4.7. Методи оптимального резервування

Часто мають місце випадки, коли необхідно забезпепечити величину надійності при наявності обмежень по масі, споживанні енергії, габаритах, вартості системи. Рішення подібних завдань базується на методах оптимізації. Завдання оптимізації можуть бути поставлені по-різному. Наприклад, при розробці систем з активним резервуванням в першу чергу необхідно встановити оптимальне число ділянок резервування. При збільшенні числа ділянок резервування імовірність відмови ділянки весь час зменшується через зменшення кількості елементів у ньому, але при збільшені числа ділянок резервування може виявитися, що система виходить з ладу в основному із-за відмов перемикачів. Таким чином, існує оптимальне число ділянок резервування, при якому імовірність відмови системи виявляється мінімальною.

Разом з тим, кількість ділянок резервування визначається не тільки міркуваннями надійності, але і іншими факторами.

Тому видається доцільним визначати оптимальне число ділянок резервування, вважаючи, що система ділиться на рівнонадійні ділянки і надійність всіх перемикачів однакова. Кількість резервних елементів зазвичай обмежується міркуваннями вартості, маси і обєму апаратури.

Таким чином, задача полягає у визначенні числа ділянок резервування, на яку треба розбити основну систему, щоб отримати більш надійну зарезервовану систему, якщо відомі імовірність відмови перемикачів та кількість резервних елементів на кожній ділянці.

Велика група задач оптимізації пов'язана з визначенням числа резервних елементів з урахуванням обмежуючих факторів: вартості, маси, об'єму – які визначають як «витрати».

Подібні завачі можуть бути двох видів.

Задачі оптимального резервування першого виду полягають у визначенні необхідної кількості резервних елементів, які необхідно використати у системі для забезпечення заданого значення надійності системи при мінімальних витратах.

Другий вид задач – визначення необхідної кількості резервних елементів, які забезпечують максимально можливе значення показника надійності системи при величині витрат, що не перевищує задані.

Витрати визначаються кількістю резервних елементів, технологічністю їх виготов ня і обслуговування. Як правило, передбачається, що величина витрат на виготовлення і експлуатацію системи лінійно зростає з ростом кількості резервних елементів.

Для випадку декількох обмежуючих факторів задача оптимального резервування зазвичай формулюється так: необхідно визначити таку кількість резервних елементів, щоб забезпечувалося максимально можливе значення показника надійності системи при задоволенні всіх заданих обмежень.

При вирішенні завдань оптимального резервування застосовують метод множників Лагранжа, а також методи прямого перебору і динамічного програмування та градієнтний.

4.8. Метод невизначених множників Лагранжа

Розв'язування задачі полягає в знаходженні екстремуму функції $\varphi(k_1, k_2, \dots k_m)$, при накладених обмеженнях $\gamma(k_1, k_2, \dots k_m)$. Для цього складають функцію Лагранжа

$$F(k_1, k_2, \dots k_m) = \varphi(k_1, k_2, \dots k_m) + \chi \cdot \gamma(k_1, k_2, \dots k_m)$$

де χ - Невизначений множник Лагранжа.

Знайдемо частинні похідні і прирівняємо їх до нуля, щоб знайти екстремуми функції:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial k_i} F(k_1, k_2, \dots k_m) = 0, i = 1, 2, \dots, m; \\ \gamma(k_1, k_2, \dots k_m) = \gamma_{0.} \end{cases}$$

Система розв'язків $k_1, k_2, \dots k_m$, яка задовольняє цим рівнянням дає екстремум функції $\varphi(k_1, k_2, \dots k_m)$.

Алгоритм методу множників Лагранжа

Етап 1. Складаємо функцію Лагранжа**.**

Етап 2. Знаходимо частинні похідні від функції Лагранжа по змінним і прирівнюємо їх нулю.

Етап 3. Розв'язуємо систему рівнянь, знаходимо точки, в яких цільова функція задачі може мати екстремум.

Етап 4. Серед точок, підозрілих на екстремум, знаходимо такі, в яких досягається екстремум, і обчислюємо значення функції Лагранжа у цих точках.

Метод множників Лагранжа можна застосовувати лише в тих випадках, коли додаткові умови задані у вигляді рівності, а аргументи *k* неперервні.

В процесі розвязку можна отримати нецілочисельне значення *k*, які необхідно округляти в бік найближчих цілих чисел. Після округлення частина цілочисельних значень відразу ж виключається, оскільки для них не виконується необхідна умова.

Для першого виду задач вибирається те рішення, яке мінімізує витрати, для другого – при якому отримуємо максимальне значення показника надійності системи. Перебір всіх можливих значень, як правило, виявляється досить трудомістким процесом. Якщо задане значення показника надійності системи або необхідна величина витрат будуть змінені, то необхідно визначити нові оптимальні величини k.

4.9. Градієнтний метод оптимального резервування

У загальному випадку рішення задач градієнтним методом полягає в тому, що відшукується значення екстремуму деякої функції шляхом послідовних кроків з початкової точки по напрямку градієнта. Процес створення оптимально-резервованої системи є багатокроковим процесом. Спочатку розглядається вихідна нерезервована система і на першому кроці відшукується елемент системи, додавання до якого одного резервного елемента дає найбільше відношення приросту показника надійності до приросту затрат.

На другому кроці відшукується наступний елемент системи (включаючи і той, у якого вже є резервний елемент), який характеризується найбільшим відношенням приросту показника надійності до приросту затрат і так далі.

Таким чином, на кожному (N + 1) кроці (N= 0, 1, 2 ...) відшукується максимальне значення з усіх, що розарховуємо за формулою для кожного елемента системи:

$$\gamma_i^{N+1}(k_i) = max\frac{P(M^{N+1}) - P(M^N)}{C(M^{N+1}) - C(M^N)}$$

де $P(M^{N+1}), P(M^N)$ – надійності системи на наступному N+1 та попередньому N кроках, $C(M^{N+1}) - C(M^N)$ – вартості системи на наступному N+1 та попередньому N кроках, M^{N+1}, M^N – вектори складу системи на наступному N+1 та попередньому N кроках.

На кожному кроці один резервний елемент добавляет ся до елементу з максимальним значенням величини $\gamma_i^{N+1}(k_i)$. Процес припиняється на такому N кроці, де виконуються посталвені задачі.

Для задач першого виду

$$P^{N+1} < P_0 < P^N,$$

де P_0 – задане значення показника надійності.

Для задач другого виду

$$\mathrm{C}^N < \mathrm{C}_0 < \mathrm{C}^{N+1},$$

де C_0 – задане значення витрат.

Метод найшвидшого спуску не завжди може дати строго оптимальний розвязок, оскільки перебір ведеться в обмеженій області можливих рішень. Після кожного кроку в системі обов'язково додається резервний елемент. Перекомпонування резерву між елементами системи не допускається.

4.10. Метод прямого перебору та динамічного програмування

Метод прямого перебору та динамічного програмування є найбільш точним методом оптимального резервування. Метод прямого перебору, який зводиться до перебору всіх можливих рішень, є громіздким і рідко застосовується при проектуванні систем. Тому використовують його модифікацію з методом динамічного програмування (алгоритм Кеттеля). Стосовно до задачі оптимального резервування він зводиться до відшукання домінуючої послідовності рішень, тобто послідовності векторів складу системи, які включають всі множини оптимальних рішень.

Вектор складу системи представляє собою деяку комбінацію розташування резервних елементів в системі з врахуванням основних елементі. Наприклад, система містить 3 послідовно з'єднані елементи. До першого підключено 2 резервних елементи, до другого – 4, до третього лише один. Вектор складу системy тоді запишемо у вигляді (3, 5, 2).

Вважаємо, що один вектор складу системи домінує над іншим, якщо забезпечення одного і того ж рівня надійності системи пов'язано з найменшими затратами. Всі неоптимальні рішення, що не входять до складу домінуючою послідовності просто виключаються з розгляду.

Завдання полягає в побудові домінуючою послідовності для всієї системи, що складається з n підсистем. Для цього беруться дві довільні підсистеми (n-1) і n, для яких будується домінуюча послідовність.

Необхідний вектор складу резервних елементів X0 вибирається з домінуючою послідовності, виходячи із заданих обмежень, тобто при рішенні першої задачі оптимального резервування вибирається такий вектор X0 при якому $P(X0) \geq P0$, а при вирішенні другої задачі – такий, при якому $C(X0)<C0$.

Для побудови домінуючої послідовності для n-1 і n-ої підсистем складається таблиця (табл.). Розмір таблиці визначається за заданим значенням надійності або витрат. В таблиці: x_{n-1}, x_n кількість резервних елементів в n-1і n-ої підсистемах; $P(x_{n-1}, x_n)$, $C(x_{n-1}, x_n)$ – показники надійності і вартості послідовно з'єднаних на логічній схемі "n-1"і "n"-ої систем відповідно при x_{n-1}, x_n резервних елементах.

Таблиця 4.1

x_n \ x_{n-1}	0	1	2	…..
0	P (0,0); C (0,0)	P (1,0); C (1,0)	P (2,0); C (2,0)	
1	P (0,1); C (0,1)	P (1,1); C (1,1)	P (2,1); C (2,1)	
2	P (0,2); C (0,2)	P (1,2); C (1,2)	P (2,2); C (2,2)	

Домінуюча послідовність будується наступним чином: для прямої задачі з таблиці знаходиться найменше значення P1> P0 (P0 – задано). Якщо це значення може бути отримане за допомогою декількох варіантів, то вибирається варіант з найменшими витратами C1, а решта виключаються з розгляду. Отриманий вектор складу системи з показниками P1 і C1 буде першим членом домінуючою послідовності. Далі з таблиці знаходять наступний за величиною показник надійності P2>P1 і аналогічно визначається другий член домінуючою послідовності і т.д. Для оберненої задачі члени домінуючої послідовності визначаються показником вартості.

Через *m* етапів система зводиться до одного умовного елементу з результуючою домінуючою послідовністю. Необхідний вектор складу системи вибирається з домінуючої послідовності виходячи з заданих обмежень, тобто при вирішенні задач першого роду оптимального резервування вибирається такий вектор складу системи M_0, при якому $P(M_0) > P_0$, а при розв’язку другої задачі – такий, при якому $C(M_0) < C_0$.

Метод динамічного програмування є надзвичайно точним методом, оскільки пошук охоплює всю можливу область рішень. Обмеженням для застосування методу є його трудомісткість і громіздкість. Тому на етапах попереднього проектування складних систем, де не потрібна висока точність, рекомендовано використовувати простіші методи множників Лагранжа і найшвидшого спуску.

На етапі остаточного проектування, де необхідна достатня точність, доцільно застосовувати метод динамічного програмування. У деяких випадках доцільно використовувати комбінацію методів множників Лагранжа і динамічного програмування: спочатку визначити не цілі значення кількості резервних блоків методом множників Лагранжа, а потім для округлення використовувати метод динамічного програмування.