4. Лінійні диференціальні рівняння

Диференціальне рівняння виду

$$y' + P(x)y = Q(x) \quad \text{або} \quad y' = -P(x)y + Q(x), \tag{13}$$

де $P(x)$ і $Q(x)$ – неперервні функції на деякому інтервалі (a, b), називається *лінійним диференціальним рівнянням першого порядку*.

У випадку, коли $P(x) = \pm Q(x)$ або $Q(x) = 0$, рівняння (13) є диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними.

Є кілька методів розв'язання рівняння (13). Розглянемо один із них – *метод Бернуллі*. Розв'язок рівняння шукаємо у вигляді добутку

$$y = u \cdot v, \tag{14}$$

де $u = u(x)$ і $v = v(x)$ – невідомі функції. Одну з цих функцій можна вибрати довільним чином, а інша визначається згідно з рівнянням (13).

Знаходимо похідну функції y: $y' = u'v + uv'$. Підставляючи y та y' в рівняння (13), отримаємо

$$u'v + uv' + P(x)uv = Q(x),$$

$$u'v + u\left(v' + P(x)v\right) = Q(x). \tag{15}$$

Виберемо функцію v так, щоб вираз у дужках дорівнював нулю, тобто

$$v' + P(x)v = 0. \tag{16}$$

Знаходимо v з рівняння (16), яке є диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними:

$\dfrac{dv}{dx} = -P(x)v$, $\quad \dfrac{dv}{v} = -P(x)dx$, звідки $\ln|v| = -\int P(x)dx$, або $v = e^{-\int P(x)dx}$. Під невизначеним інтегралом тут розуміємо одну з первісних функції $P(x)$.

Знаючи v, знаходимо u з рівняння $u'v = Q(x)$, яке випливає з (15) та (16):

$$v\frac{du}{dx}=Q(x), \qquad \frac{du}{dx}=\frac{Q(x)}{v}=Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx},$$

$$du=Q(x)e^{\int P(x)dx}dx, \qquad u=\int Q(x)e^{\int P(x)}dx+C.$$

Підставляємо знайдені функції u та v у формулу (14) і отримуємо загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння:

$$y=u\cdot v=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right). \tag{17}$$

При розв'язуванні конкретних задач простіше виконувати вказаний вище алгоритм, аніж застосовувати готову формулу (17).

37. $y'-\frac{2x}{x^2+1}y=x\sqrt{x^2+1}$, якщо $y(0)=2$.

Γ Маємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Його розв'язок шукаємо у вигляді $y=uv$.

$$u'v+uv'-\frac{2x}{x^2+1}uv=x\sqrt{x^2+1},$$

$$u'v+u\left(v'-\frac{2x}{x^2+1}v\right)=x\sqrt{x^2+1}. \tag{*}$$

Виберемо функцію v так, щоб $v'-\frac{2xv}{x^2+1}=0$. Знаходимо v:

$\frac{dv}{dx}=\frac{2xv}{x^2+1}$, $\quad \frac{dv}{v}=\frac{2x}{x^2+1}dx$, $\quad \int\frac{dv}{v}=\int\frac{2x}{x^2+1}dx$, $\quad \ln|v|=\ln|x^2+1|$,
$v=x^2+1$.

Підставляючи знайдену функцію v в рівняння $(*)$, отримуємо рівняння для знаходження u: $\quad u'(x^2+1)=x\sqrt{x^2+1}$,

$$u'=x\sqrt{x^2+1}\cdot\frac{1}{x^2+1}, \quad \frac{du}{dx}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, \quad du=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx,$$

$$\int du=\int\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx, \qquad u=\sqrt{x^2+1}+C.$$

$$y=\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\left(x^2+1\right), \quad y=\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}+x^2+1,$$

або $y=\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}+x^2+1$. ⌋

Отже, $y=uv=\left(\sqrt{x^2+1}+C\right)\cdot\left(x^2+1\right)$.

Знайдемо частинний розв’язок. За умовою задачі $y=2$ при $x=0$. Тоді отримаємо $2=(1+C)\cdot 1$, $C=1$. Отже, частинний розв’язок

$$y=\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\left(x^2+1\right), \quad y=\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}+x^2+1,$$

або $y=\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}+x^2+1$. ⌋