Лекція. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕХНІЧНИХ СИСТЕМ

1. МОДЕЛЮВАННЯ ЯК МЕТОД НАУКОВОГО ПІЗНАННЯ

Історія виникнення моделювання (у своєму первісному понятті) як методу пізнання навколишнього світу сягає корінням, напевно, ще "в сиву давнину", коли людина почала вперше застосовувати *форми-моделі* для виготовлення виробів з бронзи та дорогоцінних металів за допомогою лиття. Археологи датують ці події **III** тис. до нашої ери. **В** подальшому, поруч з такими методами наукового пізнання, як спостереження, аналіз, експеримент тощо, моделювання міцно увійшло в актив інженерів та науковців.

Слово "*модель*" походить від латинського " *modus, modulus* ", що відповідає за змістом таким поняттям, як міра, образ, спосіб і т. п. Початкове значення слова було пов'язане з будівництвом, і майже на всіх мовах країн Європи ним почали називати деякі речі чи зразки, які були *подібні* в якомусь відношенні до інших речей.

Разом з цим, моделі, як специфічний *засіб наукової думки,* використовуються вченими античного світу. Достатньо навести, як приклади, уявлення Демокріта та Епікура про атоми, форми й спосіб їх з'єднання; трактат Архімеда "Про тіла, що плавають", де ним побудована, по суті, модель рідини; космологічну картину (модель) Всесвіту за Аристотелем або Птоломеєм тощо.

Як бачимо, тут поняття "модель" набуває нового значення: це є вже не матеріальний (речовинний) об'єкт, а деякий ідеальний (абстрактний) образ, створений думкою людини.

Наступний етап розвитку методів моделювання пов'язується, звичайно, з епохою Відродження, коли почалось систематичне використання *масштабних матеріальних моделей,* головним чином, в архітектурно-будівельній та інженерній, особливо гідротехнічній, справах. Так, при спорудженні куполу собору у Флоренції спочатку виготовили малу масштабну модель, яка була розглянута та затверджена спеціальним журі, потім виготовлявся більш великий робочий макет, і нарешті за цим наочним зразком безпосередньо велося будування самого куполу.

Врешті-решт, промислова революція ХУIII-XIX ст. стимулювала розвиток методів макетного моделювання і сприяла привертанню уваги до вирішення технічних задач цілого ряду провідних вчених того часу, таких, наприклад, як І. Ньютон, Л. Ейлер, Д. Бернуллі. Така експансія науки в техніку призвела до бурхливої появи нових технічних дисциплін як загальнотехнічного характеру типу теорія машин та механізмів, опір матеріалів, технічна термодинаміка тощо, так і вузькоспеціалізованих, як наприклад, теорія парової машини, теорія корабля і т. п. Між іншим, саме проблеми, що виникали при проектуванні корпусів кораблів, спричинили появу теоретичної основи методів масштабного макетного моделювання — *теорії подібності.*

Одночасно з розвитком методів матеріального моделювання, тобто заміни натурного експерименту випробуванням макетів, відбувався інтенсивний розвиток методів ідеального або *теоретичного моделювання,* причому тут термін модель використовується в декількох різних значеннях.

В науках про природу, продовжуючи традиції античних вчених, слово "модель" почали застосовувати, коли намагались зобразити деяку область явищ за допомогою іншої, краще вивченої або більш зрозумілої чи легкої для сприйняття. Такою була геліоцентрична модель М. Коперника, хвильова чи корпускулярна моделі світла Х. Гюйгенса та І. Ньютона, модель атома за Дж. Дж. Томпсоном— "пудинг з ізюмом" — та "планетарна" модель атома Е. Резерфорда. По суті, весь ранній період формування наукових уявлень про електричні, магнітні, оптичні явища базувався на гіпотетичних механічних аналогіях і відповідних ідеальних моделях. Характерним у цьому відношенні є вислів В. Томсона (лорда Кельвіна), проголошений в його славнозвісних "Балтиморських лекціях", про те, що "зрозуміти явище — це значить побудувати його механічну модель”. Ці моделі підлягали експериментальній перевірці, в результаті чого вони модифікувалися й приймали форму законів (закони Ома, Біо-Савара- Лапласа, Ерстеда, Фарадея, Кірхгофа, рівняння Максвела тощо).

В техніці та технічних науках закони, що були запозичені з природничих наук та доповнені великою кількістю дослідних даних, стали основою при переході від вивчення загальних фізичних явищ до аналізу та розрахунків конкретних технічних засобів. Для полегшення такого переходу в групі дисциплін електротехнічного профілю (теорія електричних машин постійного та змінного струму, теорія дротяного зв’язку, теорія електричних вимірювань тощо) було винайдено спеціальні засоби, що описували фізичні явища, які відбувалися в тих чи інших технічних пристроях. Такими *засобами проектування технічних об’єктів* в цих дисциплінах стали, наприклад, еквівалентні електричні схеми, векторні діаграми, графоаналітичні методи розрахунків тощо. Використання аналітичних співвідношень, які базуються на фізичних законах, означало, фактично, застосування *математичної моделі* при проектуванні технічних систем.

Широке використання математичних моделей в різних галузях техніки призвело до того, що наприкінці 50-х рр. 20-го сторіччя математичне моделювання сформувалось в самостійний метод дослідження, який складається з опису властивостей довільного об’єкта мовою математики з метою подальшого дослідження цього опису також математичними методами.

Разом з цим, термін “теоретична модель” набуває трохи іншого значення в так званій “чистій” математиці.

В математичних науках після створення Р. Декартом і П. Ферма аналітичної геометрії, на базі якої ствердилась ідея про узгодженість між різними розділами математики, словом “модель” почали позначати теорію, яка має структурну подібність по відношенню до іншої теорії, тобто є *ізоморфною.* Походження поняття моделі в математиці дуже добре досліджено Н. Бурбакі в “Нарисах з історії математики”, де, зокрема, відзначається, що першим поняття “ізоморфізму” (“структурної подібності”) увів до розгляду Г. Лейбніц.

Одночасно в математиці виникло і використовується поняття моделі, близьке за значенням до того, що фігурує в природничих (фізичних, механічних) та технічних науках — поняття математичної моделі.

По суті справи, в математиці поняття моделі як *ізоморфної теорії* відрізняється від поняття математичної моделі в тому значенні, яке використовується в технічних науках, тим, що в першому випадку початковим об’єктом дослідження є ідеальний об’єкт— деяка теорія, в другому — матеріальний об’єкт, деякий технічний пристрій, технічна система. В обох випадках засобом дослідження (моделювання) є ідеальний об’єкт — математичні методи.

Розглянувши історію становлення та розвитку поняття моделі, можна тепер дати узагальнене його визначення.

В найзагальнішому значенні *модель* деякої системи або явища —це специфічний об’єкт, який створюється у формі чи уявного образу, чи опису певними засобами, чи матеріального витвору і який відображає чи відтворює суттєві властивості системи, яку він заміщує, з метою дослідження початкової системи шляхом дослідження самої моделі, оскільки таке дослідження моделі є більш простим з точки зору реалізації дослідження самої системи.

Це означення додатково проілюстроване на рис. 1.

З нього, як наслідок, можуть випливати різноманітні класифікації моделей, якщо за класифікаційні критерії брати ті чи інші складові елементи означення з подальшою їх деталізацією. Наприклад, якщо за критерій вибрати форму створення моделі, то всі моделі можуть бути поділені на матеріальні та ідеальні, а останні, в свою чергу, на образні та знакові, а ті знову на математичні та ще які-небуть, наприклад, лінгвістичні і т. д., і т. п. Якщо за критерій класифікації вибрати вид відношення подібності, то розглядають структурно подібні, функціонально подібні моделі і таке інше.

Проте, на нашу думку, такі класифікації, що подекуди зустрічаються в літературі, мало в чому інформативні, і є лише іншою формою, не завжди вдалою, переказу означення моделі.

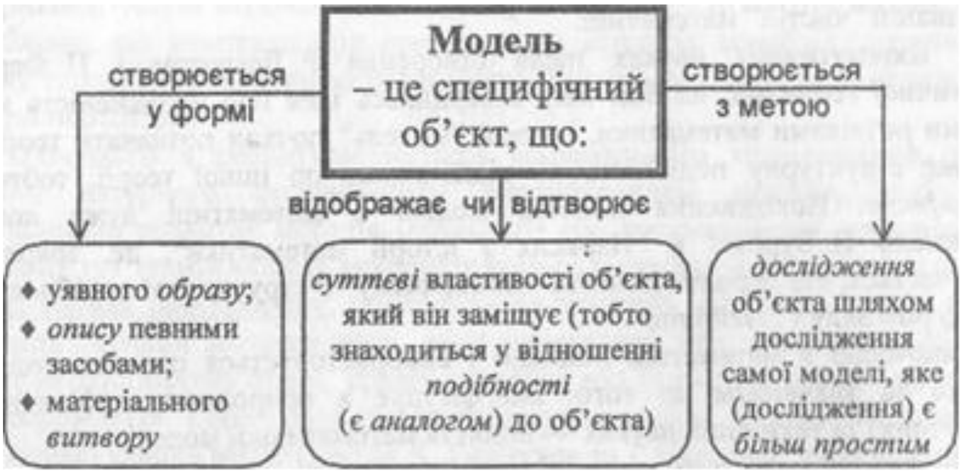

Рис.1. **Узагальнене означення поняття моделі**

У загальному випадку можна сказати, що, оскільки ми розглядаємо тільки моделі, які свідомо створюються людиною, а в її розпорядженні є два принципово відмінні типи матеріалів для побудови моделей — засоби самої свідомості та засоби оточуючого матеріального світу, то відповідно до цього моделі діляться на абстрактні (ідеальні) та матеріальні (реальні, речовинні). Іноді у відповідності з різною метою моделювання моделі діляться на пізнавальні (теоретичні) та прагматичні.

Універсальним засобом побудови абстрактних моделей є мова як засіб вираження думки, ідеї (так звані мовні або знакові моделі). Багатозначність слів, а значить і наближеність мовних конструкцій робить недостатнім такий засіб моделювання у багатьох випадках. Тому з'явилась необхідність у спеціальній мові (яка не має зазначених недоліків). І такою мовою є мова математики. Математичні моделі повинні забезпечити необхідну точність та визначеність при вираженні людиною або при передачі між людьми ідеальних конструкцій, побудованих засобами свідомості людини.

Як бачимо, зацікавленість моделями стала загальною й немає такої галузі науки чи техніки, де б не використовувалось моделювання. Успіхи моделювання призвели до перетворення його з напівемпіричного методу, яким користувались окремі вчені, в загальнонауковий метод пізнання. Можна сказати словами Еммануїла Канта, що "будь-яке людське пізнання починається із споглядання, переходить від нього до понять та закінчується ідеями",

Початковим етапом математичного моделювання як методу пізнання ТС є етап формалізації задач.

2. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

Одним з перших застосувань ідеї моделювання було *фізичне моделювання* (макетування). Та все ж, експериментуванню з фізичними моделями притаманні суттєві недоліки: виготовлення моделей є подекуди трудомісткою справою і займає досить багато часу, його вартість велика, методи вимірювання величин, що фігурують в моделі та підлягають визначенню, в основному є неточними, і спотворюють картину досліджень.

В міру розвитку і математизації природничих та технічних наук поруч з *фізичним моделюванням,* тобто дослідженням об’єкта через його матеріальне відтворення, набув розвитку інший шлях — *математичне моделювання,* при якому спочатку виконується опис об’єкта мовою математики, а потім проводиться дослідження саме цього опису — математичної моделі, знову ж таки, методами математики, тобто шляхом застосуванням певних математичних перетворень над математичною моделлю фізичного об’єкта.

Такий підхід до дослідження технічних об’єктів виявився дуже плідним і досить універсальним в силу *абстрактності* мови математики.

Універсальність дослідження реальних технічних систем за допомогою математичних моделей пов’язана, в першу чергу, з обмеженістю кількості видів математичних структур, що виникають при цьому як математичні моделі. Ця можливість багаторазового застосування одного й того ж математичного поняття до аналізу найрізноманітніших технічних задач робить надзвичайно цінною його абстрактне трактування.

Наведемо визначення математичної моделі.

<u>Математична модель фізичного об’єкта (технічної системи)</u> — це *математична структура*, елементи якої тлумачаться як ідеалізовані реальні фізичні об’єкти, а абстрактні відношення між ними — як конкретні зв’язки між елементами фізичного об’єкта. Така модель дозволяє скласти компактний перелік властивостей об’єкта, аналізувати і прогнозувати ці властивості, а значить, як наслідок — і поведінку фізичного об’єкта.

Подальша деталізація поняття математичної моделі пов’язана з розглядом тих чи інших моделей на різних пізнавальних рівнях, тобто різних ступенях деталізації.

Тут також потрібно звернути увагу на те, що термін математичне моделювання в літературі використовується в широкому та вузькому смислі слова.

В *широкому значенні* моделювання— це <u>метод пізнання</u> (дослідження), що включає в себе побудову моделі, її подальший аналіз та інтерпретацію отриманих результатів, у *вузькому* — <u>лише метод складання мотелі</u> або <u>лише метод її аналізу</u>.

Іноді про це говорять іншими словами: існують *пряма* та *обернена* задачі моделювання, тобто *аналіз* моделі та її *синтез.* Задача аналізу моделі, фактично, зводиться до тієї чи іншої проблеми, що характеризує даний клас математичних структур. Задача синтезу полягає в тому, що необхідно за відомими результатами аналізу або вимірювань побудувати модель (визначити *параметри* моделі та її *структуру).*

У загальному випадку в процесі підготовки та проведення математичного моделювання виділяють такі етапи:

1) *абстрагування',* зосередження на властивостях, які є загальними для багатьох об’єктів чи ситуацій матеріального світу, та відволікання від існуючих між ними відмінностей;

2) *представлення',* вибір деякої множини засобів (символів, графічних образів тощо) для зображення абстрактних понять; представлення використовується також як засіб спілкування;

3) *маніпуляція*: правила перетворення символьного представлення як засіб передбачення результату аналогічних маніпуляцій в реальному світі;

4) *інтерпретація',* зворотний процес до формалізації;

5) *аксіоматизація:* строге формулювання тих властивостей, які були виведені з реального світу і які є загальними при маніпуляціях як в матеріальному світі, так і над абстрактними символами, що представляють реальний світ.

Перший та частково другий етапи відносяться до процесу формалізації задач (див. розділ 2), другий та третій — власне до моделювання задач, тобто до формування моделей, їх перетворення та аналізу, п’ятий —до обґрунтування методів моделювання і підготовки “плацдарму” для їх подальшого розвитку, удосконалення. На останніх етапах робиться спроба сконцентрувати основні фактичні відомості про об’єкти чи ситуації, які охоплюються цим абстрактним поняттям, в декількох коротких, але потужних аксіомах і потім (маючи на увазі істинність аксіом) строго довести, що висновки, отримані в результаті маніпуляцій з цими абстрактними представленнями, є справедливими і для прообразів реального світу.

3. МАТЕМАТИЧНІ СТРУКТУРИ

Розглядаючи основні, класичні математичні об’єкти, такі як число, величина, функція, можемо побачити, що поруч з ними з’являється новий, більш складний тип об’єктів — множина елементів із заданими відношеннями між ними, тобто множина, що має певну структуру. Таким чином, з’являється поняття “математичної структури”.

Математичною структурою (МС) називають не порожню множину *M* об’єктів (елементів) *E,* між якими встановлені певні відношення *К,* тобто

$M= \{E; R\}$.

Оскільки природа елементів при такому розгляді не відіграє визначальної ролі, то математичну структуру іноді називають також *абстрактною системою.* Отже, математична структура — родова назва, що поєднує поняття, які застосовуються до множин, природа елементів яких є невизначеною (тобто такою, що не береться до уваги на певному етапі розгляду, є незаданою).

В літературі термінологія, що пов’язана з поняттям “математичної структури”, на сьогодні (90 рр. XX ст.) ще не є сталою. Так, власне, термін “математичні структури” ввели та використовують група французьких математиків, що виступають під псевдонімом Н. Бурбакі, а за ними і ряд інших вчених. Синонімічний йому термін *“алгебраїчна система"* був введений радянським математиком А.І. Мальцевим. Разом з цим як синоніми використовуються терміни “математична система”, “математична модель”, “абстрактна алгебра”, “абстрактна система”. У випадку, коли множина відношень ***R*** складається з двох підмножин: бінарних операцій *Rx* та бінарних відношень $\boldsymbol{R}_2$ і якщо множина відношень $\boldsymbol{\{R_2\}}$ є порожньою, алгебраїчну систему (АС) (за термінологією А.І. Мальцева) називають *універсальною алгеброю* (або просто *алгеброю).* Алгебраїчну систему називають *реляційною системою* (або реляційною структурою, або просто “структурою”, “моделлю” чи “решіткою” — англ. lattice), якщо множина її основних операцій і є порожньою.

Сигнатурою алгебраїчної системи є сукупність операцій та відношень, що встановлені на основній множині даної АС, разом із зазначенням їх “арності”.

Зрозуміло, що самі множини *E* та ***R,*** в свою чергу', можуть мати певну “структуру”, тобто складатися із певних підмножин. Крім того, оскільки відношення ***R,*** а часто і елементи множини *E* задаються аксіомами, то іноді в означенні математичної структури, для акцентування уваги на цьому факті, додатково вводять множину аксіом *А,* що визначає (задає) елементи множин *E* та ***R.*** Зважаючи на це, отримуємо наступне означення математичної структури:

Математична структура— це потрійний перелік (множина трьох підмножин):

М= $\{\{E_u Eь ...,E_„\}; \{Кі,Я_2,...,Я_т\}_„; \{A_u A_2, ...,A_к\}\}$, (1) де

{$E_ь$ E_2, ..., $E_„$} — множина деяких множин об’єктів (елементів);

{/?і, K_2,..., K_m} — множина відношень між елементами даних множин; *{Аі, A_2,..., А/с)* — множина аксіом, яким підпорядковуються відношення *К і* та певні елементи із £).

Звичайно, ці аксіоми не можуть вибиратись довільно і вони є не що інше, як <u>властивості,</u> що описують відношення *К,* або елементи множини E_r Такими властивостями виступають, наприклад, асоціативність, комута- тивність бінарних операцій тощо.

Теорією математичної структури називають сукупність теорем (речень), які можна *вивести логічним шляхом* із аксіом цієї структури.

Припустимо тепер, що разом з (1) задана ще одна структура:

M' = {$E'_п$,K'_m,$A'_к$}.

Дві структури *М'* і *М* називають *однотипними* (структурами одного й того ж типу), якщо вони мають однакову кількість базисних множин {£}, однакову кількість відношень *{К}* і, крім того, відповідні відношення мають одне й те ж число предметних аргументів.

Поняття “однотипності” МС, а точніше, поняття “типу” (чи “роду”) математичних структур використовується при побудові типології (ієрархії) математичних структур.

Говорять, що дві структури є *подібними,* якщо вони однотипні. Більш сильне порівняння двох структур проводять, використовуючи поняття ізоморфізму (двох структур).

Якщо задано дві математичні структури, часто виникає питання їх порівняння. І хоча дві МС M_x і M_2 можуть складатися із елементів різної природи (наприклад, одна МС складається із підстановок чисел, а друга із поворотів деякої геометричної фігури), і крім того, операції, що проводяться над цими елементами теж можуть суттєво різнитися між собою за своїм змістом, та все ж, такі дві МС можуть бути побудовані однаково (мати спільні властивості та структуру множини *М,* на якій задані бінарні відношення /?,). У такому випадку відношення *Я,* цих МС будуть відрізнятися лише позначеннями, відповідною заміною яких, тобто перейменуванням елементів, вони можуть бути приведені до однакового виду.

Таким чином приходимо до поняття *ізоморфізму* (подібності) математичних структур.

Математичні структури називаються *ізоморфними,* якщо їх множини відношень *Кі стають* тотожними (однаковими) при відповідному виборі позначень їх елементів.

Дві математичні структури є *ізоморфними,* якщо вони однотипні та існує взаємно-однозначне відображення ер структури *М* на структуру *М,* при якому *х* ® *у* = <р *(х)* ® ф *(у),* де *х, у* є М, ф *(х),* <р *(у)* є *М* ; ® — певне бінарне відношення.

Приклад. Множина дійсних чисел з операцією множення є ізоморфною множині логарифмів цих чисел з операцією додавання: 1_E(а.Ь) = 1_8(а)+1_8(6).

Якщо при ізоморфізмі множини *М* і *М'* співпадають, то таке відображення називають *автоморфізмом.* Автоморфізми множини певного мірою виявляють її властивості симетрії. В дійсності: що означає симетрія, скажімо, геометричної фігури? Вона означає, що при певних перетвореннях (поворотах, переносах, дзеркальних відображеннях тощо) фігури остання переходить в саму себе, при цьому деякі задані співвідношення (відстані, кути, взаємне розташування тощо) зберігаються.

Поняття ізоморфізму структури допускає узагальнення: якщо відображення / не є взаємно-однозначним, а виконується тільки в одному напрямку, то таке відображення називається *гомоморфізмом.*

Аксіоми інколи характеризують з точністю до ізоморфізму не одну структуру, а деяку множину математичних структур. Сукупність всіх структур, визначених даною системою аксіом, називають *родом (типом)* цих структур. Структурам одного роду при будь-яких базисних множинах звичайно присвоюється якась певна назва, наприклад, “група”, “поле”, “векторний простір”.

Таким чином, існує певна ієрархія родів математичних структур і вона може бути покладена в основу їх класифікації, а отже, і класифікації математичних моделей технічних систем.