Опорний конспект

Лінії і поверхні 1-го порядку

1. Вступ.
2. Рівняння прямої на площині.
3. Рівняння площини.
4. Рівняння прямої в просторі.

1. Вступ.

Перед тим, як розглянути питання лекції, згадаємо деякі питання з векторної алгебри:

1) Необхідною і достатньою умовою перпендикулярності векторів $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$ і $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$ є рівність

$$a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0 \tag{1}$$

2) Необхідною і достатньою умовою колінеарності векторів $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$ і $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$ (колінеарні-лежать на одній прямій або на паралельних прямих), є пропорційність їх координат

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z} \tag{2}$$

Вектори $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$, $\vec{c}=(c_x,c_y,c_z)$ компланарні тоді і тільки тоді їхній мішаний добуток дорівнює нулю

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=0 \tag{3}$$

$F(x,y)=0$ – загальне рівняння лінії на площині *ХОУ*. Якщо це рівняння 1-го ступеня відносно *х* та *у*, то це лінія 2-го порядку.

2. Рівняння прямої на площині

1. Нехай пряма задана точкою $M_0(x_0,\ y_0)$ і перпендикуляром до неї $\vec{n}=(A;B)$.

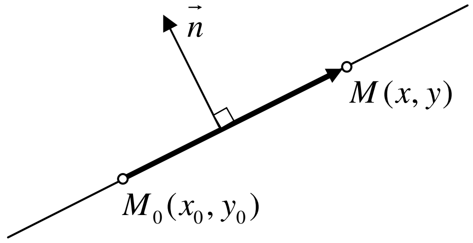


Рис. 1

Для того, щоб записати рівняння прямої, треба задати довільну точку *M(x,y)*. Для чого вона потрібна?

Ми знаємо, що пряма нескінченна і якраз довільна точка *M(x,y),* (яка "бігає" по прямій), надасть нам інформацію про всю цю пряму.

Введемо вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0)$. Вектори $\vec{n}$ і $\overrightarrow{M_0M}$ перпендикулярні, тоді їх скалярний добуток дорівнює нулю (формула (1)).

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

$$Ax + By + C = 0 \qquad (4)$$

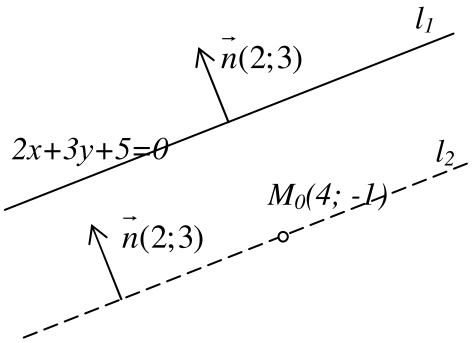
де $C = -Ax_0 - By_0$

Рівняння (4) – загальне рівняння прямої на площині.

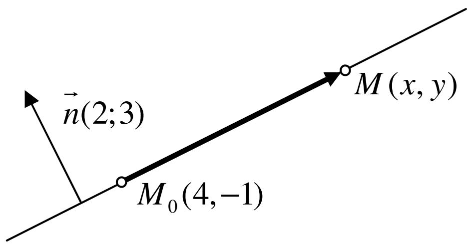
Якщо нам зададуть рівняння прямої в вигляді (4), то ми завжди можемо записати координати вектора $\vec{n} = (A, B)$. Вектор $\vec{n}$ називають нормальним вектором.

Приклад 1. Записати рівняння прямої , яка проходить через точку *M₀(4; -1),* паралельно до прямої *2x+3y+5=0.*

Зробимо малюнок.



З рівняння прямої l_1 : $2x+3y+5=0$ знайдемо вектор нормалі $\vec{n}(2;3)$. Вектор нормалі можна паралельно перенести в будь-яке місце на площині. Перенесемо його до прямої l_2. Маємо малюнок, аналогічний рис.1.



$$\overrightarrow{M_0M} = (x - 4; y + 1)$$

$$\vec{n} \perp \overrightarrow{M_0M} \Rightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$$

$$\Rightarrow 2(x - 4) + 3(y + 1) = 0$$

$$2x + 3y - 5 = 0$$

рівняння прямої l_2

При розв’язанні задач бажано не підставляти задані координати точки і вектора нормалі в готове рівняння (4), а піти по шляху виводу цього рівняння.

2. Нехай пряма задана точкою $M_0(x_0, y_0)$ та напрямним вектором $\vec{S} = (m, n)$.

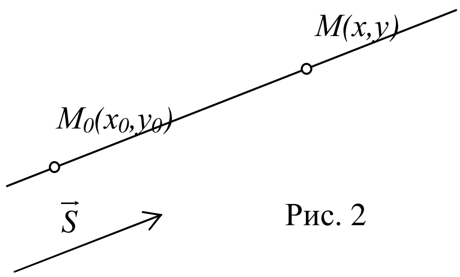


Рис. 2

Знаходимо довільну точку M(x, y), (без неї ніяк) і введемо вектор.

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$$

Вектори $\vec{S}$ і $\overrightarrow{M_0M}$ колінеарні.

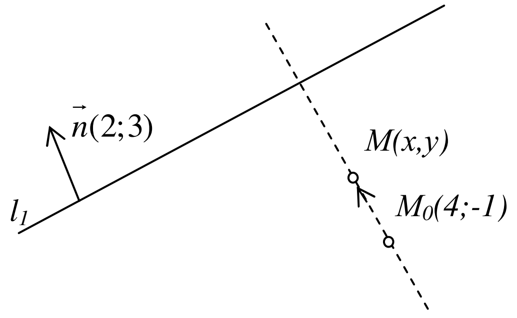
Використаємо умову колінеарності двох векторів (формула (2)).

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} \qquad (5)$$

Рівняння (5) називається канонічним рівнянням прямої.

Приклад 2. Записати рівняння прямої l_2, яка проходить через точку $M_0(4; -1)$ перпендикулярно до прямої l_1: $2x+3y+5=0$.

Зробимо малюнок:



З рівняння прямої l_1 знайдемо вектор нормалі $\vec{n}(2;3)$. На прямій l_2 поставимо точку $M(x,y)$ $\overrightarrow{M_0M}=(x-4,y+1)$.
$\overrightarrow{M_0M}$ і $\vec{n}$ колінеарні,

$$\frac{x-4}{2}=\frac{y+1}{3} \quad \text{канонічне рівняння}$$

$$3(x-4)=2(y+1)$$
$$3x-12-2y=0 \quad \text{загальне рівняння } l_2$$
$$3x-2y-14=0$$

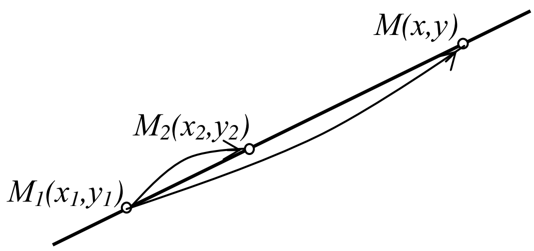
3. Розглянемо рівняння (5) і прирівняємо їх до t (t-параметр):

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=t$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \dfrac{x-x_0}{m}=t \\ \dfrac{y-y_0}{n}=t \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \end{matrix} \qquad (6)$$

Рівняння (6) – параметричне рівняння прямої

4. Нехай пряма задана двома точками $M_1(x_1; y_1)$ та $M_2(x_2; y_2)$

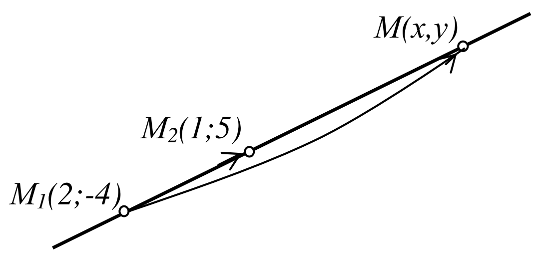


Задаємо довільну точку M(x; y) і побудуємо два вектори $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_1, y-y_1)$ і $\overrightarrow{M_0M}=(x_2-x_1, y_2-y_1)$. Ці вектори колінеарні, тому

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \qquad (7)$$

Рівняння (7) – рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки.

Приклад 2. Записати рівняння прямої, яка проходить через дві точки $M_1(2; -4)$, $M_2(1; 5)$,



$$\overrightarrow{M_1M}=(x-2; y+4);$$
$$\overrightarrow{M_1M_2}=(1-2; 5-(-4))=(-1;9);$$
$$\frac{x-2}{-1}=\frac{y+4}{9}.$$

5. Рівняння прямої у відрізках.

Розглянемо загальне рівняння прямої (4):

$$Ax + Bx + C = 0 \Rightarrow Ax + By = -C$$

Поділимо ліву і праву частину рівняння на –С.

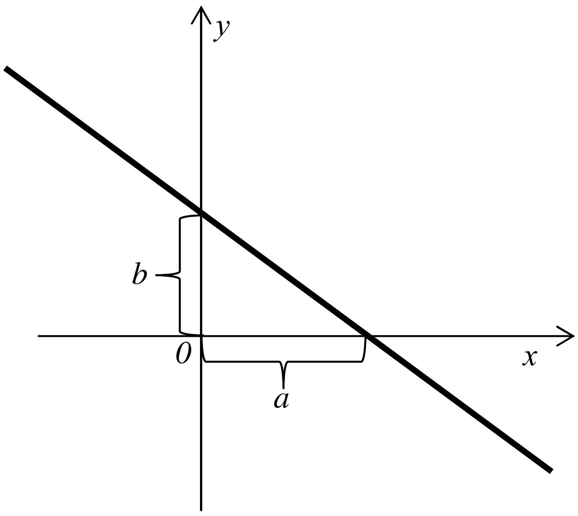
$$\frac{Ax}{-C} + \frac{By}{-C} = 1 \qquad \frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1$$

Позначимо $-\frac{C}{A} = a \qquad -\frac{C}{B} = b$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \tag{8}$$

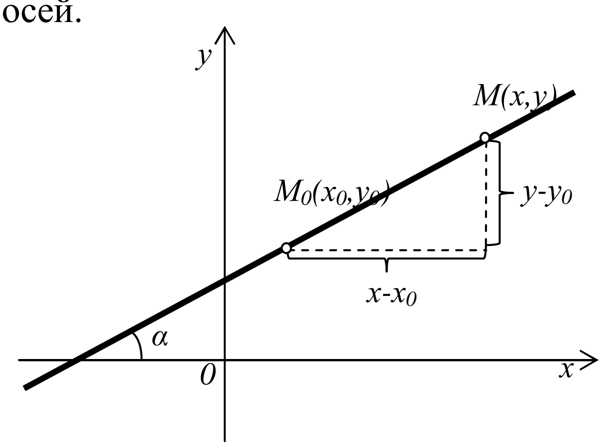
Рівняння (8) – рівняння прямої у відрізках.

a, b – величини відрізків, які відтинаються прямою від координатних осей.



6. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

a, b – величини відрізків, які відтинаються прямою від координатних осей.



$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = tg\alpha$$

Позначимо $K = tg\alpha$

тоді $y - y_0 = K(x - x_0)$ (9)

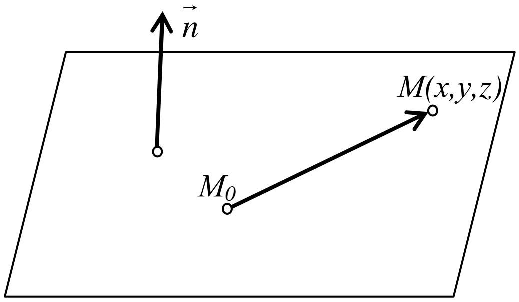
Рівняння (9) – рівняння прямої, яка проходить через задану точку і має заданий кутовий коефіцієнт.

Рівняння (9) можна записати в вигляді

$$y = Kx + b \tag{10}$$

3. Рівняння площини.

1. Нехай площина задана точкою $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ і нормальним вектором $\vec{n} = (A, B, C)$



Введемо точку $M(x,\ y,\ z)$

Знайдемо вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$

$\vec{n} \perp \overrightarrow{M_0M} \Rightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$

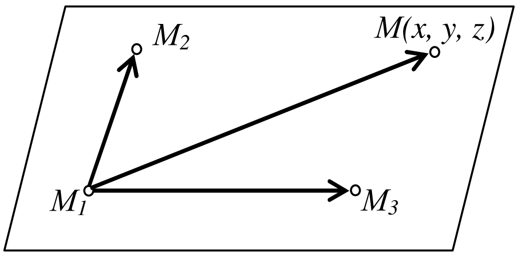
$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

Розкриємо дужки і приведемо подібні, отримаємо

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{11}$$

Рівняння (11) – це загальне рівняння площини.

2. Нехай площина задана трьома точками $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$, $M_3(x_3,\ y_3,\ z_3)$.



Вводимо точку $M(x,\ y,\ z)$ і маємо три вектори:

$\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1; y - y_1; z - z_1)$

$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$

$\overrightarrow{M_1M_3} = (x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1)$

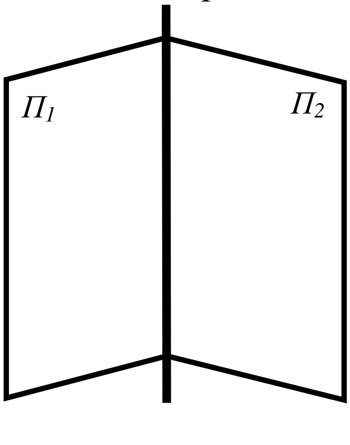
Ці вектори компланарні, тому (ф.3)

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \tag{12}$$

Обчисливши цей визначник, прийдемо до рівняння (11).

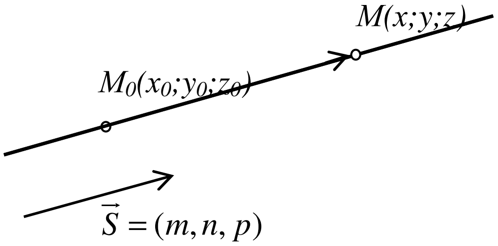
4. Рівняння прямої в просторі.

1. Загальне рівняння прямої, як лінія перетину двох площин



$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 & (\Pi_1) \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 & (\Pi_2) \end{cases} \tag{13}$$

2) Канонічне рівняння прямої в просторі:



$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p} \qquad (14)$$

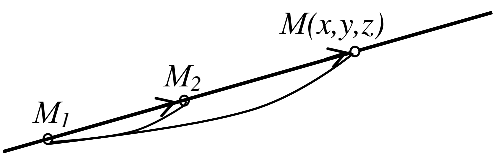
3) Параметричне рівняння прямої в просторі:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases} \qquad (15)$$

t - параметр

$t \in (-\infty; \infty)$

4) Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$



$\overrightarrow{M_1M}$ колінеарний $\overrightarrow{M_1M_2}$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \qquad (16)$$