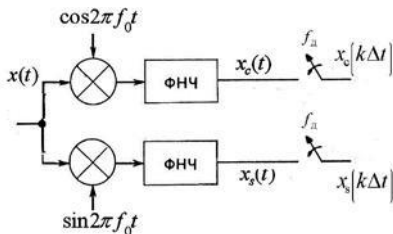


Рисунок. 4.9. Квадратурна дискретизація

У розглянутих методах дискретизація виконується з частотою $f_d = 2f_b$ комплексних відліків в секунду ($4f_b$ дійсних відліків в секунду). Ця величина значно менше частоти $f_d = 2(f_0 + f_b)$ необхідної за теоремою відліків.

Для відновлення вихідного смугового сигналу $x(t)$ по відлікам $\{x_c(k t)\}$ і $\{x_s(k t)\}$, спочатку за допомогою ІФНЧ відновлюються квадратури $x_c(t)$ і $x_s(t)$ а потім і сам сигнал $x(t)$, використовуючи співвідношення

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_c(k \Delta t) \frac{\sin 2\pi f_0(t - k \Delta t)}{2\pi f_0(t - k \Delta t)} \cos 2\pi f_0 t - \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_s(k \Delta t) \frac{\sin 2\pi f_0(t - k \Delta t)}{2\pi f_0(t - k \Delta t)} \sin 2\pi f_0 t.$$

ФОРМУВАННЯ ВІДЛІКІВ КВАДРАТУР З ВІДЛІКІВ ВУЗЬКОСМУГОВОГО СИГНАЛУ

Поява швидкодіючих АЦП, що допускають роботу з частотою дискретизації 100 МГц і вище, робить можливим отримання цифрових відліків високочастотних коливань на виходах трактів багатьох радіоприймальних пристроїв. Далі, розглянемо спосіб формування відліків квадратурних компонент безпосередньо з відліків вузько смугового сигналу $x(t)$.

Виберемо крок дискретизації рівним

$$\Delta t = \frac{2n \pm 1}{4f_0}, \quad (4.3)$$

де f_0 - проміжна частота, n - ціле парне число. Відповідно до (4.3) крок дискретизації $x(t)$ обирається непарно-кратним чверті періоду коливання проміжної частоти f_0 . Тоді з урахуванням (4.2) маємо

$$\begin{aligned} x(k \Delta t) &= x_c(k \Delta t) \cos 2\pi f_0 k \Delta t - x_s(k \Delta t) \sin 2\pi f_0 k \Delta t \\ &= x_c(k \Delta t) \cos \pi k (n \pm 1/2) - x_s(k \Delta t) \sin \pi k (n \pm 1/2). \end{aligned}$$

Окремо для парних і непарних відліків отримаємо

$$x(2k \Delta t) = x_c(2k \Delta t) \cdot (-1)^k, \quad x(2k+1) \Delta t = x_s(2k+1) \Delta t \cdot (-1)^{k+n}.$$

Звідси

$$x_c(2k \Delta t) = x(2k \Delta t) \cdot (-1)^k, \quad x_s(2k+1) \Delta t = x(2k+1) \Delta t \cdot (-1)^{k+n}.$$

Таким чином, для формування відліків квадратурних компонент $x(k t)$ достатньо розділити відліки сигналу на парні і непарні і в отриманих підпоследовностях інвертувати знак кожного другого відліку (рис. 4.10). Зауважимо, що моменти взяття відліків квадратурних складових зсунуті на t , що можливо потребуватиме їх синхронізації.

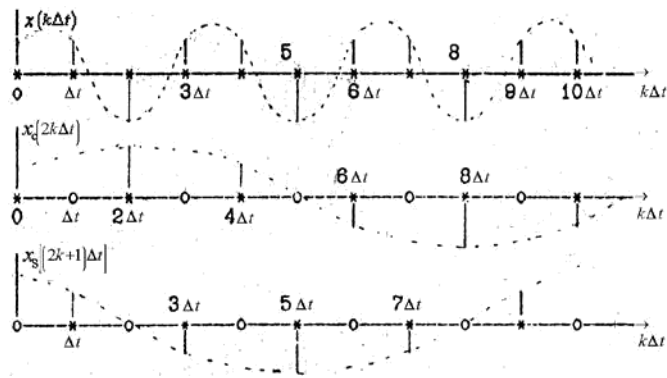
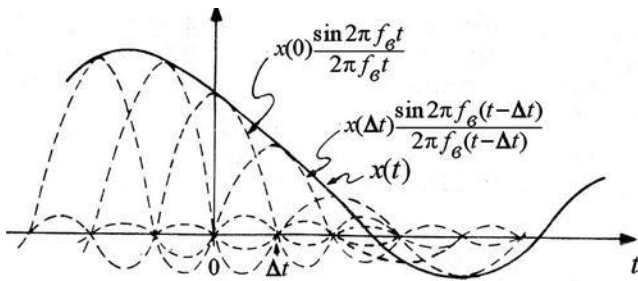


Рисунок 4.10

Відсутні відліки квадратур (в точках, позначених на рис. 4.10 кружками) можна отримати шляхом інтерполяції за допомогою цифрових інтерполяційних фільтрів (ЦІФ) нульового і першого порядку. У першому з них бракуючий відлік береться рівним попередньому відліку, а в другому - середньому арифметичному попереднього і наступного відліків. Найпростіший спосіб інтерполяції полягає в тому, що відсутні відліки квадратур замінюються нулями.

ВІДНОВЛЕННЯ СИГНАЛІВ ПО ЇХ ВІДЛІКАМ. ІДЕАЛЬНА ІНТЕРПОЛЯЦІЯ



Вираз ряду Котельникова означає, що значення сигналу $x(t)$ з обмеженим спектром між відліковими точками можна визначити за вибірками $x(k \ t)$ шляхом інтерполяції з використанням функцій $\frac{\sin 2\pi f_e t}{2\pi f_e t}$, як показано на рис. 4.11.

Рисунок. 4.11. Інтерпретація формули Котельникова як інтерполяційної формули

Відновлення аналогового сигналу $x(t)$ по його вибірках в принципі може бути здійснене за допомогою ідеального фільтра нижніх частот (ІФНЧ) з імпульсною реакцією

$$h(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq \Delta t / 2 \\ 0 & |t| > \Delta t / 2 \end{cases} \quad (t) = 2f_e \frac{\sin 2\pi f_e t}{2\pi f_e t}$$

що має нескінченну протяжність (рис. 4.12а). При цьому на вхід такого фільтра подається послідовність $\Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k \ \Delta t) \delta(t - k \ \Delta t)$ рівновіддалених δ -імпульсів з площами $\Delta t x(k \ \Delta t)$ (рис. 4.12б).

Інтерполяційна формула ряду Котельникова є по суті результатом згортки

$$x(t') = \Delta t \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k \ \Delta t) \delta(t' - k \ \Delta t) h_0(t' - t) dt. \quad \text{Використовуючи фільтруючу властивість дельта-функції, одержуємо}$$

$$x(t') = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k \ \Delta t) h_0(t' - k \ \Delta t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k \ \Delta t) \frac{\sin 2\pi f_e (t' - k \ \Delta t)}{2\pi f_e (t' - k \ \Delta t)}$$

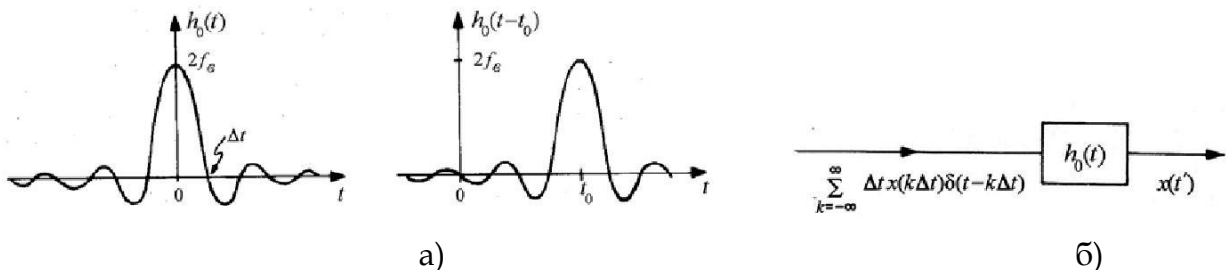


Рис. 4.12. а - імпульсна характеристика ІФНЧ без і з затримкою; б - схема відновлення аналогового сигналу

Оскільки $h_0 \neq 0$ при $t < 0$ то ІФНЧ не є причинним, а тому фізично не реалізується. Простим введенням затримки цю проблему вирішити не можна. Не існує таких значень t_0 для яких $h_0(t-t_0)$ була б строго рівна нулю при $t < 0$.

В спектральній області дію ІФНЧ ілюструє рис. 4.13. Частотна характеристика ІФНЧ $|H_0(f)| \equiv 0$ за межами смуги $[-f_b; f_b]$. Ідеальний фільтр фізично нездійснений через саму його суть, а не з причини відсутності необхідних технічних засобів.

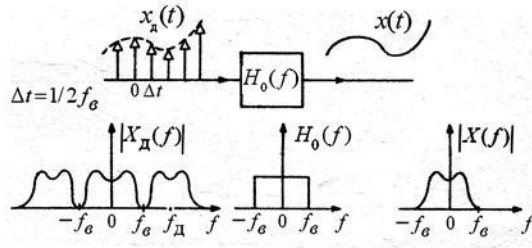


Рис. 4.13. Дія ІФНЧ в спектральній області

РЕАЛЬНІ ФІЛЬТРИ

Вимоги до відновлювачів фільтру можна істотно послабити, якщо вибором t забезпечити $f_c = f_d/2 = 1/2 t > f_b$. У цьому випадку спектр дискретизованного сигналу представляється у вигляді (рис. 4.14).

Наявність вільного інтервалу $(f_b, f_d - f_b)$ спрощує реалізацію фільтру, оскільки усувається необхідність різкого відсічення в частотній характеристиці $H(f)$ (рис. 4.14). З цієї причини на практиці крок дискретизації t вибирається так, щоб $f_d = (2...5) f_b$. При цьому якщо виконуються умови

$$|H(f)| = \begin{cases} \text{const} & \text{при } |f| \leq f_b, \\ \text{произвольная} & \text{при } f_b < |f| \leq f_d - f_b, \\ 0 & \text{при } |f| > f_d - f_b, \end{cases} \quad (4.4)$$

то спектр $X(f)$, а тому і сам сигнал відновлюється точно. Однак, для будь-якого реального фільтру третя умова (4.4) точно не виконується, тобто $|H(f)| \neq 0$ при $|f| > f_d - f_b$. Тому на вихід такого фільтру пройдуть спектральні компоненти вище частоти $f_d - f_b$ від сусідніх часткових спектрів. Крім того, реальний відновлюючий фільтр практично завжди відрізняється деякою нерівномірністю модуля АЧХ $|H(f)|$ і нелінійністю фазової характеристики $\arg H(f)$ в смузі $(-f_b, f_b)$ (рис. 4.15). Все це призводить до того, що виділений фільтром спектр не збігається з вихідним, тобто $X_d(f) \cdot H(f) \neq X(f)$, і відновлений сигнал буде відрізнятися від $x(t)$. На рис. 4.15 ідеальні АЧХ і ФЧХ відзначені цифрою 1, а реальні цифрою 2.

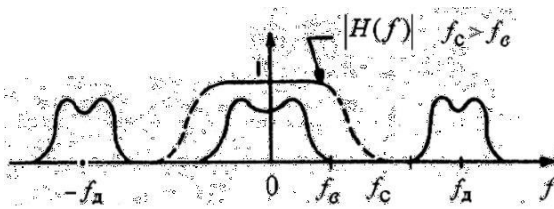


Рисунок 4.14

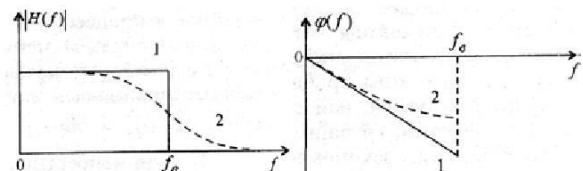


Рисунок 4.15

4. Надлишкова дискретизація і інтерполяція. Субдискретизація і децимація. Відтворення радіосигналу за відліками відеосигналу

Надлишкова дискретизація – процес збільшення частоти дискретизації АЦП в декілька разів понад значення, що задається теоремою Котельнікова для смугових сигналів у випадках, коли необхідно отримати більш детальну інформацію про огинаючу аналогового сигналу (системи фазового детектування, радіолокація), і коли послаблюються вимоги до аналогової частини приймального тракту (пряма дискретизація радіочастотного сигналу – цифрове перетворення вниз, послаблення вимог до крутизни характеристик вхідних фільтрів).

Інтерполяція – процес збільшення частоти відліків відновлення сигналу в ЦАП з метою більш точного відтворення огинаючої аналогового сигналу (модуляції вищих порядків, зменшення шумів квантування) та зменшення вимог до аналогових трактів передавача (прямий цифровий синтез радіочастотного сигналу, фільтри інтерполіатори).

ВІДНОВЛЕННЯ СИГНАЛІВ ЗА ВІДЛІКАМИ ШЛЯХОМ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ

Точне відновлення аналогового сигналу за його дискретним отсчетом припускає, що $x(t)$ має фінітний спектр, а фільтр відновлення є ідеальним. Практичний спосіб відновлення ґрунтується на апроксимації функції деяким поліномом, який збігається з $x(t)$ при $t = k\Delta t$, $k \in \mathbb{Z}$. Наприклад, можна розкласти $x(t)$ в ряд між моментами $k\Delta t$ і $(k+1)\Delta t$:

$$x(t) = x(k\Delta t) + x'(k\Delta t)(t - k\Delta t) + \frac{x''(k\Delta t)}{2!}(t - k\Delta t)^2 + \dots \quad (4.5)$$

де $x'(k\Delta t) = \frac{dx(t)}{dt} \Big|_{t=k\Delta t}$; $x''(k\Delta t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} \Big|_{t=k\Delta t}$.

Оскільки єдина інформація про $x(t)$ – її значення в дискретні моменти часу, то похідні повинні оцінюватися за цим значенням:

$$\begin{aligned} x'(k\Delta t) &= \frac{1}{\Delta t} [x(k\Delta t) - x((k-1)\Delta t)]; \\ x''(k\Delta t) &= \frac{1}{\Delta t^2} [x''(k\Delta t) - x'(k\Delta t) - x'(k\Delta t) - x'(k\Delta t)] = \\ &= \frac{1}{\Delta t^2} [x(k\Delta t) - 2x((k-1)\Delta t) + x((k-2)\Delta t)]. \end{aligned}$$

Видно, що чим вище порядок похідної, тим більше число попередніх вибірок вимагається. Можна легко переконатися, що число попередніх вибірок, необхідних для оцінки значення $x^{(n)}(k\Delta t)$, рівне n . Таким чином, описаний метод апроксимації припускає, що мається набір часових затримок, число яких залежить від точності апроксимації.

СТУПЕНЕВА ІНТЕРПОЛЯЦІЯ

У цьому випадку для апроксимації сигналу між двома послідовними вибірками використовується тільки перший член (4.5). Ступенева інтерполяція полягає в збереженні величини вибірки в межах кроку дискретизації (рис. 4.16).

ІНТЕРПОЛЯТОР НУЛЬОВОГО ПОРЯДКУ

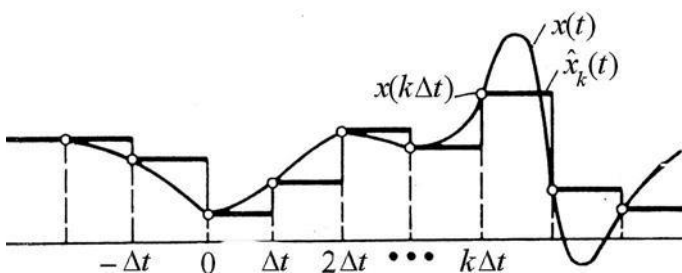


Рис. 4.16. Ступенева інтерполяція

Пристрій, що реалізує таку операцію, називається інтерполіатором нульового порядку (рис. 4.17а). З інтервалом t відбувається короткочасне замикання ключа, і в цей момент конденсатор просто «запам'ятовує» значення відліку сигналу (рис. 4.16).

Відповідно до (4.5):

$$\hat{x}_k(t) = x(k\Delta t), k\Delta t \leq t < (k+1)\Delta t.$$

Цей вираз визначає імпульсну реакцію $h(t)$ інтерполятора нульового порядку (фіксатора). Частотна характеристика, пов'язана з імпульсною реакцією перетворенням Фур'є, буде рівна

$$H(f) = \Delta t \frac{\sin \pi f \Delta t}{\pi f \Delta t} e^{-j\pi f \Delta t} = \frac{1}{f_{\Delta}} \frac{\sin(\pi f / f_{\Delta})}{\pi f / f_{\Delta}} \cdot e^{-j\pi f / f_{\Delta}}.$$

Обидві характеристики інтерполятора нульового порядку наведено на рис. 4.17 б,в. З рисунку видно, що інтерполятор нульового порядку має властивості низькочастотного фільтру. Однак на відміну від ідеального відновлюючого фільтра амплітудно-частотна характеристика інтерполятора звертається в нуль при $f = f_{\Delta}$ замість того, щоб різко спадати до нуля при $f = f_{\Delta}/2$.

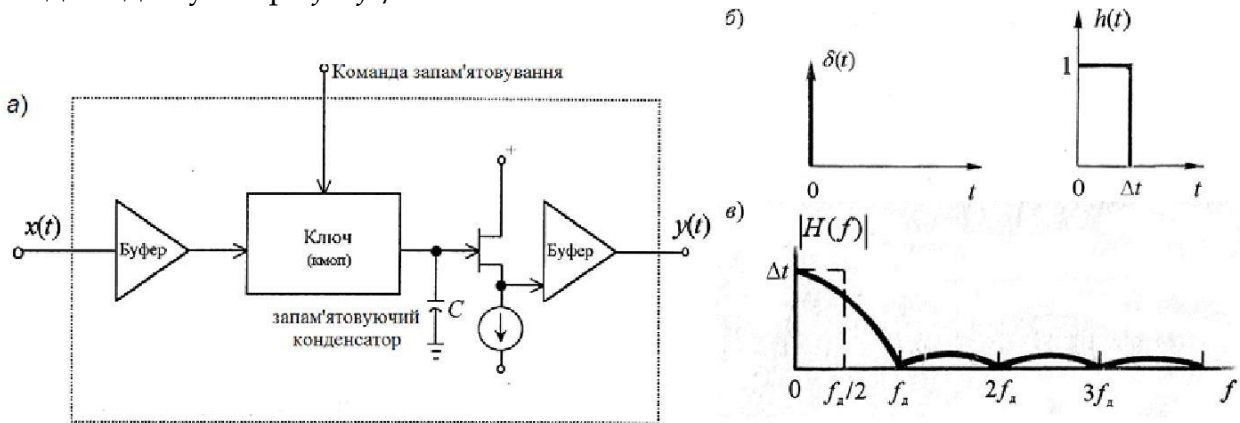


Рис. 4.17. Характеристики інтерполятора нульового порядку

Мінливість частотної характеристики в інформаційній смузі і наявність бічних пелюсток в $H(f)$ також погіршують його фільтруючі властивості. Тому на виході фіксатора часто включають додатковий ФНЧ, наприклад, фільтр у вигляді інтегруючого RC-ланцюга з постійною часу $RC = t/\pi$. Точність інтерполятора нульового порядку істотно залежить від частоти дискретизації.

Щоб отримати структурну схему інтерполятора нульового порядку, перепишемо в наступному вигляді:

$$H(f) = \Delta t \frac{e^{j\pi f \Delta t} - e^{-j\pi f \Delta t}}{j 2\pi f \Delta t} e^{-j\pi f \Delta t} = \frac{1 - e^{-j2\pi f \Delta t}}{j 2\pi f}$$

Тут $e^{-j2\pi f t}$ – частотна характеристика пристрою затримки на час t , а $1/j2\pi f$ – частотна характеристика інтегратора. Таким чином, інтерполятор нульового порядку може бути реалізований за допомогою пристрою затримки на t , віднімаючого пристрою та інтегратора, як показано на рис. 4.18.

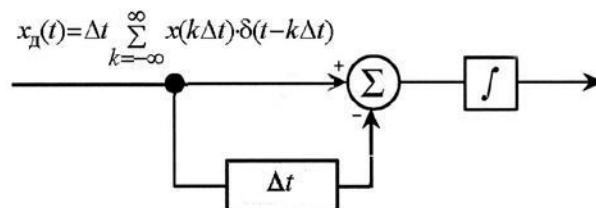


Рис. 4.18. Блок-схема інтерполятора нульового порядку ЛІНІЙНА ІНТЕРПОЛЯЦІЯ

При лінійній інтерполяції вершини дискрет з'єднуються прямолінійними відрізками (рис. 4.19а). Відповідний поліном містить два перших члена у виразі (4.5):

$$\begin{aligned} \hat{x}_k(t) &= x(k\Delta t) + x'(k\Delta t)(t - k\Delta t) = \\ &= x(k\Delta t) + \Delta t \int_{k\Delta t}^t [x'(k\Delta t) - x'((k-1)\Delta t)](t - k\Delta t) dt. \end{aligned}$$

Пристрій, що реалізує цей вираз, називається інтерполятором першого порядку. У цьому пристрої для кожної вибірки $x(k\Delta t)$ формується відгук, який має вигляд рівнобедреного трикутника. Амплітуди цих трикутних імпульсів дорівнюють (пропорційні) вибірковим значенням, а тривалості в основі повинні бути $2\Delta t$ (рис. 4.19 б). При цьому вихідний сигнал виявляється затриманим щодо вихідного на один крок дискретизації t . Імпульсна реакція $h(t)$ і частотна характеристика $H(f)$ інтерполятора першого порядку наведено на рис. 4.19 б, в відповідно.

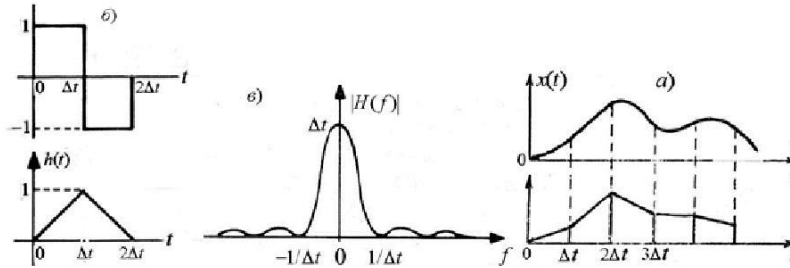


Рисунок 4.19. Характеристики інтерполятора першого порядку

Інтерполятор першого порядку може бути реалізований за допомогою схеми:

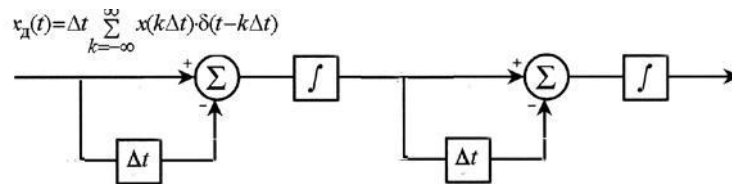


Рисунок 4.20. Блок-схема інтерполятора першого порядку

Точність відновлення сигналу набагато вище, ніж при ступеневій інтерполяції. Це пов'язано з тим, що крутизна схилів частотної характеристики більша, а рівень бічних пелюсток менший, ніж у фіксаторі нульового порядку. Можна показати, що для відновлення синусоїдального сигналу з використанням фіксатора першого порядку частота дискретизації повинна задовольняти нерівності

$$f_d \geq f_0 (2,2 \sqrt{\epsilon}), \text{ де } \epsilon = \frac{|x(t) - \hat{x}(t)|_{\max}}{|x(t)|_{\max}}.$$

Так, наприклад, якщо $\epsilon = 0,01$, то $f_d \geq 22f_0$ тобто частота дискретизації повинна бути приблизно в 10 разів більше частоти, необхідної за теоремою відліків.

СУБДИСКРЕТИЗАЦІЯ СМУГОВИХ РАДІОСИГНАЛІВ

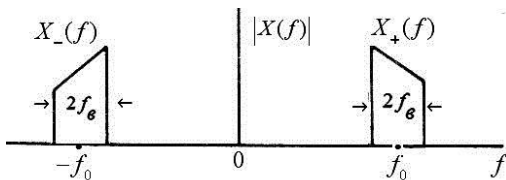


Рисунок 4.21 інформаційну смугу $2f_b$.

Розглядаємо вузькосмуговий сигнал з спектром виду рис. 4.21. Субдискретизація смугових радіосигналів припускає, що частота дискретизації повинна бути в два рази вищою не абсолютно найвищої частоти $f_0 + f_b$, а величини, що характеризують

Однак, правильна субдискретизація накладає деякі обмеження. Розглянемо їх докладніше.

Якщо граничні частоти спектру $f_0 - f_b$ і $f_0 + f_b$ кратні його ширині $2f_b$ тобто якщо

$$f_0 - f_b = m(2f_b), \text{ м } \in \mathbb{N} \quad (4.6)$$

то частоту дискретизації можна взяти рівною f_d

$$= 4f_b.$$

Періодичне повторення прямого і інверсного спектрів, викликане дискретизацією смугового сигналу, показано на рис. 4.22.

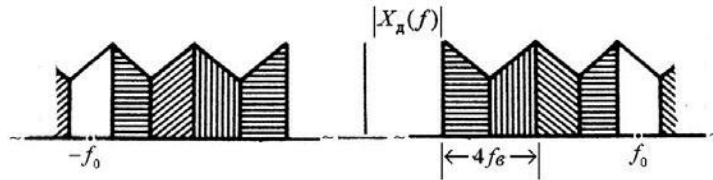


Рисунок 4.22

Така щільна упаковка відображень спектрів $X_+(f)$ і $X_-(f)$ практично не може бути використана, оскільки умова (4.6) найчастіше не виконується. Крім того, доводиться рахуватися з ефектом накладення через нефінітності спектрів.

Для знаходження частоти дискретизації f_D необхідно використовувати умову, що m і $m+1$ переносів $X_-(f)$ не дають перетинів з $X_+(f)$. Перетини відсутні, якщо виконані нерівності (рис. 4.23):

$$-f_0 + f_\epsilon + m f_D < f_0 - f_\epsilon, \quad (4.7)$$

$$-f_0 - f_\epsilon + (m+1) f_D > f_0 + f_\epsilon.$$

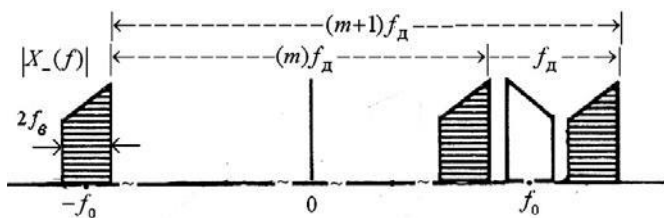


Рисунок 4.23

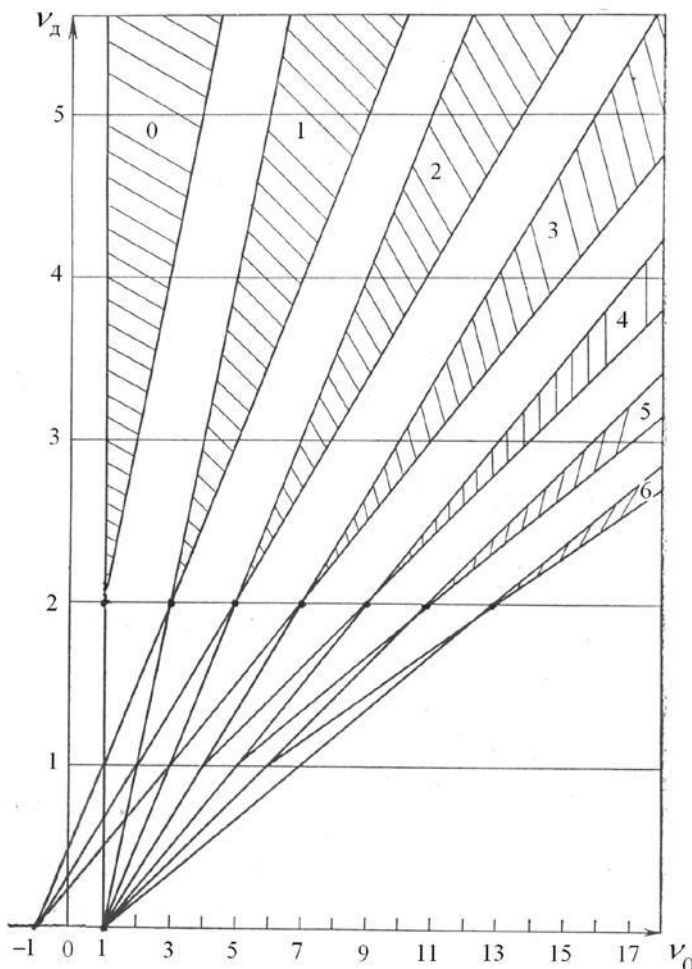


Рисунок 4.24. Зони вибору частоти субдискретизації

З (4.7) отримуємо $m f_D < 2(f_0 - f_\epsilon)$,
 $(m+1) f_D > 2(f_0 + f_\epsilon)$ або

$$\frac{2(f_0 + f_\epsilon)}{m+1} < f_D < \frac{2(f_0 - f_\epsilon)}{m}. \quad (4.8)$$

Субдискретизація можлива, якщо $\frac{(f_0 + f_\epsilon)}{m+1} < \frac{f_0 - f_\epsilon}{m}$, тобто

$$m < \frac{f_0 - f_\epsilon}{2f_\epsilon}. \quad (4.9)$$

Число m називається порядком субдискретизації. Нерівності (4.8) перепишемо у вигляді

$$\frac{f_0}{f_\epsilon + 1} < \frac{f_D}{2f_\epsilon} < \frac{f_0}{f_\epsilon - 1}. \quad (4.10)$$

Введемо нормовані частоти $v_0 = \frac{f_0}{f_\epsilon}$ і $v_D = \frac{f_D}{2f_\epsilon}$. Тоді нерівності (4.10) приймають вид

$$\frac{v_0 + 1}{m+1} < v_D < \frac{v_0 - 1}{m}. \quad (4.11)$$

Таким чином, знаючи центральну нормовану частоту $\nu_0 = f_0 / f_e$, можна побудувати всі зони, всередині яких розташовані значення $\nu_d = f_d / 2 f_e$ (рис. 4.24).

Оскільки загальна протяжність спектру $X_+(f)$ і $X_-(f)$ дорівнює $4f_b$, то за відсутності перекриттів для всіх зон повинно бути виконано нерівність

$$f_d > 4f_b \text{ або } \nu_d > 2 \quad (4.12)$$

Практичний інтерес представляє вибір мінімально можливої частоти дискретизації. Такий вибір відповідної мінімальної ординати вище значення $\nu_d = 2$. Наприклад, при $\nu_0 = 8$ мінімальна частота дискретизації виходить при виборі порядку субдискретизації $m = 3$. З (4.11) при цих значеннях ν_0 і m отримуємо

$$\frac{9}{4} < \nu_d < \frac{7}{3} \text{ або } 2,25 < \nu_d < 2,33.$$

Отже, субдискретизація – процес зниження частоти дискретизації f_d сигналу, значно нижче значення, необхідного за теоремою відліків на максимально можливий порядок, що визначається порядком субдискретизації m .

ДЕЦИМАЦІЯ

Децимація – процес пониження частоти дискретизації після аналогово-цифрового перетворення в M раз шляхом виключення кожних $M-1$ відліків оцифрованого сигналу з метою відсічення його високочастотних складових (фільтрація), що не несуть корисної інформації, при цьому початковий сигнал можна відновити процесами інтерполяції. Проводиться разом з процесом надлишкової дискретизації. Результат децимації в часовій та частотній площинах відображено на рисунках 4.25 та 4.26 відповідно

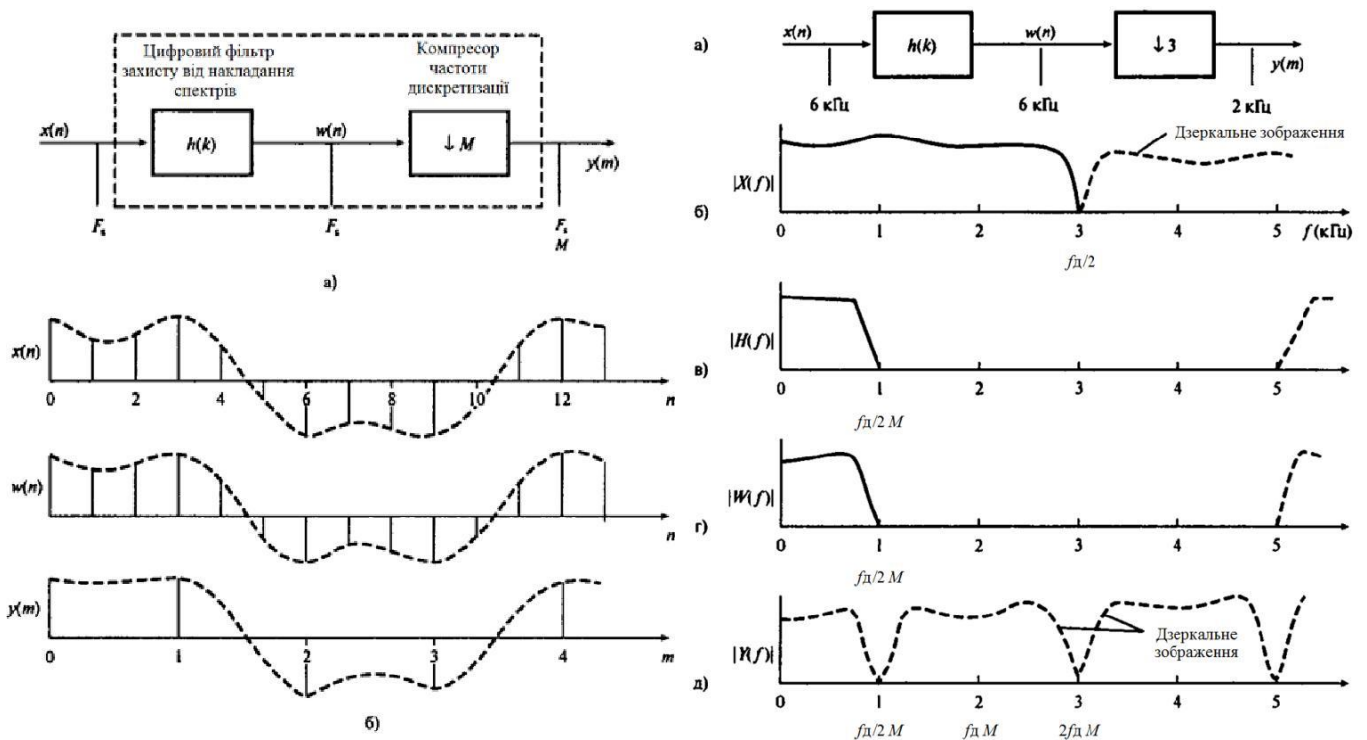


Рисунок 4.25 Рисунок 4.25 ВІДТВОРЕННЯ РАДІОСИГНАЛУ ЗА

ВІДЛІКАМИ ВІДЕОСИГНАЛУ

Виходячи з властивості спектру (відеосигналу) відновленого корисного сигналу в основній смузі частот періодично повторюватися на виході ЦАП в зонах Найквіста з періодом f_d та можливостей, що надають інтерполятори, можливо відновляти високочастотний радіосигнал чи сигнал проміжної частоти за інформацією про огинаючу відеосигналу (сигналу в основній смузі частот), використовуючи на виході ЦАП замість ФНЧ смугопропускаючі фільтри (СПФ) налаштовані на відповідну зону

Найквіста ($\Delta f_n \in [(k-1) f_n; k f_n)$, $k \in \mathbf{N}$ – номер зони найквіста]), як на рис. 4.26. Таким чином відбувається прямий цифровий синтез радіосигналу. В випадку , що зображено на рис. 4.26 дуже мала частина енергії припадає на відновлюваний радіо сигнал. Для збільшення його енергетики проводять цифрове перетворення по частоті вверх шляхом інтерполяції, тобто модуляції сигналу в цифровому вигляді. Результат використання інтерполяції і СПФ відображено на рис. 4.27 (а – до, б - після).

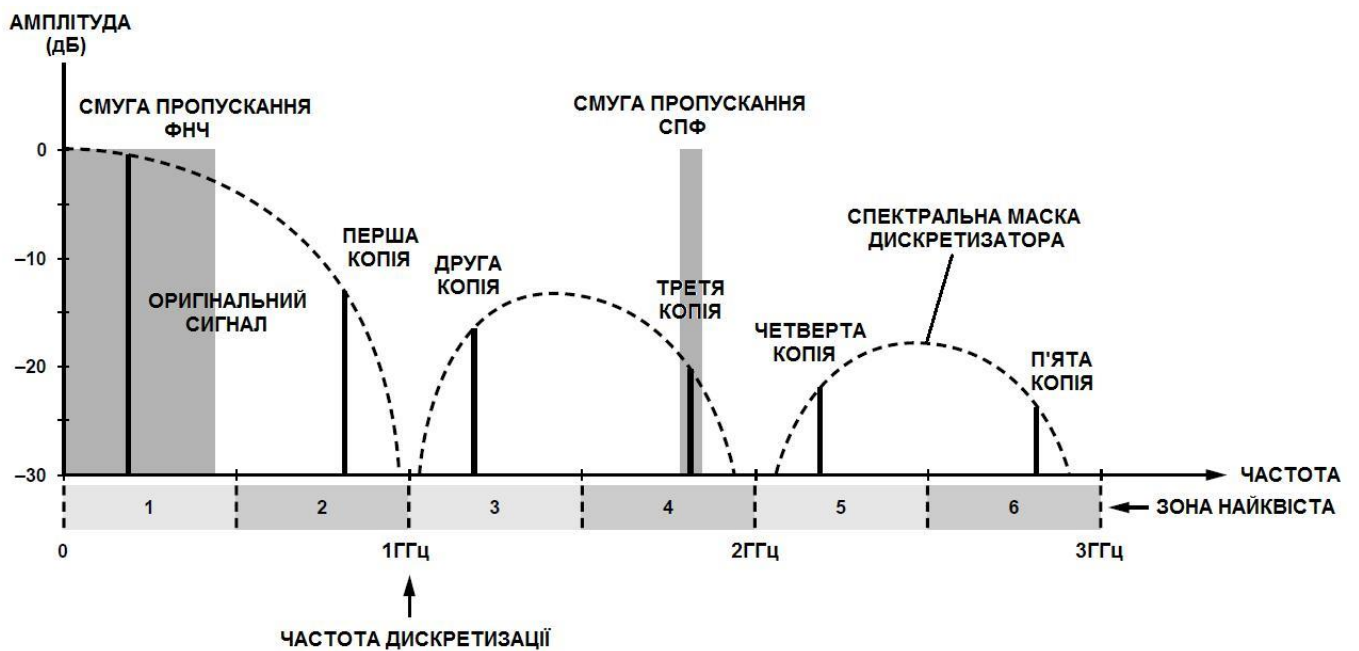
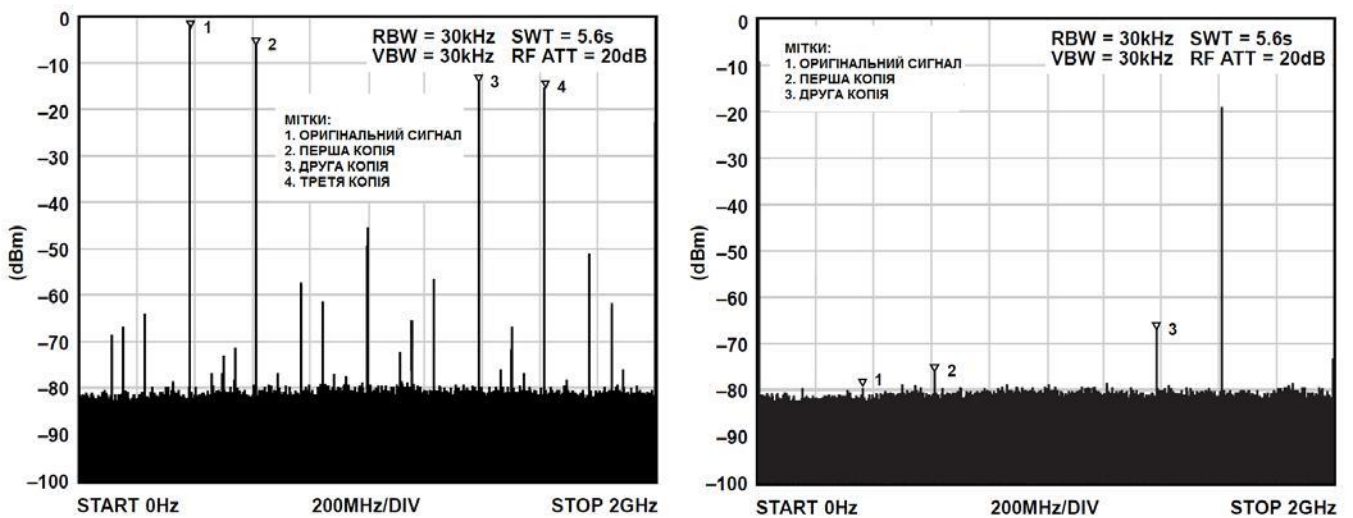


Рисунок 4.26



а б Рисунок 4.27

ТЕМА 1.3. Дискретні системи та цифрові фільтри

§1.5 ЛЕКЦІЯ 5. Дискретні системи.

1. Дискретні лінійні системи (ЛДС) з постійними параметрами. Цифровий фільтр (ЦФ) як дискретна лінійна система. Різницеві рівняння дискретних лінійних систем. Нерекурсивні (НЦФ) та рекурсивні (РЦФ) цифрові фільтри.
2. Перетворення Лапласа (s-перетворення). Z-перетворення. Перехід від перетворення Лапласа до Z-перетворення. Пряме Z-перетворення. Властивості Z-перетворення. Зворотне Z-перетворення.

Література: [1 §1.5; 8 §4; 9 §1.5, 1.6].

1. Дискретні лінійні системи з постійними параметрами. Цифровий фільтр як дискретна лінійна система. Різницеві рівняння дискретних лінійних систем. Нерекурсивні та рекурсивні цифрові фільтри.

ДИСКРЕТНІ ЛІНІЙНІ СИСТЕМИ

Дискретна система – це довільна система обробки дискретного сигналу, що володіє властивостями *лінійності* і *стаціонарності*. *Лінійною* є система, у якій вихідна реакція на суму сигналів рівна сумі реакцій на ці сигнали, що подані на вхід окремо один від одного. *Стаціонарною* є система, у якій затримка вхідного сигналу на певний проміжок часу призводить до затримки вихідного сигналу на той же проміжок часу без зміни його форми. Практично всі дискретні фільтри є стаціонарними, окрім адаптивних. Дискретні системи, вихідна реакція яких отримується в результаті обробки декількох дискрет повинні володіти елементами пам'яті. Всі операції обробки сигналу в дискретних системах здійснюються на основі функцій додавання і множення.

В одномірній дискретній системі зв'язок між вхідним і вихідним сигналами (послідовностями) $x(nT)$ та $y(nT)$ задається деяким оператором Φ :

$$y(nT) = \Phi\{x(nT)\}.$$

Оператор системи Φ - 1, реалізований апаратними або програмними засобами, називають алгоритмом обробки системи. По виду оператора дискретні системи класифікуються на лінійні та нелінійні, інваріантні та неінваріантні в часі (стаціонарність).

Лінійні дискретні системи (ЛДС) в часовій області математично описуються різницевиими рівняннями і дискретною часовою згортокою, які є аналогами диференціальних рівнянь та інтеграла згортки аналогових систем. Важливим прикладом ЛДС є *лінійний дискретний фільтр*, що описується лінійним різницевим рівнянням

$$\sum_{m=0}^{M-1} a_m y(nT - mT) = \sum_{k=0}^{N-1} b_k x(nT - kT), \quad (5.1)$$

де N, M – постійні дійсні числа; $n, m, k \in \mathbf{N}$; a_m, b_k – дійсні чи комплексні коефіцієнти, що не залежать від вхідного і вихідного сигналів. Нехай $a_0 = 1$, тоді (5.1) записується:

$$y(nT) = -\sum_{m=1}^{M-1} a_m y(nT - mT) + \sum_{k=0}^{N-1} b_k x(nT - kT). \quad (5.2)$$

Пристрій або програма, що реалізує різницеве рівняння (5.2) (виконує обробку сигналу відповідно до різницевого рівняння), називається *цифровим фільтром* (ЦФ).

Якщо хоча б один коефіцієнт залежить від змінної n (є функцією n чи поліном по n), то (5.2) описує параметричний (адаптивний) фільтр, тобто фільтр з змінними параметрами.

Далі розглядатимуться фільтри з постійними коефіцієнтами, тобто a_m, b_k в (5.2) не залежать від змінної n . Як видно з (5.2), значення вихідної послідовності $y(nT)$ в момент nT визначається N значеннями вхідної послідовності $x(nT)$ в моменти $nT, nT - T, nT - 2T$ і т.д. і $M-1$ значеннями самої вихідної послідовності в «минулі» моменти $nT, nT - T, nT - 2T$ і т.д.

Якщо відомі початкові умови: $y(-T), y(-2T), \dots, y(-(M-1)T)$, рівняння (5.2) дає можливість обчислювати всі значення $y(nT), n \in \mathbf{N}$, тобто рівняння (5.2) визначає алгоритм обчислення вихідної послідовності.

Фільтри, що описуються рівнянням (5.2), називаються рекурсивними або з нескінченною імпульсною характеристикою (НІХ). Їх найоптимальніше використовувати для розробки смугопропускаючих чи смугозагороджуючих фільтрів.

В окремому випадку, при $a_m = 0, m \in \mathbf{N}$, з (5.2) отримуємо

$$y(nT) = \sum_{k=0}^{N-1} b_k x(nT - kT), \quad (5.3)$$

тобто в цьому випадку значення вихідної послідовності в будь-який момент nT визначається лише значеннями вхідної послідовності в той же момент і $N-1$ «минулими» значеннями вхідної послідовності. Фільтри, що описуються рівнянням (5.3), називаються не рекурсивними або з скінченною імпульсною характеристикою (СІХ). Їх найоптимальніше використовувати для розробки фільтрів нижніх чи високих частот.

СТРУКТУРНІ СХЕМИ ДИСКРЕТНИХ ФІЛЬТРІВ

Алгоритми рекурсивних і не рекурсивних фільтрів можуть бути представлені у вигляді структурних схем, в яких використовуються реалізації трьох операцій – алгебраїчне додавання (рис.5.1а), множення сигналу на константу (рис.5.1б) і затримки сигналу на один інтервал дискретизації T (рис.5.1в).

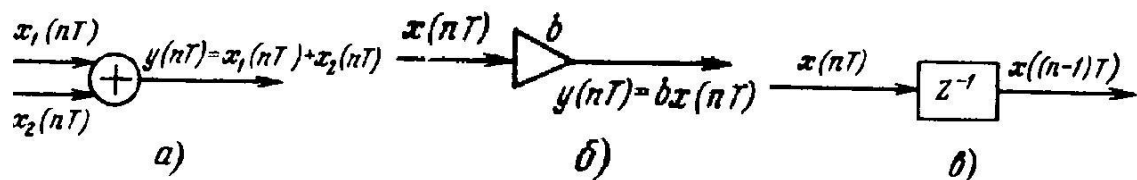


Рисунок 5.1. Елементарні операції ЛДС

Приклад реалізації рекурсивного фільтра відображено на рис.5.2

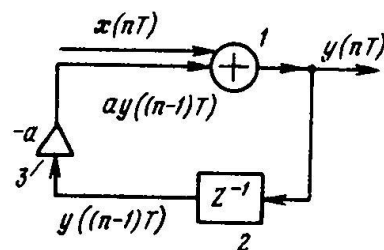


Рисунок 5.2. Структурна схема рекурсивного фільтра

Структурна схема лише вказує на те, які операції і в якій послідовності виконуються для отримання вихідного сигналу при програмній реалізації цифрового фільтра.

2. Перетворення Лапласа (s-перетворення). Z-перетворення. Перехід від перетворення Лапласа до Z-перетворення. Пряме Z-перетворення. Властивості Z-перетворення. Зворотне Z-перетворення.

ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА (S-ПЕРЕТВОРЕННЯ)

Деякі сигнали, що не задовольняють умові абсолютної інтегрованості, не можуть бути представлені у вигляді інтегралу Фур'є, оскільки для таких сигналів не визначена і не існує спектральна функція $X(\omega)$. Наприклад, функція стрибка напруги:

$$x(t) = \begin{cases} E, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

її спектральна функція

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = (E/j\omega) \left(1 - \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-j\omega t} \right)$$

не визначена, оскільки $\exp(-j\omega t)$ при $t \rightarrow \infty$ не прямує ні до якої межі.

Помножимо $x(t)$ на $\exp(-\beta t)$, де β - позитивна константа вибирається так, щоб коливання $x(t)\exp(-\beta t)$ було абсолютно інтегрованим. Тоді

$$X(\omega, \beta) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-\beta t} e^{-j\omega t} dt.$$

Для існування інтеграла будемо вважати сигнал причинним, тобто $x(t) = 0$ при $t < 0$. В цьому випадку

$$X(\omega, \beta) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-(\beta + j\omega)t} dt.$$

Зворотне перетворення має вигляд

$$x(t) e^{-\beta t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega, \beta) e^{j\omega t} d\omega.$$

Помножимо обидві частини цього виразу на $\exp(\beta t)$ і замінимо змінну інтегрування $p = \beta + j\omega$. Тоді два останні вирази набувають вигляду

$$X(p) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-pt} dt, \quad (5.4.1)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\beta - j\infty}^{\beta + j\infty} X(p) e^{pt} dp. \quad (5.4.2)$$

Ці рівняння є парою перетворення Лапласа, яке символічно позначається: $x(t) \Leftrightarrow X(p)$.

Функція $x(t)$ називається *оригіналом*, а функція $X(p)$ - *зображенням*. Перетворення Фур'є є окремим випадком перетворення Лапласа, в якому досить припустити, що $\beta = 0$. Зворотне перетворення (5.4.2) здійснюється шляхом інтегрування в комплексній площині p уздовж вертикальної прямої $(\beta - j\infty, \beta + j\infty)$ (рис. 5.3.1). Шлях інтегрування повинен проходити правіше полюсів підінтегральної функції $X(p)e^{pt}$. Утворимо замкнутий контур інтегрування додаванням до прямої $(\beta_1 - j\infty, \beta_1 + j\infty)$ дуги нескінченно великого радіусу так, щоб цей контур охоплював всі полюси підінтегральної функції (рис. 5.3.2). Тоді інтеграл (5.4.2) перетворюється в контурний і відповідно до теореми Коші про відліки може бути визначена таким чином:

$$x(t) = \frac{1}{j2\pi} \oint_{ABCA} X(p) e^{pt} dp = \sum_{k} \text{Res}_{p=p_k} \quad (5.5)$$

Права частина цього виразу дорівнює сумі відліків в полюсах підінтегральної функції. Важлива властивість контурного інтеграла: він не залежить від форми замкнутого контуру інтегрування.

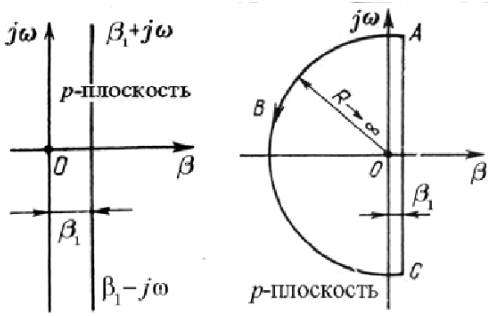


Рисунок 5.3.1 Рисунок 5.3.2

Перетворення Лапласа широко застосовується при аналізі перехідних процесів у лінійних аналогових системах, коли початок відліку часу суміщають з початком дії. Можливість враховувати початковий стан сигналу при $t = 0$ дає можливість застосовувати перетворення Лапласа для рішення лінійних диференціальних рівнянь з відомими початковими умовами.

Основні теореми перетворення Лапласа

Лінійності	$a x_1(t) + b x_2(t) \Leftrightarrow a X_1(p) + b X_2(p)$
Затримки	$x(t - T) u(t - T) \Leftrightarrow X(p) e^{-pT}, T > 0$
Множення на t	$t x(t) \Leftrightarrow -\frac{dX(p)}{dp}$
Множення на e^{-at}	$e^{-at} x(t) \Leftrightarrow X(p + a)$
Масштабування	$x(at) \Leftrightarrow \frac{1}{a} X\left(\frac{p}{a}\right), a > 0$
Диференціювання	$\frac{dx(t)}{dt} \Leftrightarrow pX(p) - x(0)$
Інтегрування	$\int_0^t x(\tau) d\tau \Leftrightarrow \frac{X(p)}{p}$
Згортки	$\int_0^t x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau \Leftrightarrow X_1(p) X_2(p)$

Основні властивості перетворення Лапласа

$x(t)$	\Leftrightarrow	$X(p)$
$\delta(t)$	\Leftrightarrow	1
$\sigma(t) = 1$	\Leftrightarrow	$\frac{1}{p}$
e^{-at}	\Leftrightarrow	$\frac{1}{p + a}$
$\sin \omega_0 t$	\Leftrightarrow	$\frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2}$
$\cos \omega_0 t$	\Leftrightarrow	$\frac{p}{p^2 + \omega_0^2}$
$e^{-at} \cos \omega_0 t$	\Leftrightarrow	$\frac{p + a}{(p + a)^2 + \omega_0^2}$

ПРЯМЕ Z - ПЕРЕТВОРЕННЯ

Для аналізу і синтезу ЛДС використовується Z-перетворення, оскільки S-перетворення Лапласа не має раціональних розв'язків для дискретних сигналів.

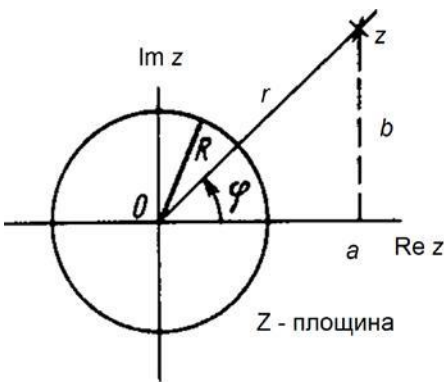


Рисунок 5.4. Z-площина

Z-перетворення послідовності $x(nT), n \in \mathbb{N}$, визначається рядом:

$$X(z) = Z\{x(nT)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) z^{-n} \quad (5.6)$$

де $z = re^{j\phi} = a + jb$ – комплексна змінна (рис.5.4). Множина значень z , де ряд (5.6) сходиться, називається областю сходимості; для рівномірної сходимості достатньо $\sum_{n=0}^{\infty} |x(nT) z^{-n}| = \sum_{n=0}^{\infty} |x(nT)| r^{-n} < \infty$. Область сходимості визначається радіусом кола R в z -площині (рис.5.4), поза яким ряд (5.6) сходиться

ПЕРЕХІД ВІД ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА ДО Z-ПЕРЕТВОРЕННЯ

Комплексна змінна z зв'язана з змінною p (оператором Лапласа) співвідношенням:

$$z = re^{j\varphi} = a + jb = e^{p t} = e^{(\beta + j\omega)\Delta t}$$

Цей зв'язок ілюструється відображенням точок з комплексної P -площини на комплексну Z -площину (рис.5.5, 5.6)

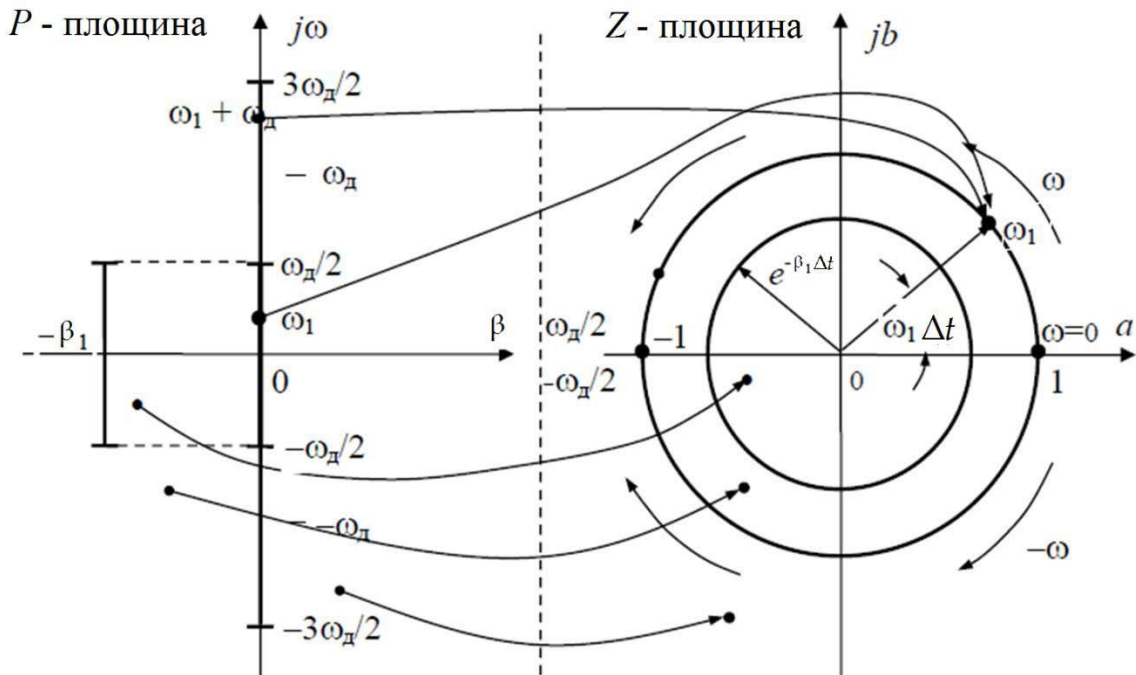


Рисунок 5.5. Відображенням точок з комплексної P -площини на комплексну Z -площину

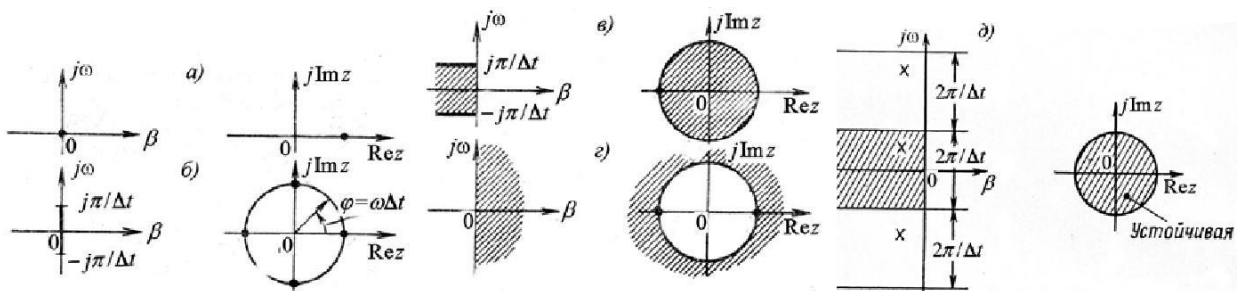


Рисунок 5.6. Відображенням областей точок з P -площини на Z -площину

Перехід від змінної p до змінної z відповідає відображенню площини p на площину z , в результаті якого лінії, паралельні $j\omega$, осі відображаються в концентричні кола з центром у початку координат. Сама вісь $j\omega$ відображається в одиничне коло, причому, коли ω змінюється від $-\pi/\Delta t$ до $\pi/\Delta t$, відображаюча точка здійснює один оберт на одиничному колі (рис. 5.6 б). Смуга шириною $\omega_d = 2\pi/\Delta t$ лівої півплощини p відображається всередину кола одиничного радіуса в площині z (рис. 5.6 в). Права півплощина p перетворюється у всю z -площину, виключаючи одиничний круг, рис. 5.6 г. Всі полюси функції $X(p)$, які розташовані в площині p на одній вертикалі з інтервалом $\omega_d = 2\pi/\Delta t$ відображаються в єдиний полюс $X(z)$ в площині z (рис. 5.6 д). Функція $X(p)$ відображається в функцію $X(z)$ так, що одному періоду $X(p)$ відповідає один оборот по колу в площині z . Відзначимо ще, що $e^{-p t}$ відповідає затримці на один інтервал дискретизації в площині p , в той час як z^{-1} означає таку ж затримку в площині z .

ВЛАСТИВОСТІ Z-ПЕРЕТВОРЕННЯ

1. **Лінійність.** Якщо послідовності $x_1(nT)$ і $x_2(nT)$ мають відповідні Z -перетворення $X_1(z)$ і $X_2(z)$, a_1, a_2 – постійні коефіцієнти, незалежні від n , то $y(nT) = a_1 x_1(nT) + a_2 x_2(nT)$ має Z -перетворення $Y(z) = a_1 X_1(z) + a_2 X_2(z)$.

2. Зсув послідовності. Якщо $Z\{x(nT)\} = X(z)$ і $x(nT) = 0$ при $n < 0$, то $y(nT) = x(nT - mT)$

має Z-перетворення $Y(z) = Z\{x(nT - mT)\} = z^{-m} X(z)$.

3. Згортка послідовностей. Нехай $X_1(z) = Z\{x_1(nT)\}$, $X_2(z) = Z\{x_2(nT)\}$. Згортка послідовностей $x_1(nT)$ і $x_2(nT)$ $y(nT) = \sum_{m=0}^n x_1(mT)x_2(nT - mT) = \sum_{m=0}^n x_1(nT - mT)x_2(mT)$ має Z-перетворення $Y(z) = X_1(z)X_2(z)$.

4. Перемноження послідовностей. Якщо $X_1(z) = Z\{x_1(nT)\}$, $X_2(z) = Z\{x_2(nT)\}$, то послідовність $y(nT) = x_1(nT)x_2(nT)$ має Z-перетворення

$$Y(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X_1(v) X_2\left(\frac{z}{v}\right) \frac{dv}{v}$$

ЗВОРОТНЕ Z-ПЕРЕТВОРЕННЯ

Зворотне Z-перетворення ставить у відповідність функції комплексної змінної $X(z)$ послідовність $x(nT) = Z^{-1}\{X(z)\}$, що визначається за формулою

$$x(nT) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{n-1} dz, \quad (5.7)$$

де c - контур, розташований в області сходимості $X(z)z^{n-1}$ і охоплює початок координат в z -площині. Інтеграл (5.7) зручно обчислити за допомогою теореми відліків: функція $x(nT)$ визначається сумою відліків підінтегральної функції в полюсах, розміщених в області, що охоплюється контуром c :

$$x(nT) = \sum_{z_k} \text{Res}_{z_k} (X(z) z^{n-1}),$$

причому відлік в простому полюсі $z = z_k$ рівний

$$\text{Res}_{z_k} (X(z) z^{n-1}) = \lim_{z \rightarrow z_k} ((z - z_k) X(z) z^{n-1}).$$

Z-перетворення елементарних функцій

$x(nT), n=0, 1, 2, \dots$	$X(z)$
$\delta(nT)$	1
$u_0(nT)$	$1/(1 - z^{-1})$
a^n	$1/(1 - az^{-1}), a < 1$
n	$z^{-1}/(1 - z^{-1})^2$
na^n	$z^{-1}/(1 - az^{-1})^2$
$\binom{m}{n} = \frac{m!}{(n-m)!n!}$	$(1 + z^{-1})^m, m \leq n$
$\sum_{m=1}^n m^{-1}$	$\frac{1}{1 - z^{-1}} \ln \frac{1}{1 - z^{-1}}$
$e^{j\omega nT}$	$1/(1 - e^{j\omega T} z^{-1})$
$\sin \omega nT$	$(\sin \omega T) z^{-1}$
$\cos n\omega T$	$\frac{z^{-2} - (2\cos \omega T) z^{-1} + 1}{(1 - \cos \omega T) z^{-1}}$
	$\frac{z^{-2} - (2\cos \omega T) z^{-1} + 1}{z^{-2} - (2\cos \omega T) z^{-1} + 1}$

Зручний спосіб обчислення зворотного Z-перетворення полягає в розкладанні $X(z)$ на прості дроби:

$$X(z) = \sum_{k=1}^N \beta_k / (1 - \alpha_k z^{-1}).$$

В даному випадку використовуючи властивість лінійності знайдемо

$$x(nT) = \sum_{k=1}^N \beta_k (\alpha_k)^n.$$

§1.6 ЛЕКЦІЯ 6. Цифрові фільтри.

1. Розв'язок різницевих рівнянь. Передавальні функції ЛДС/ЦФ.
2. Структурні схеми фільтрів. З'єднання фільтрів. Схеми НЦФ. Схеми РЦФ.
3. Часові характеристики ЦФ. Імпульсна характеристика. Зв'язок імпульсної характеристики з передавальною функцією. СІХ, НІХ фільтри.
4. Критерій стійкості. Критерій реалізуємості. Частотні характеристики ЦФ. Вимоги до АЧХ та ФЧХ ЦФ

Література: [1 §1.6; 9 §1.7-1.10].

1. Розв'язок різницевих рівнянь. Передавальні функції ЛДС/ЦФ.

РОЗВ'ЯЗОК РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ

Z-перетворення є зручним апаратом для вирішення різницевих рівнянь з постійними коефіцієнтами. Нехай зв'язок послідовностей $y(nT)$ і $x(nT)$, $n \in \mathbf{N}$, описується різницевим рівнянням

$$\sum_{m=0}^{M-1} a_m y(nT - mT) = \sum_{k=0}^{N-1} b_k x(nT - kT) . \quad (6.1)$$

Застосовуючи Z-перетворення до обох частин (6.1) і враховуючи властивості лінійності і зсуву, знаходимо

$$\sum_{m=0}^{M-1} a_m z^{-m} Y(z) = \sum_{k=0}^{N-1} b_k z^{-k} X(z) \quad (6.2)$$

де $Y(z)$ і $X(z)$ відповідно Z-образи функцій $y(nT)$ і $x(nT)$. З (6.2) знаходимо

$$Y(z) = H(z)X(z), \text{ де } H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} b_k z^{-k}}{\sum_{m=0}^{M-1} a_m z^{-m}} .$$

Застосовуючи зворотне Z-перетворення, визначаємо по відомій $x(nT)$ послідовність $y(nT)$. Якщо, наприклад, $x(nT) = \delta(nT)$, то $X(z) = 1$, $Y(z) = 1/(1-0,5z^{-1})$, тоді $y(nT) = (0,5)^n$.

Приклад 6.1. Нехай задано різницеве рівняння $y(nT) - 0,5y(nT-T) = x(nT)$ і $y(-T) = 0$. Застосовуючи Z-перетворення до обох частин рівняння, отримуємо $Y(z) - 0,5z^{-1}Y(z) = X(z)$, звідки $Y(z) = [1/(1-0,5z^{-1})]X(z)$

ПЕРЕДАВАЛЬНІ ФУНКЦІЇ ЛІНІЙНИХ ДИСКРЕТНИХ СИСТЕМ

Передавальною функцією лінійної дискретної системи фільтра $H(z)$ є вираз

$$H(z) = Y(z)/X(z), \quad (6.3)$$

де $X(z)$ - Z-зображення вхідної послідовності $x(nT)$ системи, а $Y(z)$ - Z-зображення вихідної послідовності $y(nT)$ системи при нульових початкових умовах.

Приклад 6.2. Нехай $x(nT) = \{1, 0, 1, 2\}$ і $y(nT) = \{0, 1, 2, 3\}$. При цьому

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)z^{-n} = 1 + z^{-2} + 2z^{-3}, Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y(nT)z^{-n} = z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3}$$

Тоді, передавальна характеристика відповідної системи (фільтра) $H(z) = \frac{z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3}}{1 + z^{-2} + 2z^{-3}}$.

Передавальна характеристика рекурсивного дискретного фільтра, описаного рівнянням (5.2), записується в наступному вигляді:

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{m=1}^{M-1} a_m z^{-m}} , \quad (6.4)$$

де b_k, a_m - постійні ($a_0 = 1$). Співвідношення (6.4) отримується в результаті застосування Z-перетворення до лівої і правої частин рівняння (5.2) і визначення $H(z)$ згідно (6.3). Передавальна характеристика нерекурсивного фільтра, описаного рівнянням (5.3),

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} b_k z^{-k}. \quad (6.5)$$

Приклад 6.3. Знайдемо передавальну функцію фільтра, описаного рівнянням $y(nT) = ay(nT-T) + x(nT)$, де $a = \text{const}$, $y(-T) = 0$, $x(nT)$ - одиничний імпульс. Нехай $Y(z)$ і $X(z)$ Z-зображення вихідної $y(nT)$ і вхідної $x(nT)$ послідовностей. Тоді, застосувавши Z-перетворення при нульових початкових умовах, запишемо $Y(z) = az^{-1}Y(z) + X(z)$, звідки

$$H(z) = 1/(1 + az^{-1}).$$

Зауважимо, що передавальна функція рекурсивного фільтра (6.4) може бути представлена у вигляді прямого ділення чисельника на знаменник, наприклад,

$$H(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m z^{-m}. \quad (6.6)$$

де c_m - постійні коефіцієнти.

2. Структурні схеми фільтрів. З'єднання фільтрів. Схеми НЦФ. Схеми РЦФ

СТРУКТУРНІ СХЕМИ ДИСКРЕТНИХ ФІЛЬТРІВ

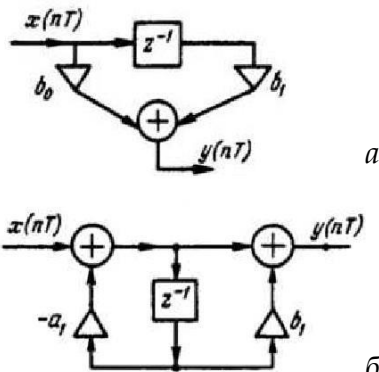


Рисунок 6.1

Структурна схема дискретного фільтра може бути визначена не тільки різницеvim рівнянням, але і передавальною функцією.

Приклад 6.4. Заданий нерекурсивний фільтр, описаний рівнянням $y(nT) = b_0x(nT) + b_1x(nT-T)$. Цей же фільтр характеризується передавальною функцією $H(z) = b_0 + b_1z^{-1}$, якій відповідає структурна схема, представлена на рис. 6.1, а.

Приклад 6.5. Рекурсивний фільтр має передавальну функцію $H(z) = (1 + b_1z^{-1}) / (1 + a_1z^{-1})$ тобто описується рівнянням $y(nT) = -a_1y(nT-T) + x(nT) + b_1x(nT-T)$. Описаному фільтру відповідає структурна схема, відображена на рис. 6.1, б.

З'ЄДНАННЯ ФІЛЬТРІВ

Еквівалентними називають фільтри, у яких при нульових початкових умовах і однакових вхідних сигналах вихідні сигнали також однакові.

1. *Послідовне з'єднання:* вихідна послідовність попереднього фільтра є вхідною для наступного (рис. 6.2, а). При цьому еквівалентна передавальна функція $H(z)$ системи дорівнює добутку передавальних функцій $H_1(z)$ і $H_2(z)$ окремих фільтрів:

$$H_e(z) = H_1(z)H_2(z),$$

так як $H_e(z) = X_3(z)/X_1(z) = (X_3(z)/X_2(z))(X_2(z)/X_1(z))$.

2. *Паралельне з'єднання:* вхідна послідовність у всіх фільтрах одна і та ж, а вихідна послідовність системи дорівнює сумі вихідних послідовностей окремих фільтрів (рис. 6.2, б); при цьому еквівалентна передавальна функція системи дорівнює сумі передавальних функцій окремих фільтрів:

$$H_e(z) = H_1(z) + H_2(z).$$

3. З'єднання зворотного зв'язку: вихідна послідовність одного фільтра подається на вхід іншого (рис. 6.2, в), причому можливі негативний і позитивний зворотній зв'язок. Тут еквівалентна передавальна функція системи

$$H_e(z) = H_1(z) / [1 \pm H_1(z)H_2(z)],$$

де знак плюс відповідає негативному зворотному зв'язку, а знак мінус - позитивному.

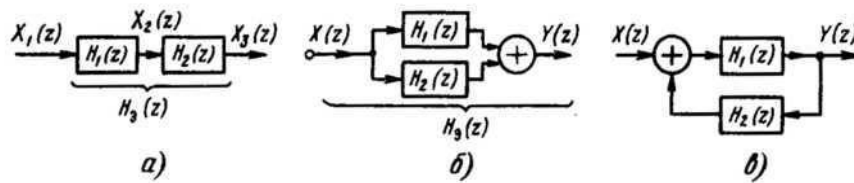


Рисунок 6.2 СТРУКТУРНІ

СХЕМИ РЕКУРСИВНИХ ФІЛЬТРІВ

Розглянемо деякі найбільш поширені схеми рекурсивних фільтрів.

1. *Пряма форма* (рис. 6.3, а) структурної схеми рекурсивного фільтра реалізується безпосередньо за різницевим рівнянням

$$y(nT) = -\sum_{m=1}^{M-1} a_m y(nT - mT) + \sum_{k=0}^{N-1} b_k x(nT - kT) \tag{6.7}$$

або за передавальною функцією

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{m=1}^{M-1} a_m z^{-m}} \tag{6.8}$$

Ця схема містить один суматор, помножувачі і $N+M-2$ елементів затримки (для створення ланцюгів, відповідних чисельнику і знаменнику передавальної функції, використовуються окремі елементи затримки).

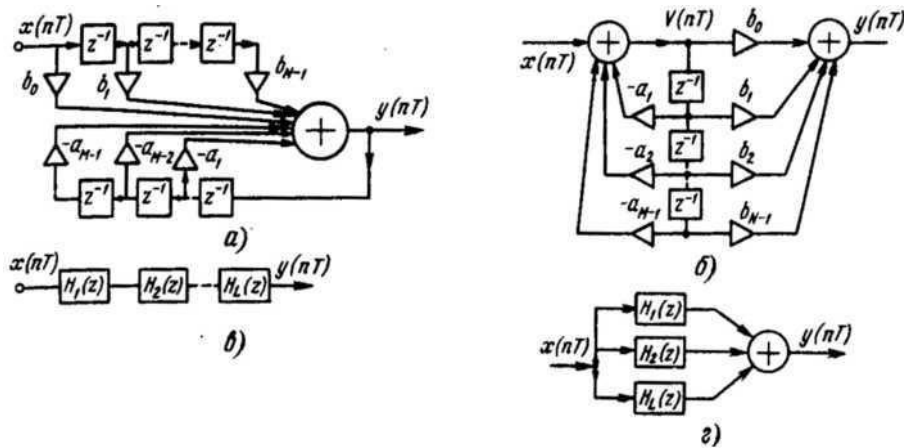


Рисунок 6.3 Приклад 6.6. Бікватратний блок (ББ) -

фільтр другого порядку, описується виразом

$$y(nT) = -a_1 y(nT-T) - a_2 y(nT-2T) + b_0 x(nT) + b_1 x(nT-T) + b_2 x(nT-2T) \tag{6.9}$$

або відповідно передавальною функцією

$$H_{ББ}(z) = (b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}) / (1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}), \tag{6.10}$$

де b_k, a_m - постійні, $k, m = 0, 1, 2$. Пряма форма структури ББ наведена на рис. 6.4, а; вона містить суматор і чотири елементи затримки.

2. *Пряма канонічна форма*. Канонічною називають структурну схему фільтра, що містить мінімальне число елементів затримки. Передавальну функцію (6.8) рекурсивного фільтра можна представити у вигляді

$$H(z) = Y(z)/X(z) = H_1(z)H_2(z),$$

де $H_1(z) = 1 / (1 + \sum_{m=1}^{M-1} a_m z^{-m}) = V(z) / X(z)$; $H_2(z) = \sum_{k=0}^{N-1} b_k z^{-k} = Y(z) / V(z)$.

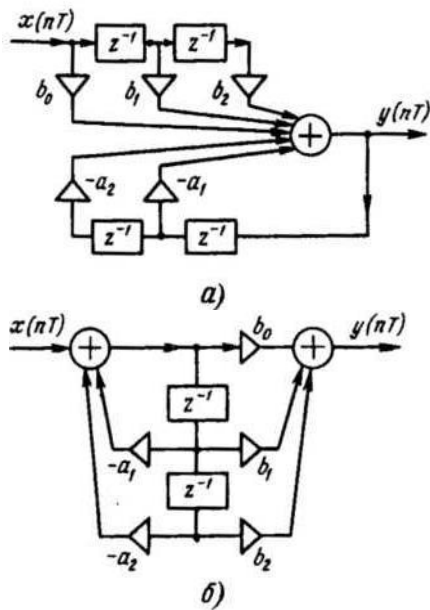


Рисунок 6.4

Передавальним функціям $H_1(z)$ і $H_2(z)$ відповідають різницеві рівняння $V(nT) = x(nT) - \sum_{m=1}^{M-1} a_m V(nT - mT)$; $y(nT) = \sum_{k=0}^{N-1} b_k V(nT - kT)$. Так як у фільтрах, що реалізують $H_1(z)$ і $H_2(z)$, має місце тільки затримка сигналу $V(nT)$, то можна використовувати тільки один набір елементів затримки

Пряма канонічна форма структурної схеми рекурсивного фільтра, описаного рівнянням (6.7) або відповідно передавальною функцією (6.8), наведена на рис. 6.3, б. Вона містить мінімальне число L елементів затримки: $L = \max(N-1, M-1)$ - і два суматора (в схемі рис. 6.3, б допускається $N = M$). В якості прикладу на рис. 6.4, б наведена пряма канонічна форма структурної схеми ББ з передавальною функцією (6.10).

3. Каскадна (послідовна) форма структурної схеми (рис. 6.3, в) - одна з найбільш часто вживаних - відповідає поданню передавальної функції (6.9) у вигляді добутку

$$H(z) = \prod_{l=1}^L H_l(z)$$

де $H_l(z)$ - передавальна функція ББ: $H_l(z) = (b_{0l} + b_{1l}z^{-1} + b_{2l}z^{-2}) / (1 + a_{1l}z^{-1} + a_{2l}z^{-2})$, причому можливо, що в деяких множниках $H_l(z)$ деякі коефіцієнти дорівнюють нулю і, отже, реалізуються більш простою структурою, ніж показані на рис. 6.4.

Зауважимо, що при послідовному з'єднанні біквдратних блоків, реалізованих в прямій формі (див. рис. 6.4, а), може виявитися, що елементи затримки в ланцюзі зворотного зв'язку попереднього блоку дублюють елементи затримки в прямій ланці наступного блоку і тому при каскадній реалізації L -ланок фільтра на ББ у прямій формі з схеми можуть бути виключені надлишкові $2(L-1)$ елементи затримки.

4. Паралельна форма (рис. 6.3, г) структурної схеми відповідає поданню передавальної функції (6.9) у вигляді суми

$$H(z) = \sum_L H_l(z),$$

де доданки $H_l(z) = (b_{0l} + b_{1l}z^{-1}) / (1 + a_{1l}z^{-1} + a_{2l}z^{-2})$ можуть бути реалізовані у вигляді спрощених структур біквдратних блоків.

СТРУКТУРНІ СХЕМИ НЕРЕКУРСИВНИХ ФІЛЬТРІВ

1. Пряма форма є безпосередньою реалізацією передавальної функції нерекурсивного фільтра

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} b_k z^{-k}$$

або відповідного різницевого рівняння

$$y(nT) = \sum_{k=0}^{N-1} b_k x(nT - kT)$$

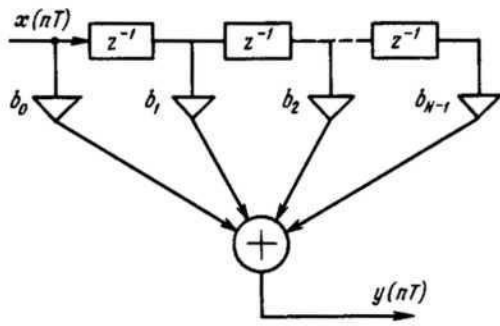


Рисунок 6.5

Пряма форма (рис. 6.5) містить $N-1$ елементів затримки, N помножувачів і суматор на N входів. Цю форму називають також трансверсальним фільтром, або фільтром з багатовивідною лінією затримки.

2. Каскадна (послідовна) форма структурної схеми нерекурсивного фільтра відповідає поданню його передавальної функції у вигляді добутку

$$H(z) = \prod_{l=1}^L H_l(z)$$

де $H_l(z) = b_{0l} + b_{1l}z^{-1} + b_{2l}z^{-2}$ або $H_l(z) = b_{0l} + b_{1l}z^{-1}$ реалізується за допомогою спрощеної структури біквдратного блоку.

3. Часові характеристики ЦФ. Імпульсна характеристика. Зв'язок імпульсної характеристики з передавальною функцією. СІХ, НІХ фільтри

ІМПУЛЬСНА ХАРАКТЕРИСТИКА ДИСКРЕТНИХ ФІЛЬТРІВ

Найважливішою часовою характеристикою лінійної дискретної системи є імпульсна характеристика, під якою розуміють реакцію системи $h(nT)$ на одиничний імпульс $\delta(nT)$ при нульових початкових умовах. Імпульсну характеристику $h(nT)$ можна розрахувати шляхом вирішення відповідних різницьових рівнянь.

Приклад 6.7. Обчислимо імпульсну характеристику системи, описану різницевою рівнянням 1-го порядку $y(nT) = 0,5y(nT-T) + x(nT)$. Нехай $y(-T) = 0$, $x(nT) = \delta(nT)$; при цьому $y(nT) \in h(nT)$ а, отже $h(nT) = 0,5h(nT-T) + \delta(nT)$, звідки $h(0) = 0,5h(-T) + \delta(0) = 1$; $h(T) = 0,5h(0) + \delta(T) = 0,5$; $h(2T) = 0,5h(T) = 0,25$. Тоді, виходить, що $h(nT) = (0,5)^n$.

ЗВ'ЯЗОК ІМПУЛЬСНОЇ ХАРАКТЕРИСТИКИ З ПЕРЕДАВАЛЬНОЮ ФУНКЦІЄЮ ФІЛЬТРІВ

За визначенням (6.3) передавальна функція

$$H(z) = Y(z)/X(z),$$

де $Y(z)$ і $X(z)$ - z -образи вихідної та вхідної послідовностей $y(nT)$ та $x(nT)$. Нехай $x(nT) = \delta(nT)$, тоді $y(nT) = h(nT)$ - імпульсна характеристика. Так як при цьому $X(z) = 1$, то

$$Y(z) = Z\{h(nT)\}$$

і, тоді,

$$Z\{h(nT)\} = H(z),$$

тобто Z -образ імпульсної характеристики співпадає з передавальною функцією системи.

Якщо записати $H(z)$ в загальному випадку у вигляді $H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^{-k}$, то очевидно, що коефіцієнти b_k збігаються з k -ми вибірками імпульсної характеристики $h(kT)$ і, отже,

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h(kT) z^{-k}. \quad (6.11)$$

У випадку скінченної імпульсної характеристики $h(kT) = 0$ при $k \geq N$, тоді

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} h(kT) z^{-k}. \quad (6.12)$$

З (6.11) і (6.12), зокрема, випливає, що послідовність $h(kT)$ можна визначити з розрахунку передавальної функції, тобто з рівняння $H(z) = Z\{h(nT)\}$ отримується

$$h(nT) = Z^{-1}\{H(z)\}. \quad (6.13)$$

ФІЛЬТРИ З СКІНЧЕННОЮ І НЕСКІНЧЕННОЮ ІМПУЛЬСНОЮ ХАРАКТЕРИСТИКОЮ (СІХ-ФІЛЬТРИ І НІХ-ФІЛЬТРИ)

Фільтром з скінченною імпульсною характеристикою - СІХ-фільтром - називають фільтр, у якого імпульсна характеристика являє собою скінченний дискретний сигнал (N -точковий дискретний сигнал), тобто може приймати відмінні від нуля значення лише при $n = 0, 1, \dots, N - 1$.

Фільтром з нескінченною імпульсною характеристикою - НІХ-фільтром - називають фільтр, у якого імпульсна характеристика може приймати відмінні від нуля значення на нескінченній множині значень $n \in \mathbf{N}$.

Приклад 6.8. Для нерекурсивного фільтра з передавальною функцією $H(z) = 3 + 0,5z^{-1} + z^{-2} + 4z^{-3}$ в силу (6.13) імпульсна характеристика $h(nT)$ визначається наступним чином: $h(0) = 3, h(T) = 0,5, h(2T) = 1, h(3T) = 4, h(nT) = 0$ при $n \geq 4$; очевидно, що це СІХ-фільтр.

Приклад 6.9. Для рекурсивного фільтра з передавальною функцією $H(z) = 1/(1 - 0,2z^{-1})$ в силу (6.13) імпульсна характеристика $h(nT)$ визначається наступним чином: $h(nT) = 0,2^n$; очевидно, що це НІХ-фільтр.

Приклад 6.10. Для рекурсивного фільтра з передавальною функцією $H(z) = (1 - z^{-5})/(1 - z^{-1})$ в силу (6.13) імпульсна характеристика $h(nT)$ визначається наступним чином: $h(0) = h(T) = h(2T) = h(3T) = h(4T) = 1, h(nT) = 0$ при $n \geq 5$ очевидно, що це СІХ-фільтр.

Очевидно, що нерекурсивний фільтр завжди є СІХ-фільтром, в той же час рекурсивний фільтр може бути як НІХ, так і СІХ-фільтром.

Оскільки основні особливості проектування і застосування фільтрів пов'язані з видом імпульсної характеристики (СІХ або НІХ), а не з наявністю або відсутністю зворотного зв'язку, то частіше використовують терміни «СІХ-фільтр» і «НІХ-фільтр», а не «рекурсивний» і «нерекурсивний» фільтри.

4. Критерій стійкості. Критерій реалізованості. Частотні характеристики ЦФ. Вимоги до АЧХ та ФЧХ ЦФ

КРИТЕРІЙ РЕАЛІЗОВАНОСТІ

Лінійний дискретний фільтр фізично реалізується, якщо його реакція (вихідний сигнал) не випереджає вхідного, тобто в будь-який момент nT реакція $y(nT)$ залежить лише від значень вхідної послідовності $x(nT)$ в моменти $n'T \leq nT$ та не залежить від їх значень в наступні моменти. Критерієм фізичної реалізованості лінійного дискретного фільтра є рівність нулю відліків імпульсної характеристики при негативних значеннях їх моментів: $h(nT) = 0$ при $n < 0$.

КРИТЕРІЙ СТІЙКОСТІ

Фільтр називається стійким, якщо при будь-яких початкових умовах реакція фільтра на будь-яку обмежену в часі взаємодію $x(nT)$ також обмежена, тобто якщо $|x(nT)| \leq M_x < \infty$ для всіх $n \in \mathbf{N}$, то $y(nT) \leq M_y < \infty$ для всіх n , причому M_x і M_y – постійні, не залежні від n . З рівняння згортки для дискретного фільтра $y(nT) = \sum_{m=0}^{\infty} h(mT) |x(nT - mT)|$ виходить, що якщо $x(nT)$ обмежена, тобто $|x(nT)| \leq M_x < \infty$ для всіх n , то абсолютне

значення вихідного сигналу $|y(nT)| \leq \sum_{m=0}^{\infty} |h(mT)| |x(nT - mT)| \stackrel{\approx M}{\leq} \sum_{m=0}^{\infty} |h(mT)|$. Тоді, критерієм стійкості дискретного фільтра є абсолютна сходимість ряду відліків імпульсної характеристики

$$\sum_{m=0}^{\infty} |h(mT)| < \infty. \quad (6.14)$$

Нерівність (6.14) виражає не тільки достатньою, але і необхідну умову стійкості фільтра. Однак, безпосереднє використання умови (6.14) для перевірки стійкості є практично складним. Тому, розглянемо інше формулювання критерію стійкості. В загальному випадку передавальна функція лінійного дискретного фільтра записується у виді (6.11)

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(nT) z^{-n}$$

звідки виходить, що

$$|H(z)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |h(nT)| |z|^{-n}. \text{ Якщо } |z| \leq 1, \text{ то } |H(z)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |h(nT)|.$$

Це значить, що в *стійкій системі* $H(z)$ скінченна у всіх точках z -площини, де $|z| \geq 1$, а, отже, передавальна функція $H(z)$ не повинна мати особливих точок (полосів) при $z \geq 1$ (на і поза одиничним колом z -площини). Таким чином, система буде стійка тільки тоді, коли всі полюси $H(z)$ розташовані всередині одиничного кола z -площини. Якщо $H(z)$ – дробно-раціональна функція, то полюси $H(z)$ визначається нулями (коренями) многочлена знаменника передавальної функції (6.8):

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{m=1}^{M-1} a_m z^{-m}}$$

Приклад 6.11.

1. Нехай $H(z) = (1 - z^{-1}) / (1 - 0,2z^{-1})$. Полюс $H(z)$ – корінь знаменника $z_1 = 0,2 < 1$, фільтр стійкий.

2. Нехай $H(z) = (1 - z^{-3}) / (1 - 0,6z^{-1} + 0,25z^{-2})$; корні знаменника $z_{2,3} = 0,3 \pm j0,4$ і $|z_2| = |z_3| = 0,5 < 1$, тобто фільтр стійкий.

3. Нехай $H(z) = 1 / (1 + 1,2z^{-1})$; корінь знаменника $z_4 = -1,2$ і фільтр нестійкий.

Зауважимо, що формулювання критерію стійкості відноситься до не скорочуваного дробу (6.8) так як можливо, що полюс компенсується нулем передавальної функції. Наприклад, фільтр, що описується функцією $H(z) = (1 - z^{-2}) / (1 - z^{-1})$, стійкий не дивлячись на те, що полюс $|z| = 1$ лежить на одиничному колі; стійкість фільтра обумовлена тим, що в дійсності після скорочення чисельника і знаменника на множник $1 - z^{-1}$ отримуємо $H(z) = 1 + z^{-1}$. Нерекурсивні фільтри завжди стійкі, так як всі полюси їх передавальної функції локалізовані в нескінченно віддаленій точці ($|z| = \infty$).

ЧАСТОТНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИСКРЕТНИХ ФІЛЬТРІВ

Нехай $X(e^{j\omega T})$ и $Y(e^{j\omega T})$ – фур'є-перетворення вхідної $x(nT)$ і вихідної $y(nT)$ послідовностей дискретного фільтра, тобто

$$X(e^{j\omega T}) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) e^{-jn\omega T}, \quad Y(e^{j\omega T}) = \sum_{n=0}^{\infty} y(nT) e^{-jn\omega T},$$

(сума проводиться від $n = 0$ до $n = \infty$, так як допускається, що $x(nT) = 0$ і $y(nT) = 0$ при $n < 0$). Тоді *частотною характеристикою системи* називають відношення

$$H(e^{j\omega T}) = Y(e^{j\omega T}) / X(e^{j\omega T}).$$

Отже, частотна характеристика співпадає з передавальною функцією (6.3) на одиничному колі z-площини, тобто при $z = (e^{j\omega T})$:

$$H(e^{j\omega T}) = H(z) |_{z=\exp(j\omega T)}.$$

Для рекурсивного фільтра згідно (6.4)

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} b_k e^{-jk\omega T}}{1 + \sum_{m=1}^{M-1} a_m e^{-jm\omega T}}$$

Для нерекурсивного фільтра згідно (6.5)

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} b_k e^{-jk\omega T} \text{ або } H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} h(kT) e^{-jk\omega T},$$

так як $b_k = h(kT)$ – виборки імпульсної характеристики фільтра. Зауважимо, що частотна характеристика $H(e^{j\omega T})$ є передавальною функцією лінійної дискретної системи для вхідного комплексного синусоїдального сигналу $x(nT) = e^{j\omega nT}$, тобто вихідний сигнал системи в установленому режимі при цьому рівний $y(nT) = H(e^{j\omega T})e^{j\omega nT}$.

В загальному випадку $H(e^{j\omega T})$ – комплексна функція, яка може бути записана у виді

$$H(e^{j\omega T}) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = R(\omega) + jJ(\omega),$$

де $A(\omega) = |H(e^{j\omega T})|$ – модуль частотної характеристики – амплітудно-частотна характеристика (АЧХ); $\varphi(\omega) = \arg H(e^{j\omega T})$ – аргумент частотної характеристики – фазочастотна характеристика (ФЧХ); $R(\omega) = A(\omega)\cos\varphi(\omega)$, $J(\omega) = A(\omega)\sin\varphi(\omega)$ – дійсна і уявна частини частотної характеристики.

Груповий час затримки (ГЧЗ) $\tau(\omega) = -(d\varphi(\omega)/d\omega)$, де $\varphi(\omega)$ – ФЧХ фільтра.

ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ ЧАСТОТНИХ ХАРАКТЕРИСТИК

З визначення частотних характеристик виходить ряд важливих властивостей.

1. Всі частотні характеристики дискретних фільтрів є *неперервними* функціями частоти.
2. Всі частотні характеристики є *періодичними* функціями частоти ω з періодом, рівним частоті дискретизації $\omega_d = 2\pi/T$ (так як $e^{j\omega kT} = e^{j(\omega + l\omega_d)kT}$, l - ціле).
3. Для *дійснозначних* фільтрів, тобто фільтрів, передавальні функції яких мають тільки дійсні коефіцієнти, АЧХ $A(\omega)$ і ГЧЗ $\tau(\omega)$ є парними функціями частоти, а ФЧХ $\varphi(\omega)$ - непарною функцією частоти.

З цих властивостей випливає, що вимоги до частотних характеристик достатньо задавати лише на інтервалі півперіоду $[0, \pi/T]$.

Приклад 6.12. Нехай $H(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2}$. Допустивши $z = e^{j\omega T} = \cos\omega T + j\sin\omega T$ знайдемо $A(\omega) = \sqrt{3 + 4\cos\omega T + 2\cos 2\omega T}$, $\varphi(\omega) = -\omega T$, $\tau(\omega) = T$. На рис. 6.6, а, б, в зображені відповідно графіки АЧХ $A(\omega)$, ФЧХ $\varphi(\omega)$ и ГЧЗ $\tau(\omega)$.

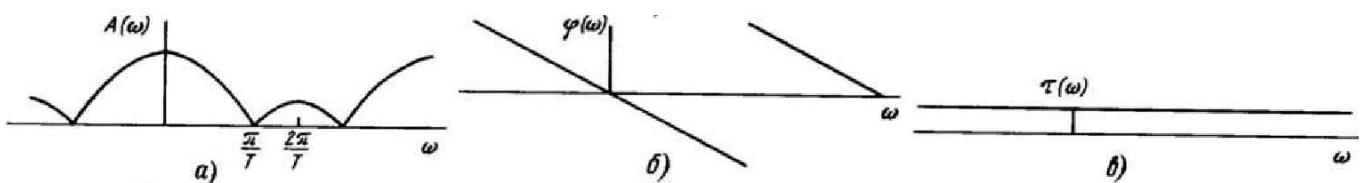


Рисунок 6.6

НОРМУВАННЯ ЧАСТОТИ

Для того щоб частотні характеристики різних фільтрів було легше порівнювати один з одним, частоту ω нормують. Оскільки всі частотні характеристики залежать при постійному T від добутку ωT , замість ωT вводять одну змінну. Як правило, використовують два способи нормування частоти. При першому способі вважають $\omega T = \omega$. У цьому випадку період для всіх частотних характеристик дорівнює $\omega_d = 2\pi$ і вимоги до них слід задавати на інтервалі $[0, \pi]$. При другому способі вважають $\omega T = 2\pi w$. У цьому випадку період для всіх частотних характеристик дорівнює $w_d = 1$ і вимоги до них слід задавати на інтервалі $[0, 0,5]$. Найчастіше, як правило, розглядаються нормовані частотні характеристики, причому використовується другий спосіб.

ВИМОГИ ДО АЧХ ФІЛЬТРІВ

Лінійний дискретний фільтр при заданому спектрі вхідного дискретного сигналу $x(nT)$ формує певним чином в заданому частотному діапазоні спектр вихідного дискретного сигналу $y(nT)$. У смузі пропускання АЧХ повинна бути близька до одиниці (відповідні складові спектру вхідного сигналу проходять на вихід майже без придушення), а в смузі загородження АЧХ повинна бути близька до нуля (відповідні складові спектру вхідного сигналу проходять на вихід зі значним придушенням). На рис.6.7 показаний графік функції $A^*(w)$, що визначає вимоги до нормованої АЧХ ідеального дискретного фільтра нижніх частот (ФНЧ). Загальний частотний діапазон дискретного фільтра $0 \dots 0,5$ (точка $0,5$ відповідає частоті π/T при відсутності нормування частоти). Смуга частот від 0 до $w_{г.п.}$, в якій $A^*(w) = 1$, є смугою пропускання. Смуга частот від $w_{г.з.}$ до $0,5$, в якій $A^*(w) = 0$, є смугою загородження. Смуга частот від $w_{г.п.}$ до $w_{г.з.}$, в якій функція $A^*(w)$ не задана, є проміжною смугою.

Неможливо реалізувати дискретний фільтр, АЧХ якого точно дорівнює функції $A^*(w)$. Тому необхідно апроксимувати задану функцію $A^*(w)$, тобто визначити параметри дискретного фільтра, АЧХ якого $A(w)$ близька до заданої функції $A^*(w)$:

$$A(w) \approx A^*(w)$$

при $0 \leq w \leq w_{г.п.}$ і $w_{г.з.} \leq w \leq 0,5$.

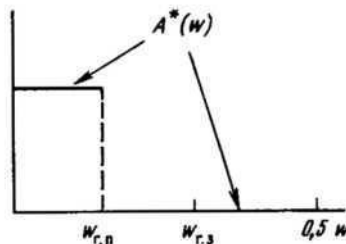


Рисунок 6.7

ВИМОГИ ДО ФЧХ ФІЛЬТРІВ

Фільтри з точно лінійною ФЧХ мають постійний ГЧЗ і тому не спотворюють форми вхідних сигналів, спектр яких знаходиться в смузі пропускання фільтра. НІХ-фільтри можуть мати тільки приблизно лінійну ФЧХ, а СІХ-фільтри за певних умов можуть мати точно лінійну ФЧХ. Саме ці фільтри найчастіше використовуються на практиці. Отже вимогою до ФЧХ дискретних фільтрів є її лінійність в смузі пропускання.