Лінії другого порядку

У даній главі вивчаються геометричні властивості еліпса, гіперболи і параболи з використанням канонічних рівнянь цих ліній. Названі лінії часто зустрічаються в різних питаннях природознавства. Наприклад, матеріальна точка у центральному полі тяжіння рухається вздовж однієї з цих ліній.

1. Еліпс. Канонічне рівняння еліпса

Означення 1. Еліпсом називається геометричне місце точок площини, сума відстаней від кожної з яких до двох заданих точок цієї площини, що називаються фокусами еліпса, є величиною сталою і більшою за відстань між фокусами.

Позначимо цю сталу через $2a$, відстань між фокусами еліпса – через $2c$, а самі фокуси – через F_1 і F_2. Для виведення канонічного рівняння еліпса виберемо на площині прямокутну декартову систему координат так, щоб її початок O співпадає з серединою відрізка F_1F_2, а вісь абсцис – з прямою F_1F_2. За напрям осі абсцис візьмемо напрям від точки O до точки F_1 (рис. 1). Оскільки $F_1F_2 = 2c$, то у вибраній системі координат фокуси мають координати $F_1(c;0)$, $F_2(-c;0)$.

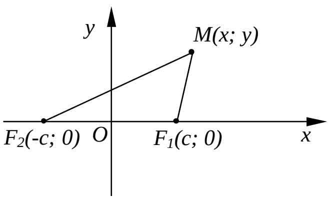

Рис. 1

Нехай $M(x;\, y)$ – довільна точка еліпса. Тоді згідно з означенням 1

$$MF_1 + MF_2 = 2a \Leftrightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a\,. \qquad (1)$$

Навпаки, якщо координати деякої точки площини задовольняють рівнянню (1), то ця точка належить еліпсу. Тому у вибраній системі координат рівняння (1) є рівнянням еліпса.

Будемо спрощувати рівняння (1). Перенесемо перший радикал у праву частину і піднесемо обидві частини до квадрата:

$$\left(x+c\right)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{\left(x-c\right)^2+y^2}+\left(x-c\right)^2+y^2 .$$

Відокремимо радикал і розкриємо всі дужки. Звівши подібні члени і скоротивши рівняння на 4, отримуємо

$$cx-a^2=-a\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2} .$$

Піднесемо обидві частини останнього рівняння до квадрата і перенесемо після цього члени, що містять x і y, в одну сторону, а вільні члени – в іншу. В результаті будемо мати

$$\left(a^2-c^2\right)x^2+a^2y^2=\left(a^2-c^2\right)a^2 .$$

Оскільки за умовою $a>c$, то $a^2-c^2>0$. Позначимо

$$a^2-c^2=b^2. \qquad (2)$$

Тоді

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (3)$$

З рівняння (1) ми отримали рівняння (3). Тому координати всіх точок еліпса поряд з рівнянням (1) задовольняють також і рівнянню (3).

Означення 2. Рівняння (3) називається канонічним рівнянням еліпса, а вибрана система координат – канонічною системою.

Розглянемо частинний випадок, коли фокуси F_1 і F_2 співпадають, тобто $c=0$. Тоді з (2) випливає, що $a^2=b^2$ і рівняння (3) набуває вигляду

$$x^2+y^2=a^2 .$$

Отримане рівняння є рівнянням кола з центром у початку координат і радіусом a. Отже, якщо фокуси еліпса співпадають, то еліпс є колом.

Зауваження 1. Рівняння (3) отримано нами за умови, що у вибраній системі координат $a>b$. Проте рівняння (3) визначає еліпс і при $a<b$. Дійсно, проведемо перетворення координат, що полягає у зміні назв координатних осей. Тоді рівняння (3), в якому $a<b$, визначає еліпс із фокусами на осі Oy, а відстань від початку координат до фокусів дорівнює $c=\sqrt{b^2-a^2}$. Нижче, якщо не обумовлено протилежне, будемо вважати, що в канонічному рівнянні еліпса $a>b$.

1.2. Дослідження форми еліпса за допомогою канонічного рівняння

Нехай еліпс задано канонічним рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{4}$$

і точка $M_0\left(x_0;\, y_0\right)$ належить еліпсу, тобто координати цієї точки задовольняють рівнянню (4) (рис. 2).

Оскільки змінна x входить до рівняння (4) з квадратом, то пара чисел $\left(-x_0;\, y_0\right)$ також задовольняє рівнянню (4). Це означає, що точка $M_1\left(-x_0;\, y_0\right)$ належить еліпсу. Точки $M_0\left(x_0;\, y_0\right)$ і $M_1\left(-x_0;\, y_0\right)$ відрізняються лише знаком абсциси, тобто є симетричними відносно осі Oy. Отже, кожній точці еліпса відповідає інша його точка, симетрична першій відносно осі Oy. Іншими словами, весь еліпс симетричний відносно осі Oy. Аналогічні міркування застосовні і до осі Ox.

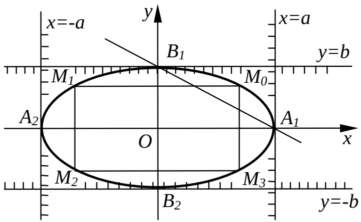

Рис. 2

Таким чином, внаслідок того, що змінні x і y входять до рівняння (4) з квадратом, еліпс є симетричним відносно координатних осей.

Якщо одночасно змінити знаки в x_0 і y_0, то числа $-x_0$, $-y_0$ також будуть задовольняти рівнянню (4). Точки $M_0\left(x_0;\, y_0\right)$ і $M_2\left(-x_0;-y_0\right)$ симетричні відносно початку координат. Отже, кожній точці еліпса можна поставити у відповідність іншу його точку, симетричну першій відносно початку координат, тобто початок координат є центром симетрії еліпса. Тому будь-яка хорда еліпса, яка проходить через початок координат, ділиться в ньому пополам.

Вісь Ox перетинає еліпс у двох точках $A_1\left(a;\, 0\right)$, $A_2\left(-a;\, 0\right)$, а вісь Oy – у двох точках $B_1\left(0;\, b\right)$, $B_2\left(0;-b\right)$.

Означення 1. Точки перетину еліпса з його осями симетрії називається вершинами еліпса.

Означення 2. Піввіссю еліпса називається відрізок (а також довжина цього відрізка), одним кінцем якого є центр симетрії еліпса, а другим – одна з його вершини.

У рівнянні (4) a і b – півосі еліпса, причому a називають більшою піввіссю, а b – меншою піввіссю.

<u>Означення 3</u>. Відрізок A_1A_2, кінцями якого є вершини A_1 і A_2 еліпса, розміщені на тій осі симетрії, що і фокуси еліпса (а також довжина $2a$ цього відрізка), називається більшою віссю еліпса, а відрізок B_1B_2 (і його довжина $2b$) – меншою віссю еліпса.

Знайдемо область визначення змінних x і y в рівнянні (4). Оскільки кожен з доданків лівої частини рівняння (4) не може бути від'ємним і в сумі ці доданки дають одиницю, то кожен з них окремо не може перевищувати одиниці:

$$\frac{x^2}{a^2} \le 1 \Leftrightarrow x^2 \le a^2 \Leftrightarrow -a \le x \le a,$$

$$\frac{y^2}{b^2} \le 1 \Leftrightarrow y^2 \le b^2 \Leftrightarrow -b \le y \le b.$$

Геометрично це означає, що всі точки еліпса знаходяться всередині смуги, обмеженої паралельними прямими $x=-a$ і $x=a$, і всередині смуги, обмеженої паралельними прямими $y=-b$ і $y=b$. Тому весь еліпс знаходиться всередині прямокутника, що є перетином цих смуг (рис. 2).

Розв'яжемо рівняння (4) відносно y:

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,. \qquad (5)$$

Внаслідок симетрії еліпса достатньо дослідити тільки ту його частину, яка лежить у першому квадранті $(x \ge 0,\ y \ge 0)$. Для цього у формулі (5) перед радикалом запишемо знак плюс і будемо змінювати x від 0 до a. Якщо $x=0$, то $y=b$. Зі збільшенням x підкореневий вираз в (5) зменшується, а тому буде зменшуватись і y. Якщо $x=a$, то $y=0$. На геометричній мові це означає, що праворуч від точки B_1 еліпс весь час спадає, наближаючись до точки A_1. Приймаючи до уваги симетричність еліпса відносно координатних осей, робимо висновок, що еліпс є замкненою лінією.

Проведемо пряму через точки A_1 і B_1 (рис. 2). Рівняння цієї прямої

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \Leftrightarrow y = \frac{b}{a}(a - x). \qquad (6)$$

Покажемо, що ордината змінної точки еліпса (5) при $0 < x < a$ більша за ординату прямої (6), тобто

$$y_{ел.} = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} > y_{пр.} = \frac{b}{a}(a - x).$$

Дійсно,

$$y_{ел} = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - 2ax + x^2 + 2ax - x^2 - x^2} =$$

$$= \frac{b}{a}\sqrt{(a-x)^2 + 2x(a-x)}.$$

Другий доданок під радикалом додатний, оскільки $0 < x < a$. Якщо цей доданок відкинути, то радикал зменшиться:

$$y_{ел} > \frac{b}{a}\sqrt{(a-x)^2} = \frac{b}{a}|a - x| = \frac{b}{a}(a - x) = y_{пр}.$$

Отже, ми показали, що між точками B_1 і A_1 еліпс розміщується над прямою A_1B_1.

Наведених вище міркувань достатньо, щоб накреслити еліпс. Еліпс показано на рис. 2.

1.3. Ексцентриситет і директриси еліпса

Еліпси бувають різної форми, а саме, більш або менш витягнутими. Форму еліпса характеризують наступним числом.

<u>Означення 1</u>. Відношення половини відстані між фокусами еліпса (фокальної відстані) до більшої півосі еліпса називається ***ексцентриситетом*** еліпса і позначається буквою e:

$$e = \frac{c}{a}. \qquad (7)$$

Оскільки $0 \le c < a$, то $0 \le e < 1$.

Підставимо значення c з формули (2) формулу (7):

$$e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}\Leftrightarrow\frac{b}{a}=\sqrt{1-e^2}\,. \qquad (8)$$

Отже, ексцентриситет еліпса визначається відношенням його півосей. Навпаки, знаючи ексцентриситет, завжди можна знайти відношення півосей еліпса.

Розглянемо систему еліпсів з однією і тією ж більшою віссю, але різними ексцентриситетами. З рівності (8) випливає, що зі зменшенням e число b збільшується і при $e=0$ $b=a$, тобто еліпс перетворюється в коло. При цьому $c=0$, тобто фокуси співпадають з центром кола. Навпаки, зі збільшенням ексцентриситету число b зменшується і еліпс стає більш витягнутим. На рис. 3 показано еліпси, ексцентриситети яких задовольняють нерівності $0=e_1<e_2<e_3<e_4$. Якщо e прямує до одиниці, число b прямує до нуля.

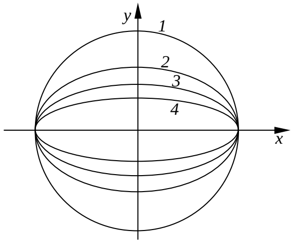

Рис. 3

<u>**Означення 2**</u>. Дві прямі, які проходять перпендикулярно до осі еліпса, що містить його фокуси, на відстані $\frac{a}{e}$ від центра еліпса, називаються ***директрисами*** еліпса. Тут, як і раніше, a – більша піввісь еліпса, а e – його ексцентриситет.

Коло, для якого $e=0$, не має директрис. Нехай еліпс задано канонічним рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

причому $a>b$. Фокуси F_1 і F_2 розміщені на осі Ox. Оскільки $0\le e<1$, то $\frac{a}{e}>a$. Тому директриси не перетинають еліпс, тобто знаходяться далі від центра еліпса, ніж його вершини (рис. 4). Рівняння директрис мають вигляд

$$x=-\frac{a}{e} \quad \text{і} \quad x=\frac{a}{e}\,.$$

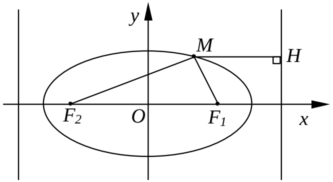

Рис. 4

<u>Означення 3</u>. Фокус і директрису, які знаходяться по один бік від меншої осі еліпса, будемо називати такими, що відповідають одне одному.

За означенням фокусу $F_1(c;0)$ відповідає директриса $x=\frac{a}{e}$, а фокусу $F_2(-c;0)$ – директриса $x=-\frac{a}{e}$ (рис. 4).

<u>Означення 4</u>. Відрізки F_1M і F_2M (рис. 4) називаються фокальними радіусами точки M еліпса.

Згідно з формулами (4) і (5) з Додатку 1 фокальні радіуси точки M еліпса визначаються формулами

$$\rho_1=F_1M=a-\frac{c}{a}x=a-ex,\quad \rho_2=F_2M=a+\frac{c}{a}x=a+ex.$$

Теорема 1 (директоріальна властивість еліпса). Еліпс – це геометричне місце точок, відношення відстаней від кожної з яких до фокуса еліпса і до відповідної цьому фокусу директриси є величиною сталою і такою, що дорівнює ексцентриситету еліпса. (Додаток 2.)

Приклад 1. Записати рівняння директрис еліпса $4x^2+9y^2=144$.

Розв'язання. Поділимо обидві частини рівняння на 144. В результаті будемо мати канонічне рівняння еліпса $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$.

Звідси

$$a^2=36\Leftrightarrow a=6,$$

$$b^2=16\Leftrightarrow b=4.$$

Знаючи a і b, із співвідношення $a^2-b^2=c^2$ знаходимо

$$c=\sqrt{36-16}=2\sqrt{5}.$$

Ексцентриситетом еліпса є число

$$e=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{5}}{6}=\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Тому рівняння директрис мають вигляд

$$x=\frac{a}{e}=\frac{6}{\sqrt{5}/3}=\frac{18}{\sqrt{5}} \quad \text{і} \quad x=-\frac{a}{e}=-\frac{18}{\sqrt{5}}.$$

2. Гіпербола. Канонічне рівняння гіперболи

<u>Означення 1</u>. Гіперболою називається геометричне місце точок площини, модуль різниці відстаней від кожної з яких до двох заданих точок цієї площини, що називаються фокусами, є величиною сталою і меншою за відстань між фокусами.

Позначимо цю сталу через $2a$, відстань між фокусами еліпса – через $2c$, а самі фокуси – через F_1 і F_2.

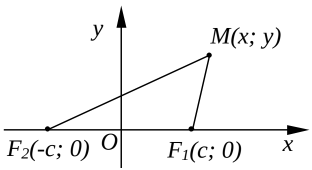

Рис. 1

Виберемо на площині декартову прямокутну систему координат так, щоб початок O співпадав з серединою відрізка F_1F_2, а вісь абсцис – з прямою F_1F_2. Напрямки осей Ox і Oy візьмемо такими, як показано на рис. 1.

У вибраній системі координат фокус F_1 має координати $(c; 0)$, а фокус F_2 – координати $(-c; 0)$.

Якщо $M(x; y)$ – довільна точка гіперболи, то за означенням 1

$$|MF_1 - MF_2| = 2a \Leftrightarrow \left|\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right| = 2a. \qquad (1)$$

Навпаки, якщо координати деякої точки площини задовольняють рівнянню (1), то ця точка буде точкою гіперболи. Тому у вибраній системі координат рівняння (1) є рівнянням гіперболи. Щоб спростити це рівняння, перепишемо його у вигляді

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

і обидві частини піднесемо до квадрата:

$$(x+c)^2+y^2=4a^2\pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mp a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-xc \Leftrightarrow \mp\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a-\frac{c}{a}x.$$

Ще раз піднесемо останню рівність до квадрата:

$$(x-c)^2+y^2=a^2-2cx+\frac{c^2}{a^2}x^2 \Leftrightarrow x^2\left(\frac{a^2-c^2}{a^2}\right)+y^2=a^2-c^2.$$

На відміну від еліпса, тепер $a<c$. Якщо ввести позначення

$$c^2-a^2=b^2, \tag{2}$$

то попереднє рівняння можна перетворити до вигляду

$$-\frac{b^2}{a^2}x^2+y^2=-b^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{3}$$

Рівняння (3) отримано нами з рівняння (1). Тому координати довільної точки гіперболи задовольняють рівнянню (3).

Аналогічно доведеному вище доводиться протилежне твердження: якщо координати деякої точки $M(x;\, y)$ задовольняють рівнянню (3), то ця точка лежить на гіперболі, тобто

$$|MF_1-MF_2|=2a.$$

<u>Означення 2</u>. Рівняння (3) називається канонічним рівнянням гіперболи, а вибрана система координат – канонічною системою координат.

2.2. Дослідження форми гіперболи за допомогою канонічного рівняння

Нехай гіперболу задано канонічним рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (4)$$

Оскільки координати x і y входять до рівняння (4) з квадратом, то шляхом міркувань, аналогічних міркуванням для еліпса, доводиться, що осі Ox і Oy є осями симетрії гіперболи, яку задано рівнянням (4), а початок координат – центром симетрії цієї гіперболи.

Розв’яжемо рівняння (4) відносно x

$$x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2+y^2}. \qquad (5)$$

і відносно y

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}. \qquad (6)$$

З (5) випливає, що y може приймати всі значення від $-\infty$ до $+\infty$. З (6) випливає, що

$$x^2\ge a^2 \Leftrightarrow |x|\ge a \Leftrightarrow x\in(-\infty,\, a]\cup[a,\, \infty).$$

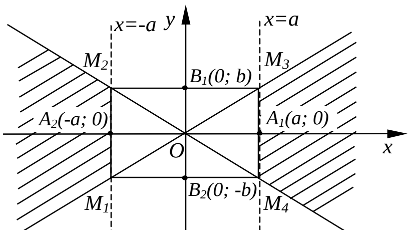

Рис. 2

Іншими словами, x може приймати всі значення, крім значень, що містяться між $-a$ і a (рис. 1). Тому гіпербола розміщується поза смугою, утвореною прямими $x=-a$ і $x=a$. Уверх і донизу вона простягається необмежено, оскільки y може змінюватись від $-\infty$ до ∞.

Вісь Ox перетинає гіперболу у двох точках $A_1(a;0)$ і $A_2(-a;0)$. Вісь Oy не перетинає гіперболу в жодній точці, оскільки рівняння (4) при $x=0$ має суто уявні розв’язки $\pm bi$.

<u>Означення 1</u>. Точки A_1 і A_2 називаються вершинами гіперболи, відрізок A_1A_2 – дійсною віссю гіперболи, а відрізок B_1B_2 (рис. 2) – уявною віссю гіперболи. Числа a і b у канонічному рівнянні (4) гіперболи називаються відповідно дійсною і уявною півосями гіперболи.

Розглянемо питання про взаємне розміщення гіперболи і прямої, що проходить через початок координат. Для цього розв'яжемо систему

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ y=kx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2\left(b^2-k^2a^2\right)=a^2b^2 \\ y=kx. \end{cases} \tag{7}$$

Можливі три випадки:

1°. $b^2-k^2a^2>0$. У цьому випадку пряма $y=kx$ перетинає гіперболу (4) у двох точках

$$\left(\frac{ab}{\sqrt{b^2-k^2a^2}};\ \frac{kab}{\sqrt{b^2-k^2a^2}}\right) \quad \text{і} \quad \left(-\frac{ab}{\sqrt{b^2-k^2a^2}};\ -\frac{kab}{\sqrt{b^2-k^2a^2}}\right),$$

симетричних відносно початку координат.

2°. $b^2-k^2a^2=0$. У цьому випадку система (7) не має ні дійсних, ні комплексних розв'язків, тобто є несумісною. Геометрично це означає, що пряма $y=kx$ не перетинає гіперболу.

3°. $b^2-k^2a^2<0$. Система (7) має комплексні розв'язки. Отже, і в цьому випадку пряма $y=kx$ не перетинає гіперболу.

Дослідимо розміщення прямої $y=kx$ для кожного з розглянутих випадків, врахувавши, що $k=\operatorname{tg}\alpha$, де α – кут між віссю Ox і цією прямою. Маємо:

1°. $k^2a^2<b^2 \Leftrightarrow k^2<\dfrac{b^2}{a^2} \Leftrightarrow -\dfrac{b}{a}<k<\dfrac{b}{a} \Leftrightarrow -\dfrac{b}{a}<\operatorname{tg}\alpha<\dfrac{b}{a}$.

2°. $k^2a^2 = b^2 \Leftrightarrow k^2 = \dfrac{b^2}{a^2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k_1 = \dfrac{b}{a} \\ k_2 = -\dfrac{b}{a} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}\alpha_1 = \dfrac{b}{a} \\ \operatorname{tg}\alpha_2 = -\dfrac{b}{a}. \end{array}\right.$

3°. $k^2a^2 > b^2 \Leftrightarrow k^2 > \dfrac{b^2}{a^2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k > \dfrac{b}{a} \\ k < -\dfrac{b}{a} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}\alpha > \dfrac{b}{a} \\ \operatorname{tg}\alpha < -\dfrac{b}{a}. \end{array}\right.$

Побудуємо прямокутник, сторони $2a$ і $2b$ якого паралельні осям координат, а центр співпадає з початком координат. На рис. 2 це прямокутник з вершинами у точках M_1, M_2, M_3, M_4. Випадку **1°** відповідають прямі, які розміщуються всередині горизонтальних кутів M_1OM_2 і M_3OM_4. Випадку **2°** відповідають дві прямі M_1M_3 і M_2M_4, які є діагоналями прямокутника $M_1M_2M_3M_4$. Випадку **3°** відповідають прямі, які розміщуються всередині вертикальних кутів M_2OM_3 і M_1OM_4.

Отже, серед прямих, які проходять через початок координат, тільки ті перетинають гіперболу, які розміщуються всередині кутів M_1OM_2 і M_3OM_4.

Зіставляючи всі попередні дослідження, приходимо до висновку, що гіпербола всіма своїми точками розміщується в області, яку на рис. 2 заштриховано. Звідси випливає, що гіпербола на відміну від еліпса складається з двох віток, симетричних одна одній відносно осі Oy.

Розглянемо прямі, що відповідають випадку **2°** і визначають межі області, в якій знаходиться гіпербола.

<u>Означення 2</u>. Прямі, що проходять через початок канонічної системи координат і мають кутові коефіцієнти $\dfrac{b}{a}$ і $-\dfrac{b}{a}$, називаються асимптотами гіперболи.

Наступна теорема пояснює смисл терміна “асимптота”.

Теорема 1. Точки гіперболи при віддалені від осі Oy необмежено (асимптотично) наближаються до відповідних асимптот, тобто відстань між точкою гіперболи і відповідною асимптотою зі збільшенням x зменшується, прямує до нуля, але не досягає нуля.

Доведення. Оскільки гіпербола симетрична відносно осей координат, то теорему достатньо довести для тієї її частини, яка знаходиться у першому квадранті (рис. 3).

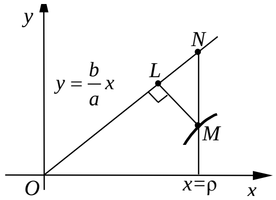

Рис. 3

Візьмемо довільне $x=\rho>a$. Йому відповідає точка $M\left(\rho;\ \frac{b}{a}\sqrt{\rho^2-a^2}\right)$ гіперболи (4) (див. (3)) і точка $N\left(\rho;\ \frac{b}{a}\rho\right)$ асимптоти $y=\frac{b}{a}x$.

Оскільки $\frac{b}{a}\rho>\frac{b}{a}\sqrt{\rho^2-a^2}$, то точка N лежить вище точки M (рис. 3) і

$$MN=\frac{b}{a}\rho-\frac{b}{a}\sqrt{\rho^2-a^2}\ . \qquad (8)$$

Будемо досліджувати поведінку довжини відрізка MN при необмеженому зростанні ρ. Оскільки зі збільшенням ρ обидва члени правої частини (8) збільшуються, то незрозуміло, що відбувається з їх різницею. Тому спочатку перетворимо вираз (8):

$$MN=\frac{\frac{b}{a}\left(\rho-\sqrt{\rho^2-a^2}\right)\left(\rho+\sqrt{\rho^2-a^2}\right)}{\rho+\sqrt{\rho^2-a^2}}=\frac{\frac{b}{a}\left(\rho^2-\rho^2+a^2\right)}{\rho+\sqrt{\rho^2-a^2}}=\frac{ab}{\rho+\sqrt{\rho^2-a^2}}\ .$$

Звідси очевидно, що

$$\lim_{\rho\to\infty} MN = \lim_{\rho\to\infty} \frac{ab}{\rho + \sqrt{\rho^2 - a^2}} = 0\,. \qquad (9)$$

Нехай ML – відстань від точки M до відповідної асимптоти (рис. 3). Оскільки $ML < MN$, то згідно з (6) довжина відрізка ML прямує до нуля при $\rho \to \infty$.

Теорему доведено.

Зображення гіперболи за її канонічним рівнянням (4) рекомендується виконувати так (рис. 4): спочатку будують прямокутник з центром у початку координат і зі сторонами $2a$ і $2b$, паралельними відповідно осями Ox і Oy. Прямі, що з’єднують протилежні вершини цього прямокутника, є асимптотами гіперболи. Потім креслять вітки гіперболи: ліва вітка повинна дотикатись прямокутника зовні в точці A_2 (вершині гіперболи) і своїми “кінцями” наближатися до асимптот; права вітка дотикається прямокутника зовні в іншій вершині гіперболи – точці A_1 і своїми “кінцями” наближається до асимптот. Побудову віток гіперболи потрібно проводити симетрично осям координат.

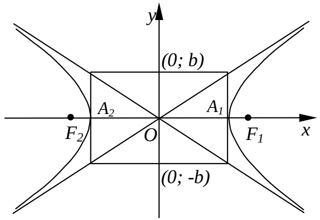

Рис. 4

2.3. Ексцентриситет і директриси гіперболи

Означення 1. Число $e=\frac{c}{a}$ називається ексцентриситетом гіперболи. Дві прямі, що проходять на відстані $\frac{a}{e}$ від центра гіперболи перпендикулярно її дійсній осі, називаються директрисами гіперболи.

Оскільки $0<a<c$, то $e>1$. Тому $\frac{a}{e}<a$ і відстань від центра гіперболи до директрис менша за довжину дійсної півосі (рис. 5).

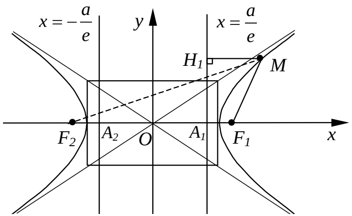

Рис. 5

Рівняння директрис мають вигляд

$$x=\frac{a}{e} \quad \text{і} \quad x=-\frac{a}{e}.$$

Означення 2. Фокус і директрису гіперболи, які розміщені по один бік від уявної осі, назвемо такими, що відповідають одне одному.

Згідно з означенням 2 фокусу $F_1(c;\,0)$ відповідає директриса $x=\frac{a}{e}$, а фокусу $F_2=(-c;\,0)$ – директриса $x=-\frac{a}{e}$.

Означення 3. Відрізки F_1M і F_2M називаються фокальними радіусами точки M гіперболи (рис. 5).

Теорема 1 (директоріальна властивість гіперболи). Гіпербола є геометричним місцем точок, відношення відстаней від кожної з яких до фокуса гіперболи і до відповідної цьому фокусу директриси є величиною сталою і такою, що дорівнює ексцентриситету гіперболи.

(Доведення теореми у Додатку 3)

Приклад 1. Визначити півосі, координати фокусів, ексцентриситет, рівняння директрис і рівняння асимптот гіперболи

$$4x^2 - 9y^2 = 36 .$$

Розв'язання. Запишемо канонічне рівняння гіперболи:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1 .$$

Тому $a^2 = 9 \Leftrightarrow a = 3$; $b^2 = 4 \Leftrightarrow b = 2$ і $c = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$.

Фокуси F_1 і F_2 мають координати $F_1\left(\sqrt{13};\, 0\right)$, $F_2\left(-\sqrt{13};\, 0\right)$. Ексцентриситет дорівнює $e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{13}{3}}$. Рівняннями директрис є

$$x = \frac{a}{e} = \frac{3}{\sqrt{13}/3} = \frac{9}{\sqrt{13}} \quad \text{і} \quad x = -\frac{9}{\sqrt{13}} ,$$

а асимптоти гіперболи визначаються рівнянням

$$y = \frac{b}{a}x = \frac{2}{3}x \quad \text{і} \quad y = -\frac{2}{3}x .$$

3. Парабола Канонічне рівняння параболи (*самостійно*)

<u>**Означення 1**</u>. Параболою називається геометричне місце точок площини, рівновіддалених від фіксованої точки F цієї площини та фіксованої прямої l, що лежить у цій же площині і не проходить через точку F (рис. 1). Точка F називається фокусом параболи, пряма l – директрисою параболи, а відстань p від фокуса до директриси –

фокальним параметром параболи. Відрізок, що з’єднує точку M параболи з її фокусом F, називається фокальним радіусом точки M.

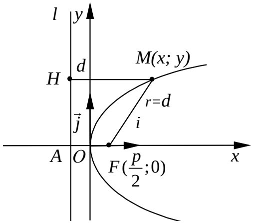

Рис. 1

Опустимо з фокуса F перпендикуляр на директрису l і точку перетину цього перпендикуляра з директрисою позначимо A. Виберемо на площині декартову прямокутну систему координат наступним чином. За початок координат O візьмемо середину відрізка AF, за вісь Ox – пряму AO, причому напрям осі Ox виберемо так, щоб фокус F знаходився на додатному промені цієї осі (рис. 1). За вісь Oy візьмемо пряму, яка проходить через точку O паралельно директрисі l.

Напрям цієї осі може бути довільним. У вибраній системі координат фокус F має координати $\left(\frac{p}{2};\,0\right)$, а директриса l – рівняння

$$x=-\frac{p}{2}. \qquad (1)$$

Нехай $M\left(x;\,y\right)$ – довільна точка площини. Позначимо через r відстань MF від точки M до фокуса параболи, а через d – відстань MH від точки M до директриси параболи. Тоді для довільної точки $M\left(x;\,y\right)$ параболи маємо

$$r=d \Leftrightarrow \sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|. \qquad (2)$$

Навпаки, якщо координати деякої точки площини задовольняють рівнянню (2), то ця точка належить параболі. Отже, рівняння (2) у вибраній системі координат є рівнянням параболи.

Для спрощення рівняння параболи піднесемо обидві частини рівності (2) до квадрата і розкриємо дужки:

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4} \Leftrightarrow y^2 = 2px\,. \qquad (3)$$

Рівняння (3) є наслідком рівняння (2). Тому координати точки, яка належить параболі, задовольняють рівнянню (3).

<u>Означення 2</u>. Рівняння (3) називається канонічним рівнянням параболи, а вибрана система координат – канонічною.

3.2. Дослідження форми параболи за допомогою канонічного рівняння

Нехай параболу задано її канонічним рівнянням

$$y^2 = 2px\,. \qquad (1)$$

Змінна y входить до рівняння (1) з квадратом. Тому, якщо параболі належить точка $M_1(x_1;\, y_1)$, то їй належить і точка $M_2(x_1;\, -y_1)$. Точки M_1 і M_2 симетричні відносно осі Ox. Отже, парабола є симетричною лінією відносно осі Ox. Вісь симетрії параболи називають просто віссю параболи.

Розв’яжемо рівняння (1) відносно y:

$$y = \pm\sqrt{2px}\,. \qquad (2)$$

Областю визначення цієї функції є

$$0 \le x < \infty\,.$$

Це означає, що парабола (1) знаходиться справа від осі Oy, причому розміщується у першому та четвертому квадрантах.

Нехай x зростає, починаючи з нуля. Перед радикалом у (2) беремо знак плюс, оскільки внаслідок симетрії достатньо дослідити верхню частину параболи. Якщо $x=0$, то $y=0$, тобто парабола проходить через початок координат. Зі збільшенням x збільшується і y. Тому вітка параболи при русі вправо весь час прямує вгору. Парабола – незамкнена крива, оскільки і x і y можуть зростати необмежено.

Дослідимо взаємне розміщення прямої $y=kx$ і параболи (1). Для цього розглянемо питання про існування розв’язків системи

$$\begin{cases} y^2=2px \\ y=kx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k^2x^2-2px=0 \\ y=kx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\left(k^2x-2p\right)=0 \\ y=kx. \end{cases} \tag{3}$$

Якщо $k=0$, система має єдиний розв’язок $(x=0,\ y=0)$.

Геометрично це означає, що вісь Ox перетинає параболу в одній точці $O(0;0)$ (у вершині параболи).

<u>Означення 1</u>. Точка перетину параболи та її осі називається вершиною параболи.

Якщо $k\neq 0$, то система (3) має два розв’язки, яким відповідають точки $M_1(0;0)$ і $M_2\left(\frac{2p}{k^2};\ \frac{2p}{k}\right)$. Звідси випливає, що будь-яка пряма, яка проходить через початок координат і не співпадає з осями координат, перетинається з параболою у двох точках.

Проведене дослідження дозволяє схематично зобразити форму параболи (1) (рис. 1).

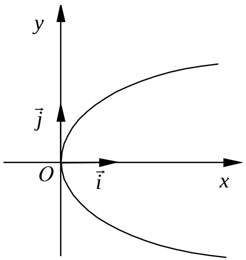

Рис. 1

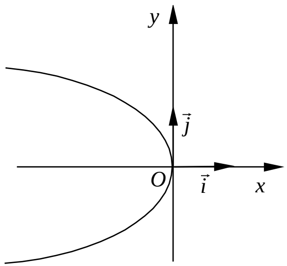

Рис. 2

Рівняння

$$y^2 = -2px\,, \tag{4}$$

де $p > 0$, зводиться до рівняння (1) заміною x на $-x$, тобто перетворенням координат, що полягає у зміні додатного напрямку осі Ox на протилежний (рис. 2).

Крива, що визначається рівнянням

$$x^2 = 2py\,, \tag{5}$$

також є параболою з вершиною у початку координат. Віссю симетрії цієї параболи є вісь Oy. Дійсно, перейдемо до нової координатної системи $\{O; \vec{i}'; \vec{j}'\}$, в якій

$$\vec{i}' = \vec{j}\,, \quad \vec{j}' = \vec{i}\,.$$

Тоді нові координати x' і y' будуть задовольняти рівнянню

$$(y')^2 = 2px'.$$

Звідси випливає, що лінія (5) є параболою з віссю Oy, оскільки вісь Ox' співпадає з віссю Oy (рис. 3).

Аналогічно, рівняння

$$x^2 = -2py \tag{6}$$

визначає параболу з вершиною у точці O і віссю Oy, але розміщеною вздовж від'ємного напрямку осі Oy (рис. 4).

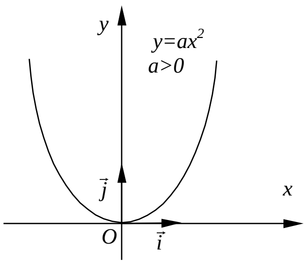

Рис. 3

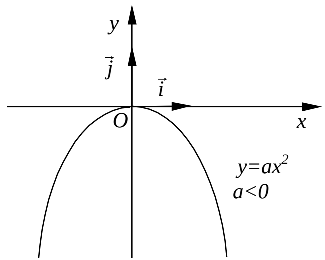

Рис. 4

Рівняння (5) і (6) зазвичай подають у вигляді

$$y = ax^2, \tag{7}$$

де $a \neq 0$, $|a| = \dfrac{1}{2p}$. Тоді $p = \dfrac{1}{2|a|}$.

Приклад 1. Написати рівняння парабол з вершинами у початку координат, якщо відомо, що

1) парабола є симетричною відносно осі Oy і проходить через точку $M(4; -8)$;

2) фокус параболи знаходиться у точці $F(0;-3)$.

Розв'язання. 1) Рівняння параболи згідно з (7) має вигляд $y = ax^2$. Оскільки парабола проходить через точку M, то

$$-8 = a \cdot 16 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2} \cdot$$

Тоді $y = -\frac{1}{2}x^2 \Leftrightarrow -2y = x^2$.

2) Знаходимо параметр параболи p. Оскільки $p > 0$, то $\frac{p}{2} = 3 \Leftrightarrow p = 6$. Скориставшись формулою (6), отримуємо

$$x^2 = -12y.$$

Додаток 1. Доведемо обернене твердження: якщо числа x, y задовольняють рівнянню (3), то точка $M(x;\, y)$ належить еліпсу.

Нехай координати довільної точки $M(x;\, y)$ площини задовольняють рівнянню (3). Знайдемо відстані $\rho_1 = MF_1$ і $\rho_2 = MF_2$:

$$\rho_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2} = \sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}x^2 - 2xc + c^2 + b^2} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2 - 2xc + a^2} = \sqrt{\left(a - \frac{c}{a}x\right)^2} = \left|a - \frac{c}{a}x\right|.$$

Якщо $x \le 0$, то $a - \frac{c}{a}x > 0$. Якщо ж $x > 0$, то з (3) випливає, що $x \le a$. Тому $a - \frac{c}{a}x \ge a - \frac{c}{a}a = a - c > 0$.

Отже, для всіх можливих значень x маємо, що $a - \frac{c}{a}x > 0$ і

$$\rho_1 = \left|a - \frac{c}{a}x\right| = a - \frac{c}{a}x. \qquad (4)$$

Аналогічно доводиться, що

$$\rho_2 = a + \frac{c}{a}x. \qquad (5)$$

Таким чином, якщо координати точки M задовольняють рівнянню (3), то

$$MF_1 + MF_2 = \left(a - \frac{c}{a}x\right) + \left(a + \frac{c}{a}x\right) = 2a,$$

тобто точка M належить еліпсу. Цим самим доведемо, що рівняння (1), (3) рівносильні і рівняння (3) є рівнянням еліпса.

Додаток 2.

<u>*Доведення*</u>. Розглянемо фокус $F_1(c;\,0)$ і відповідну йому директрису $x=\dfrac{a}{e}$. Візьмемо довільну точку $M(x;\,y)$ еліпса (рис. 2) і знайдемо відстані F_1M і $d_1=MH$, де H – основа перпендикуляра, опущеного з точки M на директрису $x=\dfrac{a}{e}$. Згідно з формулою (3) $F_1M=a-ex$. Відстань $d_1=MH$ знаходимо за відомою формулою:

$$d_1=MH=\frac{\left|x-\frac{a}{e}\right|}{\sqrt{1+0}}=\left|\frac{ex-a}{e}\right|=\frac{a-ex}{e}=\frac{F_1M}{e}.$$

Звідси $\dfrac{F_1M}{d_1}=\dfrac{F_1M}{F_1M/e}=e$. Аналогічно доводиться, що $\dfrac{F_2M}{d_2}=e$, де F_2M – відстань від точки M еліпса до його фокуса F_2, а d_2 – відстань від цієї ж точки до директриси $x=-\dfrac{a}{e}$, що відповідає фокусу F_2.

Навпаки, нехай для точки $M(x;\,y)$ площини $\dfrac{F_1M}{MH}=e$, де H – основа перпендикуляра, опущеного з точки M на пряму $x=\dfrac{a}{e}$. Оскільки $F_1M=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$, $MH=\left|x-\dfrac{a}{e}\right|$, то $\sqrt{(x-c)^2+y^2}=e\left|x-\dfrac{a}{e}\right|$. Піднесемо останню рівність до квадрата:

$$(x-c)^2+y^2=e^2\left(x^2-2\frac{xa}{e}+\frac{a^2}{e^2}\right)\Leftrightarrow x^2-2xc+c^2+y^2=e^2x^2-2xae+a^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(1-e^2\right)+y^2=a^2-c^2\Leftrightarrow x^2\left(\frac{a^2-c^2}{a^2}\right)+y^2=b^2\Leftrightarrow\frac{x^2b^2}{a^2}+y^2=b^2\Leftrightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Цим показано, що кожна точка геометричного місця точок належить еліпсу. Теорему доведено.

Додаток 3

Доведення. Нехай

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

– рівняння даної гіперболи, а F_1 і $x=\frac{a}{e}$ – фокус і директриса, що відповідають одне одному. Візьмемо довільну точку $M(x;\,y)$ гіперболи і знайдемо відстані F_1M і MH_1, де H_1 – основа перпендикуляра, опущеного з точки M на директрису $x=\frac{a}{e}$ (рис. 1).

Якщо $x>0$, то відстань ρ_1 від точки $M(x;\,y)$ до фокуса $F_1(c;\,0)$ згідно з формулою (1) дорівнює

$$F_1M=\rho_1=ex-a.$$

Відстань MH_1 знаходимо за формулою (8) §7 гл. XIII:

$$MH_1=\left|x-\frac{a}{e}\right|=\left|\frac{ex-a}{e}\right|=\frac{ex-a}{e}.$$

Отже,

$$\frac{F_1M}{MH_1}=\frac{ex-a}{\dfrac{ex-a}{e}}=e.$$

Якщо $x<0$, то згідно з (2)

$$F_1M = a - ex\,,$$

а $MH_1 = \dfrac{|ex-a|}{e} = \dfrac{a-ex}{e}$, оскільки $x < a$. Тому і в цьому випадку

$$\frac{F_1M}{MH_1} = \frac{a-ex}{\dfrac{a-ex}{e}} = e\,.$$

Аналогічно доводиться, що

$$\frac{F_2M}{MH_2} = e\,,$$

де $F_2M = \rho_2$ – відстань від точки $M(x;\,y)$ гіперболи до її фокуса $F_2(-c;\,0)$, а MH_2 – відстань від тієї ж точки M до директриси $x = -\dfrac{a}{e}$, що відповідає фокусу F_2.

Навпаки, нехай для точки $M(x;\,y)$ площини

$$\frac{MF_1}{MH_1} = e\,, \tag{3}$$

де H_1 – основа перпендикуляра, опущеного з точки M на пряму $x = \dfrac{a}{e}$.

Оскільки

$$MF_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\,, \quad MH_1 = \frac{|ex-a|}{e}\,,$$

то рівність (3) приймає вигляд

$$\frac{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}{\frac{|ex-a|}{e}}=e \Leftrightarrow \sqrt{(x-c)^2+y^2}=|ex-a| .$$

Після піднесення останньої рівності до квадрата, отримуємо:

$$x^2-2xc+c^2+y^2=e^2x^2-2xae+a^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(1-e^2\right)+y^2=a^2-c^2 \Leftrightarrow x^2\left(\frac{a^2-c^2}{a^2}\right)+y^2=a^2-c^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \text{, оскільки } a^2-c^2=-b^2 .$$

Отже, кожна точка геометричного місця є точкою гіперболи.
Теорему доведено.

Додаток 4. Рівняння дотичної до параболи. Оптична властивість параболи

Знайдемо рівняння дотичної до параболи

$$y^2 = 2px \tag{1}$$

у точці $M_0(x_0; y_0)$. Для цього продиференціюємо рівняння (1) за умови, що y є функцією від x:

$$2yy' = 2p \Leftrightarrow y' = \frac{p}{y}.$$

Отже,

$$y'(x_0) = \frac{p}{y_0}. \tag{2}$$

Рівняння дотичної у точці $M_0(x_0; y_0)$ має вигляд

$$y - y_0 = k(x - x_0), \tag{3}$$

де $k = y'(x_0)$. Якщо підставити (2) в (3) і врахувати, що точка $M_0(x_0; y_0)$ лежить на параболі, то отримаємо шукане рівняння дотичної до параболи (1) у точці $M_0(x_0; y_0)$:

$$y - y_0 = \frac{p}{y_0}(x - x_0) \Leftrightarrow yy_0 - y_0{}^2 = px - px_0 \Leftrightarrow yy_0 - 2px_0 = px - px_0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow yy_0 = p(x + x_0). \tag{4}$$

Тепер знайдемо рівняння дотичної до параболи у точці $M_0(x_0; y_0)$, якщо цю параболу задано рівнянням

$$y = ax^2,\ a \neq 0. \tag{5}$$

Кутовий коефіцієнт дотичної у точці $M_0(x_0; y_0)$ дорівнює

$$k = 2ax_0, \tag{6}$$

оскільки $y' = 2ax$. Підставивши (6) в (3) і врахувавши, що точка $M_0(x_0; y_0)$ є точкою параболи, отримуємо шукане рівняння дотичної:

$$y - y_0 = 2ax_0(x - x_0) \Leftrightarrow y - ax_0^{\ 2} = 2ax_0 x - 2ax_0^{\ 2} \Leftrightarrow y + ax_0^{\ 2} = 2ax_0 x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y + y_0 = 2ax_0 x. \qquad (7)$$

Теорема 1. Дотична до параболи є бісектрисою кута FM_0D між фокальним радіусом M_0F точки дотику і перпендикуляром, опущеним із точки дотику на директрису.

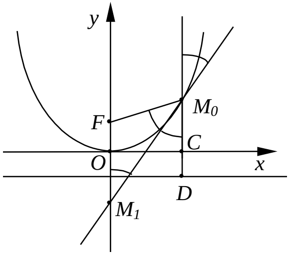

Рис. 1

<u>Доведення.</u> Проведемо дотичну (7) до параболи (5) у точці $M_0(x_0; y_0)$ (рис. 1). Нехай ця дотична перетинає вісь Oy у точці M_1. Щоб знайти координати цієї точки, покладемо в рівнянні (7) $x = 0$. Тоді $y = -y_0$ (рис. 1). За означенням параболи

$$M_0F = M_0D\,; \quad M_0D = M_0C + CD\,.$$

Але

$$y_0 = M_0C = |-y_0| = OM_1\,, \quad CD = OF\,.$$

Тоді $M_0D = OM_1 + OF = FM_1$. Трикутник M_1FM_0 рівнобедрений, оскільки $FM_1 = FM_0$. Тому $\angle FM_1M_0 = \angle FM_0M_1$, але $\angle FM_1M_0 = \angle M_1M_0D$. Отже, $\angle FM_0M_1 = \angle M_1M_0D$.

Теорему доведено.

Теорема 1 відображає важливу оптичну властивість параболічного дзеркала. Нехай у фокусі F розміщено джерело світла. Промені світла від джерела F, падаючи на параболу, відбиваються від неї за законом: кут падіння дорівнює куту відбиття. Згідно з тільки що доведеною рівністю кутів

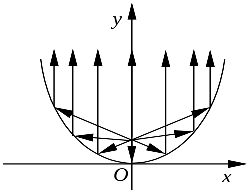

Рис. 2

це означає, що відбитий промінь паралельний до осі параболи. Іншими словами, всі відбиті від параболи промені поширюються паралельним пучком (рис. 2). Ця оптична властивість параболи є визначальною при будові прожекторів, автомобільних фар тощо.